T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARK DENKLEMLERİNİN İKTİSADİ UYGULAMALARI

Ömer ATALAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

OCAK 2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ömer ATALAY'ın Prof. Dr. Gabil YAGUB'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Fark Denklemlerinin İktisadi Uygulamaları" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

20 /01 /2015.

Adı ve Soyadı		imza
Başkan :	Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye :	Yrd.Doç.Dr. Nigar Y. AKSOY	N. Yıldırım
Üye :	Yrd.Doç.Dr. Cavit YEŞİLYURT	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2015 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Prof.Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Başkanı değerli hocam Prof. Dr. Gabil Yagub'a, çalışmalarımda yol gösterici olan kıymetli hocalarım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Nigar Y. AKSOY'a, Kafkas Üniversitesi İİBF İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler ABD öğretim üyeleri Yrd. Doç. Dr. Cavit YEŞİLYURT ve Doç. Dr. Ötüken SENGER'e ayrıca tezim boyunca manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan aileme çok teşekkür ederim.

KARS-2015 Ömer ATALAY

İÇİNDEKİLER

ÖZET

FARK DENKLEMLERİNİN İKTİSADİ UYGULAMARI

Bu çalışmada, sabit katsayılı doğrusal fark denklemleri ele alınmış; bu fark denklemleri ile ilgili ekonomik modellerin çözüm metotları gösterilmiştir. Fark denklemlerinin temel kavramları ve ekonomide kullanılan temel tanımlar verilmiştir. Birinci mertebeden, ikinci mertebeden ve yüksek mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin tanımları ve çözüm metotları örneklerle gösterilmiştir. İktisadi modeller incelenmiş ve bunların çözümleri gösterilmiştir. Bu çözümlere sayısal örnekler uygulanmıştır. Fark denklemlerinin ekonomik uygulamalarda önemli bir yere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

2015, 97

Anahtar kelimeler: sabit katsayılı doğrusal fark denklemleri, sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin çözüm metotları, sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin iktisadi uygulamaları.

ABSTRACT

ECONOMIC APPLICATIONS OF DIFFERENCE EQUATIONS

In this study, linear difference equations with constant coefficients have been discussed; solution methods of economic models of these difference equations have been shown. Definitions and solution methods of first-order, second-order and higher-order linear difference equations with constant coefficients have been shown by examples. Economic models have been analysed and their solutions have been shown. Numerical examples have been applied to the solutions. It has been concluded that difference equations have an important place in economic applications.

2015, **97**

Keywords: linear difference equations with constant coefficients, solution methods of linear difference equations with constant coefficients, economic applications of linear difference equations with constant coefficients.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

β	beta
α	alfa
Δ	delta
θ	teta
λ	lambda
γ	gama
π	pi
σ	sigma
C	Tüketim (Consume)
Y	Gelir
D	Talep (Demand)
S	Arz (Supply)
I	Yatırım (Investment)
W	Ücret (Wages)
G	Hükümet Harcamaları (Government)
P	Fiyat (Price)
Z^+	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
Z	Tam Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

RESİMLER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Fark denklemleri 19. yy. başlarında ortaya çıkan; ekonomi, mühendislik, fizik, kimya ve genetik gibi birçok alanda kullanılan bir bilim dalıdır. Fonksiyonel denklemler olarak da adlandırılan fark denklemleri, diferansiyel denklemlere benzerlik göstermektedir. 19. yy.a kadar fiziksel olaylar ve doğa olayları sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu ve değişim oranları arasında bir kopukluk olmadığı düşünülüyordu. Fakat 19. yy. başlarında radyasyondaki kuantum ve genetik alanlarındaki bazı gelişmeler tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Bu süreksizlik halleri diferansiyel denklemlerle giderilemediğinden fark denklemleri ile ortadan kaldırılmak istenmektedir[5].

Sürekli değerler yerine ayrık değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler fark denklemleri içeren matematik modelleri ile ifade edilir[11]. Bu düşünceyle bağımsız değişkenlerin ayrık oldukları zaman fark denklemleri modelleri ortaya çıkar[12]. Bu modellerde ardışık değerlerin farkları alınarak istenilen bir terimin değeri bulunur[8]. Türevsel denklemler ile bulunamayan bu ardışık farklar özellikle ekonomide birçok modelin çözülmesinde yardımcı olur.

Ulusal gelir, hükümet borçları gibi bir takvim dönemi için aynı değerleri alan dönem değiştikçe değişen ekonomik problemler fark denklemleri ile analiz edilir. Ekonomide meydana gelebilecek değişimleri önceden kestirebilmek ve bu kestirimlere göre önlemler almak dinamik ekonomik modeller ile mümkündür. Dinamik ekonomik modeller, ekonomik dinamikleri incelemek, büyüme ve iş döngüsü gibi ilgili olayları daha iyi anlayabilmek için yararlı bir araçtır. Denge koşulları genellikle bir fark denklemi sistemi ve sınır şartlarının bir dizisi ile tanımlanır. Böylece, bir sistemin denge özelliklerini incelemek için fark denklemlerinin özellikleri gerekmektedir[17]. Denge analizi değişkenlerin durumuna göre sistemin mevcut özelliklerini ne denli koruyabileceğini açıklamaktadır. Fark denklemleri yardımıyla hesaplanabilen ekonomik modellerde fark denklemleri sayesinde bazen değişkenler arasındaki fark çok büyük olsa dahi basit işlemlerle denge analizi yapılabilmektedir.

Fark denklemleri üzerine yapılan çalışmalar Newton’un sonlu fark işlemleri üzerine çalışması ile yayılmaya başlamış, Poincaré’e kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklemleri üzerinde çalışmıştır[5]. 1900’lü yıllardan günümüze fark denklemleri ve ekonomik uygulamaları ile ilgili hatrı sayılır çalışmalar yapılmıştır. [11], [10], [3], [9], [2], [8] ve [7] kitapları günümüze kadar yazılan önemli kitaplardan sadece bir kaçıdır. Ayrıca ülkemizde son yıllarda yapılan [6], [15], [13], [12], [1] ve [16] yüksek lisans tez çalışmaları fark denklemlerine verilen önemin gittikçe arttığını göstermektedir.

Bu çalışmada amaç; sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin ele alınıp bu fark denklemleri ile ilgili ekonomik modellerin matematiksel ayrıntılara girmeksizin çözüm metotlarının gösterilmesidir. Çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde araştırma konusu ile ilgili genel bilgiler ve literatürde yer alan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler yer almaktadır. 2. bölümde fark denklemleri ile ilgili temel tanımlara ve iktisatta genel olarak kullanılan bazı kavramlara yer verilmiştir. 3. bölümde birinci, ikinci ve yüksek mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin tanımları ve çözümleri hakkında bilgiler verilmiş, 4. bölümde ise birinci mertebeden, ikinci mertebeden ve yüksek mertebeden fark denklemlerinin kullanıldığı bazı ekonomik modeller incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Fark denklemleri ve ekonomik modeller için bilinmesi gereken temel kavramlar ve tanımlar bu bölümde yer almaktadır.

2.1 FARK DENKLEMLERİ İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 $f: N \to R$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f'nin birinci basamaktan farkı

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımlanan bu denklemde Δ simgesine *fark operatörü* ve $(x+1)-(x)$ farkına da *fark aralığı* denir[2].

Burada $N = \{1,2,3, \ldots\ldots\}$ doğal sayılar kümesi, R reel sayılar kümesidir.

Örnek 2.1.1

$f(x) = 2x + 1$ denklemi ele alınsın ve n herhangi bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda $\Delta f(x)$'in birinci farkları

$$\Delta f(1) = f(1+1) - f(1) = (2.2+1) - (2.1+1) = 5 - 3 = 2$$

$$\Delta f(2) = f(2+1) - f(2) = (2.3+1) - (2.2+1) = 7 - 5 = 2$$

$$\Delta f(3) = f(3+1) - f(3) = (2.4+1) - (2.3+1) = 9 - 7 = 2$$

………………………………………………………………………..

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (2.(n+1)+1) - (2.n+1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2$$

şeklinde olur. fark aralığı 1 için f fonksiyonun birinci farkı her zaman 2 ye eşittir. Yani her $x \in N$ için

$$\Delta f(x) = 2$$

olur.

Teorem 2.1.1 Δ operatörü lineerdir.

İspat: a ve b sıfırdan farklı sabitler olsun. h pozitif tam sayısı ve $x, y \in N$ değişkenleri için

$$\Delta\big(af(x) + bf(y)\big) = \big(af(x+h) + bf(y+h)\big) - \big(af(x) + bf(y)\big)$$

$$= a\big(f(x+h) - f(x)\big) + b\big(f(y+h) - f(y)\big)$$

$$= a\Delta f(x) + b\Delta f(y)$$

olur. O halde Δ operatörü lineerdir.

Tanım 2.1.2 $Ef(x) = f(x+1)$ şeklinde tanımlanan $Ef(x)$'e f'nin birinci kayması denir. Burada E simgesi *kayma (öteleme) operatörü* olarak adlandırılır. Kayma operatörü tanımından E 'nin ikinci kayması

$$E\big(Ef(x)\big) = E^2 f(x) = E\big(f(x+1)\big) = f(x+2)$$

olarak bulunur. O halde h-ıncı kayma

$$E^h f(x) = f(x+h) \tag{2.2}$$

olur.

Teorem 2.1.2 E operatörü lineerdir.

İspat: a ve b keyfi sabitler olmak üzere

$$E(af(x) + bf(y)) = aEf(x) + bEf(y)$$

olur. Yani E operatörü lineerdir.

Tanım 2.1.3 $If(x) = f(x)$ şeklinde tanımlanan I 'ya *özdeşlik operatörü* adı verilir.

I özdeşlik operatörü aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$I = E - \Delta$

$= f(x+1) - (f(x+1) - f(x))$

$I = f(x)$ (2.3)

Tanım 2.1.4 f herhangi bir fonksiyon ve $h \in N$ olsun.

$f(x+h) = f(x), f(x+1), f(x+2), f(x+3), \dots \dots, f(x+h+1) \dots \dots$ (2.4)

dizisinin çeşitli öğelerini birbiri ile ilişkilendiren herhangi bir işleve *bayağı fark denklemleri (ordinary difference equation=ODE)* denir. Bu çalışmada sadece *fark denklemleri* olarak adlandırılacaktır[8].

Tanım 2.1.5 Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun var olan en büyük ve en küçük argümanları arasındaki farka o denklemin *mertebesi* denir[8].

Örneğin aşağıdaki denklem göz önüne alınacak olunursa.

$0.2f(x+3) + 5f(x+2) + 2.3f(x+1) - 1.25f(x) = 0$

Bu denklemde en büyük değer $x+3$ ve en küçük değer x dir. Bu denklemin mertebesi

$x + 3 - x = 3$

dür.

2.2 EKONOMİK MODELLER İÇİN KAVRAMLAR

İktisadi uygulamalarda gösterilecek olan ekonomik modeller için bazı genel iktisat kavramları aşağıda verilmiştir[24,25].

Ekonomi teorisi ekonomik modeller kurarak ekonomik faaliyetleri ve bunlar arasındaki ilişkileri açıklamaya çalışır.

Dinamik analiz bir olayın veya modelin içinde yer alan değişkenlerin zaman içindeki değişimi ve değerleri belirlenerek sonuç çıkarılmasıdır. Örneğin bir malın fiyatının oluşumunu incelemek için sonuç çıkarılmasıdır.

Ekonomik model ekonomik gerçeğin temsili bir örneğidir. Model kullanmanın amacı karmaşık olayların anlaşılabilir hale getirilmesidir. Modellerin başlıca aşamaları aşağıdaki gibidir;

1. İlgili değişkenler tanımlanır.

2. Modelin varsayımları belirlenir.

3. Değişkenler arasındaki hipotezler ortaya konur.

4. Modele ilişkin öngörülerde bulunur. (Tahminler)

5. Gözlemler sınanarak model ile ortaya atılan teori kabul veya reddedilir.

Ekonomik modellerin özellikleri:

1. Modellerin varsayımları tutarlı ve gerçekçi olmalı.

2. Modelin sunduğu bilgiler geniş ve genellemeye uygun olmalı.

3. Modelin tahmin gücü yüksek olmalı.

Ekonomik Modellerin amaçları:

1. Model analiz (tahlil) yapmak için kullanılır. Ekonomik karar birimlerinin davranışları incelenerek aralarındaki ilişkiler ve etkileşimler, bağlı oldukları genel kurallar tespit edilir.

2. Tahmin (öngörü) amacı; ekonomik değişkenlerin birinde meydana gelen bir değişmenin, diğer değişkenleri nasıl etkileyeceğinin tahmin edilmeye çalışılmasıdır.

Tüketim toplumdaki tüm bireylerin doğrudan doğruya ihtiyaçlarını karşılayan mal ve hizmetleri kullanma eylemidir. Tüketim harcamaları, bu eylemi gerçekleştirebilmek için yapılan parasal ödemelerin toplamından oluşur.

Otonom tüketim bir ekonomide içinde bulunulan dönemin geliri ile ilgisi olmayan ve gelir sıfır olsa dahi yapılan tüketim harcamasıdır.

Marjinal tüketim eğilimi gelirdeki birim değişimin tüketim harcamalarında ne ölçüde değişim yaratacağının ölçüsüdür.

Tüketim malları tüketicinin ihtiyaçlarını doğrudan karşılayan mallardır. Bu açıdan bakıldığında bu mallara nihai mal adı verilir. Bu tür mallar, er veya geç kullanılma durumundadır. Yediğimiz gıda maddeleri, giydiğimiz elbise bunlara örnektir.

Tasarruf makroekonomik açıdan harcanabilir gelirin tüketilmeyen kısmıdır.

Yatırım mal ve hizmet üretilebilmesi için gereken yeni veya ek üretim tesislerinin kurulması ile stoklara yapılan ilavelerdir.

Yatırım harcamaları yatırım için gerekli işlerin gerçekleştirilebilmesi için yapılan ödemelerdir.

Uyarılmış yatırım milli gelirdeki değişimlerden etkilenen yatırımlardır.

Üretim malları diğer üretim malları ya da tüketim malları üretiminde kullanılan mallardır. Otomobil üretiminde kullanılan robot, bir fırıncının fırını birer üretim malı konumundadır

Fiyat mal ve hizmetin stardart para birimi cinsinden ölçülen değeri fiyat olarak tanımlanır.

Üretici üretim faktörlerini kullanarak insanların ihtiyaçlarını karşılayabilecek mal ve hizmetleri üretme çabasında olan ekonomik birimdir.

Dışsal Değişken: Değeri model dışında belirlenen fakat modeldeki içsel değişkenleri etkileyen değişkene dışsal değişken denir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. DOĞRUSAL FARK DENKLEMLERİ

Fark denklemleri, ayrık bir değişkenin bir fonksiyonun ardışık değerleri arasındaki farklarını içeren bir matematiksel eşitlik olarak tanımlanır. Ayrık değişkenlerin ardışık farkları genellikle sabitlerden oluşur ve 1 olarak alınır. Örneğin $x_0 = a$ için $x_1 = a + 1$, $x_2 = a + 2$ …… $x_n = a + n$ dir. Bu durumda f fonksiyonu da $f(x_0)$, $f(x_1)$,……, $f(x_n)$ şeklinde olur[27].

3.1.1. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Fark Denklemleri

Bu bölümde birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemleri tanımlanıp çözümleri ile birlikte örnekler verilecektir. Bu bölüm ve bundan sonraki tüm bölümlerde işlemlerde kolaylık olsun diye $x \epsilon N$ yerine $t \epsilon N$ ve $f(x)$ yerine y_t kullanılacaktır.

Tanım 3.1.1.1 Birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denkleminin en genel tanımı

$$\Delta y_t = m y_{t+1} - n y_t = g(t) \qquad (3.1.1.1)$$

şeklindedir. Burada $m, n \neq 0$ sabitler ve $g(t)$ bilinen bir fonksiyondur. Eğer m ve n sabitlerinden biri sıfır olursa (3.1.1.1) denklemi bir fark denklemi ifade etmez[10]. t döneminden $t + 1$ dönemine geçildiği için yani arada ki dönem farkı $(t + 1) - t = 1$ olduğu için (3.1.1.1) denklemine *birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemi* denir.

Örnek 3.1.1.1

Δy_t=0,65 olsun. Buradan

$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

olup,

$y_{t+1} - y_t = 0{,}65$

olur. t'nin bir dönem artışına bağlı olarak Δy_t deki artış 0,65 kadardır.

Örnek 3.1.1.2 $y_0 = 1{,}35$ başlangıç değeri olsun. Bir önceki örneğin farkları $t = 4$'e kadar bulunmaya çalışılsın.
Δy_t=0,65 için kökler

$y_1 - y_0 = 0{,}65$

$y_1 = y_0 + 0{,}65 = 1{,}35 + 0{,}65 = 2$

$y_2 = y_1 + 0{,}65 = 2 + 0{,}65 = 2{,}65$

$y_3 = y_2 + 0{,}65 = 2{,}65 + 0{,}65 = 3{,}3$

$y_4 = y_3 + 0{,}65 = 3{,}3 + 0{,}65 = 3{,}95$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.1.2 (3.1.1.1) denkleminde $g(t) = 0$ olsun. Yani

$$my_{t+1} - ny_t = 0 \qquad (3.1.1.2)$$

olsun. Bu denkleme *Birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemi* adı verilir. Eğer $g(t) \neq 0$ ise bu denkleme *Birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemi* denir.

3.1.2. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Fark Denklemlerinin Çözümleri

3.1.2.1. Tamamlayıcı Fonksiyon

(3.1.1.1) denklemi ele alınsın. Bu denklem $g^*(t) = \frac{g(t)}{m}$ olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{t+1} = \frac{n}{m} y_t + g^*(t) \tag{3.1.2.1}$$

Burada birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemleri ele alındığında t. dönemden sadece 1 dönem sonrası için y_t fonksiyonunda oluşan değişiklik hesaplanacaktır. $g(t) = 0$ olduğu kabul edilsin. Buradan

$$y_{t+1} = \frac{n}{m} y_t \tag{3.1.2.2}$$

denklemi elde edilir. Buradan $\frac{n}{m} = b$ alınarak birinci mertebeden sabit katsayılı fark denklemleri için (3.1.2.2) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_1 = by_0$$

$$y_2 = by_1 = b(by_0) = b^2 y_0$$

$$y_3 = by_2 = b(b^2 y_0) = b^3 y_0$$

… … … … … … … … … … … … … … …

$$y_t = by_{t-1} = b((b)^{t-1} y_0) = b^t y_0 \tag{3.1.2.3}$$

(3.1.2.3) eşitliğinde daha genel bir denklem olması için y_0 yerine herhangi bir sabit olan A yazılırsa (3.1.2.2) denkleminin çözümü

$$y_t = Ab^t \tag{3.1.2.4}$$

olarak bulunur. Bu durumda tamamlayıcı fonksiyon y_c ile gösterilirse

$$y_c = y_t = Ab^t$$

şeklinde olur.

Örnek 3.1.2.1

$y_0 = 0.25$ başlangıç koşulu ile y_4 ‘e kadar tamamlayıcı fonksiyon hesaplanacak olursa;

$y_1 = 0.25b$

$y_2 = by_1 = b(0.25b)$=0.25 $(b)^2$

$y_3 = by_2 = b(0.25\,b^2) = 0.25(b)^3$

$y_4 = by_3 = b(0.25b^3) = 0.25(b)^4$

olarak bulunur.

Bütün iterasyon adımları kullanılarak y_4’e kadar tamamlayıcı fonksiyon hesaplandı. Fakat daha büyük bir değeri bulmak için bu adımları teker teker çözmek çok uzun zaman alacağından (3.1.2.2) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu t değeri ne kadar büyük olursa olsun kolay yoldan sonucun bulunmasını sağlar. Gerçektende $t = 4$ ve $y_0 = 0.25$ değerleri (3.1.2.3) formülünde yerine yazılırsa

$y_4 = (b)^4 y_0 = 0.25(b)^4$

olarak bulunur.

3.1.2.2. Özel Çözüm Bulma

Birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal (3.1.1.1) fark denkleminin bir özel çözümü araştırılsın.

(3.1.1.1) denkleminde $g(t) = a$ olacak şekilde a sıfırdan farklı herhangi bir sabit olsun. Bu durumda (3.1.1.1) denklemi

$$my_{t+1} - ny_t = a \qquad (3.1.2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada bütün t dönemleri için çözümün daha önce tanımlanmamış k sabiti olduğu varsayılsın. $y_p = y_t = k$ olduğunda $y_{t+1} = k$ olacaktır. Bu k sabiti (3.1.2.5) denkleminde yerine yazıldığında $(m-n)k = a$ eşitliğinin sağlandığı kabul edilir. Buradan

$$k = \frac{a}{(m-n)}$$

olur ve

$$y_p = \frac{a}{(m-n)} \tag{3.1.2.6}$$

denklemi bir özel çözüm olarak bulunur.

Eğer $m - n = 0$ yani $m = n$ oluyor ise bu çözüm kullanılamaz. Bu durumda (3.1.2.5) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$y_{t+1} - y_t = \frac{a}{n}. \tag{3.1.2.7}$$

Eğer bir fonksiyon özel bir çözüm ile çözülmeye çalışılıyorken bu çözüm işe yaramıyorsa, bu çözüm t ile çarpılıp yeniden denenmelidir[10].

(3.1.2.7) denklemi için özel bir çözüm olarak kt ele alınsın ve $y_t = kt$ olsun. Bu durumda $y_{t+1} = k(t+1) = kt + k$

olacaktır. (3.1.2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$kt + k - kt = \frac{a}{n}$$

bulunur. Buradan $k = \frac{a}{n}$ olur. O zaman kt aranan çözümdür ve $y_p = \frac{a}{n}t$ özel bir çözüm olur.

3.1.2.3. Genel Çözüm Yöntemi

Birinci mertebeden doğrusal fark denklemi için genel yöntem tamamlayıcı fonksiyon ile özel çözümün toplamları olarak oluşturulur. Dikkat edilecek olursa homojen fark denklemlerinde özel çözüm daima sıfır olacaktır. Bu yüzden birinci mertebeden doğrusal homojen fark denkleminin çözümü daima tamamlayıcı fonksiyona eşit olur.

(3.1.2.2) ve (3.1.2.5) denklemlerinde $\frac{n}{m} = c$ ve $\frac{a}{m} = a^*$ alınsın ve denklemler aşağıdaki gibi yeniden yazılsın.

$y_{t+1} - cy_t = 0$ (3.1.2.8)

$y_{t+1} - cy_t = a^*$ (3.1.2.9)

(3.1.2.2) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu y_c ve (3.1.2.5) denkleminin özel bir çözümü y_p olsun. O halde (3.1.2.1) denkleminin genel çözümü

$y_t = y_c + y_p$ (3.1.2.10)

olur.

