T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS POTANSİYELLİ LİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Dinçer ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

EYLÜL – 2014
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Dinçer ÇELİK**'in **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "**Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Nümerik çözümü**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği.......... ile kabul edilmiştir.

05/09/2014

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan :	Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye :	Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2014 gün ve ..../...... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu çalışmada kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için I. ve II. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ele alınmıştır.

Tez çalışmam sırasında, yoğun çalışmalarından zaman ayırarak yardım ve desteklerini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum danışman hocam değerli bilim adamı Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen Matematik Anabilim Dalı öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV hocama ve Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin hazırlanma sürecinde manevi desteklerini her zaman hissettiğim eşime ve çocuklarıma teşekkür ederim.

Kars-2014 Dinçer ÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alındı. Bu çalışmada 1. Çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanıp bu probleme ait fark şeması oluşturuldu. 4.1 bölümünde kararlılık kestirimi elde edildi ve kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlandı.

Çalışmanın 3.2. bölümünde ise 2.çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanıp bu probleme ait fark şeması oluşturuldu. 4.2 bölümünde fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edildi. Bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirildi. Ayrıca son olarak 1. ve 2. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için algoritma verildi.

2014- 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Sınır Değer Problemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Fark Şeması, Kararlılık, Yakınsama.

ABSTRACT

In this thesis, initial limitation value problems for Complex Potential Lineer Schrödinger equation has been discussed. In this study, Type 1 initial limitation value problem has been described and a difference scheme for this problem has been formed. In section 4.1 a stability estimation has been obtained and by using this ,the estimation for difference scheme fault has been proved.

In section 3.2 of the study initial limitation value problem for Type 2 has been determined and a difference scheme for this problem has been formed. In section 4.2 resolution for difference scheme a stability estimation has been obtained. By using this estimation, the fault of difference scheme has been evaluated.At last, an algoritm for Type 1 and Type 2 initial limitation value problems numerical solutions was given.

2014-32 Pages

Keywords: Schrodinger equation, Boundary value problem, Finite difference method, Difference Scheme, Stability, Convergence.

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$l > 0$	verilen sayı
$T > 0$	verilen sayı
$a(x)$	ölçülebilir reel değerli fonksiyon
$x \in [0, l]$	bağımsız değişken
$t \in [0, T]$	bağımsız değişken
$\langle .,. \rangle$	iç çarpım işareti
$\tau > 0$	t değişkenine göre adım
$h > 0$	x değişkenine göre adım
$\delta_{\bar{t}} \Phi_{jk} = \dfrac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau}$	t'ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}} \Phi_{jk} = \dfrac{\Phi_{jk} - \Phi_{j-1k}}{h}$	x'e göre sol fark
$\delta_{x} \Phi_{jk} = \dfrac{\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk}}{h}$	x'e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk} = \dfrac{\Phi_{j+1k} - 2\Phi_{jk} + \Phi_{j-1k}}{h^2}$	x'e göre 2. Mertebeden fark

1. GİRİŞ

Kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri lineer olmayan optikte, çağdaş tekniğin ve fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Bu nedenle kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü gerek pratik açıdan gerekse teorik açıdan büyük önem taşır [4, 5, 7, 8, 13].

Söylemek gerekir ki durgun olmayan Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ilk önce [1-4, 6-8, 11, 12, 16-19] çalışmalarında incelenmiştir.

Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce [4, 15] çalışmasında incelenmiş ve söz konusu problemlerin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Bu sonuçlar Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin incelenmesinde önemli rol oynamıştır. Söylemek gerekir ki Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ilk kez [4, 15] çalışmalarında incelenmiştir. Kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü çok az incelendiğinden tez konusu günceldir ve konunun incelenmesi gerek teorik gerekse pratik anlamda önem taşımaktadır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1. bölümünde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmış bu probleme ait fark şeması oluşturulmuştur. Çalışmanın 3.2 bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmış bu probleme ait fark şeması elde edilmiştir. Bulgular bölümü iki alt (4.1, 4.2) bölümden oluşmaktadır. 4.1. bölümünde I. çeşit başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasının kararlılığı incelenmiş ve kararlılık kestirimi elde edilmiştir. Bu kestirimlerden yararlanarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. 4.2. Bölümünde ise II. çeşit başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şeması için 4.1 bölümünde alınan sonuçların aynısı elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,\ell)$ hilbert uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)\bar{v}(x)dx\,,$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}\;.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert Uzayı olup, elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}\;.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup, elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L\infty(0,\ell)} = vria\max_{x\in(0,\ell)}|u(x)|\;,\; x\in(0,\ell) = ess\sup$$

Tanım 2.4: $W_2^1(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$ Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,\ell)} = \int_0^\ell \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} \right] dx \, ,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1(0,\ell)}} \quad .$$

Burada $\overline{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$'in komplex eşleniğidir. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayı $W_2^1(0,\ell)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.5: $W_2^2(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x'e göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$'den olan fonksiyonların uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,\ell)} = \int_0^\ell \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\overline{v}(x)}{dx^2} \right] dx \, ,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^2(0,\ell)}} \quad .$$

$\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)$ uzayı $W_2^2(0,\ell)$'in alt uzayı olup elemanlarının kendisi 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.6: $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların t'ye göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, v \rangle_{w_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{v}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt \,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}} \;.$$

Tanım 2.7: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, v \rangle_{w_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \overline{v}(x,t)}{\partial x} \right] dxdt \,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}} \;.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan tarafında sıfıra eşittir.

Tanım 2.8: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlı $\psi, \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlayan $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{w_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt \,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}} \quad .$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgenin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.9: (Gronwall Lemması, Vasiliev F.P., 1981). $a \geq 0, b \geq 0$ olmak üzere $\varphi_j,\ j = \overline{0, N}$ sayıları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b\sum_{m=0}^{j} \varphi_m,\ j = \overline{0, N-1}$$

Şartlarını sağlıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j,\ j = \overline{0, N}$$

Eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b\sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m\ ,\ j = \overline{0, N-1}\ , 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a \quad ,$$

Şartları sağlanıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1},\ j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger Denklemi için 1.çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde Schrödinger denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer probleminin fark şeması oluşturulacak, fark şeması için kararlılık kestirimi elde edilecek ve sonlu fark yaklaşımı için yakınsama hızı gösterilecektir.

