T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NEGATİF KATSAYILI ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Yücel ÖZKAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

TEMMUZ–2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yücel ÖZKAN' ın Doç. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı ''Negatif Katsayılı Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıflarının Bazı Özellikleri'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği........ile kabul edilmiştir.

08/07/2015

Adı ve Soyadı | **İmza**

Başkan: Prof. Dr. Halit ORHAN ....

Üye: Doç. Dr. Erhan DENİZ ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../ ...../2015 gün ve ..../................sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hidayet Metin ERDOĞAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarım da etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, yoğun çalışmalarının arasında bizi kırmayıp savunmamıza katılan Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a ve çalışmam esnasında, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve sevgileriyle beni bugüne getiren, beni hiç yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan ve çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Kars-2015 **Yücel ÖZKAN**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde yeni bir diferensiyel operatör yardımıyla tanımlanan analitik fonksiyonların $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ biçimindeki alt sınıfları tanıtılıp ve çalışıldı. Bu sınıflar için katsayı tahminleri, büyüme ve bükülme teoremleri, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları, kısmi toplamlar, komşuluk ve subordinasyon sonuçları ile ilgili teoremler verildi. Bunlara ilave olarak bu sınıflar için ekstremum noktalar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Diferensiyel operatör, Distorsiyon, Ekstremum nokta, Kısmi toplam, Komşuluk, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, we introduce and study two new subclasses $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ and $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ of analytic functions which are defined by aid of a new differential operator. Some results connected with coefficients estimates, distortion theorems, radii of starlikeness and convexity, partial sums, neighborhoods and subordination results related these subclasses are obtained. Additionally extreme points for these subclasses are determined.

Keywords: Analytic function, Differantial operatör, Distortion, Extreme point, Partial sum, Neighborhood, Subordinate.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
U	Birim Disk
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş Analitik Fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{T}$	Normalize edilmiş Negatif Katsayılı Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize Edilmiş Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha.$ Mertebeden Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize Edilmiş Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\alpha.$ Mertebeden Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\mathcal{D}_\lambda^m$	Türev operatörü
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kompleks analizin önemli konularından biri olan geometrik fonksiyonlar teorisi esasında geometri ile analiz arasında önemli bir köprü oluşturur. Burada bu ilişkiyi en güzel şekilde kuran ünivalent (bire-bir) fonksiyonlardır. En basit örnekle, kompleks düzlemin herhangi bir alt kümesinde eğer bir fonksiyon analitik ve ünivalent ise $f'(z) \neq 0$ dır. Riemann dönüşüm teoreminden dolayı ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \right\}$$

birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır. Literatür de bu teorem Koebe çeyrek teoremi olarak bilinmektedir.

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z \in U$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ tahmini uzun yıllar matematikçileri devamlı meşgul eden bir problem olarak uzun yıllar güncelliğini korumuş ve nihayet 1985 yılında Louis De Branges tarafından çözülmüştür.

Bieberbach teoreminin çok önemli sonuçlarından birisi de $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve büyüme (growth) ve bükülme (distortion) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Bieberbach tahmininin Louis De Branges tarafından çözülmesine kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden ikisi yıldızıl (starlike) ve konveks (convex) fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilginç bağıntı ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak analitik fonksiyonların yeni bir D_λ^m operatörü tanımlanmıştır. Tanımlanan bu operatör yardımıyla analitik fonksiyonların $\mathcal{S}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ ve $\mathcal{C}_m\left(\alpha,\lambda\right)$ gibi iki yeni alt sınıfı verilmiştir. Bu sınıflar için sırasıyla katsayı eşitsizliği, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları, büyüme ve bükülme teoremleri, ekstremal fonksiyon, kısmi toplamları, komşuluk problemi ve subordinasyon ile ilgili teoremler verildi.