Tamamlayıcı fonksiyonun tanımından Ab^t ve özel çözümün tanımından $m \neq n$ için $\frac{a^*}{(m-n)}$ ve $m = n$ için $\frac{a^*}{n}t$ çözümlerinin var olduğu bilinmektedir. Bu çözümler $m = 1$ ve $n = c$ alınarak yeniden düzenlenirse $a^* = a$ olup

$y_c = A(c)^t$

$y_p = \frac{a}{(1-c)}$ $(c \neq 1)$

$y_p = \frac{a}{c}t = at$ $(c = 1)$

olur.

Bu eşitlikler (3.1.2.10) denkleminde yerine yazılırsa, genel çözüm

$y_t = A(c)^t + \frac{a}{(1-c)}$ $(c \neq 1)$ (3.1.2.11)

$y_t = A(1)^t + at = A + at$ $(c = 1)$ (3.1.2.12)

olur.

Bu yöntemi daha basit bir hale getirmek için bilinmeyen A sabitinden kurtulmak gerekir. (3.1.2.11) denkleminde $t = 0$, $c \neq 1$ için (3.1.2.11) denklemi

$$y_0 = A(c)^0 + \frac{a}{(1-c)} = A + \frac{a}{(1-c)}$$

denklemine dönüşür. Buradan $y_t = y_0$ başlangıç değerinin bilindiği varsayılırsa A değeri

$A = y_0 - \frac{a}{(1-c)}$ (3.1.2.13)

olarak bulunur.

(3.1.2.12) denkleminde $t = 0$, $c = 1$ için $y_t = y_0$ başlangıç değeri ele alınırsa A sabiti

$y_0 = A\,1^0 + 0 = A$ (3.1.2.14)

olarak bulunur.

(3.1.2.11), (3.212) ve (3.1.2.14) denklemlerinden genel çözümün en son hali aşağıdaki gibi olur.

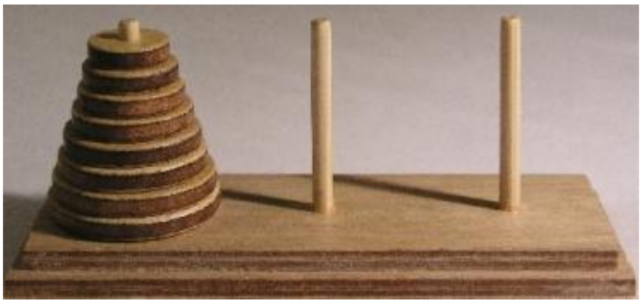
$$y_t = \begin{Bmatrix} \left(y_0 - \frac{a}{(1-c)}\right)(c)^t + \frac{a}{(1-c)} & (c \neq 1) \\ y_0 + at & (c = 1) \end{Bmatrix} \qquad (3.1.2.15)$$

Örnek 3.1.2.2

Hanoi Kulesi (bazı kaynaklarda Brahma Kulesi veya Dünyanın Sonu Yapbozu olarak da geçmektedir.) 1883'te Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından bulunmuş ve oyuncak olarak satılmaya başlanmıştır. Edouard Lucas, Brahma tapınaklarında genç rahipleri zihinsel olarak geliştirdiğine inanılan bir efsaneden esinlenmiştir. Efsaneye göre üst üste en altta en büyük olmak suretiyle büyükten küçüğe doğru yerleştirilmiş 64 altın diskin geçirildiği bir çubuk ve iki tane de boş çubuk vardır. Rahipler bu diskleri her seferinde bir diski kullanmak koşuluyla boş çubuklardan birine aynı dizilimle mümkün olan en az hamleyi kullanarak geçirmeye çalışmaktadırlar. Rahipler günler ve geceler süren yoğun uğraşları sonucu bu yapbozu çözmeyi başarmışlardır [26].

Resim $(3.1.2\ a)$ Hanoi Kuleleri

(http://www.ezberim.biz/bilim-kuram-ve-teori/179652-hanoi-kulesi-promlemi-tower-of-hanoi/)



Resim ($\mathbf{3.1.2}\ \boldsymbol{b}$) Hanoi Kuleleri

(http://tr.wikipedia.org/wiki/Hanoi_kuleleri)

Bu Hanoi kulesi bir problem olarak ele alınacak olursa. Bu problemde $t+1$ tane disk olsun ve y_{t+1} problemin çözümü olan en az hamle sayısı olsun. $t+1$ disk olduğundan en büyük disk küçük disklerin üzerine gelemeyeceğinden en büyük diski boş çubuklardan birine yerleştirmek için diğer boş çubuğa en üstteki t tane disk yerleştirilmelidir. Bu kadar disk için y_t kadar hamle yapmak gerekir. Son diski bir hamle ile boş olan diğer çubuğa yerleştirdikten sonra tüm diskleri tekrardan en büyük diskin üzerine aynı dizilimle yerleştirmek yine y_t hamlede olacaktır. Bu durumda toplam yapılan hamle sayısı $2y_t+1$ olur. Buradan

$$y_{t+1}=2y_t+1$$

olarak bulunur. Oluşturulan bu denklem bir birinci mertebeden doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu denklemin çözümü genel yöntemden bilinmektedir. $c=2$ ve $a=1$ değerleri (3.1.2.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$y_t=A2^t+\frac{1}{(1-2)}=A2^t-1$$

denklemi elde edilir. $t=1$ için yani ilk hamlenin $t_1=1$ olduğu bilindiğinden

$$t_1=A2^1-1=1$$

$$2A=2$$

$$A=1$$

elde edilir. O halde

$y_t = 2^t - 1$

değeri t tane disk için Hanoi Kulesi probleminin çözümü olur. Gerçekten de 2 disk için bu yapbozun en az hamle sayısı 3, 3 disk için en az hamle sayısı 7, 4 disk için 15 ve 5 disk için 31 hamledir. Efsane hatırlanacak olunursa rahipler 64 diskle bu yapbozu tamamlamışlardır. Bu da rahiplerin toplam

$y_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$

hamle yaptıkları anlamına gelir.

3.1.3. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Fark Denklemleri

Tanım 3.1.3.1 İkinci mertebeden doğrusal fark denklemlerinin en genel tanımı,

$\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ için

$$\alpha_1(t)y_{t+2} + \alpha_2(t)y_{t+1} + \alpha_3(t)y_t = g(t) \qquad (3.1.3.1)$$

şeklindedir. (3.1.3.1) denkleminde sabit ve değişkenlerin durumuna göre aşağıdaki tanımlar verilebilir;

I. $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, şeklinde sabitler ve $g(t) = 0$ ise o zaman (3.1.3.1) denklemi

$$\alpha_1 y_{t+2} + \alpha_2 y_{t+1} + \alpha_3 y_t = 0 \qquad (3.1.3.2)$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme *ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemi* adı verilir.

II. $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ şeklinde sabitler ve $g(t) \neq 0$ ise o zaman (3.1.3.1) denklemi

$$\alpha_1 y_{t+2} + \alpha_2 y_{t+1} + \alpha_3 y_t = g(t) \tag{3.1.3.3}$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme *ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemi* adı verilir.

III. $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ verilen fonksiyonlar ve $g(t) = 0$ ise o zaman (3.1.3.1) denklemi

$$\alpha_1(t) y_{t+2} + \alpha_2(t) y_{t+1} + \alpha_3(t) y_t = 0 \tag{3.1.3.4}$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme *ikinci mertebeden değişken katsayılı doğrusal homojen fark denklemi* adı verilir.

IV. $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ verilen fonksiyonlar, $\alpha_1(t), \alpha_3(t) \neq 0$ ve$g(t) \neq 0$ ise o zaman (3.1.3.1) denklemi

$$\alpha_1(t) y_{t+2} + \alpha_2(t) y_{t+1} + \alpha_3(t) y_t = g(t) \tag{3.1.3.5}$$

şeklinde yazılır. Bu denkleme *ikinci mertebeden değişken katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemi* adı verilir.

3.1.3.1. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Homojen Fark Denklemlerinin Çözümü

(3.1.3.2) denkleminde $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ için eşitliğin her iki tarafı α_1 ile bölündüğünde

$$y_{t+2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_{t+1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_t = 0 \tag{3.1.3.6}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_1$ ve $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \beta_2$ olarak yazılırsa, (3.1.3.6) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür;

$$y_{t+2} + \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_t = 0 \tag{3.1.3.7}$$

Şimdi çözümü bulmak için önce (3.1.3.7) denkleminin bir özel çözümünün λ^t olduğu varsayılsın, bu durumda çözüm denklemi

$$\lambda^{t+2} + \beta_1\lambda^{t+1} + \beta_2\lambda^t = 0 \tag{3.1.3.8}$$

olur. Buradan

$$\lambda^t(\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2) = 0 \tag{3.1.3.9}$$

$$\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2 = 0 \tag{3.1.3.10}$$

denklemi elde edilir.

Elde edilen bu (3.1.3.10) denklemine ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denkleminin *karakteristik denklemi* adı verilir[12].

Bu karakteristik denklem aynı zamanda fark denkleminin çözüm denklemini de vermektedir. Karakteristik denklemin kökleri diskriminanttan

$$\lambda_1 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{{\beta_1}^2 - 4\beta_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{{\beta_1}^2 - 4\beta_2}}{2}$$

olarak bulunur. Asıl çözüm ${\beta_1}^2 < 4\beta_2$, ${\beta_1}^2 = 4\beta_2$ ve ${\beta_1}^2 > 4\beta_2$ durumlarına göre 3 farklı şekilde hesaplanır.

I. ${\beta_1}^2 < 4\beta_2$ ise reel kökler yok demektir. O halde $i = \sqrt{-1}$ ve a, b gerçel sayılar olmak üzere kökler $\lambda_1 = a + bi$ ve $\lambda_2 = a - bi$ formunda olur. Burada

$a = -\frac{1}{2}\beta_1$ ve $b = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_2 - {\beta_1}^2}$ şeklindedir. Bu durumda A_1 ve A_2 keyfi sabitleri için çözüm fonksiyonu

$$y_t = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t$$

$$= A_1(a+bi)^t + A_2(a-bi)^t \qquad (3.1.3.11)$$

şeklinde olur. Fakat bu denklem çözümde kolaylık sağlayamayacağından karmaşık sayıların özelliklerinden daha basit bir hale dönüştürülür.

De-Moivre $([K\,(cos\theta + i\,sin\theta)]^t = K^t(cos\theta t + i\,sin\theta t))$ teoremi kullanılarak

$K = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için

$$(a \pm bi)^t = K^t(cos\theta t \pm i\,sin\theta t) \qquad (3.1.3.12)$$

denklemi yazılabilir. Bu ifadeler (3.1.3.11) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$y_t = A_1K^t(cos\theta t + i\,sin\theta t) + A_2K^t(cos\theta t - i\,sin\theta t)$$

$$= K^t[(A_1+A_2)cos\theta t + (A_1-A_2)i\,sin\theta t] \qquad (3.1.3.13)$$

elde edilir. $A_1 + A_2 = A_3$ ve $(A_1 - A_2)i = A_4$ olarak alınırsa, genel çözüm

$$y_t = K^t(A_3cos\theta t + A_4\,sin\theta t) \qquad (3.1.3.14)$$

olarak bulunur. Burada çözümün davranışı K değerine bağlıdır. $K < 1$ olduğunda çözüm 0'a salınımlı olarak yakınsar. (3.1.3.14) denkleminde

$$K = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\beta_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta_2 - {\beta_1}^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\,{\beta_1}^2 - \frac{1}{4}\,{\beta_1}^2 + \beta_2} = \sqrt{\beta_2}$$

$$cos\theta = \frac{a}{K} = \frac{-\beta_1}{2\sqrt{\beta_2}}$$

ve

$$sin\theta = \frac{b}{K} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}\sqrt{4\beta_2 - {\beta_1}^2} = \sqrt{1 - \frac{{\beta_1}^2}{4\beta_2}}$$

dir.

II. $\beta_1{}^2 = 4\beta_2$ olduğunda kökler eşit olacak demektir. Bu durumda $\lambda_{1,2} = \frac{-\beta_1}{2}$ olur. Fakat burada sadece bir $\lambda_1{}^t = \lambda_2{}^t$ çözüm bulunur başka bir çözüme daha ihtiyaç vardır. Mevcut çözüm t ile çarpılarak yeni bir çözüm denenirse,

$$(t+2)\lambda_1{}^{t+2} + \beta_1(t+1)\lambda_1{}^{t+1} + \beta_2 t\lambda_1{}^t = 0 \tag{3.1.3.15}$$

$$\lambda_1{}^t\left((t+2)\lambda_1{}^2 + \beta_1(t+1)\lambda_1{}^1 + \beta_2 t\right) = 0 \tag{3.1.3.16}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $\lambda_1{}^t$ ile bölünür ve denklemde $\lambda_1 = \frac{-\beta_1}{2}$ yazılırsa

$$\left((t+2)\left(\frac{-\beta_1}{2}\right)^2 + \beta_1(t+1)\left(\frac{-\beta_1}{2}\right) + \beta_2 t\right) = 0 \tag{3.1.3.17}$$

elde edilir. Bu $t\lambda_1{}^t$ değerinin bir özel çözüm olabilmesi için (3.1.3.17) denklemi herhangi bir t için sağlanmalıdır. (3.1.3.17) denkleminde $\beta_2 = \frac{1}{4}\beta_1{}^2$ yazıldığında eşitlik sağlanır ve $t\lambda_1{}^t$ kesin bir çözüm olur. A_1 ve A_2 bilinmeyen sabitler olmak üzere genel çözüm

$$y_t = A_1\lambda_1{}^t + A_2 t\lambda_1{}^t$$

$$y_t = A_1\left(\frac{-\beta_1}{2}\right)^t + A_2 t\left(\frac{-\beta_1}{2}\right)^t \tag{3.1.3.18}$$

olarak bulunur. Burada eğer $\left|\frac{-\beta_1}{2}\right| < 1$ oluyorsa $t \to \infty$ olduğunda çözüm 0'a doğru sönümlü bir harekete sahip olur.

III. $\beta_1{}^2 > 4\beta_2$ olsun. Bu durumda gerçel kökler var ve birbirinden farklıdır demektir. O halde kökler

$$\lambda_1 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1{}^2 - 4\beta_2}}{2} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\beta_1{}^2 - 4\beta_2}}{2}$$

dir. A_1ve A_2 bilinmeyen sabitler olmak üzere çözüm

$$y_t = A_1\lambda_1{}^t + A_2\lambda_2{}^t$$

$$y_t = A_1\left(\frac{-\beta_1+\sqrt{\beta_1{}^2-4\beta_2}}{2}\right)^t + A_2\left(\frac{-\beta_1-\sqrt{\beta_1{}^2-4\beta_2}}{2}\right)^t \tag{3.1.3.19}$$

olarak bulunur. Burada da $\frac{-\beta_1+\sqrt{\beta_1{}^2-4\beta_2}}{2} < 1$ oluyorsa $t \to \infty$ olduğunda çözüm 0'a doğru sönümlü bir harekete sahip olur.

Örnek 3.1.3.1

$y_0 = -1$ ve $y_1 = -2$ için

$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0,$

fark denklemi ele alınsın. Bu denklemin ilk 4 çözümü

$y_{t+2} = 3y_{t+1} - 2y_t$

$y_2 = 3y_1 - 2y_0 = 3.-2-(-2) = -4$

$y_3 = 3y_2 - 2y_1 = 3.-4-(2.-2) = -8$

$y_4 = 3y_3 - 2y_2 = 3.-8-(2.-4) = -16$

olarak hesaplanabilir fakat t nin daha yüksek değerleri için bu işlem zor olacağından genel çözüm yöntemiyle çözmek daha kolay olacaktır. Verilen fark denkleminin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

şeklindedir. Burada kökler $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 1$ dir. Bu kökler denklem (3.1.3.19) da yerine yazılırsa

$y_t = A_1(2)^t + A_2(1)^t$

elde edilir. $y_0 = -1$ ve $y_1 = -2$ başlangıç koşulları bilindiğinden

$y_0 = A_1(2)^0 + A_2(1)^0 = A_1 + A_2 = -1$

$y_1 = A_1(2)^1 + A_2(1)^1 = 2A_1 + A_2 = -2$

elde edilir. Sistem çözülürse

$A_1 = -1$ ve $A_2 = 0$ bulunur. Böylece çözüm

$y_t = -(2)^t$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.3.1

İkinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemleri için aşağıdaki durumlar her zaman doğrudur.

1) Bütün çözümlerin 0'ın etrafında salınım gerçekleştirmesi için gerek ve yeter şart karakteristik denklemde pozitif reel kökün olamamasıdır.
2) Bütün çözümlerin 0'a yakınsaması için gerek ve yeter şart $max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır.

3.1.3.2. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümü

(3.1.3.3) denklemi ele alıp $\alpha_1, \alpha_3 \neq 0$ için $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_1$ ve $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \beta_2$ olarak yazılırsa

$$\beta_0 y_{t+2} + \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_t = g(t) \qquad (3.1.3.20)$$

elde edilir. Burada $\beta_0 = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu denklemin özel bir çözümü $y_p = y_t = k$ ve $g(t) = g$ bir sabit olsun.

Önce $y_p = k$ özel çözümü aransın. Bu durum da

$$k + \beta_1 k + \beta_2 k = g \tag{3.1.3.21}$$

olur. Buradan özel çözüm

$$k = \frac{g}{1+\beta_1+\beta_2} \tag{3.1.3.22}$$

olarak bulunur ve

$$y_p = k$$

olur.

Eğer $\beta_1 + \beta_2 = -1$ ise daha önce yapıldığı gibi özel çözüm t ile çarpılır. Bu durumda özel çözüm kt olur. Bu (3.1.3.20) da yerine yazılırsa

$$k(t+2) + \beta_1 k(\mathrm{t}+1) + \beta_2 k\mathrm{t} = g$$

elde edilir. Buradan

$$(1+\beta_1+\beta_2)\, kt + (2+\beta_1)\, k = g \tag{3.1.3.23}$$

yazılır. $\beta_1 + \beta_2 = -1$ olduğundan λt için çözüm

$$y_p = \frac{g}{2+\beta_1} t$$

olarak bulunur.

Eğer $\beta_1 = -2$ ise özel çözüm yine t ile çarpılır ve çözüm kt^2 özel çözümü ile aranır.

İkinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemlerinin tamamlayıcı fonksiyonu bir önceki başlıkta aranan homojen fark denkleminin genel çözümleri ile aynıdır. İkinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denkleminin genel çözüm denklemlerinde $y_t = y_c$ alınırsa bu y_c çözümüne tamamlayıcı fonksiyon denildiği birinci mertebeden fark denklemlerinden bilinmektedir. Bu durumda genel çözüm tamamlayıcı fonksiyonun her üç durumu için $y_t = y_c + y_p$ olur. O halde ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemlerinin genel çözümü $\beta_1 + \beta_2 \neq 1$ için

1. $\beta_1{}^2 < 4\beta_2$ ise

$$y_t = \left(\sqrt{\beta_2}\right)^t (A_3 cos\theta t + A_4\, sin\theta t) + \frac{g}{1+\beta_1+\beta_2}$$

2. $\beta_1{}^2 = 4\beta_2$ ise

$$y_t = A_1 \left(\frac{-\beta_1}{2}\right)^t + A_2 t \left(\frac{-\beta_1}{2}\right)^t + \frac{g}{1+\beta_1+\beta_2}$$

3. $\beta_1{}^2 > 4\beta_2$ ise

$$y_t = A_1 \left(\frac{-\beta_1+\sqrt{\beta_1{}^2-4\beta_2}}{2}\right)^t + A_2 \left(\frac{-\beta_1-\sqrt{\beta_1{}^2-4\beta_2}}{2}\right)^t + \frac{g}{1+\beta_1+\beta_2}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.3.2

$y_{t+2} + \frac{1}{4} y_t = 5$ denkleminin çözümü araştırılsın. Bu denklemde katsayılar

$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = \frac{1}{4}$ olup karakteristik denklem

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$$

olur. Burada $\lambda = \frac{1}{2} i$ için denklem sağlanır. O halde denklem sanal köke sahiptir. Reel kısım $a = 0$ ve sanal kısım $b = \frac{1}{2}$ dir.

$K = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için

$K = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$, $cos\theta = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$ ve $sin\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

olur. O halde $\theta = \frac{\pi}{2}$ olarak bulunur. Bu değerler (3.1.3.14) denkleminde yerlerine yazılırsa, tamamlayıcı fonksiyon;

$$y_c = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(A_3 cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_4\, sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

olarak bulunur.

Şimdi özel çözüm aransın. $y_t = k$ özel çözümü için denklem (3.1.3.22) den

$$k + \frac{1}{4}k = 5$$

$$k = \frac{5}{1 + 0 + \frac{1}{4}}$$

$$k = 4$$

bulunur ve $y_p = 4$ olur.

$y_{t+2} + \frac{1}{4}y_t = 5$ denkleminin genel çözümü $y_t = y_c + y_p$ olur ve aşağıdaki gibi yazılır;

$$y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(A_3 cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_4\, sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + 4$$

3.1.4. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Fark Denklemleri

Tanım 3.1.4.1 n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denkleminin en genel tanımı,

$$y_{t+n} = f(y_t, y_{t+1}, \dots \dots, y_{t+n-1}, t) \tag{3.1.4.1}$$

formundadır. Burada f bilinen fonksiyon ve $n \in N$dır. Bu denklemi sağlayan bir çözüm $\{y_t\}_0^\infty$ dizisidir. Bu denklemde herhangi bir sabit çözüme *denge çözümü* adı verilir.

(3.1.4.1) n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\alpha_n y_{t+n} + \alpha_{n-1} y_{t+n-1} + \cdots + \cdots + \alpha_1 y_{t+1} + \alpha_o\, y_t = g(t) \tag{3.1.4.2}$$

Burada $n \in N$ ve $\alpha_o, \dots, \alpha_n$ katsayılar, $\alpha_o, \alpha_n \neq 0$ ve $g(t)$ bilinen bir fonksiyondur. Eğer $g(t) = 0$ ise (3.1.4.2) denklemine *n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemi* denir. Eğer $g(t) \neq 0$ ise (3.1.4.2) denklemine *n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemi* denir[18].

Tanım 3.1.4.2 Yüksek mertebeden fark denklemi için *öteleme operatörü*

$$E^n y_t = y_{t+n} \qquad n \in Z^+ \tag{3.1.4.3}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.4.3 Yüksek mertebeden fark denklemleri için *birim operatörü*

$$I^n y_t = y_t \qquad n \in Z^+ \tag{3.1.4.4}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.4.4 Yüksek mertebeden fark denklemi için *fark operatörü* birinci mertebeden doğrusal fark denkleminde olduğu gibi

$\Delta = E - I$

olarak tanımlanır. Buradan $n \in Z^+$ için

$$\Delta^n y_t = (E - I)^n y_t$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_{t+n-i} \qquad (3.1.4.5)$$

olur.

3.1.4.1. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Doğrusal Fark Denklemlerinin Çözümü

(3.1.4.2) n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denkleminin çözümü araştırılsın. Bu tür fark denklemlerinin bir özel çözümü daha önce tanımlanan fark denklemlerinin çözümlerine benzer şekilde araştırılır. Yani sabit dengenin söz konusu olduğu halde $y_t = y_P = k$ özel çözümü denenecek bu deneme sonuç vermezse $y_t = y_P = kt$ veya giderek $y_t = y_P = kt^2$… gibi çözümlerin denenmesi gerekecektir. Sonuç olarak özel çözüm y_P olacaktır.