3.1.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması

Aşağıdaki şartlardan $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun $\Omega = (0,l)\times(0,T)$ bölgesinde bulunması problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + v_0(x,t)\psi + iv_1(x,\mathrm{t})\psi = f(x,t), (x,t)\in\Omega \quad (3.1.1.1)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x\in(0,l), \quad (3.1.1.2)$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t\in(0,T), \quad (3.1.1.3)$$

burada, $i=\sqrt{-1}$; $l>0$, $T>0$, $a_0>0$ verilen sayılar $a(x)$, $v_m(x,t)$, $m=0.1$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar.

$$0\le a(x)\le \mu_0, \ \overset{0}{\forall} x\in(0,l), \ \mu_0 = const > 0; \quad (3.1.1.4)$$

$$|v_0(x,t)|\le b_0, \ 0\le v_1(x,t)\le b_1$$

$$\left|\frac{\partial v_m\left(x,\mathrm{t}\right)}{\partial t}\right| \le d_m,\ m = 0.1; \tag{3.1.1.5}$$

$b_{1m} > 0,\ d_m > 0,\ m = 0.1$ verilen sayılar, $\varphi(x),\ f(x,t)$ fonksiyonları ise

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\,,\quad f \in W_2^{0,1}(\Omega)\,. \tag{3.1.1.6}$$

şartlarını sağlar.

Bilindiği üzere (3.1.1.1) - (3.1.1.3) problemi lineer Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir ve [4, 17] çalışmasında incelenmiştir.

Bu nedenle bu çalışmanın sonuçlarından yararlanarak söyleyebiliriz ki, (3.1.1.1)-(3.1.1.3) problemleri $C^0\left((0,T),\overset{0}{W}{}_2(0,l)\right)\cap C^1\left((0,T),L_2(0,l)\right)$ uzayından olan bir tek çözüme sahiptir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\left\|\psi(.,t\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_{2(0,1)}} \le c_1(\left\|\psi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|f\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}),$$

$$\forall t \in \left[0,T\right], \tag{3.1.1.7}$$

burada, $c_1 > 0$ - sabiti $\varphi,\ f$ 'den bağımsızdır.

(3.1.1.1) - (3.1.1.3) probleminin ayrıklaştırılmasını yapalım. Bu amaçla ilk önce $\bar{\Omega}$ bölgesini ağa dönüştürelim.

$$\left\{\left(x_j,t_k\right)\right\}:\ j = \overline{0,M},\ k = \overline{0,N},\qquad x_j = jh - h/2,\ j = \overline{1,M-1},$$

$$h = \frac{l}{M-1},\qquad t_k = k\tau,\qquad \tau = \frac{T}{N},\qquad x_0 = x_1 - h/2 = 0,$$

$$x_M = x_{M-1} + h/2 = l\,,$$ burada M, N verilen pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki gibi işaretleme yapalım :

$$\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau},\qquad \delta_{\bar{x}}\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{j-1k}}{h},$$

$$\delta_x \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk}}{h}, \qquad \delta_{\bar{x}} \Phi_{1k} = \delta_x \Phi_{0k} = \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h/2},$$

$$\delta_{\bar{x}} \Phi_{Mk} = \delta_x \Phi_{M-1k} = \frac{\Phi_{Mk} - \Phi_{M-1k}}{h/2}, \qquad \delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk} = \frac{\delta_x \Phi_{jk} - \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk}}{h},$$

Burada, Φ_{jk} fonksiyonu $\{(x_j, t_k)\}$ ' da tanımlanan ağ fonksiyonudur.

(3.1.1.1) denklemini ve başlangıç sınır değer şartlarının fark denklemleri ve şartları ile değiştirerek $\{(x_j, t_k)\}$ ağı üzerinde $\{\Phi_{jk}\}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartlardan bulunması problemi elde edilir:

$$i\delta_{\bar{t}} \Phi_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} \Phi_{ik} - a_j \Phi_{jk} + v_{0jk} \Phi_{jk} + i v_{1jk} \Phi_{jk} = f_{jk},$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{3.1.1.8}$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \tag{3.1.1.9}$$

$$\Phi_{0k} = \Phi_{MK} = 0, \; k = \overline{1, N} \tag{3.1.1.10}$$

Burada, a_j, v_{jk}, φ_j, f_{jk} ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır.

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \tag{3.1.1.11}$$

$$v_{mjk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v_m(x,t)dxdt, \quad \mathrm{m} = 0.1 \;\; j = \overline{1, M-1}, \;\; k = \overline{1, N}, \tag{3.1.1.12}$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \varphi(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \;\; \varphi_0 = \varphi_M = 0, \tag{3.1.1.13}$$

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} f(x,t)dxdt, \quad j = \overline{1, M-1}, \;\; k = \overline{1, N}. \tag{3.1.1.14}$$

3.2. Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger Denklemi İçin 2.çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü

Bir önceki bölümde lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin fark şeması için kararlılık ve hata kestirimlerini ispatladık, aynı sonuçları lineer Schrödinger denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer problemine nazaran da elde edebiliriz.

3.2.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması

Bu alt bölümde ele alınan Schrödinger denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+v_0(x,t)\psi+iv_1\left(x,t\right)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega \qquad (3.2.1.1\ )$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l), \qquad (3.2.1.2\ )$$

$$\frac{\partial\psi\left(0,t\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(l,t\right)}{\partial x}=0,t\in\left[0,T\right]. \qquad (3.2.1.3)$$

Burada, $i=\sqrt{-1}$; $l>0$, $T>0$, $a_0>0$ verilen sayılar $a\left(x\right)$, $v_m\left(x,t\right)$, $m=0.1$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar.

$$0<\mu_1\le a(x)\le\mu_3,\qquad \overset{0}{\forall}\, x\in\left(0,l\right),\ \ \mu_0,\mu_1=const; \qquad (3.2.1.4)$$

$$\left|v_0\left(x,t\right)\right|\le b_0,\ 0\le v_1\left(x,t\right)\le b_1$$

$$\left|\frac{\partial v_m\left(x,\mathrm{t}\right)}{\partial t}\right|\le d_m,\ m=0.1; \qquad (3.2.1.5)$$

$b_{1m}>0,\ d_m>0,\ m=0.1$ verilen sayılar, $\varphi(x),\ f(x,t)$ fonksiyonları ise

$$\varphi \in W_2^2\left(0,l\right) \ , \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0, \quad f \in W_2^{0,1}(\Omega). \tag{3.2.1.6}$$

şartlarını sağlar.