Tezin kuramsal temeller bölümü tezin diğer bölümlerinde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur. Ayrıca ünivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak bu fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{S}$ sınıfına ait önemli özellikler verilmiştir. Son olarak $\mathcal{S}$ sınıfının $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ alt sınıfları verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak verilen bölümde yeni bir D_λ^m operatörü ve bu operatörle alakalı olan $\mathcal{S}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ ve $\mathcal{C}_m\left(\alpha,\lambda\right)$ gibi iki yeni alt sınıf tanımlanmıştır.

Araştırma bulguları olarak verilen dördüncü bölümde ise $\mathcal{S}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ ve $\mathcal{C}_m\left(\alpha,\lambda\right)$ alt sınıflarıyla ilgili sırasıyla katsayı eşitsizliği, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları, büyüme ve bükülme teoremleri, ekstremal fonksiyonu, kısmi toplamları, komşuluk problemi ve subordinasyon ile ilgili teoremler ispatlarıyla sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu.

Tanım 2.1.1 (r -komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$ komşuluğu) olarak adlandırılır. $\overline{U}(z_0, r\ )$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S 'nin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S 'nin her noktası bir iç nokta ise S ye açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir. Örneğin $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1\}$ kapalı kümedir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir. Örneğin $\mathbb{C}$'nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

$\mathbb{C}$ hem açık hemde bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. Başka bir ifade ile $[a,b]$ kapalı aralığından herhangi bir topolojik uzaya tanımlı sürekli dönüşümlere eğri ya da yol denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu kavramlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferensiyellenebilirdir (ya da türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında f fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktası ve bu noktanın belli bir komşuluğundaki tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitik ise f ye S kümesinde analitiktir denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Örneğin $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ ve $f(z) = e^z$ fonksiyonları birer tam fonksiyondur. Oysa $f(z) = xy + iy$ ve $f(z) = e^y(\cos x + i \sin x)$ fonksiyonları hiç bir yerde analitik değildir.

Teorem 2.2.1 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.2 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f fonksiyonu bir bölgede analitik ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada her mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin,

$$f(x) = x^{3/2}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

reel değişkenli fonksiyonlarının $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevleri olduğu halde, $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevleri yoktur.

Tanım 2.2.2 (Tekil nokta):

i. Bir $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik değilse bu noktaya f fonksiyonunun tekil noktası denir.

ii: Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.2.3 (Laurent Teoremi): C_0 ve C_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere C_0, r_0 yarıçaplı ve C_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu C_0 ile C_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.2.3 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.4 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Örneğin,

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

fonksiyonunda $\lim_{z\to -2} f(z) = \infty$ olduğundan $z_0 = -2$ f nin bir kutup noktasıdır.

Teorem 2.2.4 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinde maksimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.1: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonuda bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.1 (Schwarz lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır. [19].

Teorem 2.2.5 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.2: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.5 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa) f ye A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [8].

Örneğin, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ ve $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonları birer ünivalent fonksiyondur.

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.6: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [8].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$. Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.1: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A

bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir. Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.5 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.6 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.7: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$ düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$ düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.8 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ $(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [8].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı olarak ele alacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Diğer taraftan bir f analitik fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{2.1}$$

şeklindeki bir seriyle temsil edildiğini biliyoruz. Burada f fonksiyonunun ünivalent olduğu kabul edilirse

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

ifadesinden

$$g(z)=\frac{f(z)-b_0}{b_1}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+\frac{b_3}{b_1}z^3+...$$
$$\frac{b_2}{b_1}=a_2,\ \frac{b_3}{b_1}=a_3,...,\frac{b_n}{b_1}=a_n,...$$

alınırsa

$$g(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$$

fonksiyonunun da ünivalent olduğu kolayca görülebilir. Son ifadeyi f fonksiyonu için $f(0)=0,\ f'(0)=1$ şartlarına da bağlayabiliriz. Bu şartlara f fonksiyonu için normalizasyon şartları da denilir. Dolayısıyla da normalizasyon şartları altında (2.1) serisi

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\quad (z\in U) \tag{2.2}$$

şeklini alır. Burada (2.2) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A}=\left\{f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S}=\left\{f\in\mathcal{A}:\ f,U \text{ da ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir [8, 10, 11, 20].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\text{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \dfrac{1+i}{2} \in U$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [8].