Bu fark denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu için bu kez n-inci dereceden bir karakteristik denklemin köklerinin araştırılması gerekecektir. n-inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemi için karakteristik denklem,

$$\lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\lambda + \beta_n = 0 \qquad (3.1.4.6)$$

olur. Eğer bu denklemin n-tane reel ve birbirinden farklı kökü varsa, denklemin genel çözümü,

$$y_t = \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + \cdots + A_n\lambda_n^t + y_P \qquad (3.1.4.7)$$

şeklinde bulunur. Burada A_i'ler sabitlerdir.

Eğer $m \leq n$ için λ^* tekrarlanan kökler m tane ise homojen denklemin çözümleri $\lambda^{*t}, t\lambda^{*t}, t^2\lambda^{*t}, t^3\lambda^{*t}, \dots, t^{m-1}\lambda^{*t}$ olur.Bu durumda birbirinden farklı köklerin sayısı k olmak üzere tekrarlanan reel kökler için genel çözüm

$$y_t = \sum_{j=1}^{k} P_j(t)\lambda_j^{*t} + y_P \qquad (3.1.4.8)$$

olur. Burada A_i'ler sabitler ve m_j j-inci kökün kuvveti olmak üzere $P_j(t)$ polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P_j(t) = A_{1j} + A_{2j}t + \cdots + A_{mj}t^{m_{j-1}} \qquad (3.1.4.9)$$

Eğer kökler kompleks iseler çözüm

$$y_t = K^t(A_{n-1}cos\theta t + A_n\, sin\theta t) + y_P \qquad (3.1.4.10)$$

şeklinde olur. Bu çözümde de $m \leq n$ için tekrarlı çiftler var ise o halde genel çözüm aşağıdaki gibi olur:

$$y_t = K_j^t\left[\left(A_{(n-1)1j} + \cdots + A_{(n-1)mj}t^{m_{j-1}}\right)cos\theta t + \left(A_{n1j} + \cdots + A_{nmj}t^{m_{j-1}}\right) sin\theta t\right] + y_p \qquad (3.1.4.11)$$

Sonuç olarak bulunan bu çözüm n-inci mertebeden doğrusal homojen olmayan fark denklemi içindir. Homojen denklemde genel çözüm için $y_P = 0$ olduğundan $y_t = y_c$ dir[10].

Örnek 3.1.4.1

$$y_{t+3} - \frac{2}{3}y_{t+2} + \frac{1}{6}y_{t+1} + \frac{1}{36}y_t = 19$$

Homojen olmayan fark denkleminin çözümü incelensin.

$y_t = y_p = k$ alınıp özel çözüm denenirse

$$k - \frac{2}{3}k + \frac{1}{6}k + \frac{1}{36}k = 19$$

$$36k - 24k + 6k + 1k = 684$$

olur ve $y_p = 36$ olarak bulunur.

Tamamlayıcı fonksiyon için

$$\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{36} = 0$$

karakteristik denklemi ele alınsın. Burada kübik denklem

$$(\lambda - \frac{1}{3})(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{6}) = 0$$

Şeklinde çarpanlara ayrılırsa kökler $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_3 = -\frac{1}{6}$ olarak bulunur. Kökler reel ve ayrık olduğundan

$$y_c = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^t + A_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

tamamlayıcı fonksiyonu da bulunur. O halde genel çözüm

$$y_t = y_c + y_p = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^t + A_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_3\left(-\frac{1}{6}\right)^t + 36$$

olarak bulunur.

Teorem (Schur Teoremi) 3.1.4.1

Sabit katsayılı doğrusal fark denklemleri için denge değeri özel çözüm olan y_p ‘ye eşittir. Sistemin dengede olup olmadığı genel çözümün denge değerine yakınsayıp ıraklaşmasına göre analiz edilir. Yüksek mertebeden bir fark denkleminin çözümünün zor olması durumunda, problemi çözmeden, ardışık çözümlerin dengeye yakınsayıp yakınsamadığının anlaşılabilmesi aşağıdaki Schur teoreminin kullanması şartıyla mümkündür.

(3.1.4.2) denkleminde n yeterince büyük olduğunda bu denklemin çözümünü bulmak oldukça zor bir hal alır. Böyle durumlarda çözümü bulmak yerine zaman patikasının yakınsaklığını niteliksel olarak bulmaya çalışmak daha kolay bir yöntemdir. Bu yöntemde denklemin karakteristik köklerinin her biri 1‘den küçük olduğunda zaman patikasının yakınsayabilir olduğu açıktır.

Schur teoremine göre

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3.1.4.12)$$

n-inci mertebeden karakteristik denklemin kökleri, ancak ve ancak aşağıda ki n-tane determinantın hepsi pozitif iseler 1’den küçük olurlar ve dengeye yakınsarlar.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & \vdots & a_n \\ a_n & \vdots & a_0 \end{vmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{cc:cc} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \hdashline a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{array} \right| > \mathbf{0}$$

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{cccc:cccc} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ & & & & & & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hdashline a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ & & & & & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{array} \right| > \mathbf{0}$$

Bu n tane determinantın tümü pozitif ise determinantların kökleri 1’den küçük olacaktır. Bu determinant her bir matrisi dört parçaya ayıran kesikli doğruların yardımı ile açıklanır. $k \leq n$ olmak üzere k-ıncı determinant olan Δ_k’nın her bir alanı her zaman $k \times k$ tane alt determinanta sahiptir. Üst sol kısım ayrı bir determinant olarak ele alındığında köşegen üzerinde yalnızca a_0’lar, köşegenin yukarısında sıfırlar ve köşegen elemanlarının aşağısında her bir sütunda köşegen elemanından başlayarak yukarıdan aşağıya doğru 1’den $k-1$’e kadar artan a_k değerleri yazılır. Üst sol parçanın transpozesi alındığı zaman, alt sağ alan elde edilir. Üst sağ parçaya gelindiğinde köşegen üzerinde yalnızca a_n’ler, köşegenin aşağısına sıfırlar ve köşegenin üstünde yer alan sütunlarda aşağıdan yukarıya doğru sırasıyla $k-1$ den 1 e kadar azalan a_k değerleri yazılır. Bu determinantın transpozesi alındığı zaman alt sol alan elde edilir.

(3.1.4.12) denkleminde $k = n$ olduğundan doğrudan belirtilen determinantlarda yerlerine yazılarak uygulanabilir[3].

Örnek 3.1.4.2 Aşağıdaki fark denkleminin kararlı bir sürece sahip olup olmadığı Schur teoremi yoluyla incelensin.

$y_{\mathrm{t}+2} + 0.3y_{\mathrm{t}+1} - 0.4y_{\mathrm{t}} = 3.12$

Burada $n = 2, a_0 = 1,\ a_1 = 0.3,\ a_2 = -0.4$ için

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -0.4 \\ -0.4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0.16 = 0.84 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.5292 > 0$$

olur. $\Delta_1 > 0$ ve $\Delta_2 > 0$ olduğundan bu denklemin çözümü denge değerine yakınsar.

Teorem 3.1.4.2

$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$

üçüncü dereceden karakteristik denklemin kökleri için eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa çözümler kararlı olur[10].

I. $1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$

II. $3 - a_1 - a_2 + 3a_3 > 0$

III. $1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0$

IV. $3 + a_1 - a_2 - a_3 > 0$

V. $(3 + a_1 - a_2 - a_3)(3 - a_1 - a_2 + 3a_3) - (1 - a_1 + a_2 - a_3)(1 + a_1 + a_2 + a_3)$
$= -{a_3}^2 + a_1a_3 - a_2 + 1 > 0$

Teorem 3.1.4.3

Sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinde yakınsaklık karakteristik fonksiyonun köklerine bağlıdır. İkinci mertebeden doğrusal fark denklemleri ele alındığında karakteristik denklem $\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2 = 0$ biçiminde olduğundan yakınsaklık λ_1 ve λ_2 değerlerine bağlıdır. İkinci mertebeden doğrusal fark denklemlerinin yakınsaklığı da tamamlayıcı fonksiyonun belirlenmesindeki gibi köklerin reel, tekrarlı veya sanal olması durumuna göre 3 aşamada incelenir[4,10,11].

1) Kökler reel ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun. Bu durumda $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ olurken tamamlayıcı fonksiyonda ${\lambda_1}^t$ ve ${\lambda_2}^t$ değerleri sıfıra yakınsar. Tamamlayıcı fonksiyon sıfıra yakınsayacağından y_t de denge değerine yakınsar. $|\lambda_1| > 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ olurken tamamlayıcı fonksiyonda ${\lambda_1}^t \rightarrow \infty$ ve ${\lambda_2}^t \rightarrow 0$ olur. λ_2 sönme eğiliminde olduğundan λ_1 değerinin baskınlığı artacaktır ve y_t çözümü denge değerinden ıraksayacaktır. $|\lambda_1| > 1$ ve $|\lambda_2| > 1$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ olurken ${\lambda_1}^t \rightarrow \infty$ ve ${\lambda_2}^t \rightarrow \infty$ olacaktır. Bu durumda kökler patlayan bir hareket gerçekleştirecek ve y_t'yi hızla denge değerinden ıraksatacaklardır.

2) Kökler reel $\lambda_1 = \lambda_2$ olsun. Bu durumda yakınsaklık yine λ_1 değerine bağlı olacaktır. $|\lambda_1| < 1$ olduğunda $t{\lambda_1}^t$ değeri $t \rightarrow \infty$ olurken yavaş yavaş $t{\lambda_1}^t \rightarrow 0$ olur. Bu durumda y_t yine denge değerine yakınsayacaktır. $|\lambda_1| > 1$ olduğunda $t{\lambda_1}^t$ değeri $t \rightarrow \infty$ olurken hızla $t{\lambda_1}^t \rightarrow \infty$ olur. Bu durumda y_t patlayan bir hareket gerçekleştirip dengeden ıraksayacaktır.

3) Kökler sanal olsun. Bu durumda yakınsaklık K^t değerine bağlı olacaktır. Tamamlayıcı fonksiyonunda bulunan $A_{n-1}cos\theta t + A_n\, sin\theta t$ değerinden dolayı y_t denge değerinin altından ve üstünden dalgalanma gerçekleştirecektir. Bu dalgalanma eğer $|K| > 1$ ise dengeden ıraksayan, $|K| < 1$ ise dengeye yakınsayan bir salınım olacaktır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. BİRİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL FARK DENKLEMLERİNİN İKTİSADİ UYGULAMALARI

4.1.1. Cobweb (Örümcek Ağı) Modeli

Bu model arz ve talep modellerinden türeyen bir dinamik modeldir[10]. İktisatta arzın fiyat tepkisine geç kaldığı durumlarda, fiyatların zaman içerisindeki hareketini ele almakta, bu farklılıklardan kaynaklanan dalgalanmaları incelemektedir. Örneğin tarımda ekim, hasat ve ürün satışından çok önce gerçekleştiğinden ürünün arz denklemi ekim yılında ki fiyatı yani bir dönem önce ki fiyatı dikkate alınarak hesaplanır. Bu model sayesinde özellikle tarım ürünlerinin fiyatlarının başarılı bir şekilde açıklanabileceği gösterildiği için ekonomide uygulamalı iktisat açısından da önem taşımaktadır.

Bu modelin bir fark denklemi olarak inşa edilebilmesi için öncelikle aşağıdaki tanımlar yapılmalıdır; y talep eğilimi, y_1 arz eğimi fiyatın 0 olduğu durumda arz x_1 ve talep x olmak üzere

$$D_t = x + yp_t \qquad y < 0, x > 0 \tag{4.1.1.1}$$

$$S_t = x_1 + y_1 p_{t-1} \qquad y_1 > 0, x_1 < 0 \tag{4.1.1.2}$$

Burada D_t değeri t dönemindeki talep miktarını ve S_t değeri de t dönemindeki üretim miktarını (gecikmeli arzı) göstermektedir. p_t sayısı üretilen ürünün t dönemindeki piyasa fiyatı olmak üzere, p_{t-1} sayısı da ürünün bir önceki dönemdeki piyasa fiyatıdır.

Bu modelde satıcıların ve alıcıların stoklarının olmadığı, gerçek piyasa fiyatının fazla istemi ortadan kaldıracak şekilde talebi ayarladığı ve üreticilerin denge fiyatı olarak bir önceki dönemin beklenen fiyatını kullandıkları varsayılmaktadır[8].

Bu varsayımlar altında üretim miktarı yani arz talebi tamamıyla karşılamaktadır. Bu arzın talebe eşit olması demektir. O halde

$$D_t = S_t \tag{4.1.1.3}$$

olur. Buradan

$$x + yp_t = x_1 + y_1 p_{t-1}$$

$$yp_t - y_1 p_{t-1} = x_1 - x \tag{4.1.1.4}$$

yazılır. Bu bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homojen halinin tamamlayıcı fonksiyonunu daha sonra homojen olmayan denklemin bir özel çözümü bulunmalıdır.

(4.1.1.4) denkleminde $x_1 - x = 0$ alınarak denklemin homojen hali için tamamlayıcı fonksiyonu araştırılsın. Bu durumda (4.1.1.4) denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$yp_t - y_1 p_{t-1} = 0 \tag{4.1.1.5}$$

Birinci mertebeden doğrusal fark denklemlerinin çözümünden $y_c = Ab^t$ tamamlayıcı fonksiyonu (4.1.1.5) denklemine uygulanırsa

$p_t = \frac{y_1}{y} p_{t-1}$ için $b = \frac{y_1}{y}$ olup (4.1.1.4) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu

$$p_c = A\left(\frac{y_1}{y}\right)^t$$

olur.

(4.1.1.4) denkleminin bir özel çözümünü bulmak için $p_p = k$ çözümü denensin. (4.1.1.4) denkleminde $p_t = p_{t-1} = p_p = k$ yazılırsa;

$$yk - y_1 k = x_1 - x$$

olur. Buradan özel çözüm

$$p_p = k = \frac{x_1 - x}{y - y_1}$$

olarak bulunur. (4.1.1.4) denkleminin genel çözümü $y - y_1 \neq 0$ için

$$p_t = A\left(\frac{y_1}{y}\right)^t + k = A\left(\frac{y_1}{y}\right)^t + \frac{x_1 - x}{y - y_1} \qquad (4.1.1.6)$$

şeklinde olur. Bu denklemi daha basit bir hale getirebilmek için bilinmeyen A teriminin yok edilmesi gerekmektedir. $t = 0$ için p_0 başlangıç koşul değeri bilindiği varsayımı altında A sabiti;

$$p_0 = A\left(\frac{y_1}{y}\right)^0 + p_p$$

$$p_0 = A + p_p$$

$$A = p_0 - p_p$$

olur. O halde Cobweb (Örümcek Ağı) modelinin genel çözümü $y - y_1 \neq 0$ için

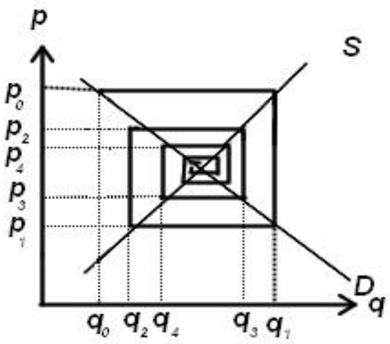
$$p_t = (p_0 - k)\left(\frac{y_1}{y}\right)^t + k$$

$$p_t = \left(p_0 - \frac{x_1 - x}{y - y_1}\right)\left(\frac{y_1}{y}\right)^t + \frac{x_1 - x}{y - y_1} \qquad (4.1.1.7)$$

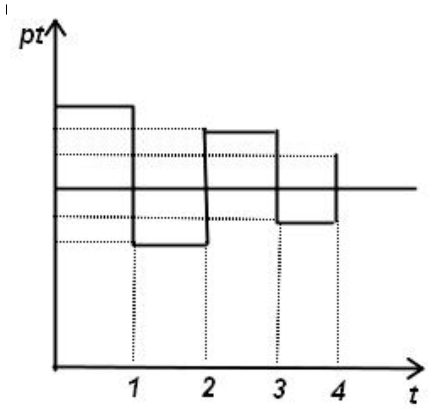
olarak bulunur.

Yukarıda ki modelde $p_p = k = \frac{x_1 - x}{y - y_1}$ olarak alınırsa bu bir sabit olur. O halde durağan bir denge söz konusudur. $y_t = Ab^t$ çözümünden yola çıkarak $A = p_0 - p_p$ değeri zaman patikasının dengeye aşağıdan mı yoksa yukarıdan mı yaklaştığının cevabını verir ve değerin ne kadar aşağıda veya ne kadar yukarıda olduğunu belirtir. $b = \frac{y_1}{y}$ değeri incelendiğinde talep negatif eğimli olduğundan $y < 0$ ve arz pozitif eğimli olduğundan $y_1 > 0$ olur. O halde $\frac{y_1}{y} < 0$ bulunur ve buradan fiyatın denge değerinin etrafında salınımlı hareket ettiği anlaşılır. Bu durum örümcek ağı olgusuna neden olur ve mümkün olan üç salınım türü ortaya çıkar. Bunlar

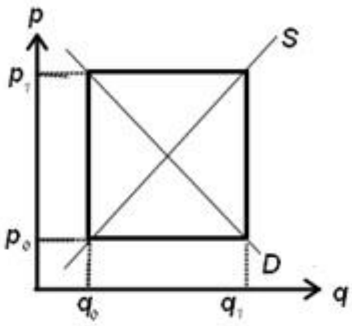
i. $|y_1| < |y|$ ise dengeye yönelen salınım
ii. $|y_1| = |y|$ ise denge etrafında kararlı salınım
iii. $|y_1| > |y|$ ise dengeden uzaklaşan salınım



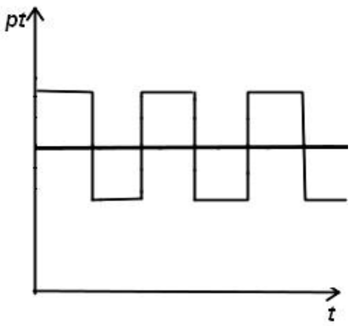
Şekil (4.1.1 a) dengeye yönelen salınım



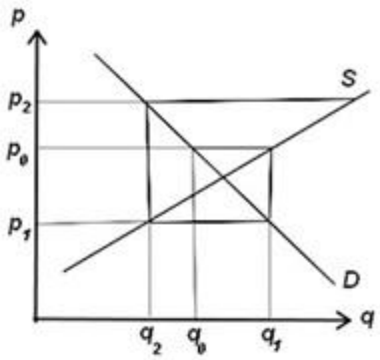
Şekil (4.1.1 a')



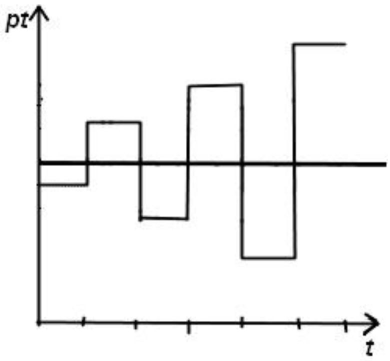
Şekil (4.1.1 b) denge etrafında kararlı salınım



Şekil (4.1.1 b')



Şekil (4.1.1 c) dengeden uzaklaşan salınım



Şekil (4.1.1 c')

i. Dengeye yönelen salınım: Şekil (4.1.1 a) da göründüğü üzere başlangıçta t_0 zamanında denge (q_0, p_0) noktasındadır. Bu noktada üretim q_0 , denge fiyatı ise p_0 dır.

t_1 dönemine gelindiğinde p_0 fiyatını referans alarak üretim kararı alan üreticiler q_1 kadar ürün üretmektedir. Fakat bu kadar ürün talebin üstünde olacağından ancak p_1 fiyata satılacaktır. t_2 dönemine gelindiğinde p_1 fiyatını referans alarak üretim kararı alan üreticiler q_2 kadar ürün üreteceklerdir. q_2 kadar ürün talebi karşılamadığından p_2 fiyatından satılacaktır. Fiyatın zamana göre değişimi ve denge fiyatına yönelerek salınımı şekil $(4.1.1\ a')$ da gösterilmektedir. Şekil $(4.1.1\ a')$'ya göre fiyat bir dönem denge fiyatının aşağısından bir dönem yukarısından salınım yaparak dengeye kendiliğinden gelecektir. Böyle durumlarda devletin tarım piyasasına müdahale etmesine gerek yoktur.

ii. Denge etrafında kararlı salınım: şekil $(4.1.1\ b)$ de göründüğü üzere başlangıçta t_0 zamanında denge (q_0, p_0) noktasında olsun. t_0 döneminde üreticiler p_0 fiyatını veri alarak üretim kararı almış olacaklar ve q_0 kadar üretim yapacaklardır. q_0 kadar ürün piyasada talebi karşılamadığından p_1 fiyata satılacaktır. Bir sonra ki dönemde üreticiler p_1 fiyatını dikkate alıp üretim kararı verecek olup q_1 kadar ürün üreteceklerdir. Piyasada bu kadar ürün talebi aştığından ürünün fiyatı p_0 olacaktır. Her seferinde üreticiler üretimlerini bir önceki döneme eşit oranla artırıp azaltarak fiyatın da bir önceki döneme göre eşit oranla artıp azalmasını sağlayacaklardır. Bu şekilde fiyat denge etrafında karalı bir salınım yapacaktır. Fiyatın zamana göre değişimi şekil $(4.1.1\ b')$ de gösterilmektedir. Bu grafiğe göre ürün fiyatları denge fiyatına eşit uzaklıkta bir alttan bir üstten olmak üzere kararlı salınım gerçekleştirir. Böyle durumlarda devletin müdahalesiyle ürün fiyatları bir önceki yılda ilan edilir veya üretimde kota veya kısıt olursa ürün fiyatları kararlı salınımdan dengeye yönelir.

iii. Dengeden uzaklaşan salınım: şekil $(4.1.1\ c)$ de göründüğü üzere başlangıçta t_0 zamanında denge (q_0, p_0) noktasında olsun. Bu dönemde q_0 kadar ürünün fiyatı p_0 dır. t_1 döneminde p_0 fiyatını referans alarak üretim kararı alan üreticiler q_1 kadar ürün üreteceklerdir. Fakat bu kadar ürün talebi aşacağından ürünün fiyatı p_1'e düşer. Bir sonraki dönem p_1 fiyatını referans alarak üretim kararı alan üreticiler q_2 kadar ürün üreteceklerdir. q_2 kadar ürün piyasada talebin çok aşağısında olduğundan ürünün fiyatı p_2 olacaktır. Şekil $(4.1.1\ c')$ de fiyatın zamana göre değişimi gösterilmektedir. Bu grafiğe göre t arttıkça fiyat bir önceki dönemle arasındaki farkı arttırarak büyür veya küçülür. Bu şekilde dengeden uzaklaşan bir salınım gerçekleştirir. Böyle durumlarda dengeye dönebilmek için mutlaka devletin tarım ürünleri politikasına müdahalesi gerekmektedir.