Bilindiği üzere (3.1.1.1) - (3.1.1.3) problemi lineer Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir ve [4, 17] çalışmasında incelenmiştir.

Bu nedenle bu çalışmanın sonuçlarından yararlanarak söyleyebiliriz ki, (3.1.1.1)-(3.1.1.3) problemleri $C^0\left((0,T),\overset{0}{W}{}_2(0,l)\right) \cap C^1\left((0,T),L_2(0,l)\right)$ uzayından olan bir tek çözüme sahiptir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\|\psi(.,t\|_{W_{2(0,l)}^2} + \left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_{2(0,1)}} \le c_1(\|\varphi\|_{W_{2(0,l)}^2} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}),$$

$$\forall t \in [0,T], \tag{3.2.1.7}$$

burada, $c_1 > 0$ - sabiti $\varphi,\ f$ ’den bağımsızdır.

(3.1.1.1) - (3.1.1.3) probleminin disretleştirilmesini yapalım. Bu amaçla ilk önce $\bar{\Omega}$ bölgesini ağa dönüştürelim.

$$\left\{\left(x_j,t_k\right)\right\}:\ j=\overline{0,M},\ k=\overline{0,N}, \qquad x_j = jh-h/2,\ j=\overline{1,M-1},$$

$$h=\frac{l}{M-1}, \qquad t_k = k\tau, \qquad \tau=\frac{T}{N}, \qquad x_0 = x_1 - h/2 = 0, \quad x_M =$$

$x_M = x_{M-1} + h/2 = l$, burada M,N verilen pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki gibi işaretleme yapalım :

$$\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}}{\tau}, \qquad \delta_{\bar{x}}\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk}-\Phi_{j-1k}}{h},$$

$$\delta_x\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{j+1k}-\Phi_{jk}}{h}, \qquad \delta_{\bar{x}}\Phi_{1k} = \delta_x\Phi_{0k} = \frac{\Phi_{1k}-\Phi_{0k}}{h/2},$$

$$\delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk} = \delta_x\Phi_{M-1k} = \frac{\Phi_{Mk}-\Phi_{M-1k}}{h/2}, \qquad \delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk} = \frac{\delta_x\Phi_{jk}-\delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}}{h},$$

Burada, Φ_{jk} fonksiyonu $\left\{\left(x_j, t_k\right)\right\}$ ’ da tanımlanan ağ fonksiyonudur.

(3.1.1.1) denklemini ve başlangıç sınır değer şartlarının fark denklemleri ve şartları ile değiştirerek $\left\{\left(x_j, t_k\right)\right\}$ ağı üzerinde $\left\{\Phi_{jk}\right\}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartlardan bulunması problemi elde edilir:

$$i\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk} + a_0\delta_{x\bar{x}}\Phi_{ik} - a_j\Phi_{jk} + v_{0jk}\Phi_{jk} + iv_{1jk}\Phi_{jk} = f_{jk},$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \qquad (3.2.1.8)$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \qquad (3.2.1.9)$$

$$\delta_{\bar{x}}\Phi_{1k} = \delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk} = 0, k = \overline{1, N} \qquad (3.2.1.10)$$

Burada, a_j, v_{jk}, φ_j, f_{jk} ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır.

$$a_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \qquad (3.2.1.11)$$

$$v_{mjk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_m(x,t)dxdt, \quad \mathrm{m} = 0.1 \;\; j = \overline{1, M-1}, \;\; k = \overline{1, N}, \qquad (3.2.1.12)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \;\; \varphi_1 = \varphi_0, \;\; \varphi_M = \varphi_{M-1}, \qquad (3.2.1.13)$$

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x,t)dxdt, \quad j = \overline{1, M-1}, \;\; k = \overline{1, N}. \qquad (3.2.1.14)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. 1.çeşit Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Fark Şemasının Çözümü İçin Kararlılık Kestirimi

(3.1.1.8) - (3.1.1.10) fark şemasının çözümü için bu durumda kararlılık kestirimi de denilebilen kestirimi aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

Teorem 4.1.1: Farz edelim ki $a(x),\ v_m(x,t),\ m=0.1,\ \varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları sağlansın. Bu takdirde (3.1.1.8) - (3.1.1.10) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2 \le c_2\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right),\quad \forall_m\in\{1,2,...,N\} \qquad (4.1.1.1)$$

burada $c_2>0$ sabit olup $h,\ \tau$ ve m den bağımsızdır.

İspat : $t=t_k$ katlarında

$$h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar t}\Phi_{jk}\bar\eta_{jk}-h\sum_{j=1}^{M}a_0\delta_{\bar x}\Phi_{jk}\delta_{\bar x}\bar\eta_{jk}\chi_j-$$

$$,\quad k=\overline{1,N} \qquad (4.1.1.2)$$

$$-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j-v_{0jk}\right)\Phi_{jk}\bar\eta_{jk}=h\sum_{j=1}^{M-1}f_{jk}\bar\eta_{jk}$$

toplam özdeşliği (3.1.1.8) - (3.1.1.10) fark şemasına denktir.

Burada, η_{jk} fonksiyonu $\{(x_j,t_k)\}$ ağında tanımlanmış olup $\eta_{0k}=\eta_{Mk}=0,\quad k=\overline{1,N}$ şartlarını sağlar. $\bar\eta_{jk}$ ise η_{jk} -nın kompleks eşleniğidir, $\chi_j=\begin{cases}1, & j=\overline{2,M-1}\\ \frac{1}{2}, & j=1,M\end{cases}$ dir,

Eğer (3.1.1.16) toplam özdeşliğinde $\bar\eta_{jk}$ ağ fonksiyonunun yerine $\tau\bar\Phi_{jk}$ alırsak elde edilen eşitsizlikten onun kompleks eşleniğini çıkartırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_t\Phi_{jk}\bar{\Phi}_{jk}+\delta_{\bar{t}}\bar{\Phi}_{jk}\Phi_{jk}\right)+2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}v_{1jk}\left|\Phi_{jk}\right|^2=2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(f_{jk}\bar{\Phi}_{jk}) \qquad (4.1.1.3)$$

$\forall\ k=1,2,...,N$. Aşağıdaki eşitliğin geçerli olması açıktır.