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilation): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk Otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) *n.* kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \ldots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \ldots, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Teorem 2.3.3: $f \in \mathcal{S}$ olsun. $f(U) \supseteq U_{1/4}$ dır. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonları için kesindir. Üstelik $\bigcap_{f \in S} f(U) = U_{1/4}$ dır [8].

Teorem 2.3.4: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda her $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad \text{(Büyüme (Growth))}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \qquad \text{(Bükülme (Distorsion))}$$

ve

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik sadece Koebe fonksiyonunun rotasyonlarında sağlanır [8].

Teorem 2.3.5: $\mathcal{S}$ sınıfı kompaktır [8].

Tanım 2.3.2 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [8].

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z)$, $z \in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0$, $n \ge 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [8].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z) \in \Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.4 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme (veya kısaca yıldızıl) küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [8, 20].

Teorem 2.3.5: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \le n \; (n = 2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur [10, 11, 20].

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

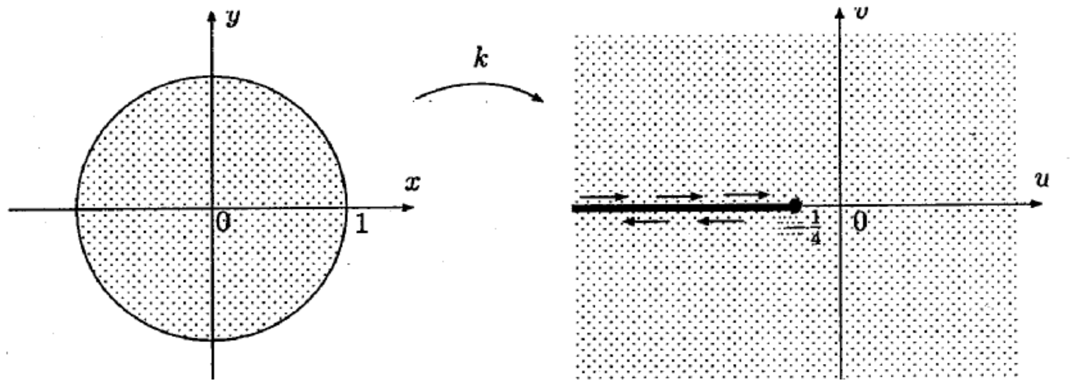
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyonu $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak U birim diskini $\left(-\infty,\,{}^{-1}\!/_{4}\right]$ ışını çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmettiği görülebilir. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde özellikle ekstremal fonksiyon olması yönüyle çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 1: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}nz^n\in\mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 2.3.5 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $\left(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi\right)$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$
$$=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in U$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha \in (0,2]$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right]$ fonksiyonu, "*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B \subset C$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [10, 11, 20].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \le 1 \; (n = 2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur [10, 11, 20].

Teorem 2.3.7 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in U$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [8, 10, 11, 20].

Tanım 2.3.6 ($\mathcal{K}$ sınıfı): $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $z \in D$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) \ge 0$$

olacak şekilde bir $g \in C$ varsa f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir [8, 10, 11].

Yukarıdaki tanımdan açık olarak her konveks fonksiyonun konvekse yakın fonksiyon olduğu görülür. Daha genel olarak her yıldızıl fonksiyon konvekse yakın fonksiyondur.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere fonksiyonun ünivalent olması durumunda bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Önemli ünivalentlik kriterlerin den biri aşağıdaki Noshiro-Warschawski (Wolff) kriteridir.

f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip subordinasyon ve Hadamard çarpım kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.7: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [8].

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0) = f(0)$ ve $g(U) \subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \le |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subset f(U_r)$ dir [8].