Örnek 4.1.1

$D_t = 80 - 4p_t$

$S_t = -10 + 2p_{t-1}$

$p_0 = 18$

Fonksiyonunun denge değeri ve dengenin durağan olup olmadığını inceleyin. $t = 4$'e kadar hesaplayın.

Çözüm

Sistemin dengede olduğu kabul edilip

$D_t = S_t$

alınırsa

$80 - 4p_t = -10 + 2p_{t-1}$

olur. Buradan bilinmeyenler bir tarafa toplanarak

$90 = 4p_t + 2p_{t-1}$

elde edilir. Her iki taraf da 2 ile bölünerek

$45 = 2p_t + p_{t-1}$

bulunur. $p_p = p_t = p_{t-1} = k$ için

$2k + k = 45$

$k = 15$

özel çözümü bulunur.

Denklemin homojen hali için $2p_t + p_{t-1} = 0$ olur. Bu denkleminde her iki tarafı 2 ile bölünürse, denklem

$p_t = -0.5p_{t-1}$

şeklinde yazılır. Buradan denklemin tamamlayıcı fonksiyonu herhangi bir A keyfi sabiti için

$$p_c = A\left(\frac{y_1}{y}\right)^t = A(-0.5)^t$$

olarak bulunur.

Tamamlayıcı fonksiyon ve özel çözüm toplanarak denklemin genel çözümü

$p_t = A(-0.5)^t + 15$

olarak elde edilir.

$p_0 = 18$ başlangıç değeri bilindiğine göre keyfi sabit olan A değeri bulunabilir.

$t = 0$ için

$p_0 = A(-0.5)^0 + 15$

$18 = A + 15$

$A = 3$

olur. O halde denklemin genel çözümü

$p_t = 3(-0.5)^t + 15$

olarak bulunur.

$t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ değerleri için p_t değeri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

t	$p_t = 22.5 - 0.5p_{t-1}$	$p_t = 3(-0.5)^t + 15$
0	$p_0 = 18$	$p_0 = 18$
1	$p_1 = 22.5 - 0.5 * 18 = 13.5$	$p_1 = 3(-0.5)^1 + 15 = 13.5$
2	$p_2 = 22.5 - 0.5 * (13.5) = 15.75$	$p_2 = 3(-0.5)^2 + 15 = 15.75$
3	$p_3 = 22.5 - 0.5 * (15.75) = 14.625$	$p_3 = 3(-0.5)^3 + 15 = 14.625$
4	$p_4 = 22.5 - 0.5 * (14.625) = 15.1875$	$p_3 = 3(-0.5)^4 + 15 = 15.1875$

Denklemde $y = -4,\ y_1 = 2$ olarak yazılırsa ve $|2| < |-4|$ olduğundan yani $|y_1| < |y|$ olduğundan dengeye yönelen bir salınım gerçekleşir.

4.1.2. Stoklama İçeren Bir Cobweb Modeli

Bu modelde öncelikli olarak aşağıdaki varsayımların gerçekleştiği kabul edilecektir[4].

1) Üretilen miktar ve talep edilen miktar aynı döneme ait ve doğrusal fonksiyonlardır.

2) Satıcılar dönem başında mevcut stoklarına göre fiyat belirlerler. Bir önceki dönemin fiyatları geçerli değildir. Fiyatlar eğer bir önceki dönemin fiyatına bağlı olarak stoklar artmışsa fiyatlar düşürülerek, stoklar azalmışsa fiyatlar yükseltilerek ayarlanır.

3) Dönemler arası fiyat ayarlamaları stoklarda meydana gelen değişiklik ile ters orantılıdır.

Bu varsayımlar altında model;

$$D = x - yp_t \qquad x, y > 0 \tag{4.1.2.1}$$

$$S = -x_1 + y_1 p_t \qquad x_1, y_1 > 0 \tag{4.1.2.2}$$

$$p_{t+1} = p_t - \sigma(S - D) \qquad \sigma > 0 \tag{4.1.2.3}$$

şeklinde oluşturulur. D talep ve S üretim fonksiyonlarıdır. σ değeri ise bu denklemde fiyat uyarlama katsayısıdır. $(S - D)$ değeri mevcut stoku belirtmektedir. (4.1.2.1) ve (4.1.2.2) eşitlikleri (4.1.2.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$p_{t+1} = p_t - \sigma(-x_1 + y_1 p_t - x + yp_t)$$

$$p_{t+1} - p_t[1 - \sigma(y + y_1)] = \sigma(x_1 + x) \tag{4.1.2.4}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homojen hali için tamamlayıcı fonksiyonu daha sonra homojen olmayan denklemin bir özel çözümü bulunmalıdır.

(4.1.2.4) denkleminde $\sigma(x_1 + x) = 0$ alınarak denklemin homojen hali için tamamlayıcı fonksiyonu araştırılsın. Bu durumda (4.1.2.4) denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$p_{t+1} - p_t[1 - \sigma(y + y_1)] = 0 \tag{4.1.2.5}$$

Birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin çözümünden $y_c = Ab^t$ tamamlayıcı fonksiyonu (4.1.2.5) denklemine uygulanırsa

$p_{t+1} = [1 - \sigma(y + y_1)]p_t$ için $b = 1 - \sigma(y + y_1)$ olup (4.1.2.4) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu

$$p_c = A[1 - \sigma(y + y_1)]^t$$

olarak bulunur.

(4.1.2.4) denkleminin bir özel çözümünü bulmak için $p_p = k$ çözümü denensin. (4.1.2.4) denkleminde $p_p = p_t = p_{t+1} = k$ yazılırsa;

$$k - k[1 - \sigma(y + y_1)] = \sigma(x_1 + x)$$

olur. Buradan özel çözüm

$$p_p = k = \frac{x_1 + x}{y + y_1}$$

olarak bulunur. (4.1.2.4) denkleminin genel çözümü

$$p_t = A[1 - \sigma(y + y_1)]^t + p_p == A[1 - \sigma(y + y_1)]^t + \frac{x_1 + x}{y + y_1}$$

şeklinde olur. Bu denklemi daha basit bir hale getirebilmek için bilinmeyen A teriminin yok edilmesi gerekmektedir. $t = 0$ için p_0 başlangıç koşul değeri bilindiği varsayımı altında A sabiti;

$$p_0 = A[1 - \sigma(y + y_1)]^0 + p_p$$

$$p_0 = A + p_p$$

$$A = p_0 - \frac{x_1 + x}{y + y_1}$$

olur. O halde modelin genel çözümü

$$p_t = \left(p_0 - \frac{x_1 + x}{y + y_1}\right)[1 - \sigma(y + y_1)]^t + \frac{x_1 + x}{y + y_1} \qquad (4.1.2.6)$$

olarak bulunur.

4.1.3. Gecikmeli Keynesyen Makroekonomik Modeli

Hükümet vergileri, yabancı sektör ve otonom harcamaların dahil edilmediği varsayımı altında ulusal geliri belirleyen Temel Keynesyen modelinin ulusal gelir özdeşliğine indirgenmiş hali;

$$Y = C + I \tag{4.1.3.1}$$

olarak yazılabilir. Burada Y ulusal geliri, C tüketimi ve I ise yatırımı ifade eder. Burada I yatırımı dışsal bir sabittir. C tüketim fonksiyonu, $a \geq 0$ ve b tüketimin marjinal eğilimi olmak üzere

$$C = a + bY \tag{4.1.3.2}$$

şeklindedir. Ulusal gelirin denge düzeyi Y^* olsun. Bu durumda (4.1.3.1) denkleminde (4.1.3.2) denklemi yerine yazılırsa;

$$Y^* = a + bY^* + I$$

$$Y^*(1 - b) = a + I$$

$$Y^* = \frac{a+I}{1-b} \tag{4.1.3.3}$$

denklemi elde edilir.

Eğer bu dengede bir dalgalanma varsa, örneğin dışsal I yatırımının değişmesi söz konusu ise, yeni denge anlık olarak düzenlenemez. Bu iyi bilinen çarpan etkisinin temeli demektir. Başlangıç harcamalarının bir kısmı başka bir ekonomi sektörü için gelir olacaktır. Bir kısmı da dalgalanma etkisi yok oluncaya kadar harcamanın ileri ki dönemlerine geçirilecektir. Bu yüzden tüketici harcamaları gelirin yeni düzeyine anlık olarak uyarlanamayabilir, burada gecikmeli bir etki tanımlanabilir[10]. Eğer bir dönemdeki tüketici harcamaları bir önceki dönemin gelirine bağlı ise tüketim fonksiyonu

$$C_t = a + bY_{t-1} \tag{4.1.3.4}$$

olur. Burada t indisi dönemi belirtir.

Ulusal gelir buna rağmen hala toplam harcamaların yapıldığı aynı zaman diliminde belirlenecektir. Bu yüzden ulusal gelir özdeşliği olan (4.1.3.1) denklemi t zaman indisi olarak tanımlandığında aşağıdaki gibi olur;

$$Y_t = C_t + I_t \tag{4.1.3.5}$$

(4.1.3.4) ve (4.1.3.5) denklemlerinde Y_{t-1}'e bağlı olarak Y_t 'nin nasıl hesaplanacağını ifade etmeye yarayan bir fark denklemi türetilebilir.

(4.1.3.4) ve (4.1.3.5) denklemlerinden

$$Y_t = a + bY_{t-1} + I_t \tag{4.1.3.6}$$

denklemi elde edilir. Bu bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir.

(4.1.3.6) denkleminin çözümü iki aşamada incelenecektir. Önce denklemin homojen olduğu varsayılarak tamamlayıcı fonksiyon ve daha sonra homojen olmayan (4.1.3.6) denkleminin bir k özel çözümü bulunacaktır. En sonunda tamamlayıcı fonksiyon ve özel çözüm toplanarak (4.1.3.6) denkleminin genel çözümü hesaplanacaktır.

$Y_t = a + bY_{t-1} + I_t$ denkleminde $a + I_t = 0$ olduğu yani denklemin homojen olduğu kabul edilirse

$$Y_t = bY_{t-1}$$

olur. Burada tamamlayıcı fonksiyonun $y_c = Ab^t$ formülü ele alınacak olursa, A ve b bilinmeyen parametreleri için tamamlayıcı fonksiyon

$$Y_c = Ab^t \tag{4.1.3.7}$$

olarak bulunur.

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_t$$

denklemi için özel çözüm $Y_p = Y_t = Y_{t-1} = k$ olarak aransın. $b \neq 1$ için

$Y_t = Y_{t-1} = k$ için

$$k - bk = a + I_t$$

$$k(1 - b) = a + I_t$$

$$k = Y_p = \frac{a + I_t}{1 - b} \tag{4.1.3.8}$$

olarak bulunur.

Bulunan bu özel çözüm ve tamamlayıcı fonksiyonun toplamı genel çözümü verir. Genel çözüm

$$Y_t = Ab^t + Y_p$$

$$Y_t = Ab^t + \frac{a+I_t}{1-b} \tag{4.1.3.9}$$

olur. Bilinmeyen A parametresini yok etmek için Y_0 başlangıç değerinin bilindiğini kabul edelim. $t = 0$ için

$$Y_0 = Ab^0 + \frac{a+I_t}{1-b}$$

$$A = Y_0 - \frac{a+I_t}{1-b} \tag{4.1.3.10}$$

olarak bulunur. O halde (4.1.3.6) fark denkleminin en genel çözümü

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{a+I_t}{1-b}\right) b^t + \frac{a+I_t}{1-b} \tag{4.1.3.11}$$

olur.

Deneysel çalışmalarda 0 ile 1 aralığında olduğu tahmin edilen b marjinal tüketim eğilimi, eğer t artarsa $|b| < 1$ olduğu sürece b^t azalacaktır. Bu yüzden Y_t her zaman yeni dengeye doğru hareket edecektir.

Örnek 4.1.3.1

Aşağıda verilen gelir ve tüketim denklemlerinde başlangıçta $I_0 = 20$, $Y_0 = 100$ olsun ve sonra aniden $I_t = 25$'e kadar artsın ve bu değerde sabit kalsın. Bu durumda Y_t nin 6 dönem sonra nasıl değişeceği ve yakınsaklığının nasıl olacağını inceleyin.

$Y_t = C_t + I_t$

$C_t = 0.8Y_{t-1}$

Çözüm

Yukarıdaki denklemde C_t değeri Y_t gelir denkleminde yerine yazılırsa

$Y_t = 0.8Y_{t-1} + I_t$

denklemi elde edilir. $I_t = 25$ olduğundan bu denklem

$Y_t = 0.8Y_{t-1} + 25$

olarak yazılır. Buradan herhangi bir t dönemi için

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{a+I_t}{1-b}\right) b^t + \frac{a+I_t}{1-b}$$

genel çözüm formülünde tüm değerler yerine konulacak olursa $Y_0 = 100$ $a = 0$ ve $b = 0.8$ için

$$Y_t = \left(100 - \frac{0+25}{1-0.8}\right)(0.8)^t + \frac{0+25}{1-0.8}$$

$$Y_t = \left(100 - \frac{0+25}{0.2}\right)(0.8)^t + \frac{0+25}{0.2}$$

$$Y_t = (100 - 125)(0.8)^t + 125$$

$$Y_t = -25(0.8)^t + 125$$

gelir denklemi bulunur.

$t = 1$ için

$C_1 = 0.8Y_0 = 0.8 * 100 = 80$

$Y_1 = -25(0.8)^1 + 125 = 105$

$t = 2$ için

$C_2 = 0.8Y_1 = 0.8 * 105 = 84$

$Y_2 = -25(0.8)^2 + 125 = 109$

$t = 3$ için

$C_3 = 0.8Y_2 = 0.8 * 109 = 87.2$

$Y_3 = -25(0.8)^3 + 125 = 112.2$

$t = 4$ için

$C_4 = 0.8Y_3 = 0.8 * 112.2 = 89.76$

$Y_4 = -25(0.8)^4 + 125 = 114.76$

$t = 5$ için

$C_5 = 0.8Y_4 = 0.8 * 114.76 = 91.808$

$Y_5 = -25(0.8)^5 + 125 = 116.808$

$t = 6$ için

$C_6 = 0.8Y_5 = 0.8 * 116.808 = 93.4464$

$Y_6 = -25(0.8)^6 + 125 = 118.4464$

değerleri elde edilir.

Tüm $t = 1, \dots, 6$ değerleri için Y_t'nin değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

t	I_t	C_t	$Y_t = -25(0.8)^t + 125$
0	$I_0 = 20$	$C_0 = 80$	$Y_0 = 100$
1	$I_1 = 25$	$C_1 = 80$	$Y_1 = 105$
2	$I_2 = 25$	$C_2 = 84$	$Y_2 = 109$
3	$I_3 = 25$	$C_3 = 87.2$	$Y_3 = 112.2$
4	$I_4 = 25$	$C_4 = 89.76$	$Y_4 = 114.76$
5	$I_5 = 25$	$C_5 = 91.808$	$Y_5 = 116.808$
6	$I_6 = 25$	$C_6 = 93.4464$	$Y_6 = 118.4464$

Yukarıdaki tablo incelendiğinde Y_t denkleminde t artarken $(0.8)^t$ monoton bir şekilde 0'a yakınsayacağından Y_t de 125'e yakınsar ve sonunda bu denge değerinde durağan olur.

4.1.4. Biçimlendirilmiş Bir Harrod Modeli

Yazarı tarafından yaygın terimler kullanılarak ileri sürülen bu modelin doğru biçimlendirilişi literatürde çok tartışılmaktadır. Bir takım araştırmacılar tarafından benimsenen modelin verilecek olan hali muhtemelen en iyi model değildir. Buna rağmen bu modelin daha basit olması ve daha karmaşık formülasyonlara doğru bir adım olarak düşünülebilmesi büyük bir avantajdır [10].

Modelde;

1) Ekonomik büyüme ulusal gelir deki artışla ölçülmektedir.
2) Harrod'a göre büyüme oranı sermaye hasıla katsayısı k ve marjinal tasarruf eğilimi s tarafından belirlenmektedir.
3) Tasarruflar gelirin belli bir kısmını göstermektedir.

Bu durumda bir dönem önce tahmin edilen tasarruf fonksiyonu

$$S_t = sy_{t-1} \quad (4.1.4.1)$$

ve bir dönem önce tahmin edilen yatırım fonksiyonu

$$I_t = k(y_t - y_{t-1}) \quad (4.1.4.2)$$

olur. Burada k ve s sabitler y_t ise ulusal geliri ifade etmektedir. $y_t - y_{t-1}$ değeri de ulusal gelirde meydana gelen bir dönemlik değişikliği göstermektedir. Önceden tahmin edilen tasarruf fonksiyonu ile önceden tahmin edilen yatırım fonksiyonu eşit olduklarında sistem dengede olur. Bu (4.1.4.1) ile (4.1.4.2) denklemlerinin eşit olması demektir. O halde sistemde dengede iken

$$S_t = I_t \tag{4.1.4.3}$$

olur. (4.1.4.3) denkleminde (4.1.4.2) ve (4.1.4.1) denklemleri yerlerine yazılırsa;

$$sy_{t-1} = k(y_t - y_{t-1})$$

$$ky_t - y_{t-1}(k+s) = 0 \tag{4.1.4.4}$$

denklemi elde edilir. Buradan da eşitliğin her iki tarafı k ile bölünürse

$$y_t - \frac{k+s}{k} y_{t-1} = 0 \tag{4.1.4.5}$$

olur.

Bu (4.1.4.5) denklemi bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemidir. Denklemin çözülebilmesi için tamamlayıcı fonksiyonun bilinmesi yeterlidir. Daha önce ki konulardan tamamlayıcı fonksiyonun $y_t = Ab^t$ formunda olduğu bilinmektedir. (4.1.4.5) denklemi ele alındığında $b = \frac{k+s}{k}$ olduğu aşikardır. O halde

$$y_t = A\left(\frac{k+s}{k}\right)^t \tag{4.1.4.6}$$

olarak bulunur. Homojen fark denklemlerinin çözümünde A keyfi sabiti y_0 başlangıç değerine eşittir yani $A = y_0$'dır. Sonuç olarak (4.1.4.6) denklemi aşağıdaki son halini alır;

$$y_t = y_0\left(1 + \frac{s}{k}\right)^t \tag{4.1.4.7}$$

(4.1.4.7) denkleminde büyüme $\frac{s}{k}$ oranının büyüklüğüne bağlıdır. Harrod'a göre bu oran ''garantili büyüme oranı'' olarak adlandırır.

Ekonomik büyüme sermaye hasıla katsayısı ile negatif yönlü ve marjinal tasarruf eğilimi ile de pozitif yönlü bir ilişki içerisindedir. Yani ekonomik büyümenin olması için mutlaka tasarruf yapılmalı ve ulusal gelirin bir kısmı yatırımlara ayrılmalıdır.

Dinamik bir dengede gelir $\frac{s}{k}$ oranına bağlı olduğu zaman önceden tahmin edilen tasarruf ve yatırım arasında sürekli bir eşitlik söz konusu olur. Bu eşitlik kolaylıkla kontrol edilebilir. Denge durumunda $S_t = I_t$ olduğunu göstermek yeterlidir. (4.1.4.1) denkleminden

$$S_t = sy_{t-1} = sy_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1} \tag{4.1.4.8}$$

ve (4.1.4.2) denkleminden

$$I_t = k(y_t - y_{t-1})$$

$$= k\left[y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^t - y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1}\right]$$

$$= ky_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1}\left(1+\frac{s}{k}-1\right)$$

$$= ky_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1}\frac{s}{k}$$

$$= sy_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^{t-1} \tag{4.1.4.9}$$

olur. Buradan

$$I_t = S_t$$

olur.

Sonuç olarak bu garantili oranın en önemli özelliği sabit olmamasıdır. (4.1.4.7) denklemi herhangi bir nedenle dengeden saparsa t artarken dengeden çok daha fazla uzaklaşacaktır. Herhangi bir t döneminde dengenin $y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^t$ değerinde olmadığı kabul edilirse. Dışsal bir etki B olmak üzere yeni denge $y_0\left(1+\frac{s}{k}\right)^t + B$ değerinde olacaktır. Eğer $B > 0$ ise $I_t > S_t$ olduğu kolayca görülür. Bu B artışı gelire ek bir itme kazandırır ve denklemde önceki artışa oranla daha büyük bir artış meydana getirmeye başlar.

Örnek 4.1.4.1

Tasarrufun marjinal eğilimi $s = 0{,}20$ ve sermaye hasıla katsayısı $k = 5$ olsun. Garantili büyüme oranını belirleyip, $y_0 = 100$ başlangıç değeri ile $t = 4$'e kadar geliri, tasarrufu ve yatırımı hesaplayın.

Çözüm

Önce veriler yazılacak olursa

$s = 0{,}20$, $k = 5$ ve $y_0 = 100$

olur. Bu veriler doğrultusunda tasarruf ve yatırım fonksiyonları

$S_t = sy_{t-1} = 0{,}2y_{t-1}$

ve

$I_t = 5(y_t - y_{t-1})$

olarak bulunur. Dengenin sağlandığı kabul edildiğinde

$S_t = I_t$

olacaktır. O halde

$S_t = 0{,}2y_{t-1} = 5(y_t - y_{t-1})$

olur. Buradan

$$y_t - y_{t-1}\left(1 + \frac{0{,}2}{5}\right) = y_t - 1{,}04y_{t-1} = 0$$

elde edilir. Bu değerler (4.1.4.7) denkleminde yerine yazılacak olursa gelir

$y_t = 100(1{,}04)^t$

olarak bulunur. Bu sonuçta garantili büyüme oranını 0,04 olur. O halde tasarruf

$S_t = 0{,}2y_{t-1} = 0.2(\,100(1{,}04)^{t-1})$

$S_t = 20(1{,}04)^{t-1}$

ve yatırım

$I_t = 5(y_t - y_{t-1}) = 5[(\,100(1.04)^t) - (\,100(1.04)^{t-1})]$

$I_t = 5[100(1.04)^{t-1}(1.04 - 1)] = 500(1.04)^{t-1}0.04 = 20(1.04)^{t-1}$

olur. Burada $t = 0$ ve $I_0 = 100$ için

$$S_0 = I_0 = 20(1.04)^{-1} = \frac{20}{1.04} = 19.2308$$

olur.

$S_0,\ I_0, y_0$ başlangıç değerleri ile birlikte $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar $S_t,\ I_t,\ y_t$ değerleri aşağıdaki tablodadır.

t	$y_t = 100(1.04)^t$	$S_t = 20(1.04)^{t-1}$	$I_t = 20(1.04)^{t-1}$
0	$y_0 = 100(1.04)^0$ $= 100$	$S_0 = 20(1.04)^{-1}$ $= 19.2308$	$I_0 = 20(1.04)^{-1}$ $= 19.2308$
1	$y_1 = 100(1.04)^1$ $= 104$	$S_1 = 20(1.04)^0$ $= 20$	$I_1 = 20(1.04)^0$ $= 20$
2	$y_2 = 100(1.04)^2$ $= 108.16$	$S_2 = 20(1.04)^1$ $= 20.8$	$I_2 = 20(1.04)^1$ $= 20.8$

3	$y_3 = 100(1.04)^3$ $= 112.4864$	$S_3 = 20(1.04)^2$ $= 21.632$	$I_3 = 20(1.04)^2$ $= 21.632$
4	$y_4 = 100(1.04)^4$ $= 116.9859$	$S_4 = 20(1.04)^3$ $= 22.4973$	$I_4 = 20(1.04)^3$ $= 22.4973$

Tablo incelendiğinde $1{,}04 > 1$ olduğundan y_t değeri monoton artar.