$$\tau\left(\delta_t\Phi_{jk}\bar{\Phi}_{jk}+\delta_{\bar{t}}\bar{\Phi}_{jk}\Phi_{jk}\right)=\left|\Phi_{jk}\right|^2-\left|\Phi_{jk-1}\right|^2+\left|\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}\right|^2 \qquad (4.1.1.4)$$

Bu formülü (4.1.1.3) de dikkate alıp, k üzerinden $k=1$ den $k=N$'a kadar toplayıp (3.1.1.8) ve (3.1.1.9) şartlarını dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}\right|^2\le$$

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{j}\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\Phi_{jk}\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

$v_1(x,t)\ge 0$ şartını dikkate alıp bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci toplamın m-inci terimini ayırıp ε- Cauchy ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliklerini uygularsak elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}\right|^2\le$$

$$\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2+\frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}\right|^2+$$

$$+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}.$$

$\varepsilon=\dfrac{1}{2\tau}$ seçerek bu eşitsizliklerden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}\right|^2\le$$

$$\le 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{j}\right|^2+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}\right|^2+$$

$$2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\} \qquad (4.1.1.5)$$

Burada sol taraftaki ikinci terimin negatif olmadığını dikkate alarak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + 2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 +$$

$$+2\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}\right|^2, \quad \forall m\in\{1,2,...,N\}.$$

eşitsizliğini elde ederiz.

[8, sayfa 110]' dan bildiğimiz Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2 \le c_3\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right), \quad \forall m\in\{1,2,...,N\} \qquad (4.1.1.6)$$

Bu kestirimi (4.1.1.5) da dikkate alırsak, bu taktirde aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^2 + h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}-\Phi_{jk-1}\right|^2 \le$$

$$(4.1.1.7)$$

$$c_4\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right), \qquad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

Buradan da teoremin geçerli olduğu çıkar. Teorem 6.1 ispatlandı.

Şimdi (3.1.1.8) - (3.1.1.10) fark şemasının hatasını değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.1.1) - (3.1.1.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün aşağıdaki ortalamalarına bakalım:

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)\,dxdt, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,N}, \quad \psi_{j0}=\varphi_j,$$

$$j=\overline{0,M}, \quad \psi_{0k}=\psi_{Mk}=0, k=\overline{1,N}. \qquad (4.1.1.8)$$

$z_{jk}=\Phi_{jk}-\psi_{jk}$ olsun. z_{jk} ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{t}} z_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} z_{jk} - a_j z_{jk} + v_{0jk} z_{jk} + i v_{ijk} z_{jk} = F_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1},$$

$$k = \overline{1, N}, \tag{4.1.1.9}$$

$$z_{j0} = 0, \quad j = \overline{0, M}, \quad z_{0k} = z_{Mk} = 0, k = k = \overline{1, N} \tag{4.1.1.10}$$

Burada F_{jk} ağ fonksiyonu olup aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$F_{jk} = f_{jk} - \left(i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} - a_j \psi_{jk} + v_{0jk} \psi_{jk} + i v_{1jk} \psi_{jk} \right),$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{4.1.1.11}$$

4.1.2. Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim

Bu alt bölümde fark şemalarının hatası için kestirimleri elde edeceğiz.

Teorem 4.1.2.1 Farz edelim ki, $a(x)$, $v_m(x,t)$, $m = 0.1$, $\varphi(x)$ ve f fonksiyonları (3.1.1.4) - (3.1.1.6) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (4.1.1.9) - (4.1.1.10) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| z_{jm} \right|^2 \le c_{10} \beta_{\tau h}, \quad \forall_m \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.1.2.1}$$

burada $c_{10} > 0$ sabiti τ, h ve m' den bağımsızlar $\beta_{\tau h} > 0$; $\tau \to 0$, $h \to 0$. için $\beta_{\tau h} \to 0$ dır.

İspat: (4.1.1.9) - (4.1.1.10) sistemlerinden görüldüğü üzere bu sistem $t = t_k$: katlarında herhangi $k \in \{1, 2, ..., N\}$ ve herhangi η_{jk}, ağ fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğe denktir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}} z_{jk} \bar{\eta}_{jk} - h \sum_{j=1}^{M} \delta_{\bar{x}} - z_{jk} \delta_{\bar{x}} \bar{\eta}_{jk} \chi_j -$$

(4.1.2.2)

$$-\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j - v_{0jk} - iv_{1jk}\right)z_{jk}\overline{\eta}_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1}F_{jk}\overline{\eta}_{jk}$$

burada η_{jk} fonksiyon $\{(x_j, t_k)\}$ ağında tanımlanıp $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0,\ k = \overline{1,N}$ şartlarını sağlar.

Bu özdeşlikle $\overline{\eta}_{jk}$ nın yerine $\tau\overline{z}_{jk}$ alıp elde edilen eşitsizlikten onun kompleks eşleniğini çıkartalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|z_{jk}\right|^2 - \left|z_{jk-1}\right|^2 + \left|z_{jk} - z_{jk-1}\right|^2\right) + 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}v_{1jk}\left|z_{jk}\right|^2 = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(F_{jk}\overline{z}_{jk}),$$

$$k = 1, 2, ..., N.$$

(3.1.1.18) biçiminde olan formülü z_{jk} için kullanırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|z_{jk}\right|^2 - \left|z_{jk-1}\right|^2 + \left|z_{jk} - z_{jk-1}\right|^2\right) + 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}v_{1jk}\left|z_{jk}\right|^2 = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(F_{jk}\overline{z}_{jk}),$$

$$k = 1, 2, ..., N.$$

Bu eşitliğin den k üzerinden $k = 1$, den $k = m \le N$ -e kadar toplayıp ve $z_{j0} = 0$, $j = \overline{0,M}$, $v_{1jk} \ge 0$ şartlarından yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jk}\right|^2 \le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|z_{jk}\right|,$$

Bu eşitsizlikten ε- $v_{1jk} \ge 0$ Cauchy ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliklerinin yardımıyla buluruz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}\right|^2 \le 2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jk}\right|^2 + 2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2,\ \ \forall_m \in \{1, 2, ..., N\}.$$

Burada Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}\right|^2 \le c_{11}\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2,\ \ \forall_m \in \{1, 2, ..., N\}. \qquad (4.1.2.3)$$

Şimdi F_{jk} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. F_{jk}-nın formülünde yer alan f_{jk} fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - a(x)\psi + v(x,t)\psi + iv_1\left(x,t\right)\psi \right)dxdt,$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{4.1.2.4}$$

Bu formülü dikkate alarak F_{jk} ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$F_{jk} = F_{jk}^1 + F_{jk}^2 + F_{jk}^3 + F_{jk}^4, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{4.1.2.5}$$

burada

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}, \tag{4.1.2.6}$$

$$F_{jk}^2 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}, \tag{4.1.2.7}$$

$$F_{jk}^3 = -\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)dxdt + a_j\psi_{jk}, \tag{4.1.2.8}$$

$$F_{jk}^4 = +\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x,t)\psi dxdt - v_{jk}\psi_{jk}, \tag{4.1.2.9}$$

$$F_{jk}^5 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-hk}^{x_j+hk} iv_1(x,t) + \left(x,t\right)dxdt - iv_{1jk}\psi_{jk}. \tag{4.1.2.10}$$

Bu terimlerden her birine ayrı ayrı bakalım.