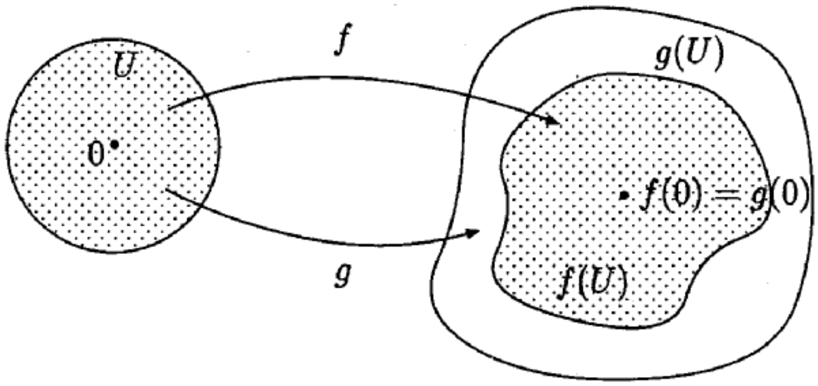
Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z| \le r} |f(z)| \le \max_{|z| \le r} |g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z) \in \Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z) \prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.8: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$*$" Hadamard çarpımını gösterir [8, 21].

Tanım 2.3.9. ($\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α. mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir [10, 11].

Tanım 2.3.10. ($\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir [10, 11].

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} :\ 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

şeklinde yazabiliriz.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için büyüme ve bükülme teoremleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu ünivalent olsun. Bu durumda her $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad \text{(Büyüme (Growth))}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \qquad \text{(Bükülme (Distorsion))}$$

ve her $k \geq 2$ için

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!\left(k+|z|\right)}{\left(1-|z|\right)^{k+2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin her birinin eşitlik halinin olması Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi ile gerçekleşir [10].

Teorem 2.3.9: $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu ünivalent olsun. Bu durumda her $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad \text{(Büyüme (Growth))}$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}, \qquad \text{(Bükülme (Distorsion))}$$

ve her $k \geq 2$ için

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{\left(1-|z|\right)^{k+1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin her biri $f(\mathrm{z}) = \mathrm{z}/(1-\mathrm{z})$ fonksiyonu ile kesindir. [10].

1975 yılında Silverman [26] aynı sınırları $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ için elde etmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak aşağıdaki yeni bir diferansiyel operatörü tanımladık.

Tanım 3.1.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\lambda \geq 0$, $z \in U$ ve $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonların D_λ^m türev operatörü

$$\begin{aligned}
&D_\lambda^0 f(z) = f(z) \\
&D_\lambda^1 f(z) = D_\lambda f(z) = \lambda z^3 f'''(z) + (2\lambda + 1) z^2 f''(z) + z f'(z) \\
&\vdots \\
&D_\lambda^m f(z) = D_\lambda \left(D_\lambda^{m-1} f(z) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır**.**

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere f fonksiyonu için D_λ^m türev operatörü

$$D_\lambda^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m} \left(\lambda (n-1) + 1 \right)^m a_n z^n$$

şeklinde yazılır. Aynı zamanda $D_\lambda^m f(z) \in \mathcal{A}$ dır.

$D_\lambda^m f(z)$ operatörünün özel durumu Sălăgean türev operatörüne indirgenir. Bilindiği üzere Sălăgean türev operatörü

$$\begin{aligned}
&S^0 f(z) = f(z) \\
&S^1 f(z) = Sf(z) = z f'(z) \\
&\vdots \\
&S^m f(z) = S(S^{m-1} f(z))
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [23]. Dolayısıyla Sălăgean türev operatörü

$$S^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n z^n$$

olur. Dolayısıyla D_λ^m ve S^m operatörleri arasında

$$D_0^m f(z) = S^m f(z) * S^m f(z) = S^{2m} f(z)$$

ve

$$D_1^m f(z) = S^m f(z) * S^m f(z) * S^m f(z) = S^{3m} f(z)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Şimdi D_λ^m operatörü ile alakalı olan aşağıdaki sınıfları tanımlayalım.