4.1.5. Temel Phillips İstikrar Modeli

Nispi politika kuralı içeren bu model 1954 yılında Philips tarafından oluşturulan modelin bir versiyonudur [9].

GP_t hükümet harcamalarının nispi maliye politikasının bir bileşeni, G_0 otonom harcamalar, G_t hükümet harcamaları, I toplam yatırım, C_t toplam tüketim, C_0 otonom tüketim, c tüketimin marjinal eğilimi ve Y_t de toplam geliri ifade etsin. Bu durumda herhangi bir t dönemi için gelir denklemi

$$Y_t = C_t + I + G_t \tag{4.1.5.1}$$

şeklindedir. C_t toplam tüketim denklemi ve G_t hükümet harcamaları denklemi de aşağıdaki gibidir;

$$C_t = C_0 + cY_{t-1} \tag{4.1.5.2}$$

$$G_t = G_0 + GP_t \tag{4.1.5.3}$$

Bu (4.1.5.3) denkleminde GP_t değeri YF tam istihdam geliri ve $\gamma > 0$ artış katsayısı olmak üzere

$$GP_t = \gamma(YF - Y_{t-1}) \qquad \gamma > 0 \tag{4.1.5.4}$$

olarak yazılır. (4.1.5.4) denklemi maliye politikası hedefleri için otonom olmayan hükümet harcamalarının ayarlanabildiğini göstermektedir. Bir dönem öncesinde ekonomi tamamen tam istihdam gelirine bağlı ise otonom olmayan harcamalar yani GP_t sıfır olur ($GP_t = 0$). Eğer bir dönem öncesinde enflasyon açığı varsa bu durumda otonom olamayan harcamaların yönü negatif olacaktır. Böyle durumlarda daha gelişmiş modellerde hükümet harcama kesintine ve vergi artırımına gidebilir[9].

(4.1.5.4) denklemi (4.1.5.3) denkleminde yerine yazılırsa hükümet harcamaları

$$G_t = G_0 + GP_t$$

$$G_t = G_0 + ɣ(YF - Y_{t-1}) \qquad ɣ > 0 \qquad (4.1.5.5)$$

olarak bulunur. (4.1.5.2) ve (4.1.5.5) denklemleri (4.1.5.1) denkleminde yerine yazılırsa toplam gelir denklemi

$$Y_t = C_0 + cY_{t-1} \ + I + G_0 + ɣ(YF - Y_{t-1})$$

$$Y_t - (c - ɣ)Y_{t-1} = C_0 + I + G_0 + ɣYF \qquad (4.1.5.6)$$

olur.

Bulunan bu (4.1.5.6) denklemi bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu denklemin çözümü (4.1.5.6) denkleminde $C_0 + I + G_0 + ɣYF = 0$ kabul edilerek homojen hale dönüştürülen denklemin tamamlayıcı fonksiyonu ile (4.1.5.6) denkleminde aranacak $y_p = Y_t = Y_{t-1} = k$ özel çözümünün toplamı olacaktır.

$$C_0 + I + G_0 + ɣYF = 0$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$Y_t - (c - ɣ)Y_{t-1} = 0 \qquad (4.1.5.7)$$

olur. Homojen fark denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu $y_c = Ab^t$ formunda olup (4.1.5.7) denklemi için $b = c - ɣ$ olur ve A bilinmeyen keyfi sabiti için çözüm

$$y_c = A(c - ɣ\ )^t \qquad ɣ > 0 \qquad (4.1.5.8)$$

olarak elde edilir.

(4.1.5.6) denkleminin bir özel çözümü $y_p = Y_t = Y_{t-1} = k$ olsun. Bu durumda (4.1.5.6) denklemi $c - ɣ \neq 1$ için

$$k - (c - ɣ)k = C_0 + I + G_0 + ɣYF$$

olur. Buradan $ɣ > 0$ için

$$y_p = k = \frac{C_0 + I + G_0 + ɣYF}{1 - (c - ɣ)} \qquad (4.1.5.9)$$

olarak bulunur.

(4.1.5.6) denkleminin çözümü (4.1.5.8) tamamlayıcı fonksiyon ve (4.1.5.9) özel çözümün toplamıdır. O halde toplam gelir $ɣ > 0$ ve $c - ɣ \neq 1$ için

$$Y_t = A(c - ɣ\ )^t + \frac{C_0 + I + G_0 + ɣYF}{1 - (c - ɣ)} \qquad (4.1.5.10)$$

olur. A keyfi sabiti bilinmeyen olduğundan bu terimi yok etmek için Y_0 başlangıç değerinin bilindiği varsayılsın. Bu durumda $t = 0$ için (4.1.5.10) denkleminden

$$Y_0 = A(c - ɣ\ )^0 + \frac{C_0 + I + G_0 + ɣYF}{1 - (c - ɣ)}$$

$$Y_0 = A + \frac{C_0 + I + G_0 + \gamma YF}{1 - c + \gamma}$$

olur. Buradan A değeri çekilirse

$$A = Y_0 - \frac{C_0 + I + G_0 + \gamma YF}{1 - c + \gamma} \qquad (4.1.5.11)$$

elde edilir. O halde toplam gelir $\gamma > 0$ ve $c - \gamma \neq 1$ için

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{C_0 + I + G_0 + \gamma YF}{1 - c + \gamma}\right)(c - \gamma)^t + \frac{C_0 + I + G_0 + \gamma YF}{1 - c + \gamma} \qquad (4.1.5.12)$$

olur. İşlemlerde kolaylık olması açısından

$$Y^* = Y_0 - \frac{C_0 + I + G_0 + \gamma YF}{1 - c + \gamma}$$

olarak alınırsa (4.1.5.12) denklemi yani toplam gelir $\gamma > 0$ ve $c - \gamma \neq 1$ için

$$Y_t = Y^*(c - \gamma)^t + (Y_0 - Y^*) \qquad (4.1.5.13)$$

olarak yazılır.

4.1.6. Temel Gelir Enflasyonu Modeli

Gelir enflasyonu; gerçek gelirlerini, parasal gelirlerini yükseltme yoluna giderek artırmaya çabalayan farklı gelir gruplarının meydana getirdiği enflasyonist sürecin bir türüdür. P_t fiyat düzeyi ve y_t gerçek gelir olmak üzere parasal ulusal gelir

$$Y_t = P_t y_t \qquad (4.1.6.1)$$

olarak tanımlanır.

Parasal ulusal geliri belirleyen unsurların sadece iki tane olduğu ve bunların ücret geliri ile geçinenler (işçiler) ve girişimciler (firmalar) olduğu varsayılsın[10]. Bu varsayım altında W_t toplam parasal ücret ve E_t toplam parasal kar olmak üzere parasal ulusal gelir

$$Y_t = W_t + E_t \qquad (4.1.6.2)$$

olarak tanımlanır. Burada parasal ulusal geliri belirleyen unsurlar ikiden fazla olsa bile modelin sonucu değişmeyecektir.

(4.1.6.2) denkleminde girişimcilerin gerçek gelirden a oranında bir pay elde etmek istedikleri kabul edilsin. O halde girişimcilerin istedikleri kar payı $e_t = ay_t$ olur.

Buradan girişimcilerin bu payı elde etmek için fiyatları değiştirmeye yetecek güçlerinin olduğu söylenebilir. Bu durumda toplam parasal kar

$$E_t = e_t P_t = a y_t P_t \qquad (4.1.6.3)$$

olur. (4.1.6.2) denkleminden $E_t = Y_t - W_t$ ve (4.1.6.1) denkleminde $Y_t = P_t y_t$ olduğundan $a y_t P_t = P_t y_t \; - W_t$ (4.1.6.4)

olur. Sonuç olarak fiyat düzeyi

$$P_t = \frac{1}{(1-a) y_t} W_t \qquad (4.1.6.5)$$

olur.

Şimdi de işçi gruplarının gerçek gelirden pay almak istedikleri ve bu payı almak için harekete geçtikleri varsayılsın ve bu payın oranı c olsun. İşçilerin ücretlerine yansıyacak bu artışın olabilmesi için pazarlıklar yapılacaktır ve bu yüzden zammın ücretlere yansıması zaman alacaktır. Bu da zammın maaşlara gecikmeli yansıması demektir. Bu durumda toplam parasal ücret

$$W_t = c y_{t-1} P_{t-1} \qquad (4.1.6.6)$$

olur. Bu (4.1.6.6) denklemi (4.1.6.5) denkleminde yerine yazılırsa fiyat düzeyi

$$P_t = \frac{c y_{t-1}}{(1-a) y_t} P_{t-1} \qquad (4.1.6.7)$$

olarak bulunur.

Bu (4.1.6.7) denkleminin çözülmesi için $\frac{y_{t-1}}{y_t}$ oranının biliniyor olması gerekmektedir. $\frac{y_{t-1}}{y_t}$ oranının değerine göre (4.1.6.7) denklemini çözerken iki sonuç ortaya çıkar.

1) Gelirin sabit olması sonucu

Gelir sabit olduğunda $y_{t-1} = y_t$ olup $\frac{y_{t-1}}{y_t} = 1$ olur. Bu durumda (4.1.6.7) denklemi aşağıdaki gibi yazılır;

$$P_t = \frac{c}{1-a} P_{t-1} \qquad (4.1.6.8)$$

Bu denklem birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemidir. Daha önce ki konulardan bu tip denklemlerin çözümünün $y_t = Ab^t$ formunda olduğu bilinmektedir. A keyfi bir sabit, $a \neq 1$ ve $b = \frac{c}{(1-a)}$ için (4.1.6.8) denkleminin genel çözümü

$$P_t = A \left(\frac{c}{1-a}\right)^t \qquad (4.1.6.9)$$

olur. Burada A bilinmeyenini yok etmek için P_0 başlangıç değerinin bilindiği varsayılır. O halde $t = 0$ için

$$P_0 = A\left(\frac{c}{1-a}\right)^0$$

$$P_0 = A$$

bulunur. Sonuç olarak (4.1.6.8) denkleminin genel çözümü

$$P_t = P_0\left(\frac{c}{1-a}\right)^t \qquad (4.1.6.10)$$

olarak bulunur. Burada $1 - a > 0$ ise P_t monoton olur. $\frac{c}{1-a} > 1$ olduğunda da fiyat düzeyi devamlı artacaktır.

2) Gelirin bir r sabiti ile büyümesi sonucu

Gelirin bir r sabitiyle büyümesi gelir denkleminin $y_t = y_0(1 + r)^t$ olması demektir. O halde $y_{t-1} = y_0(1 + r)^{t-1}$ olur. Buradan yola çıkarak

$$\frac{y_{t-1}}{y_t} = \frac{y_0(1+r)^{t-1}}{y_0(1+r)^t} = \frac{1}{1+r} \qquad (4.1.6.11)$$

elde edilir. Bu değer (4.1.6.7) denkleminde yerine yazılırsa fiyat düzeyinin yeni denklemi

$$P_t = \frac{c}{(1-a)}\frac{1}{1+r}P_{t-1} \qquad (4.1.6.12)$$

olur. Bu denklemde bir birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen fark denklemidir. Yine A keyfi bir sabit, $(1 - a)\,(1 + r) \neq 0$ ve $b = \frac{c}{(1-a)\,(1+r)}$ için (4.1.6.12) denkleminin genel çözümü

$$P_t = A\left(\frac{c}{(1-a)\,(1+r)}\right)^t \qquad (4.1.6.13)$$

olarak bulunur. Bu (4.1.6.13) denkleminde A sabitinin yok edilebilmesi için P_0 başlangıç değerinin bilinmesi gerekmektedir. P_0 değerinin bilindiği varsayılırsa $t = 0$ için

$$P_0 = A\left(\frac{c}{(1-a)\,(1+r)}\right)^0$$

$$P_0 = A$$

bulunur. O halde (4.1.6.13) denkleminin genel çözümü

$$P_t = P_0\left(\frac{c}{(1-a)\,(1+r)}\right)^t \qquad (4.1.6.14)$$

olarak bulunur. Burada $\frac{c}{(1-a)\,(1+r)} > 1$ olduğunda P_t monoton artan olur.

Örnek 4.1.6.1

Gerçek gelirin tam istihdamla sağlandığı bir ekonomide ücret karşılığı çalışan işçilerin devletten istedikleri payın oranı 0,52 ve girişimcilerin istedikleri payın oranı da 0,48 olsun. İşçiler 0,60 oranında artış istesinler ve girişimciler de paylarını korumak ve fiyatlarda değişiklik yapmak istesinler. Bu veriler doğrultusunda enflasyon oranını hesaplayın[10].

Çözüm

Herhangi bir *t* dönemi için fiyat düzeyi denklemi aşağıdaki gibidir;

$$P_t = \frac{c}{1-a} P_{t-1}$$

Bu denklemin çözümü

$$P_t = P_0 \left(\frac{c}{1-a}\right)^t$$

olduğu bilinmektedir. Bu denklemde $c = 0{,}60$, $a = 0{,}48$ olmak üzere

$$P_t = \frac{0{,}60}{1-0{,}48} P_{t-1}$$

olur. Buradan

$$P_t = P_0 \left(\frac{0{,}60}{0{,}52}\right)^t$$

$$P_t = P_0 (1{,}1538)^t$$

sonucu elde edilir. Bu sonuca göre enflasyon oranı %15,38 dir.

4.2. İKİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL FARK DENKLEMLERİNİN İKTİSADİ UYGULAMALARI

4.2.1. Metzler Stok Analiz Modeli

Fark denklemlerinin kullanıldığı çarpan-hızlandırıcı modelin bir türü olan bu model stok döngüsünün analizini yapmak için L.A Metzler (1941) tarafından oluşturulmuştur. Metzler'in temel fikri üreticilerin beklenilen satıştan kalan ürünlerden bir kısmının stoklarını istedikleri düzeyde tutmaktı. Metzler'in bu modeli Erik Lundberg'in (1937) yaptığı çalışmaya benzer olarak üretim ve satış arasındaki gecikmeye dayalı olarak oluşturdu. Bu modeldeki temel düşünce zamanın sabit uzunluklara ayrılması ve tüm fonksiyonların hangi aralıklarda değerlendirilecek iseler o aralıklara göre zamanlandırılmasıdır. [11,23].

İktisatta üreticiler ve tüketiciler üretim yaptıklarında iki amaca sahiptirler. Birincisi ürettikleri ürünlerini kendi beklentilerini karşılayacak şekilde sürekli satmaktır. İkincisi de stokların istenilen seviyede olmasını sağlamaktır[10]. u_t üreticilerin t döneminde ürettikleri ürünler için gerçekleşmesini bekledikleri satış miktarı ve s_t de üreticilerin t döneminde ürettikleri ürünler için düşündükleri stok miktarı olsun.

Herhangi bir t dönemi için otonom yatırım I_t gibi bir sabit ile ifade edilsin. Bu t döneminde toplam gelirin tüketiciler için üretilen bütün ürünler ile otonom yatırımın toplamına eşit olduğu varsayılsın. Toplam gelir y_t ile gösterilecek olursa

$$y_t = u_t + s_t + I_t \tag{4.2.1.1}$$

olduğu bilinmektedir.

Birinci amaçta üreticiler herhangi bir t döneminde satmak için düşündükleri ürünlerin üretim planlarını o dönemin başında ve bir önceki dönemin satışlarına göre yaparlar. Bir önceki dönemde gerçek satışların toplam gelirin bir kısmını oluşturduğu bilinmektedir. Toplam gelir içerisinde ki bu oran m ile gösterilen bir sabitle ifade edilsin. Bu m sabiti marjinal tüketim eğilimidir. Bu bilgiler doğrultusunda üreticiler üretim planı yaparken bir önceki dönemi ele alacaklarından t dönemi için değil $t-1$ dönemi için işlemler yaparlar. Bu varsayımlar altında $t-1$ dönemi için gerçekleşen satış

$$C_{t-1} = my_{t-1}$$

olmak üzere beklenen satış

$$u_t = C_{t-1}$$

$$u_t = my_{t-1} \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.2)$$

olur.

İkinci amaçta üreticiler herhangi bir dönem için yapmayı düşündükleri stok miktarını o dönemin başında yaparlar ve stokların aynı sabit seviyede kalmasını sağlamak için uğraşırlar. Yani üreticiler talepte meydana gelen beklenmedik artış ile azalan veya tükenen stoklarını yeniden artırmaya veya beklenmedik bir şekilde talep yetersizliği sonrası ellerinde kalan fazla stoklarını azaltmaya çalışırlar.

Metzler herhangi bir t döneminde stok için üretilecek olan ürün miktarının bir önceki dönemde gerçekleşen satışların ve bir önceki dönemde beklenen satışların farkına eşit olduğunu varsayar. Eğer bu fark +5 ise gerçek satış beklenen satışı 5 birim aşar ve üreticiler stok miktarını yeniden ayarlar. Bu 10 birimlik fark stokların 5 birim azalmasına neden olur. Üreticiler de bu 5 birimlik stok azalmasını telafi etmek için planlar yapar. Eğer bu fark -5 ise beklenen satışlar gerçekleşen satışları 5 birim aşar. Bu durumda stoklarda 5 birimlik fazlalık olur ve üreticiler bu 5 birimlik fazlalığı bir sonraki dönemde eritmek için planlar yapar[11].

Herhangi bir t dönemi için beklenen satışların miktarı (4.2.1.2) denklemi olduğu bilinmektedir. Bir dönem önce yani $t-1$ döneminde beklenen satış miktarı

$$u_{t-1} = my_{t-2} \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.3)$$

olur. Bu $t-1$ dönemi için satış miktarı

$$C_{t-1} = my_{t-1} \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.4)$$

olduğu bilinmektedir. Stok miktarı herhangi bir dönem için gerçekleşen satış ile beklenen satışların farkına eşit olacağından

$s_t = my_{t-1} - my_{t-2}$

$s_t = m(y_{t-1} - y_{t-2}) \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.5)$

olarak bulunur. Son olarak (4.2.1.2) ve (4.2.1.5) denklemleri (4.2.1.1) denkleminde yerlerine yazılırsa gelir denkleminin genel biçimi

$y_t = u_t + s_t + I_t$

$y_t = my_{t-1} + m(y_{t-1} - y_{t-2}) + I_t$

$y_t = 2my_{t-1} - my_{t-2} + I_t$

$y_t - 2my_{t-1} + my_{t-2} = I_t$

denklemi elde edilir.. $t = 0$ ‘dan başladığından

$y_{t+2} - 2my_{t+1} + my_t = I_t \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.6)$

yazılabilir.

Bu (4.2.1.6) denklemi ile net gelir elde edilir. Bu net gelir denklemi bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu tür denklemlerin çözümü iki aşamada yapılmaktadır. İlk aşamada (4.2.1.6) denkleminde $y_p = k$ özel çözümü bulunacak ve denklemde yerine konulacaktır. İkinci aşamada ise (4.2.1.6) denkleminde $I_t = 0$ olduğu kabul edilerek yani denklemin homojen olduğu varsayılarak (4.2.1.6) denkleminin karakteristik denklemi oluşturulup karakteristik kökler bulunarak tamamlayıcı fonksiyon oluşturulacaktır.

(4.2.1.6) denkleminin bir özel çözümü $y_t = y_p = k$ olsun. Bu durumda (4.2.1.6) denkleminde y_t yerine k yazılırsa özel çözüm

$k - 2mk + mk = I_t$

$k(1 - 2m + m) = I_t$

$y_p = k = \frac{1}{1-m} I_t \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.7)$

olarak bulunur.

(4.2.1.6) denkleminde $I_t = 0$ olduğu kabul edilsin. O halde (4.2.1.6) denklemi aşağıdaki gibi homojen bir denklem halini alır.

$$y_t - 2my_{t-1} + my_{t-2} = 0$$

Bu homojen denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 2m\lambda + m = 0 \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.8)$$

olur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m}}{2} \qquad 0 < m < 1 \qquad (4.2.1.9)$$

formülü ile bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken köklü ifadedir. $0 < m < 1$ olduğundan daima $m^2 < m$ olur. Bu da $4(m^2 - m) < 0$ olması demektir. Bu durumda kökün içi negatif olacaktır ve $\lambda_{1,2}$ kökleri sanal kökler olacaktır. Buradan kökler

$$\lambda_1 = \frac{2m + 2\sqrt{m(m-1)}}{2} = m + \sqrt{m(m-1)}$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{2m - 2\sqrt{m(m-1)}}{2} = m - \sqrt{m(m-1)}$$

olarak bulunur. Burada $\lambda_1 = a + bi$ ve $\lambda_2 = a - bi$ formundadır. Tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t$$

olduğu daha önceki konulardan bilinmektedir. $\lambda_1 = a + bi$ ve $\lambda_2 = a - bi$ için tamamlayıcı fonksiyon A_1 ve A_2 bilinmeyen sabitler olmak üzere

$$y_t = A_1(a + bi)^t + A_2(a - bi)^t \qquad (4.2.1.10)$$

şeklinde yazılabilir.

$K = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için

$(a \pm bi)^t = K^t(cos\theta t \pm i\ sin\theta t)$

bu değerler (4.2.1.10) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_t = A_1 K^t(cos\theta t + i\ sin\theta t) + A_2 K^t(cos\theta t - i\ sin\theta t)$$

$$= K^t[(A_1 + A_2)cos\theta t + (A_1 - A_2)i\ sin\theta t] \qquad (4.2.1.11)$$

elde edilir.

$A_1 + A_2 = A_3$ ve $(A_1 - A_2)i = A_4$ için tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c = K^t(A_3 cos\theta t + A_4\ sin\theta t) \qquad (4.2.1.12)$$

olarak bulunur.

(4.2.1.6) denklemini genel çözümü özel çözüm ile tamamlayıcı fonksiyonun toplamıdır. Yani genel çözüm

$$y_t = K^t(A_3 cos\theta t + A_4\ \ sin\theta t) + \frac{1}{1-m} I_t \qquad (4.2.1.13)$$

olarak bulunur.

(4.2.1.13) denkleminde $\frac{1}{1-m} I_t$ değeri denge fiyatıdır. Sistemin dengeye yakınsayıp yakınsamadığı K^t değerine bağlıdır.

Örnek 4.2.1.1

Başlangıç döneminde gelir 2000, gerçek satış 1000, otonom harcamalar 1000 ve stoklar istenilen düzeyde olsun. 1. döneme gelindiğinde otonom yatırım 1100 olsun ve bu değerde sabit kalsın. Marjinal tüketim eğiliminin 0,5 olduğu varsayılırsa $t = 20$ ye kadar olan geliri ve stoku bulun. Dengenin durumunu inceleyin[10].