ψ_{jk} için (4.1.1.8), $F^1{}_{jk}$, $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{2, N}$ ağ fonksiyonu için (4.1.2.6) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk} = \frac{i}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt -$$

$$-i\frac{1}{\tau^2 h}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt - \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt\right] =$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t-\tau}^{t}\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt=$$

$$=\frac{i}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial\theta}\right)d\theta dxdt\,,$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{2,N}\,.$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak sonuncu eşitlikten elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^1\right|^2\le\frac{1}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial\theta}\right|^2 d\theta dxdt\,, \tag{4.1.2.11}$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{2,N}\,.$$

$F_{j1}^1,\quad j=\overline{1,M-1}$ için buluruz:

$$F_{j1}^1=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}(\varphi_{j1}-\varphi_{j0})=$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau h}\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt-\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t_0)dx\right)=$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt\,.$$

Bu eşitlikten aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left|F_{j1}^1\right|^2=\frac{4}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\,,\quad j=\overline{1,M-1}. \tag{4.1.2.12}$$

$F_{jk}^2,\quad j=\overline{2,M-2},\quad k=\overline{1,N}$ için aynı biçimde davranarak buluruz:

$$F_{jk}^2=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}=$$

$$=\frac{1}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\eta+\xi,t)}{\partial x^2}\right)d\eta d\xi dxdt\,,$$

$$j=\overline{2,M-2}\,,\quad k=\overline{1,N}\,.$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak buradan aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu buluruz:

$$\left|F_{jk}^2\right|^2\le\frac{a_0^2}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_0^h\int_{-h}^0\left|\frac{\partial^2\psi(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(\mathrm{x}+\eta+\xi,\mathrm{t})}{\partial x^2}\right|d\eta d\xi dxdt\,,$$

$$j=\overline{2,M-2}\,,\quad k=\overline{1,N}\,.$$

$F_{1k}^2\,,\quad k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonu için elde ederiz:

$$F_{1k}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h}(\delta_{\bar{x}}\psi_{2k}-\delta_{\bar{x}}\psi_{1k})=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{\partial^2\psi(\mathrm{x}_1+\mathrm{h}/2,\mathrm{t})}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_1-\mathrm{h}/2,\mathrm{t})}{\partial x}\right)dt-$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_x^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial\psi(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dx-2\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\frac{\partial\psi(\xi,\mathrm{t})}{\partial\xi}d\xi dx\right]dt\right\}=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_x^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi(\eta,\mathrm{t})}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt-$$

$$-\frac{2a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\eta,\mathrm{t})}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt$$

Buradan da Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla buluruz:

$$\left|F_{1k}^2\right|^2\le\frac{16a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right|^2dxdt\,,\quad k=\overline{1,N} \tag{4.1.2.13}$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine aynı biçimde $F_{M-1k}^2\,,\quad k=\overline{1,N}$ için aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left|F_{M-1k}^2\right|^2 \le \frac{16a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|dxdt\,,\quad k=\overline{1,N} \tag{4.1.2.14}$$

Şimdi F_{jk}^3, $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.1.1.33) formülünün yardımıyla buluruz:

$$F_{jk}^3 = a_j\psi_{jk} - \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\psi(x,t)\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(a_j\psi_{jk} - a(x)\psi(x,t)\right)dxdt =$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(a_j - a(x)\right)\psi_{jk}\,dxdt + \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,t)\right)dxdt\,,$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}\,.$$

a_j, $j=\overline{1,M-1}$ ağ fonksiyonları $a(x)$ fonksiyonunu $\left(x_j-h/2, x_j+h/2\right)$, üzerinden ortalaması olduğundan bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim sıfıra eşit olur.

Bu nedenle F_{jk}^3 için buluruz:

$$F_{jk}^3 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,t)\right)dxdt\,,\quad j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N} \tag{4.1.2.15}$$

Bu formülün sağ tarafını değerlendirmek için $\psi_{jk}-\psi(x,t)$ farkını önce değerlendirelim. Bu farkı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi_{jk}-\psi(x,t) = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\psi(\xi,\theta)-\psi(x,t)\right)d\xi d\theta =$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_x^\xi \frac{\partial\psi(\eta,\theta)}{\partial\eta}d\eta + \int_t^\theta \frac{\partial\psi(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]d\xi d\theta\,, \tag{4.1.2.16}$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}$$

Bu eşitliği (3.1.1.41) formülünde dikkate alırsak, oradan buluruz:

$$\left|F_{jk}^{3}\right|^{2} \le \frac{2\mu_0^2 h}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt +$$

$$+\frac{2\mu_0^2 \tau}{h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt\,, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,N}\,. \tag{4.1.2.17}$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine denk olarak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left|F_{jk}^{4}\right|^{2} \le \frac{2b_0^2 h}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt +$$

$$+\frac{2b_0^2 \tau}{h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt\,, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,N}\,. \tag{4.1.2.18}$$

$$\left|F_{jk}^{5}\right|^{2} \le \frac{2d_0^2 h}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt +$$

$$+\frac{2d_0^2 \tau}{h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt$$

[54, sayfa 61-62] den bildiğimiz Fubini teoremine göre (4.1.2.11) dan buluruz:

$$h\tau \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{jk}^{1}\right|^{2} \le \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial x} \right|^2 dxdt \right) d\theta\,. \tag{4.1.2.19}$$

Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. Orta süreklilik teoremine göre öyle bir $\delta > 0$ bulunur ki $|\theta| \le \tau < \delta$ olduğunda aşağıdaki şart sağlanır.

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial x} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} < \varepsilon\,,$$

Bu nedenle böyle τ lar için (4.1.2.19) ten elde ederiz:

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{1} \right|^{2} \leq \omega_{\tau}^{0}, \qquad (4.1.2.20)$$

burada, $\omega_{\tau}^{0} > 0$; $\tau \to 0$ için $\omega_{\tau}^{0} \to 0$ olur. (4.1.2.12) den (3.1.1.7) ye göre elde ederiz:

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{j1}^{1} \right|^{2} \leq 4 \int_{0}^{\tau} \left\| \frac{\partial \psi(,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,\ell)} dt \leq c_{12}\tau, \qquad (4.1.2.21)$$

Bu taktirde (4.1.2.20) ve (4.1.2.21) kestirimlerinin yardımıyla buluruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{1} \right|^{2} \leq \omega_{\tau}^{0} + c_{12}\tau. \qquad (4.1.2.22)$$

(4.1.2.20) eşitsizliğinin elde edilmesine denk olarak (4.1.2.38) den buluruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-2} \left| F_{jk}^{2} \right|^{2} \leq \omega_{h}^{1}, \qquad (4.1.2.23)$$

Burada $\omega_{h}^{1} > 0$, $h \to 0$ için $\omega_{h}^{1} \to 0$ olur. (4.1.2.13) ve (4.1.2.14) tan buluruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{jk}^{2} \right|^{2} \leq 16 a_0^2 \int_{0}^{h} \left\| \frac{\partial^2 \psi(x,\cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^{2} dx, \qquad (4.1.2.24)$$

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M-1k}^{2} \right|^{2} \leq 16 a_0^2 \int_{l-h}^{l} \left\| \frac{\partial^2 \psi(x,\cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^{2} dx. \qquad (4.1.2.25)$$

Buradan integralin mutlak sürekliliğine göre $h \to 0$ için (4.1.2.24) ve (4.1.2.25) in sağ tarafı sıfıra yaklaşır yani:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{1k}^{2} \right|^{2} + \tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M-1k}^{2} \right|^{2} \leq \omega_{h}^{2}, \qquad (4.1.2.26)$$

burada $\omega_{h}^{2} > 0$, $h \to 0$ için $\omega_{h}^{2} \to 0$ olur. Bu taktirde (4.1.2.23), (4.1.2.26) eşitsizliklerinin yardımıyla buluruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{2} \right|^{2} \leq \overset{0}{\omega}_{h}, \qquad (4.1.2.27)$$

burada $\overset{0}{\omega}_{h} = \omega_{h}^{1} + \omega_{h}^{2}$. Nihayet (3.1.1.7) kestiriminin yardımıyla (4.1.2.17), (4.1.2.18) den elde ederiz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{3}\right|^{2}\le c_{13}\left(\tau^{2}+h^{2}\right), \tag{4.1.2.28}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{4}\right|^{2}\le c_{14}\left(\tau^{2}+h^{2}\right), \tag{4.1.2.29}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{5}\right|^{2}\le c_{15}\left(\tau^{2}+h^{2}\right)$$

Böylelikle (4.1.2.22), (4.1.2.27) - (4.1.2.29) eşitsizliklerini ve (4.1.2.5) formüllerini kullanarak (4.1.2.3) den aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jk}\right|^{2}\le c_{15}\left(\omega_{\tau}^{0}+\tilde{\omega}_{\wedge h}^{0}+\tau+\tau^{2}+h^{2}\right). \tag{4.1.2.30}$$

Burada $\beta_{\tau h}=\omega_{\tau}^{0}+\tilde{\omega}_{h}^{0}+\tau+\tau^{2}+h^{2}$ işaretlersek $c_{10}=c_{15}$ için teoremin hükmünü elde ederiz. Teorem ispatlandı.

4.2.1. 2.çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Fark Şemasının Kararlılık ve Hata Kestirimleri

Bu alt bölümde (3.2.1.8) – (3.2.1.10) fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edeceğiz ve bu kestirimi kullanarak fark şemasının hatasını değerlendireceğiz. Bu amaçla ilk önce fark şemasının kararlılık kestirimini gösteren hükmü verelim.

Teorem 4.2.1.1.: Farz edelim ki $a(x),\ v_m(x,t),\ m=0.1,\ \varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları sağlansın. Bu takdirde (3.1.1.8) - (3.1.1.10) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}\right|^{2}\le\ c_{2}\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\varphi_{j}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^{2}\right),\quad \forall_{m}\in\{1,2,...,N\} \tag{4.2.1.1}$$

burada $c_2>0$ sabit olup $h,\ \tau$ ve m den bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı teorem 4.1.1' in ispatı ile aynı şekilde olacaktır.

(3.2.1.8) - (3.2.1.10) fark şemasının hatası için kestirim elde etmekten dolayı (3.2.1.1) - (3.2.1.3) probleminin aşağıdaki gibi ortalamalarına bakalım.

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{x_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x,t)\,dxdt, \ j = \overline{1, M-1}, \ k = \overline{1, N},$$

$$\psi_{j0} = \varphi_j, \ j = \overline{0, M}, \ \psi_{0k} = \psi_{1k}, \ \psi_{Mk} = \psi_{M-1k}, \ k = \overline{1, N}.$$

$z_{jk} = \Phi_{jk} - \psi_{jk}$ olsun. z_{jk} ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{t}} z_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} z_{jk} - a_j z_{jk} + v_{0jk} z_{jk} + i v_{ijk} z_{jk} = F_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1},$$

$$k = \overline{1, N}, \tag{4.2.1.2}$$

$$z_{j0} = 0, \quad j = \overline{0, M}, \quad \delta_{\bar{x}} z_{1k} = \delta_{\bar{x}} z_{Mk} = 0, \ k = \overline{1, N}. \tag{4.2.1.3}$$

Burada F_{jk} ağ fonksiyonu olup aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$F_{jk} = f_{jk} - \left(i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} - a_j \psi_{jk} + v_{0jk} \psi_{jk} + i v_{1jk} \psi_{jk} \right),$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{4.2.1.4}$$

Teorem 4.2.2.1 Farz edelim ki; $a(x)$, $v_m(x,t)$, $m = 0.1$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (3.2.1.4) - (3.2.1.6) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (4.2.1.2) - (4.2.1.3) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| z_{jm} \right|^2 \le c_{10} \beta_{\tau h}, \quad \forall_m \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.2.2.1}$$

burada $c_{10} > 0$ sabiti τ, h ve m' den bağımsızlar $\beta_{\tau h} > 0$; $\tau \to 0$, $h \to 0$. için $\beta_{\tau h} \to 0$ dır.