Çözüm

$y_0 = 2000$, $u_1 = 1000$, $I_0 = 1000$ ve $m = 0{,}5$ başlangıç değerleri bilinmektedir. $s_0 = s_1 = 0$ dır çünkü stok bir önceki ve iki önceki döneme göre hesaplandığı için $t = 2$ olana kadar stok söz konusu değildir. Bu durumda $t > 0$ için $I_0 = 1100$ olduğunda gelir denklemi

$$y_t = u_t + s_t + 1100$$

olur. $m = 0{,}5$ için

$$y_{t+2} - y_{t+1} + 0{,}5y_t = 1100$$

olur. Bu bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu denklemin özel çözümü $y_p = k$ olsun. Bu durumda

$$k - k + 0{,}5k = 1100$$

$$k(1 - 1 + 0{,}5) = 1100$$

$$k = 2200$$

olur. Gelir denkleminin homojen hali

$$y_{t+2} - y_{t+1} + 0{,}5y_t = 0$$

olsun. Bu durumda fark denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda + 0.5 = 0$$

olarak bulunur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 2)}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 2)}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

olur. Bu sonuçlarla $a = \frac{1}{2}$ ve $b = \frac{1}{2}$ bulunur. Buradan

$$K = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ve

$$sin\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

olur ve sonuç olarak $\theta = 45$ bulunur. Bulunan bu değerlerin hepsi (4.2.1.13) denkleminde yerine yazılırsa gelir denklemi A_3 ve A_4 bilinmeyen sabitleri için

$$y_t = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t (A_3 \cos{(45t)} + A_4 \ \sin{(45t)}) + 2200$$

olarak elde edilir. Bu A_3 ve A_4 sabitlerini yok etmek için başlangıç değerlerine ihtiyaç vardır. $y_0 = 2000$ ve $y_1 = u_1 + s_1 + 1100 = 1000 + 0 + 1100 = 2100$

Başlangıç değerleri bilindiğinden $t = 0$ için

$$y_0 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^0 [A_3 \cos{(45 * 0)} + A_4 \sin{(45 * 0)}] + 2200$$

$$2000 = (A_3 cos0 + A_4 \ sin0) + 2200$$

olur buradan $A_3 = -200$ bulunur. $t = 1$ için

$$y_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^1 (-200 \ cos45 + A_4 \ sin45) + 2200$$

$$2100 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(-200 \sqrt{\frac{1}{2}} + A_4 \ \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + 2200$$

$-100 = -100 + A_4 \, \frac{1}{2}$

$A_4 = 0$ bulunur. A_3 ve A_4 yerlerine yazılırsa genel çözüm denklemi

$$y_t = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t (-200) \cos{(45t)} + 2200$$

olarak bulunur.

Genel çözüm denklemi bulunduğuna göre $t = 0,1, \ldots\ldots,20$ ye kadar gelir değerleri her iki denklem ile birlikte hesaplanabilir. Aşağıda 5. döneme kadar hesaplama yapılmıştır. 20. döneme kadar tek tek çözmek çok fazla zaman alacağı için model Excel programında oluşturularak aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablo incelendiğinde 2., 6., 10., 14. ve 18. dönemlerde gelirin dengede olduğu görülmektedir. Gelir denge etrafında salınım yapmaktadır. $\cos(45t) = 0$ olduğu zamanlarda sistem dengede olmaktadır.

$y_t = u_t + s_t + I_t$

$t = 1$ için

$s_1 = 0$

$y_1 = u_1 + s_1 + I_1$

$y_1 = my_0 + 0 + 1100$

$y_1 = 0.5 * 2000 + 1100$

$y_1 = 2100$

$$y_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^1 (-200) \cos(45) + 2200$$

$y_1 = 0.707107 * (-200) * 0.707107 + 2200$

$y_1 = 2100$

$t = 2$ için

$s_2 = m(y_1 \ \ - y_2) = 0.5(2100 - 2000) = 50$

$y_2 = my_1 + 50 + 1100$

$y_2 = 0.5 * 2100 + 50 + 1100$

$y_2 = 2200$

$y_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 (-200)\cos(90) + 2200$

$y_2 = 2200$

$t = 3$ için

$s_3 = m(y_2 \ \ - y_1) = 0.5(2200 - 2100) = 50$

$y_3 = my_2 + 50 + 1100$

$y_3 = 0.5 * 2200 + 50 + 1100$

$y_3 = 2250$

$y_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 (-200)\cos(135) + 2200$

$y_3 = 2250$

$t = 4$ için

$s_4 = m(y_3 \ \ - y_2) = 0.5(2250 - 2200) = 25$

$y_4 = my_3 + 50 + 1100$

$y_4 = 0.5 * 2250 + 25 + 1100$

$y_4 = 2250$

$y_4 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 (-200)\cos(180) + 2200$

$y_4 = \frac{1}{4}(-200)(-1) + 2200$

$y_4 = 50 + 2200$

$y_4 = 2250$

$t = 5$ için

$s_5 = m(y_4 \ - y_3) = 0.5(2250 - 2250) = 0$

$y_5 = 0.5 * 2250 + 0 + 1100$

$y_5 = 2225$

$y_5 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 (-200)\cos(945 * 50) + 2200$

$y_5 = 2225$

t	$cos(45t)$	$s_2 = m(y_1 \ - y_2)$	$y_t = u_t + s_t + I_t$	$y_t = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t (-200)\cos(45t) + 2200$
0	0	0	2000	2000
1	45	0	2100	2100
2	90	50	2200	2200
3	135	50	2250	2250
4	180	25	2250	2250
5	225	0	2225	2225
6	270	-12,5	2200	2200
7	315	-12,5	2187,5	2187,5
8	0	-6,25	2187,5	2187,5
9	45	0	2193,75	2193,75
10	90	3,125	2200	2200
11	135	3,125	2203,125	2203,125
12	180	1,5625	2203,125	2203,125
13	225	0	2201,5625	2201,5625

14	270	-0,78125	2200	2200
15	315	-0,78125	2199,21875	2199,21875
16	0	-0,390625	2199,21875	2199,21875
17	45	0	2199,609375	2199,609375
18	90	0,1953125	2200	2200
19	135	0,1953125	2200,195313	2200,195313
20	180	0,09765625	2200,195313	2200,195313

4.2.2. Samuelson’un Çarpan-Hızlandıran Modeli

Bu model Hansen’in bir önerisini dikkate alarak üzerinde çalışan Samuelson tarafından (1939) oluşturulmuştur. Bu model çarpan ve hızlandıran etkileşimlerin döngüleri nasıl ürettiklerini göstermek için tasarlanmıştır ve ulusal gelir belirlemede kullanılan tüm çarpan-hızlandıran modellerin temelini oluşturmaktadır. Kapalı bir ekonomide model tüketim fonksiyonu, hızlandıran fikri içeren bir yatırım fonksiyonu ve bir de gelir fonksiyonunu içermektedir[10,19].

Kapalı bir ekonomide oluşturulacak olan modelin aşağıdaki üç varsayımı sağladığı kabul edilsin.

1) Herhangi bir dönemde tüketim harcamaları bir önceki dönemin geliri ile orantılıdır.
2) Herhangi bir dönemde gerçekleşen yatırım aynı dönem ile bir önceki dönemde gerçekleşen tüketim harcamalarının farkı ile orantılıdır (hızlandıran prensibi).
3) Hükümet harcamaları (otonom yatırımlar) tüm dönemler için aynıdır.

Bu varsayımlar altında ulusal gelirin davranışları analiz edilebilir. Bu varsayımlar teker teker önce matematiksel denklemler olarak belirlenir ve denklemlerin tüm değişkenlerini barındıran daha basit bir denkleme türetilerek ulusal gelirin zamanın bir fonksiyonuymuş gibi incelenmesine olanak sağlar[11].

C_t tüketim harcamaları ve $0 < \beta < 1$ marjinal tüketim eğilimi olsun. 1. varsayıma göre tüketim t dönemi için ele alındığında gelir $t-1$ dönemi için ele alınacaktır ve aralarındaki oran β olacaktır. Bu durumda y_t ulusal gelir olmak üzere tüketim harcamaları denklemi

$$C_t = \beta y_{t-1} \qquad\qquad 0 < \beta < 1 \qquad\qquad (4.2.2.1)$$

olur. Bu denklemde açık bir şekilde tüketim ile gelir arasında bir dönem fark vardır.

I_t özel yatırım harcamaları ve $\alpha > 0$ sabit bir oran olsun. 2. varsayıma göre t döneminde bu döneme ait tüketim ile $t-1$ dönemine ait tüketimin farkları ile özel yatırım harcamaları arasında bir oran vardır ve bu oran α dır. Bu durumda özel yatırım harcamaları denklemi

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) \qquad\qquad \alpha > 0 \qquad\qquad (4.2.2.2)$$

olur. Hansen'in 'oran' olarak tabir ettiği bu α sabiti hızlandırma katsayısıdır[10]. 1. varsayıma dayanarak (4.2.2.1) denklemi (4.2.2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$I_t = \alpha(\beta y_{t-1} - \beta y_{t-2}) \qquad\qquad 0 < \beta < 1 \quad\quad \alpha > 0$$

$$I_t = \alpha\beta(y_{t-1} - y_{t-2}) \qquad\qquad 0 < \beta < 1 \quad\quad \alpha > 0 \qquad\qquad (4.2.2.3)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $\gamma > 0$ olacak şekilde $\alpha\beta = \gamma$ olarak alınırsa(4.2.2.3) denklemi

$$I_t = \gamma(y_{t-1} - y_{t-2}) \qquad\qquad \gamma > 0 \qquad\qquad (4.2.2.4)$$

şeklinde yazılır.

Son olarak 3. varsayıma göre G_t hükümet harcamaları her t dönemi için aynıdır yani $G_t = G$ olacak şekilde bir sabittir.

Gelirin dengede olduğu durumda aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu bilinmektedir.

$$y_t = C_t + I_t + G_t \qquad\qquad (4.2.2.5)$$

Yukarıda belirlenen tüketim, hükümet harcamaları ve yatırım denklemleri (4.2.2.5) denkleminde yerlerine yazılırsa ulusal gelir denklemi

$$y_t = \beta y_{t-1} + ɣ(y_{t-1} - y_{t-2}) + G \qquad 0 < \beta < 1 \quad ɣ > 0 \qquad (4.2.2.6)$$

olarak elde edilir. Bu denklem

$$y_t = (\beta + ɣ) y_{t-1} - ɣ y_{t-2} + G$$

$$y_t - (\beta + ɣ) y_{t-1} + ɣ y_{t-2} = G \qquad 0 < \beta < 1 \quad ɣ > 0 \qquad (4.2.2.7)$$

şeklinde yazılabilir. (4.2.2.7) denklemi bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu fark denkleminin çözümü için önce özel çözümün ve tamamlayıcı fonksiyonun bulunup sonra bunların toplanması ile elde edilir.

(4.2.2.7) denkleminde $y_p = y_t = y_{t-1} = k$ olacak şekilde k özel çözümü denensin. Bu durumda özel çözüm

$$k - (\beta + ɣ)k + ɣk = G$$

$$k(1 - \beta - ɣ + ɣ) = G$$

$$y_p = k = \frac{G}{1 - \beta} \qquad 0 < \beta < 1 \qquad (4.2.2.8)$$

olur. Bu özel çözüm ‘’ulusal gelir = toplam harcama’’ denge koşulunun yerine getirilmesi anlamında denge düzeyini verir. Hükümet harcamalarına $\frac{1}{1-\beta}$ çarpanının uygulanması ile elde edilir. Bu yüzden $\frac{1}{1-\beta}$ ifadesi yatırımın yokluğunda devam etmesi gereken çoğaltandır.

(4.2.2.7) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonunu bulmak için önce denklemin homojen bir denklem olduğu kabul edilerek karakteristik denklemi bulunmalıdır. (4.2.2.7) denkleminin karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\lambda^2 - (\beta + ɣ)\lambda + ɣ = 0 \qquad 0 < \beta < 1 \quad ɣ > 0 \qquad (4.2.2.9)$$

Bu (4.2.2.9) denkleminin karakteristik kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\beta + ɣ) \pm \sqrt{(\beta + ɣ)^2 - 4ɣ}}{2} \qquad 0 < \beta < 1 \quad ɣ > 0 \qquad (4.2.2.10)$$

diskriminant formülüne göre bulunur. Bu köklere göre kararlılık durumları

$$1-(\beta+\gamma)+\gamma=1-\beta>0 \tag{4.2.2.11}$$

$$1-\gamma>0 \tag{4.2.2.12}$$

$$1+(\beta+\gamma)+\gamma>0 \tag{4.2.2.13}$$

şartları ile tanımlanır. Kökler arasında

$$\lambda_1+\lambda_2=\ \beta+\gamma$$

$$\lambda_1.\lambda_2=\ \gamma$$

olacak şekilde bir ilişki vardır. Bu ilişkiye göre reel kökler daima pozitif olmalıdır. Bu köklerin reel veya sanal olması veya tekrarlı kökler olması köklü ifadenin içerisine bağlıdır. Eğer $(\beta+\gamma)^2-4\gamma>0$ ise reel kökler vardır, $(\beta+\gamma)^2-4\gamma=0$ ise kökler eşittir yani tekrarlı kökler vardır ve eğer $(\beta+\gamma)^2-4\gamma<0$ ise kökler sanaldır. $(\beta+\gamma)^2-4\gamma$ alabileceği değerlere göre kökler üç kısımda incelenir.

1) $(\beta+\gamma)^2-4\gamma>0$ ise yani $(\beta+\gamma)^2>4\gamma$ olduğunda reel kökler vardır demektir ve bu kökler λ_1 ve λ_2 olsun. O halde A_1 ve A_2 herhangi sabitler olmak üzere tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c=A_1{\lambda_1}^t+A_2{\lambda_2}^t \tag{4.2.2.14}$$

olur.

2) $(\beta+\gamma)^2-4\gamma=0$ ise yani $(\beta+\gamma)^2=4\gamma$ olduğunda reel kökler vardır demektir ve bu kökler eşit yani $\lambda_1=\lambda_2$ demektir. Kökler tekrarlı olduğundan λ_1 çözümü t ile çarpılarak $t{\lambda_1}^t$ bir çözüm olarak denenir. Bu durumda kökler

$$\lambda_{1,2}=\frac{\beta+\gamma}{2}$$

olacağından $t\lambda_{1,2}=t\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^t$ kökünün(4.2.2.7) denkleminin homojen halini tüm t değerleri için sağlaması gerekir.(4.2.2.7) denkleminde bu kök yerine yazılırsa

$$(t+2)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^{t+2}-(t+1)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^{t+1}(\beta+\gamma)+t\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^{t}\gamma=0$$

$\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^t \left[(t+2)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 - (t+1)(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + t\gamma\right] = 0$

$(t+2)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 - (t+1)(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + t\gamma = 0$

$t\left(\frac{(\beta+\gamma)^2}{4} - \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} + \gamma\right) + \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} - \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} = 0$

$\frac{(\beta+\gamma)^2}{4} - \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} + \gamma = 0$

olur. $(\beta+\gamma)^2 = 4\gamma$ olduğundan

$$\frac{4\gamma}{4} - \frac{4\gamma}{2} + \gamma = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\beta+\gamma}{2}$ tüm t değerleri için sağlanır. Bu durumda A_1 ve A_2 herhangi sabitler olmak üzere tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c = A_1{\lambda_1}^t + A_2 t{\lambda_1}^t \qquad (4.2.2.15)$$

olur.

3) $(\beta+\gamma)^2 - 4\gamma < 0$ ise yani $(\beta+\gamma)^2 < 4\gamma$ olduğunda sanal kökler vardır demektir ve bu kökler $a, b \in R$ olmak üzere $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ olsun. Bu durumda kökler

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\beta+\gamma) \pm \sqrt{(-1)(4\gamma - (\beta+\gamma)^2)}}{2}$$

olur. Buradan $a = \frac{\beta+\gamma}{2}$ ve $b = \frac{4\gamma-(\beta+\gamma)^2}{2}$ elde edilir.

$K = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için tamamlayıcı fonksiyon A_3 ve A_4 bilinmeyen sabitleri için

$$y_c = K^t[A_3\cos(t\theta) + A_4\sin(t\theta)] \qquad (4.2.2.16)$$

olur.

Sonuç olarak genel çözüm özel çözüm ile tamamlayıcı fonksiyonun toplamına eşit olacağından genel çözüm ve yakınsaklık aşağıdaki üç farklı şekilde açıklanır.

1) $(\beta + ɣ)^2 - 4ɣ > 0$ için

$$y_t = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t + \frac{1}{1-\beta}G \tag{4.2.2.17}$$

olur. Bu durumda eğer $ɣ > 1$ ise kökler reel olur fakat kararlılık şartı sağlanmaz. Monoton bir şekilde patlayan bir hareket gerçekleşir. Eğer $ɣ < 1$ ise(4.2.2.12) kararlılık şartı sağlanır. O halde sistem denge değeri $\frac{1}{1-\beta}G$'ye doğru monoton bir şekilde yakınsar.

2) $(\beta + ɣ)^2 - 4ɣ = 0$ için

$$y_t = A_1(\tfrac{\beta+ɣ}{2})^t + A_2 t(\tfrac{\beta+ɣ}{2})^t + \tfrac{1}{1-\beta}G \tag{4.2.2.18}$$

olur. Bu durumda eğer $ɣ > 1$ ise kararlılık şartı sağlanmaz. Monoton bir şekilde dengeden uzaklaşan bir hareket gerçekleşir. Eğer $ɣ < 1$ ise(4.2.2.12) kararlılık şartı sağlanır. O halde t→∞ iken sistem denge değerine doğru monoton bir şekilde yakınsar.

3) $(\beta + ɣ)^2 - 4ɣ < 0$ ve $K = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için

$$y_t = K^t(A_1 cost\theta + A_2 sint\theta) + \tfrac{1}{1-\beta}G \tag{4.2.2.19}$$

olur. Bu durumda eğer $ɣ > 1$ ise kökler sanal olur kararlılık şartı sağlanmaz. Denge etrafında patlayan bir salınım gerçekleşir. Eğer $ɣ < 1$ ise(4.2.2.12) kararlılık şartı sağlanır. Sonuç olarak denge etrafında sönümlü bir hareket gerçekleşir.

Örnek 4.2.2.1

Belirli bir dönem için ekonomik sistem dengede olsun. Başlangıç değerlerinin $y_0 = 0$, $C_0 = 0$ ve $G_0 = 0$ olduğu ve otonom yatırımın 1. dönemde 100'e kadar arttığı ve bu değerde sabit kaldığı varsayılsın ve $y_1 = 100$ olsun. Marjinal tüketim eğilimi $\beta = 0{,}8$ ve hızlandırma katsayısı $\alpha = 3$ olduğunda gelirin zaman içindeki değişimini hesaplayın.

Çözüm

(4.2.2.5) gelir denklemini elde edebilmek için tüm verilerin yerine yazılması gerekir. Özel yatırım harcamaları denklemi

$$I_t = ɣ(y_{t-1} - y_{t-2})$$

olduğundan ɣ'nın bulunması gerekir. $ɣ = \beta\alpha = 0{,}8 * 3 = 2{,}4$ olur. Buradan özel yatırım harcamaları denklemi

$$I_t = 2{,}4(y_{t-1} - y_{t-2})$$

olarak elde edilir. $\beta = 0{,}8$ için tüketim harcamaları denklemi

$$C_t = \beta y_{t-1} = 0{,}8y_{t-1}$$

olur. Bu değerler $G_t = 100$ alınarak ulusal gelir denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$y_t = 0{,}8 + 2{,}4(y_{t-1} - y_{t-2}) + 100$$

$$y_t - 3{,}2 + 2{,}4y_{t-2} = 100$$

denklemi elde edilir. Bu bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu fark denkleminin bir özel çözümü $y_p = k$ olsun. Bu durumda

$$k - 3{,}2k + 2{,}4k = 100$$

$$k(1 - 3{,}2 + 2{,}4) = 100$$

$$y_p = k = 500$$

bulunur. Diğer yolla $k = \frac{1}{1-\beta}G$ olduğundan

$$k = \frac{1}{1-0{,}8}100 = 500$$

elde edilir.

Tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için ulusal gelir denkleminin karakteristik denklemini bulmak gerekmektedir. Ulusal gelir denkleminin homojen olduğu kabul edilirse karakteristik denklem

$$\lambda^2 - 3{,}2\lambda + 2{,}4 = 0$$

olur. Burada kökler

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\beta + ɣ) \pm \sqrt{(\beta + ɣ)^2 - 4ɣ}}{2}$$

formülü ile bulunur. $\beta = 0{,}8$ ve $ɣ = 2{,}4$ olduğundan kökler

$$\lambda_{1,2} = \frac{3{,}2 \pm \sqrt{(3{,}2)^2 - 9{,}6}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3{,}2 \pm \sqrt{0{,}64}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3{,}2 + 0{,}8}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{3{,}2 - {,}08}{2} = 1{,}2$$

olarak bulunur. Kökün içi pozitif olduğundan kökler reeldir. Bu durumda tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c = A_1(2\ )^t + A_2(1{,}2)^t$$

olur. Genel çözüm özel çözüm ile tamamlayıcı fonksiyonun toplamlarına eşit olduğundan genel çözüm

$$y_t = A_1(2)^t + A_2(1{,}2)^t + 500$$

olarak elde edilir.

$t = 0$ için başlangıç geliri $y_0 = 0$ yerine yazılırsa

$$A_1 + A_2 + 500 = 0$$

$$A_1 + A_2 = -500$$

$$A_1 = -500 - A_2$$

olur. $t = 1$ için başlangıç geliri $y_1 = 100$ yerine yazılırsa

$$A_1(2)^1 + A_2(1{,}2)^1 + 500 = 100$$

$2(-500 - A_2) + 1{,}2A_2 = -400$

$-1000 - 2A_2 + 1{,}2A_2 = -400$

$A_2 = -750$

$A_1 = -500 + 750 = 250$

olarak bulunur. O halde ulusal gelir denkleminin herhangi bir t dönemi için genel çözümü

$y_t = 250(2)^t - 750(1{,}2)^t + 500$

denklemi ile bulunur.

$(3{,}2)^2 - 9{,}6 > 0$ ve $\gamma = 2{,}4 > 1$ olduğundan köklerin reel olmasına karşılık kararlılık şartı sağlanmadığından sistem monoton bir şekilde patlayan bir hareket gerçekleştirir. Denge değeri 500 iken dengeden gittikçe uzaklaşır. $t = 15$'e kadar olan değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

t	G_t	C_t	$C_t - C_{t-1}$	I_t	y_t
0	0	0	0	0	0
1	100	0	0	0	100
2	100	80	80	240	420
3	100	336	256	768	1204
4	100	963,2	627,2	1881,6	2944,8
5	100	2355,84	1392,64	4177,92	6633,76
6	100	5307,008	2951,168	8853,504	14260,512
7	100	11408,4096	6101,4016	18304,2048	29812,6144
8	100	23850,09152	12441,68192	37325,04576	61275,13728
9	100	49020,10982	25170,0183	75510,05491	124630,1647
10	100	99704,13179	50684,02196	152052,0659	251856,1977
11	100	201484,9581	101780,8264	305342,4791	506927,4372
12	100	405541,9498	204056,9916	612170,9749	1017812,925
13	100	814250,3397	408708,39	1226125,17	2040475,51
14	100	1632380,408	818130,0679	2454390,204	4086870,612
15	100	3269496,489	1637116,082	4911348,245	8180944,734

4.2.3. Goodwin'in Örümcek Ağı Modeli

Daha önce Örümcek Ağı modeli I. mertebeden fark denklemi olarak incelenmişti. Fakat bu temel model biraz gerçek dışı kalmaktaydı. Şimdi üzerinde durulacak olan model ''normal fiyatlar'' hipotezi altında daha gerçekçi ve beklentileri karşılayabilecek varsayımlar altında oluşturulmaktadır[10].