4.2.3. Nümerik Çözüm Algoritması

Bir önceki alt bölümde incelediğimiz 1. ve 2. çeşit sınır değer problemlerinin nümerik çözüm algoritmasını elde etmek için incelediğimiz her iki problemi de içeren aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+v_0(x,t)\psi+iv_1(x,\mathrm{t})\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega \quad (4.2.3.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x), \quad x\in(0,\ell) \quad (4.2.3.2)$$

$$\alpha_0\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}+\beta_0\psi(0,t)=y_0(t), \ \ t\in(0,T), \quad (4.2.3.3)$$

$$\alpha_1\frac{\partial\psi(\ell,t)}{\partial x}+\beta_1\psi(\ell,t)=y_1(t), \ \ t\in(0,T). \quad (4.2.3.4)$$

Burada $\ell>0,\ T>0,\ L>0,\ a_0>0,\ \alpha_0>0,\ \alpha_1\geq 0,\ \beta_0,\beta_1\geq 0$ verilen sayılar;

$a(x),\ v_0(x,t),v_1(x,t),\ \varphi_0(x),\ f(x,t),\ y_0(t),\ y_1(t)$ verilen fonksiyonlardır.

Şimdi bu problemin nümerik çözümünü yapmak için çözüm algoritması oluşturmamız gerekir. Bu amaçla aşağıdaki gibi fark şeması oluşturalım.

Fark şeması için $\bar{\Omega}=[0,\ell]\times[0,T]$ bölgelerini aşağıdaki gibi ağa dönüştürelim.

$$\left\{(x_j,t_k): x_j=jh,\ j=\overline{0,M},\ t_k=k\tau,\ k=\overline{0,N}\right\}$$

Burada $M>0,\ N>0,$ verilen tamsayılar, h adımı x'e, τ adımı t'ye göre seçilen adımlardır. $\psi(x_j,t_k)$ değerlerine karşılık gelen ağ fonksiyonunu Φ_{jk} ile gösterelim. Bu durumda

$$i\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk}+a_0\delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk}+ia_{1j}\delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}-a_j\Phi_{jk}+v_{0jk}\Phi_{jk}+iv_{1jk}\Phi_{jk}=f_{jk}, \quad (4.2.3.5)$$

$$j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,\mathrm{N}}$$

$$\Phi_{j0}=\varphi_j, \quad j=\overline{0,M}, \quad (4.2.3.6)$$

$$\alpha_0\delta_{\bar{x}}\Phi_{1k}+\beta_0\Phi_{1k}=y_{0k}, \quad k=\overline{1,N}, \quad (4.2.3.7)$$

$$\alpha_1 \delta_{\bar{x}} \Phi_{Mk} + \beta_1 \Phi_{Mk} = y_{1k}, \quad k = \overline{1, N} \quad . \tag{4.2.3.8}$$

sistemi elde edilir.

Bu cebirsel denklemler sisteminin çözümünü bulmak için kovma yöntemi uygulayacağız. Bu amaçla (4.2.3.5) – (4.2.3.8) şartlarını açık biçimde yazıp sistemi üç köşegenli sisteme dönüştürmeye çalışalım. Bu durumda $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, \mathrm{N}}$ için

$$i \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau} + a_0 \frac{\Phi_{j+1k} - 2\Phi_{jk} + \Phi_{j-1k}}{h^2} + i a_1 \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\theta} -$$

$$- a_j \Phi_{jk} + v_{0jk} \Phi_{jk} + i v_{1jk} \Phi_{jk} = f_{jk}$$

bu eşitliğin her iki tarafını τ ile çarparsak,

$$i\Phi_{jk} - i\Phi_{jk-1} + a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j+1k} - 2a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{jk} + a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j-1k} +$$

$$+ i a_1 \frac{\tau}{\theta} \Phi_{jk} - i a_1 \frac{\tau}{\theta} \Phi_{jk-1} -$$

$$- \tau a_j \Phi_{jk} + \tau v_{0jk} \Phi_{jk} + \tau i v_{1jk} \Phi_{jk} = \tau f_{jk}$$

elde edilir. Burada uygun terimleri bir araya getirirsek

$$a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j-1k} + \left[i + 2a_0 \frac{\tau}{h^2} - \tau a_j + v_{0jk} + i v_{1jk} \right] \Phi_{jk} +$$

$$a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j+1k} = \tau f_{jk} + i\Phi_{jk-1}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki gibi gösterimleri yaparsak

$$A_{jk} = a_1 \frac{\tau}{h^2} \quad , \quad B_{jk} = a_1 \frac{\tau}{h^2} \quad , \quad C_{jk} = -i + 2a_0 \frac{\tau}{h^2} + \tau a_j - v_{0jk} - i v_{1jk}$$

$$F_{jk} = -\tau f_{jk} - i\Phi_{jk-1}$$

bu taktirde sonuncu eşitlikten $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, N}$ için

$$A_{jk}\Phi_{j-1k} - C_{jk}\Phi_{jk} + B_{jk}\Phi_{j+1k} = -F_{jk,} \tag{4.2.3.9}$$

üç köşegenli cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

Bu sistemin çözümü için kovma algoritmasını uygulayalım. Bu amaçla ilk önce bu sistem için sınır değer şartlarını belirleyelim. (4.2.3.3) ve (4.2.3.4) sınır değer şartlarına karşılık gelen sınır değer şartını elde etmek için aşağıdaki işlemleri yapalım:

$$\alpha_0 \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h} + \beta_0 \Phi_{1k} = y_{0k},$$

$$\alpha_0 \Phi_{1k} - \alpha_0 \Phi_{0k} + \beta_0 h \Phi_{1k} = h y_{0k}$$

$$\alpha_0 \Phi_{0k} = \alpha_0 \Phi_{1k} + \beta_0 h \Phi_{1k} - h y_{0k}$$

$$\Phi_{0k} = \left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0} \right) \Phi_{1k} - \frac{h y_{0k}}{\alpha_0}$$

$$\chi_{1k} = \frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0}, \ \mu_{1k} = -\frac{h y_{0k}}{\alpha_0}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_{Mk} - \Phi_{M-1k}}{h} + \beta_1 \Phi_{Mk} = y_{1k,}$$

$$\Phi_{Mk}\left(\alpha_1 + \beta_1 h\right) = \alpha_1 \Phi_{M-1k} + h y_{1k}$$

$$\Phi_{Mk} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1 h} \Phi_{M-1k} + \frac{h y_{1k}}{\alpha_1 - \beta_1 h}$$

$$\chi_{2k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1 h}, \ \mu_{2k} = \frac{h y_{1k}}{\alpha_1 + \beta_1 h}$$

Böylece (4.2.3.9) için aşağıdaki sınır değer şartlarını elde ederiz.

$$\Phi_{0k} = \chi_{1k}\Phi_{1k} + \mu_{1k} \tag{4.2.3.10}$$

$$\Phi_{Mk} = \chi_{2k}\Phi_{M-1k} + \mu_{2k} \tag{4.2.3.11}$$

Böylece (4.2.3.10) – (4.2.3.11) sistemi için kovma yöntemini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\Phi_{jk} = \alpha_{j+1k}\Phi_{j+1k} + \beta_{j+1k} \ , \quad j = \overline{1, M-1}, \ k = \overline{1, N} \ , \qquad (4.2.3.12)$$

Burada α_{j+1k} ve β_{j+1k} kovma katsayıları olup aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür.

$$\alpha_{j+1k} = \frac{B_{jk}}{C_{jk} - \alpha_{jk} A_{jk}}, \quad j = \overline{1, M-1}, \ k = \overline{1, N} \ , \qquad (4.2.3.13)$$

$$\beta_{j+1k} = \frac{\alpha_{jk} B_{jk} + F_{jk}}{C_{jk} - \alpha_{jk} A_{jk}}, \quad j = \overline{1, M-1}, \ k = \overline{1, N} \ , \qquad (4.2.3.14)$$

$$\alpha_{1k} = \chi_{1k} \quad , \quad \beta_{jk} = \mu_{1k} \quad , \qquad (4.2.3.15)$$

(4.2.3.12) formülü ile sistemin çözümünü bulmak için,

$$\Phi_{Mk} = \frac{\chi_{2k}\beta_{Mk} + \mu_{2k}}{1 - \chi_{2k}\alpha_{Mk}} \ ,$$

Şartını kullanarak sağdan sola doğru tüm Φ_{jk}'leri bulabiliriz. Böylece (4.2.3.1) – (4.2.3.4) probleminin nümerik çözümünü bulmak için kovma yönteminin algoritmasını açıkladık.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan başlangıç sınır değer problemleri konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşır.

Bu tezde ilk kez Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözüm algoritması inşa edilmiş ve bu amaçla kovma yöntemi uygulanmıştır. Bu tezde elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Yıldırım Aksoy, N., "Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı", Doktora Tezi, Erzurum, 150 s, 2009.

[2] Ibrahimov N.S., "The convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics", Scientific Proceedings of the Azerbaijan SSR. tehn. Univ. Ser. Basic Sciences, № 4, p.54-60. 2010, (Rusça).

[3] Iskenderov A.D., Yagubov G.Y., Ibrahimov N.S., "About an estimate of convergence of difference approximations by the functional in the identification problem for the non stationary equation of quasi optics", Abstracts of the XIX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2012), pp.118-120. Mukachevo, Ukraine, April 23-27 2012.

[4] İskenderov A.D.,Yagubov G.Y**.,** Musayeva M.A**.,** **"** Kuantum potansiyellerinin İdentifikasyonu", Çaşıoğlu Yayınevi, 552 s. Bakü, 2012, (Rusça).

[5] Landau, L.D. , Lipschitz, E.M., Kuantum Mekaniği, Cilt 3, 702 s., Moskova, 1963 , (Rusça)

[6] Mahmudov, N.M., "Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü", Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. 1997, (Rusça).

[7] Potapov M.M., Razgulin A.V., Şameeva T.Y., " Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu", Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(1), 8-13. 1987, (Rusça).

[8] Razgulin A.V., "Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları", Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik" , 15(2), 28-33. 1998, (Rusça).

[9] Samarskiy, A.A., Andreev, VB., "Eliptik Denklem için Fark Metotları ", Moskova, Nauka, 1976, (Rusça).

[10] Samarskiy, A.A., Lazarov, R.D., Makarov, V.L., "Genellesmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler için Fark Şemaları", s.296, Moskova, Vıssaya Skola, 1987,(Rusça).

[11] Senger, O., "Lineer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, 53 s. Kars, 2006.

[12] Silla, N., " Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal

Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü", Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, s. 165, Bakü, 1991, (Rusça).

[13] Vorontsov M.A., Şmalqauzen V.I. "Adaptiv Optiğin Prensipleri", Moskova, Nauka, 1985, (Rusça).

[14] Yagub G., Ibrahimov N.S., Yildirim Aksoy, N., Deveci O., "The solution with difference method of on optimal control problem for nonstationary quasi-optics equation", Abstracts of the XXI International Conference Problems of Decision Making under, Uncertainties (PDMU-2013), Skhidnytsia, Ukraine, pp.68-71. May 13-17 , 2013.

[15] Yagubov, G.Ya., "Kuazi Lineer Schrodinger Denklemi'nin Katsayısı ile Optimal Kontrol", Bilimler Doktoru Tezi, 318 s., Kiev, 1994,(Rusça).

[16] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., " Finite-Difference method solution of variation formulation of an Inverse problem for nonlinear Schrodinger equation" Izv. AN Azerb.-Ser.Physic.tech.matem.nauk, vol.16, No 1-2, pp. 46-51, 1995, (Rusça).

[17] Yetiskin, H., "Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Farklar Yaklaşımı", Doktora Tezi, ‚Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 92 s. 2005. 43

[18] Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., "On an optimal control problem", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 88, pp. 275–287. 1997.

[19] VARGÜN, M., "Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümü" Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 40 s. 2013.

[20] DEMİRCİ, Z., "Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü" Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 44 s. 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Dinçer ÇELİK
Doğum Yeri : KARS
Doğum Tarihi: 10.06.1973
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dil :İngilizce, Rusça

Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise : Alpaslan Lisesi Kars (1989-1991)
Lisans : Azerbaycan Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği (1992-1997)
Lisans Denklik: İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği (1999-2002)
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2012-2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Kars Esnaf Kredi ve Kefalet Kooperatifi (2002-2004)
Kafkas Üniversitesi Bilgi İşlem Daire Başkanlığı (2004 - …)