Bu model yine arz talep fonksiyonlarından türeyen bir modeldir. p'_t beklenen fiyat ve p beklenti katsayısı olmak üzere t dönemindeki talep miktarı D_t ve üretim miktarı S_t olsun. Bu durumda talep miktarı

$$D_t = x + yp_t \qquad (4.2.3.1)$$

ve üretim miktarı

$$S_t = x_1 + y_1 p'_t \qquad (4.2.3.2)$$

olarak yazılır. Bu eşitliklerde y talep eğilimi ve talep negatif eğimli olduğundan $y < 0$ olur. y_1 arz eğilimi ve üretim pozitif eğimli olduğundan $y_1 > 0$ olur. Üretim miktarı denkleminde p'_t değeri üretim planı yapılırken beklenen satış fiyatını temsil etmektedir. Bu beklenen fiyat geçmiş iki dönem arasında ki fiyat farkının bir oranının geçmiş dönem fiyatına eklenmesiyle bulunur. Yani herhangi bir t dönemi için beklenen fiyat

$$p'_t = p_{t-1} + p(p_{t-1} - p_{t-2}) \qquad (4.2.3.3)$$

olarak elde edilir. Geçmiş iki dönem fiyat farkının bu p sabit oranına *beklenti katsayısı* denir. (4.2.3.3) denklemi (4.2.3.2) denkleminde yerine yazılırsa üretim miktarı

$$S_t = x_1 + y_1\big(p_{t-1} + p(p_{t-1} - p_{t-2})\big)$$

$$S_t = x_1 + y_1 p_{t-1}(1 + p) - y_1 p_{t-2} p \qquad y_1 > 0 \qquad (4.2.3.4)$$

olarak bulunur.

Herhangi bir t döneminde sistem dengede iken

$$D_t = S_t \qquad (4.2.3.5)$$

olduğu bilinmektedir. (4.2.3.1) ve (4.2.3.4) denklemleri (4.2.3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$x + yp_t = x_1 + y_1 p_{t-1}(1+p) - y_1 p_{t-2} p$$

$$p_t = \frac{1}{y}(x_1 - x + y_1 p_{t-1}(1+p) - y_1 p_{t-2} p)$$

$$p_t - (1+p)\frac{y_1}{y} p_{t-1} + p\frac{y_1}{y} p_{t-2} = \frac{x_1 - x}{y} \qquad y_1 > 0,\ \ y < 0 \qquad (4.2.3.6)$$

denklemi elde edilir.

(4.2.3.6) denklemi incelendiğinde beklenti katsayısı $p > 0$ olduğunda fiyat hareketine aynı yönde devam eder, $p < 0$ olduğunda ise fiyat ters yönde hareket eder.

(4.2.3.6) denklemi bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir. Bu tip denklemlerin çözümü iki aşamada ele alınır. Önce denklemin bir özel çözümü aranır, sonra tamlayıcı fonksiyon bulunur. Son olarak özel çözüm ve tamamlayıcı fonksiyon toplanarak genel çözüm bulunur.

(4.2.3.6) denkleminde $p_p = k$ bir özel çözüm olsun. Bu durumda özel çözüm

$y - y_1 \neq 0$ için

$$k - (1+p)\frac{y_1}{y} k + p\frac{y_1}{y} k = \frac{x_1 - x}{y}$$

$$k(1 - (1+p)\frac{y_1}{y} + p\frac{y_1}{y}) = \frac{x_1 - x}{y}$$

$$p_p = k = \frac{x_1 - x}{y - y_1} \qquad (4.2.3.7)$$

olarak bulunur.

Tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için (4.2.3.6) denkleminin homojen olduğu kabul edilsin. Bu durumda fiyat denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$p_t - (1+p)\frac{y_1}{y} p_{t-1} + p\frac{y_1}{y} p_{t-2} = 0 \qquad y_1 > 0,\ \ y < 0 \qquad (4.2.3.8)$$

Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - (1+p)\frac{y_1}{y}\lambda + p\frac{y_1}{y} = 0$$

olarak bulunur. Karakteristik denklemin kökleri için üç durum ortaya çıkar

1) $\Delta = (1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y} > 0$

olursa tüm köklerin reel ve birbirinden farklı olduğu anlaşılır.

λ_1 ve λ_2 karakteristik denklemin kökleri ve A_1 ve A_2 keyfi sabitler olmak üzere tamamlayıcı fonksiyon

$$p_c = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t$$

olarak bulunur. Kökler

$$\lambda_1 = \frac{(1+p)\frac{y_1}{y} + \sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1+p)\frac{y_1}{y} - \sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}}{2}$$

için genel çözüm

$$p_t = A_1\left(\frac{(1+p)\frac{y_1}{y} + \sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}}{2}\right)^t + A_2\left(\frac{(1+p)\frac{y_1}{y} - \sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}}{2}\right)^t + \frac{x_1 - x}{y - y_1} \tag{4.2.3.9}$$

olarak bulunur.

2) $\Delta = (1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y} = 0$

olursa köklerin reel ve birbirine eşit olduğu anlaşılır.

λ_1 ve λ_2 karakteristik denklemin kökleri ve A_1 ve A_2 keyfi sabitler olmak üzere tamamlayıcı fonksiyon

$$p_c = A_1{\lambda_1}^t + A_2t{\lambda_2}^t$$

olur. Kökler

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1+p)y_1}{2y}$$

için genel çözüm

$$p_t = A_1\left(\frac{(1+p)y_1}{2y}\right)^t + A_2 t\left(\frac{(1+p)y_1}{2y}\right)^t + \frac{x_1 - x}{y - y_1} \qquad (4.2.3.10)$$

olur.

3) $\Delta = (1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y} < 0$

olursa tüm köklerin sanal ve birbirinden farklı olduğu anlaşılır.

λ_1 ve λ_2 karakteristik denklemin kökleri ve A_3 ve A_4 keyfi sabitler olmak üzere kökler

$\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_1 = a - ib$ formunda olur. Buradan $a = (1+p)\frac{y_1}{2y}$ ve

$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}\right)$ dir.

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{k}$ ve $sin\theta = \frac{b}{k}$ olduğunda tamamlayıcı fonksiyon

$p_c = K^t[A_1 cost\theta + sint\theta]$

olur. Sonuç olarak genel çözüm

$$p_t = \left(\sqrt{\left((1+p)\frac{y_1}{2y}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{(1+p)^2\left(\frac{y_1}{y}\right)^2 - 4\frac{y_1}{y}}\right)\right)^2}\right)^t [A_3 cost\theta + A_4 sint\theta] + \frac{x_1 - x}{y - y_1} \qquad (4.2.3.11)$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2.3.1

Sistemin dengede olduğu bir dönemde üretim fonksiyonu $S_t = -10 + p'_t$ ve talep fonksiyonu $D_t = 80 - 4p_t$ olsun. Beklenen fiyat denkleminin $p'_t = p_{t-1} - (p_{t-1} -$

p_{t-2}) olduğu kabul edilsin. Bu veriler doğrultusunda fiyat düzeyinin denge fiyatına yakınsayıp yakınsamadığını araştırın[10].

Çözüm

Sistem dengede olduğundan $D_t = S_t$ olur. Yukarıda verilen bilgiler doğrultusunda beklenen fiyat katsayısı $p = -1$, $y = -4$, $x = 80$, $y_1 = 1$ ve $x_1 = -10$ olarak bulunur. Bu veriler $D_t = S_t$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$80 - 4p_t = -10 + p'_t$$

$$80 - 4p_t = -10 + p_{t-1} - (p_{t-1} - p_{t-2})$$

$$p_t + \frac{p_{t-2}}{4} = 22{,}5$$

denklemi elde edilir. Bu bir ikinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan fark denklemidir.

Önce $p_p = k$ özel çözümü aransın.

$$k + \frac{k}{4} = 22{,}5$$

$$k = 18$$

bulunur. Bu değer sistemin denge değeridir. Fiyat değişiklikleri bu değerden uzaklaşırsa sistem ıraksak bu değere yakınlaşırsa sistem yakınsak olur.

Fiyat denkleminin tamamlayıcı fonksiyonunu bulmak için önce denklemin homojen halinin karakteristik denklemi yazılsın. Bu durumda karakteristik denklem

$$p_t + \frac{p_{t-2}}{4} = 0$$

homojen denklemi için

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemin kökleri

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\frac{1}{2}$$

olur. $\lambda_1 = a + ib =$ ve $\lambda_2 = a - ib$ için $a = 0$ ve $b = \frac{1}{2}$ bulunur. Buradan

$K = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}$, $cos\theta = \frac{a}{k} = 0$ ve $sin\theta = \frac{b}{k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ bulunur. $cos\theta = 0$ ve $sin\theta = 1$ için $\theta = \frac{\pi}{2}$ olarak bulunur. Bulunan bu değerler doğrultusunda tamamlayıcı fonksiyon A_3 ve A_4 keyfi sabitleri için

$$p_c = (\tfrac{1}{2})^t \left(A_3 cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_4 sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

olarak bulunur. Denklemin genel çözümü özel çözüm ile tamamlayıcı fonksiyonun toplamı olduğundan genel çözüm

$$p_t = (\tfrac{1}{2})^t \left(A_1 cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + A_2 sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + 18$$

olarak bulunur.

Genel çözüm denkleminin yakınsaklığı incelendiğinde t artarken $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ değeri azalır. Bu da hareketin denge etrafında bir sönümlü salınıma sahip olacağı anlamına gelir.

4.3. YÜKSEK MERTEBEDEN DOĞRUSAL FARK DENKLEMLERİNİN İKTİSADİ UYGULAMALARI

4.3.1. Gecikmesi Dağıtılmış ve Çarpan-Hızlandıran Etkileşimli Model

Keynes (1936) dinamik bir teori üretmemesine karşın sürekli işsizlik teorisinin tüketim ve gelir tasarrufuna bağlı olduğu üzerine yoğunlaşmıştır. Klasik yaklaşımcılar daha çok yatırımlar ve tasarruflar için kuvvet dengeleme gibi faiz oranı üzerinde durmuşlardır. Sürekli işsizlik teorisinin tüketim ve gelir tasarrufuna bağlı olduğu fikriyle Keynesyen makroekonomisi bu modelin kurulmasına zemin hazırlamıştır.

Hızlandırma prensibi ile oluşturulan Samuelson (1939) modelinin Hicks (1950) temel versiyonunda sadece tüketime değil tüm harcamalara uygulanan hızlandırma prensibi iki bileşen üzerine kurulmuştur:

1) Geçmiş dönem gelirinden bir β oranında tüketiliyordur.

$$C_t = \beta y_{t-1} \qquad\qquad 0 < \beta < 1$$

2) Üretken sermayenin toplam üretim için gelirden sabit bir α oranına ihtiyaçları vardır:

$$K_t = \alpha y_{t-1} \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

Bu bileşenlere ek olarak net yatırım sermaye stokundaki net değişim ile verildiğinden net yatırım $I_t = K_t - K_{t-1}$ olup buradan $I_t = \alpha(y_{t-1} - y_{t-2})$ olur. Gelir değeri tüketim ve yatırım değerlerinin toplamına eşit olduğundan

$$y_t = C_t + I_t \qquad (4.3.1.1)$$

elde edilir. Yukarıdaki veriler (4.3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa gelir denklemi

$$y_t = \beta y_{t-1} + \alpha(y_{t-1} - y_{t-2})$$

olarak bulunur. Oluşturulan bu model orijinal çarpan-hızlandıran model olarak adlandırılır[14].

(4.3.1.1) denklemi ile oluşturulan bu temel modelin genel hali dağıtılmış gecikmeli ve çarpan-hızlandıran etkileşimi olarak adlandırılır. Genel modelde temel fikir yatırım ve tüketimin herhangi bir dönemde ulusal gelir değerlerinin n-dönem öncesine bağlı olduğudur. Yatırım fonksiyonun temel modelden farklı olarak gelirde n-dönemlik bir uyarılma yaratarak meydana geldiği varsayılır [10]. Bu varsayımlar altında yatırım

$$I'_t = \alpha_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \alpha_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + \cdots + \cdots + \alpha_n(y_{t-n} - y_{t-n-1}) \qquad (4.3.1.2)$$

şeklinde ifade edilir. Teknik olarak ulusal gelirdeki genişlemeler dolayısıyla sağlandığı varsayılan bu yatırıma ‘’*uyarılmış yatırım*’’ adı verilir.

Tüketim değerinin de ulusal gelirdeki genişlemelerden etkilendiği varsayılırsa

$$C_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \cdots + \beta_n y_{t-n} \qquad (4.3.1.3)$$

tüketim denklemi elde edilir.

Otonom yatırımın sabit bir g oranıyla arttığı varsayılsın. Bu durumda A_0 başlangıç değeri olmak üzere otonom yatırım denklemi

$$I''_t = A_0(1+g)^t \qquad (4.3.1.4)$$

olur. (4.3.1.2) ve (4.3.1.4) denklemleri toplanarak

$$I_t = I'_t + I''_t$$

$$I_t = \alpha_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \alpha_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + \ldots \alpha_n(y_{t-n} - y_{t-n-1}) + A_0(1+g)^t \qquad (4.3.1.5)$$

şeklinde toplam yatırım denklemi elde edilir. Bu denklemler (3.4.1.1.) denkleminde yerlerine yazılırsa ulusal gelir denklemi

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_n y_{t-n} + \alpha_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \alpha_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + \cdots + \alpha_n(y_{t-n} - y_{t-n-1}) + A_0(1+g)^t \qquad (4.3.1.6)$$

şeklinde olur. Bu denklem

$$y_t - (\alpha_1 + \beta_1)y_{t-1} - (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)y_{t-2} - \cdots - \cdots - (\alpha_n + \beta_n - \alpha_{n-1})y_{t-n} - \alpha_n y_{t-n-1} = A_0(1+g)^t \qquad (4.3.1.7)$$

şeklinde yazıldığında açıkça n-inci mertebeden bir fark denklemi elde edilir. Bu genel denklemi çözmek yerine ardışık iki dönem için denklemi ele almak daha kolay olacaktır.

(4.3.1.2) uyarılmış yatırım denkleminde ve (4.3.1.3) tüketim denkleminde ardışık iki dönemde işlem yapılırsa

$$I'_t = \alpha_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \alpha_2(y_{t-2} - y_{t-3}) \tag{4.3.1.8}$$

ve

$$C_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2}$$

olur. (4.3.1.4) otonom yatırım denklemi aynı olacağından ulusal gelir denklemi

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \alpha_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \alpha_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + A_0(1+g)^t$$

$$y_t - (\alpha_1 + \beta_1)y_{t-1} - (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)y_{t-2} + \alpha_2 y_{t-3} = A_0(1+g)^t \tag{4.3.1.9}$$

olarak bulunur. (4.3.1.9) denklemi üçüncü mertebeden sabit katsayılı doğrusal bir fark denklemidir. Bu fark denkleminin çözümünü bulmak için önce özel çözümü sonra tamamlayıcı fonksiyonu bulmak gerekir.

(4.3.1.9) denklemi için bir özel çözüm $y_p = y_0(1+g)^t$ denensin.

$$y_0(1+g)^t - (\alpha_1 + \beta_1)y_0(1+g)^{t-1} - (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)y_0(1+g)^{t-2} + \alpha_2 y_0(1+g)^{t-3} = A_0(1+g)^t$$

buradan

$$y_0((1+g)^t - (\alpha_1 + \beta_1)(1+g)^{t-1} - (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)(1+g)^{t-2} + \alpha_2(1+g)^{t-3})$$

$$= A_0(1+g)^t$$

elde edilir. Her taraf $(1+g)^t$ ile bölünürse

$$y_0(1 - (\alpha_1 + \beta_1)(1+g)^{-1} - (\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)(1+g)^{-2} + \alpha_2(1+g)^{-3}) = A_0$$

olur ve buradan

$$y_0 = \frac{A_0}{1-(\alpha_1+\beta_1)(1+g)^{-1}-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)(1+g)^{-2}+\alpha_2(1+g)^{-3}}$$

bulunur. Denklemde pay ve payda $(1+g)^3$ ile çarpılırsa

$$y_0 = \frac{A_0(1+g)^3}{(1+g)^3-(\alpha_1+\beta_1)(1+g)^2-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)(1+g)-\alpha_2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan özel çözüm

$$y_p = \frac{A_0(1+g)^3}{(1+g)^3-(\alpha_1+\beta_1)(1+g)^2-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)(1+g)-\alpha_2}(1+g)^t \qquad (4.3.1.10)$$

olur.

Tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için (4.3.1.9) denkleminin homojen olduğu kabul edilsin. Bu durumda (4.3.1.9) denklemi

$$y_t-(\alpha_1+\beta_1)y_{t-1}-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)y_{t-2}+\alpha_2y_{t-3}=0$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3-(\alpha_1+\beta_1)\lambda^2-(\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)\lambda+\alpha_2=0 \qquad (4.3.1.11)$$

olarak bulunur.

(4.3.1.11) karakteristik denklemini incelenmeden önce $\alpha_2 > 1$ olup olmadığı incelenmelidir. Hicks her şeyden önce uyarılmış yatırımda gelirdeki değişimde büyük payın yakın döneme değil uzak döneme odaklandığını bu nedenle de α_2‘nin α_1 den büyük olduğuna işaret eder. Daha önceki işlemler $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ olmak üzere α hızlandırıcı katsayısının 2 veya 2 den büyük olduğunu göstermektedir. Bu durumda $\alpha_1+\alpha_2 \geq 2$ olup $\alpha_2 > \alpha_1$ olduğundan $\alpha_2 > 1$ olur. $\alpha_2 > 1$ olduğunda ulusal gelir eğilimden sapmalar kararsız olur. Bu nedenle $\alpha_2 > 1$ olduğunda diğer köklere bakmadan sistemin kararsız olduğu söylenebilir[10].

(4.3.1.11) denkleminin kökleri üçüncü mertebeden denklem köklerinin sağlaması gereken

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-\alpha_2$$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \alpha_1 + \beta_1$

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1)$

koşulları sağlanmalıdır. Bu koşullar altında iki durum için inceleme yapılır;

1) Köklerin üçü de gerçek olsun. Burada eğer (4.3.1.11) denkleminde katsayılar + - - + işaretlerine sahip ise köklerden ikisi pozitif biri de negatif olur. Kökler bu formda olduklarında sistemin hareketi monoton ve düzgün olmayan bir salınımla gerçekleşir.

2) Köklerin hepsi gerçek olmadığında köklerden biri gerçek diğer ikisi karmaşık olur. Bu durumda $\lambda_1(a+bi)(a-bi) = -\alpha_2$ olacağından 1. koşuldan $-\alpha_2 < 0$ olduğunda $\lambda_1 < 0$ olmak zorundadır. Buradan düzgün ve düzgün olmayan bir salınım gerçekleşir.

Sonuç olarak tamamlayıcı fonksiyon

1. durumda tüm kökler reel ve birbirinden farklı olduğunda, A_1, A_2 ve A_3 keyfi sabitleri için

$$y_c = A_1{\lambda_1}^{\mathrm{t}} + A_1{\lambda_2}^{t} + A_1{\lambda_3}^{t}$$

olarak bulunur. Bu durumda genel çözüm

$$y_t = A_1{\lambda_1}^{\mathrm{t}} + A_1{\lambda_2}^{t} + A_1{\lambda_3}^{t} + \frac{A_0(1+g)^3}{(1+g)^3 - (\alpha_1+\beta_1)(1+g)^2 - (\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)(1+g) - \alpha_2}(1+g)^t$$

olur.

2. durumda bir kök reel ve iki kök sanal olduğunda A_4, A_5 ve A_6 keyfi sabitleri ve

$K = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos\theta = \frac{a}{K}$ ve $sin\theta = \frac{b}{K}$ için tamamlayıcı

$$y_c = A_4{\lambda_1}^{\mathrm{t}} + K^{\mathrm{t}}(A_5 cost\theta + A_6 sint\theta)$$

olur. Bu durumda genel çözüm

$$y_t = A_4{\lambda_1}^{\mathrm{t}} + k^{\mathrm{t}}(A_5 cost\theta + A_6 sint\theta) + \frac{A_0(1+g)^3}{(1+g)^3 - (\alpha_1+\beta_1)(1+g)^2 - (\alpha_2+\beta_2-\alpha_1)(1+g) - \alpha_2}(1+g)^t$$

olarak bulunur.

Örnek 4.3.1.1

Aşağıda verilen eğim değerlerinden yola çıkarak ulusal gelirde ki sapmaları inceleyin.

$\alpha_1 = 1{,}2$, $\alpha_2 = 1{,}8$, $\beta_1 = 0{,}2$ ve $\beta_2 = 0$

Çözüm

$\beta_1 = 0{,}2$ ve $\beta_2 = 0$ için tüketim denklemi

$C_t = 0{,}2y_{t-1}$

olur. Uyarılmış yatırım denklemi de $\alpha_1 = 1{,}2$ ve $\alpha_2 = 1{,}8$ için

$I'_t = 1{,}2(y_{t-1} - y_{t-2}) + 1{,}8(y_{t-2} - y_{t-3})$

olarak bulunur. Bu veriler ulusal gelir denkleminde yerlerine yazılırsa

$y_t - 1{,}4y_{t-1} - 0{,}6y_{t-2} + 1{,}8y_{t-3} = A_0(1 + g)^t$

denklemi elde edilir. Bu denklemde tamamlayıcı fonksiyonun karakteristik denklemini bulmak sapmaları incelemek için yeterli olacaktır. Bu durumda ulusal gelir denkleminin homojen hali

$y_t - 1{,}4y_{t-1} - 0{,}6y_{t-2} + 1{,}8y_{t-3} = 0$

olur. Buradan karakteristik denklem

$\lambda^3 - 1{,}4\lambda^2 - 0{,}6\lambda + 1{,}8 = 0$

olarak bulunur.

Bu denklemde $\alpha_2 = 1{,}8 > 1$ olduğundan sistemin kararsız olduğu açıktır. Karakteristik denklem

$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2{,}4\lambda + 1{,}8) = 0$

şeklinde yazılırsa bu denklemin köklerinden biri $\lambda_1 = -1$ olur. Diğer kökler

$\lambda^2 - 2{,}4\lambda + 1{,}8 = 0$

denkleminin kökleridir. Bu denklemin kökleri

$\Delta = (-2{,}4)^2 - 4 * 1{,}8 = -1{,}44$

olduğundan karmaşık köklerdir. Bu durumda ikinci durum gerçekleşir ve sistem düzgün ve düzgün olmayan salınım yapar. Bu durumu ispatlamak için köklerin hepsini bulup genel çözüm denklemini oluşturmak yeterli olacaktır.

$\Delta = -1{,}44$ için $\sqrt{\Delta}$=1,2i bulunur. Buradan kökler

$$\lambda_{2,3} = \frac{2{,}4 \pm 1{,}2\mathrm{i}}{2}$$

$\lambda_2 = 1{,}2 + 0{,}6i$

$\lambda_3 = 1{,}2 - 0{,}6i$

olarak bulunur.

$K = \sqrt{(1{,}2)^2 + (0{,}6)^2} = 1{,}3416$ olup

$cos\theta = \frac{1{,}2}{1{,}3416} = 0{,}8945$ ve $sin\theta = \frac{0{,}6}{1{,}3416} = 0{,}4472$ olduğundan $\theta = 26{,}56$ olur. Bulunan bu değerler için tamamlayıcı fonksiyon

$$y_c = A_4(-1)^{t} + (1{,}3416\,)^{t}[A_5cost(26{,}56t) + A_6sint(26{,}56t)]$$

olur. Bu denklem incelendiğinde t artarken $(-1)^{t}$ değeri düzgün olmayan salınım gerçekleştirir, $(1{,}3416\,)^{t}$ değeri de dengeden uzaklaştırıcı düzgün bir sanlım gerçekleştirir. Sonuç olarak sistem düzgün ve düzgün olmayan salınım yapar.

4.3.2. Metzlerin Beklenti ve Stok Döngüleri

Bu model üreticilerin stoklarını istedikleri düzeyde tutma fikri üzerine kurulmuştur. Üreticiler önceki dönemde gerçekleştirdikleri satışlara bağlı olarak bulundukları dönem stoklarını ayarlamak isterler. Metzler'e göre üreticiler tarafından seçilen kesin envanter politikaları ekonomi üzerinde çeşitli dinamikler üreten derin etkilere sahiptirler[23].

Metzlerin bu modelinde mevcut ürünlerin tamamı tüketim malları ve yatırım malları ürünlerinin toplamından oluşmaktadır. Yatırım malları miktarının I_0 gibi bir sabit olduğu varsayılmaktadır. Tüketim malı ise iki bileşenden oluşmaktadır;

1) Gerçekleşmesi beklenen satışlar için ürünler.

2) Üreticilerin beklentisi doğrultusunda stokta tutulmak istenen ürünler.

Bu bileşenlerden ikincisinin negatif olabileceği açıktır. Eğer beklenen satışın altında ürün üretilirse bu durum gerçekleşir.

Herhangi bir t döneminde gerçekleşmesi beklenen satışlar U_t olsun. Üreticiler bekledikleri satış miktarını bir önceki dönemde gerçekleşen satışa ek olarak bir önceki ve ikinci önceki dönemlerde gerçekleşen satış farkının bir p oranını da dahil ederler. Beklenti katsayısı olarak adlandırılan bu sabit oran $p > 0$ olduğunda üreticilerin beklentileri karşılanmış olur ve beklenen satış miktarı aynı doğrultuda hareket etmeye devam eder, fakat $p < 0$ olduğunda üreticilerin beklentisi tersine çıkar zıt yönde bir hareket gerçekleşir[10].

$p > 0$ olduğu kabul edilsin. Birinci bileşende verilen bilgiler doğrultusunda gerçekleşmesi beklenen satış miktarı

$$U_t = C_{t-1} + p(C_{t-1} - C_{t-2}) \tag{4.3.2.1}$$

olur. Gecikmenin olmadığı durumlarda tüketim gelirin belli bir oranında gerçekleşir. Bu durumda β tüketim eğilimi olmak üzere tüketim miktarı

$$C_t = \beta y_t \qquad\qquad 0 < \beta < 1 \tag{4.3.2.2}$$

şeklinde olur. (4.3.2.2) denklemi (4.3.2.1) denkleminde yerine yazılırsa gerçekleşmesi beklenen satış miktarı denklemi

$$U_t = \beta y_{t-1} + p(\beta y_{t-1} - \beta y_{t-2})$$

$$U_t = \beta(1+p)y_{t-1} - \beta p y_{t-2} \tag{4.3.2.3}$$

olarak bulunur.

İkinci bileşene göre üreticilerin satışlar ve stoklar arasında bir sabit $k > 0$ oranının olmasını istedikleri varsayılsın. Üreticiler gerçek satışları ancak geriye dönük olarak analiz edebildiklerinden stokları arzu ettikleri seviyede tutabilmek için beklenen satışlara bir oran uygularlar. Stok hızlandıran olarak adlandırılan bu oran için mevcut mal stoku

$$S_t = kU_t = k(\beta(1+p)y_{t-1} - \beta p y_{t-2}\ ) = k\beta(1+p)y_{t-1} - k\beta p y_{t-2} \tag{4.3.2.4}$$

şeklinde elde edilir.

Herhangi bir t döneminde stok için yapılan yatırım, mevcut stok ile dönem başında var olan stokun farklarına eşittir. Dönem başında var olan stok geçmiş dönemde beklenen satış ile gerçekleşen satışın aralarındaki fark ve geçmiş dönemde arzu edilen stok miktarının toplamına eşit olur. t dönemi için dönem başında var olan stok Q_{t-1} ve bir önceki dönem arzu edilen stok miktarı S_{t-1} olsun. Geçmiş dönemde beklenen satış U_{t-1} ve gerçekleşen satış C_{t-1} olmak üzere

$$Q_{t-1} = S_{t-1} + (U_{t-1} - C_{t-1}) \tag{4.3.2.5}$$

olur. (4.3.2.2), (4.3.2.3) ve (4.3.2.4) denklemleri (4.3.2.5) denkleminde yerlerine yazılırsa dönem başı stok miktarı denklemi

$$Q_{t-1} = k\beta(1+p)y_{t-2} - k\beta p y_{t-3} + (\beta(1+p)y_{t-2} - \beta p y_{t-3} - \beta y_{t-1})$$

$$Q_{t-1} = -\beta y_{t-1} + \beta(1+p)(1+k)y_{t-2} - \beta p(1+k)y_{t-3} \tag{4.3.2.6}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak stok için gerçekleşen yatırım

$$S_t - Q_{t-1} = k\beta(1+p)y_{t-1} - k\beta p y_{t-2} - (-\beta y_{t-1} + \beta(1+p)(1+k)y_{t-2} - \beta p(1+k)y_{t-3}\ )$$

$S_t - Q_{t-1} = \beta[k(1+p)+1]y_{t-1} - \beta[kp + (1+p)(1+k)]y_{t-2} + \beta p(1+k)y_{t-3}$ (4.3.2.7)

olur.

Ulusal gelir denklemi

$y_t = U_t + S_t - Q_{t-1} + I_0$

olduğundan (4.3.2.3) ve (4.3.2.7) denklemleri bu denklemde yerlerine yazılırsa üretim için ulusal gelir denklemi

$y_t = \beta(1+p)y_{t-1} - \beta p y_{t-2} + \beta[k(1+p)+1]y_{t-1} - \beta[kp + (1+p)(1+k)]y_{t-2} + \beta p(1+k)y_{t-3} + I_0$

$I_0 = y_t - \beta[(1+k)(1+p)+1]y_{t-1} + \beta[(1+2p)(1+k)]y_{t-2} - \beta p(1+k)y_{t-3}$ (4.3.2.8)

olarak elde edilir. Bu üçüncü mertebeden sabit katsayılı doğrusal homojen olmayan bir fark denklemidir. Bu denklemin genel çözümü için önce denklemin bir özel çözümü ve sonra da tamamlayıcı fonksiyonu bulunacaktır.

Bu fark denkleminin bir özel çözümü $y_p = m$ olsun. Bu durumda özel çözüm

$I_0 = m - \beta[(1+k)(1+p)+1]m + \beta[(1+2p)(1+k)]m - \beta p(1+k))m$

$I_0 = m(1 - \beta[(1+k)(1+p)+1] + \beta[(1+2p)(1+k)] - \beta p(1+k))$

$$m = \frac{I_0}{1 - \beta[(1+k)(1+p)+1] + \beta[(1+2p)(1+k)] - \beta p(1+k)}$$

$$y_p = m = \frac{I_0}{1-\beta}$$

olarak bulunur.

Tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için ulusal gelir denkleminin homojen halinin karakteristik denklemini bulmak gerekir. (4.3.2.8) ulusal gelir denkleminin homojen hali

$y_t - \beta[(1+k)(1+p)+1]y_{t-1} + \beta[(1+2p)(1+k)]y_{t-2} - \beta p(1+k)y_{t-3} = 0$

şeklinde olur. Bu denklemin karakteristik denklemi

$\lambda^3 - \beta[(1+k)(1+p)+1]\lambda^2 + \beta[(1+2p)(1+k)]\lambda - \beta p(1+k) = 0$ (4.3.2.9)

olarak bulunur.

(4.3.2.9) denkleminin kökleri üçüncü mertebeden denklem köklerinin sağlaması gereken

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \beta p(1+k)$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \beta[(1+k)(1+p)+1]$

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \beta[(1 + 2p)(1 + k)]$

koşulları denklemin tüm kökleri için sağlanmalıdır. $p > 0,\ k > 0$ ve $0 < \beta < 1$ olduğundan üçüncü mertebeden doğrusal fark denklemleri için teorem 3.1.4.2 deki kararlılık koşulları bu denkleme uygulandığında

I. $1 - \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] + \beta[(1 + 2p)(1 + k)] - \beta p(1 + k) > 0$

II. $3 + \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] - \beta[(1 + 2p)(1 + k)] - 3\beta p(1 + k) > 0$

III. $1 + \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] + \beta[(1 + 2p)(1 + k)] + \beta p(1 + k) > 0$

IV. $3 - \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] - \beta[(1 + 2p)(1 + k)] + 3\beta p(1 + k) > 0$

V. $[3 + \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] - \beta[(1 + 2p)(1 + k)] - 3\beta p(1 + k)] *$
$[3 - \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] - \beta[(1 + 2p)(1 + k)] + 3\beta p(1 + k)] -$
$[1 + \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] + \beta[(1 + 2p)(1 + k)] + \beta p(1 + k)] *$
$[1 - \beta[(1 + k)(1 + p) + 1] + \beta[(1 + 2p)(1 + k)] - \beta p(1 + k)]$
$= -(-\beta p(1 + k))^2 + (-\beta[(1 + k)(1 + p) + 1])\big(-\beta p(1 + k)\big) -$
$\beta[(1 + 2p)(1 + k)] + 1 > 0$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.3.2.9) denkleminin katsayıları bu şartları sağlarsa sistemin kararlı olduğu söylenir aksi halde sistem kararsız olur.

1. şartta $1 - \beta > 0$ olur. $0 < \beta < 1$ olduğundan $1 - \beta > 0$ şartı gerçekleşir. 3. şartta da benzer şekilde $p > 0,\ k > 0$ ve $0 < \beta < 1$ için $3 + 3\beta + 2\beta k + 6\beta p + 6p\beta k > 0$ olduğu açıktır. Sadece 4. ve 5. şartların incelenmesi yeterli olacaktır. 2. Şarta gerek kalmadan 4. şartta $3 - \beta(2k + 3) > 0$ ve 5. şartta $(1 + k)(2 + k)p\beta^2 - (1 + k)(1 + 2p)\beta + 1 > 0$ olur. Burada verilen $p > 0$, $k > 0$ ve $0 < \beta < 1$ değerleri için şartların sağlanıp sağlanmadığı incelenir.

Sonuç olarak bulunan tamamlayıcı fonksiyon ve özel çözüm toplanarak genel çözüm denklemi elde edilir.

Örnek 4.3.2.1

$\beta = 0{,}9$, $k = 0{,}5$ $p = 1$, $I_0 = 100$, $y_0 = 900$, $y_1 = 910$ ve $y_2 = 920$ değerleri için ulusal gelir denkleminin davranışını inceleyin.

Çözüm

Verilen değerler

$y_t - \beta[(1+k)(1+p)+1]y_{t-1} + \beta[(1+2p)(1+k)]y_{t-2} - \beta p(1+k)y_{t-3} = I_0$

Ulusal gelir denkleminde yerlerine yazılırsa

$y_t - 0{,}9[(1+0{,}5)(1+1)+1]y_{t-1} + 0{,}9[(1+2)(1+0{,}5)]y_{t-2} - 0{,}9(1+0{,}5)y_{t-3} = 100$

$y_t - 3{,}6y_{t-1} + 4{,}05y_{t-2} - 1{,}35y_{t-3} = 100$

denklemi elde edilir. Bu değerler kararlılık şartlarının 4. şartında yerlerine yazıldığında

$$3 - 0{,}9[(1+0{,}5)(1+1)+1] - 0{,}9[(1+2)(1+0{,}5)] + 3 * 0{,}9(1+0{,}5)$$

$$3 - 3{,}6 - 4{,}05 + 3 * 1{,}35 = -0{,}6 < 0$$

olur. O halde 4. şart sağlanmaz.

Verilen değerler 5. şartta yerlerine yazılırsa

$$-\left(-0{,}9(1+0{,}5)\right)^2 + (-0{,}9[(1+0{,}5)(1+1)+1])\left(-0{,}9(1+0{,}5)\right)$$

$$-0{,}9[(1+2)(1+0{,}5)] + 1$$

$$= -0{,}2930 + 4{,}86 - 4{,}05 + 1 = 1{,}517 > 0$$

bulunur. Buradan 5. şart sağlanmış olur. 4. şart sağlanmadığından sistem kararsızdır.

Ulusal gelir denklemi çözüldüğünde sonuç karşılaştırılabilir.

$$y_t - 3{,}6y_{t-1} + 4{,}05y_{t-2} - 1{,}35y_{t-3} = 100$$

denklemi ele alınsın. Üçüncü mertebeden olan bu doğrusal fark denkleminin bir özel çözümü $y_p = m$ olsun. Bu durumda

$$m - 3{,}6m + 4{,}05m - 1{,}35m = 100$$

$$y_p = m = \frac{100}{1 - 3{,}6 + 4{,}05 - 1{,}35} = 1000$$

bulunur. Şimdi tamamlayıcı fonksiyonu bulmak için ulusal gelir denkleminin homojen hali ele alınsın. Buradan

$y_t - 3{,}6y_{t-1} + 4{,}05y_{t-2} - 1{,}35y_{t-3} = 0$

elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$\lambda^3 - 3{,}6\lambda^2 + 4{,}05\lambda - 1{,}35 = 0$

olarak bulunur. Köklerden biri $\lambda_1 = 0{,}6$ olup

$(\lambda - 0{,}6)(\lambda^2 - 3\lambda + 2{,}25 = 0$

$(\lambda - 0{,}6)(\lambda - 1{,}5)^2 = 0$

olur. Burada diğer kökler $\lambda_{2,3} = 1{,}5$ olarak bulunur. Tamamlayıcı fonksiyon kökler eşit olduğunda A_1, A_2 ve A_3 keyfi sabitleri için

$y_c = A_1{\lambda_1}^t + A_2{\lambda_2}^t + A_3t{\lambda_2}^t$

$y_c = A_1(0{,}6)^t + A_2(1{,}5\ )^t + A_3t(1{,}5\ )^t$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak genel çözüm tamamlayıcı fonksiyon ile özel çözümün toplamı olduğundan

$y_t = A_1(0{,}6)^t + A_2(1{,}5\ )^t + A_3t(1{,}5\ )^t + 1000$

olur. A_1, A_2 ve A_3 keyfi sabitlerini bulmak için başlangıç değerleri yerlerine yazılır.

$t = 0$ için $y_0 = 900$ olduğundan

$y_0 = A_1 + A_2 + 1000 = 900$

$A_1 + A_2 = -100$

olur. $t = 1$ için $y_1 = 910$ olduğundan

$y_1 = A_1 0{,}6 + A_2 1{,}5 + A_3 1{,}5 + 1000 = 910$

$A_1 0{,}6 + A_2 1{,}5 + A_3 1{,}5 = -90$

olur. . $t = 2$ için $y_2 = 920$ olduğundan

$y_2 = A_1(0{,}6)^2 + A_2(1{,}5\ )^2 + A_3 2(1{,}5\ )^2 + 1000 = 920$

$A_1 0{,}36 + A_2 2{,}25 + A_3 22{,}25 = -80$

bulunur. Bu üç sonuç birlikte çözülürse

$A_1 = -43{,}2$ $A_2 = -56{,}8$ ve $A_3 = 14{,}8$

olur. Bu değerler genel çözüm denkleminde yerlerine yazılırsa

$y_t = -43{,}2\ (0{,}6)^t - 56{,}8(1{,}5\ )^t + 14{,}8t(1{,}5\ )^t + 1000$

denklemi elde edilir. Bu değerler $t = 20$ ye kadar hesaplanırsa aşağıdaki tablo incelendiğinde t artarken y_t nin de arttığı hareketin monoton olduğunu fakat dengeden uzaklaşan bir hareket olduğu görülür. Bu durumda sistem karasız ve ıraksaktır.

t	I_0	U_t	$S_t - Q_{t-1}$	$y_t = -43{,}2\ (0{,}6)^t - 56{,}8(1{,}5\ )^t + 14{,}8t(1{,}5\ )^t + 1000$
0	100	800	0	900
1	100	810	0	910
2	100	828	0	920,008
3	100	837,0144	4,5144	941,5288
4	100	866,74464	25,22664	991,97128
5	100	938,172384	61,743384	1099,915768
6	100	1087,07423	126,20273	1313,276961
7	100	1373,97434	238,325088	1712,299426
8	100	1900,1897	430,202828	2430,392531
9	100	2833,63707	753,887259	3687,524331
10	100	4450,19052	1293,41155	5843,602067
11	100	7199,71182	2183,812	9483,523819
12	100	11811,101	3641,15421	15552,25522
13	100	19458,888	6009,82216	25568,71012
14	100	32026,6485	9836,83143	41963,47995
15	100	52522,4248	15988,3716	68610,79636
16	100	85732,3015	25832,2303	111664,5318
17	100	139246,44	41522,8466	180869,2871
18	100	225066,638	66446,0167	291612,6549
19	100	362120,42	105911,642	468132,0628
20	100	580186,324	168231,388	748517,7113

SONUÇ

Bu çalışmada ekonomi alanında kullanılan önemli problemlerin modellenerek doğrusal fark denklemleri ile nasıl çözülebileceği gösterilmiştir. Bu modeller fark denklemlerinin mertebelerine göre ayrı ayrı ele alınmış ve modellerin çözümleri adım adım gösterilmiştir. Çözümleri gösterilen ekonomik modellerin daha iyi anlaşılabilmesi için sayısal örnekler verilmiştir.

Araştırma bulgularından hareketle sabit katsayılı doğrusal fark denklemlerinin ekonomide önemli bir yer tuttuğu söylenebilir. Doğrusal fark denklemleri özellikle ulusal gelirin, ekonomik büyümenin, işsizliğin, üretici stoklarının, enflasyonun ve tarım ürünleri fiyatlarının dengede olup olmadıklarını, gelecek dönemler için dengeden uzaklaşıp uzaklaşmayacaklarının analiz edilmesine yardımcı olur.

Sonuç olarak araştırma kapsamında ele alınan ekonomik modeller uygun veriler kullanılarak uygulamalı çalışmalara kaynak oluşturabilir. Bu çalışmalar sayesinde büyüme ve iş döngüleri planları yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Akyol, S.,’’Lineer Fark Denklemleri Ve Onların Çözüm Metotları Üzerine’’, Yüksek Lisans Tezi, Bozok Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yozgat. 2011

[2] Bereketoğlu, H., Kutay, V., ’’ Fark Denklemleri’’, Gazi Kitabevi, ISBN 978-605-4562-40-4, Ankara, 2012.

[3] Chiang, A.C., ’’Fundamental Methods of Mathematical Economics’’, McGraw-Hill, ISBN 0-07-010813-7, New York, 1984

[4] Chiang, A.C.,Wainwright, K., ’’Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri’’, (Çev. Sarımeşeli, M., Açıkgöz, Ş.), Gazi Kitabevi, ISBN 0-07-010910-9, Ankara, 2005.

[5] ÇATAL, S., 2004. ’’Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri İle Çözümü’’, DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen Ve Mühendislik Dergisi , Cilt: 6, Sayı:1, 129-138.

[6] Demircioğlu, N., ’’Fark Denklemleri’’, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2007.

[7] Elaydi, S., ’’An Introduction to Difference Equations’’, Springer, ISBN 0-387-23059-9, Texas, 2005.

[8] ERSEL, H., ‘‘İktisatçılar için Matematik’’, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 1981.

[9] Ferguson, B. S., Lim, G.C., ’’ Dynamic Economic Models in Discrete Time’’, Routledge, ISBN 0–415–28899–1, London, 2003.

[10] Gandolfo, G., ’’ Mathematical Methods And Models in Economic Dynamics’’, North-Holland, ISBN 0-7204-3053-4, Amsterdam, 1971.

[11] Goldberg, S., ’’Introduction to Difference Equation’’, John Wiley and Sons Inc., ISBN 58-10223, New York, 1958.

[12] Kutay, V., ’’Fark Denklemleri’’, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.2010.

[13] Önay, O., ‘’Fark Denklemleri’’, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2009.

[14] Puu, T., ’’Relative Dynamics and The Hicks Trade Cycle Model’’, Cerum, ISBN 91-7305-620-0, Umeâ, 2004.

[15] Temel, K., ’’Fark Denklemleri Ve Uygulamaları’’, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2009.

[16] Özimamoğlu, H., ’’Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılık Analizi’’, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi,Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, 2012.

[17] Tirelli, M., ‘’Linear Difference Equation’’, Hazırlık Çalışması, http://host.uniroma3.it/docenti/tirelli/RM3/Mag/Doc_Macro/linear_difference_eq.pdf, 2014.

[18] Zwillinger, D., ’’ Standard Mathematical Tables And Formulae’’, Chapman&Hall, ISBN 1-58488-291-3, London, 2003.

[19] http://www.neusser.ch/downloads/DifferenceEquations.pdf

[20] http://www.math.utah.edu/mathcircle/notes/earnshaw.pdf

[21] http://idari.cu.edu.tr/sanli/matikt2-7.pdf

[22] http://idari.cu.edu.tr/sanli/matikt2-8.pdf

[23] http://cruel.org/econthought/essays/multacc/metzinv.html

[24] http://www.ekodialog.com/Acik_ogretim_iktisat/iktisat_teorisine_giris.html

[25] http://www.fbemoodle.emu.edu.tr/mod/resource/view.php?id=15846

[26] http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

[27] http://global.britannica.com/EBchecked/topic/162865/difference-equation

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:** Ömer ATALAY
Doğum Yeri	**:** Kütahya
Doğum Tarihi	**:** 23.03.1986
Yabancı Dili	**:** İngilizce
İletişim	**:** omeratalay36@gmail.com
Eğitim Durumu	
Lise	**:** Kars Anadolu Lisesi
Lisans	**:** Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Yüksek Lisans	**:** Kafkas Üniversitesi