Tanım 3.1.2: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için f fonksiyonun $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ sınıfları

$$\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{D_\lambda^m f(z)} \right) > \alpha,\ \ \lambda \geq 0, 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)''}{\left(D_\lambda^m f(z)\right)'} \right) > \alpha,\ \ \lambda \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde uygulamalarda özellikle katsayı eşitsizlikleriyle ilgili teoremler genellikle sadece gerek şart olarak verilir. Bunun sebebi $f(z)$ fonksiyonunun $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde olmasından kaynaklanmaktadır. Tersinin doğru olması yani yeter şartının verilebilmesi için $f(z)$ fonksiyonunun negatif katsayılı yani

$$f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k \tag{3.1}$$

olması gerekir. Bu yüzden bu tip fonksiyonları ayrı kategoride inceleriz. Bundan sonra $\mathcal{T}$ ile böyle fonksiyonların sınıfını göstereceğiz. Bu sınıf ilk defa Silverman tarafından 1975 yılında verilmiştir. Böylece bu sınıfa bağlı olarak

$$\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)=\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)\cap\mathcal{T}$$

$$\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)=\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)\cap\mathcal{T}$$

sınıflarını tanımlanır. Özel durumlarda

$$\mathcal{TS}_o^*(\alpha,\lambda)=\mathcal{T}^*(\alpha)$$

ve

$$\mathcal{TC}_0(\alpha,\lambda)=\mathcal{TC}(\alpha)$$

olup bu sınıflar Silverman tarafından tanımlanmıştır [26].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ alt sınıflarıyla ilgili sırasıyla katsayı eşitsizliği, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları, büyüme ve bükülme teoremleri, ekstremal, fonksiyonu, kısmi toplamları, komşuluk problemi ve subordinasyon ile ilgili teoremler ispatlarıyla sunulmuştur.

4.1. $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları için Katsayı Eşitsizlikleri

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin oluşmasında önemli bir yeri olan katsayı eşitsizlikleri günümüze kadar çalışma alanı bulmuştur. Bieberbach'ın $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir fonksiyon için $|a_n| \le n$ sonucunu elde etmesi bu konu üzerinde çalışmalar için bir milat teşkil eder.

Bunun yanı sıra birçok bilim adamı ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için katsayı eşitsizliklerini kimi durumda gerek şart olarak, kimi durumda sadece yeter şart ve kimi durumda gerek yeter şart olarak vermişlerdir. Örneğin, eğer (2.2) şeklinde verilen $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu yıldızıl ve konveks ise sırasıyla $|a_n| \le n$ ve $|a_n| \le 1$ eşitsizlikleri sağlanır. Tersine $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \le 1$ eşitsizlikleri sağlanırsa sırasıyla $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu yıldızıl ve konvekstir. Yukarıdaki yazılan gerektirmelerin tersleri genelde, doğru değildir. Bu sonuçlar aynı zamanda $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları içinde verilir [10, 11, 20]. Schild 1965 yılında $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonun α mertebeden yıldızıl ve konveks olması durumunda bu fonksiyonun katsayıları için sırasıyla $|a_n| \le \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)}{(n-1)!}$ ve $|a_n| \le \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)}{(n)!}$ tahminlerini elde etmiştir [24]. Daha sonra 1975 yılında Silverman (2.2) şeklinde tanımlanan bir fonksiyonun sırasıyla $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \le 1-\alpha$ ve $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \le 1-\alpha$ eşitsizliklerini sağlaması durumunda f nin ünivalent α.

mertebeden yıldızıl ve ünivalent α. mertebeden konveks fonksiyon olduğunu ispatlamıştır [26]. Silverman aynı çalışmasında fonksiyonun negatif katsayılı olması durumunda yukarıdaki son ifadenin gerek ve yeter şart olarak verilmesi gerektiğini ispatlamıştır.

Tezin bu bölümünde $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$, $\mathcal{C}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$, $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ alt sınıfları için katsayı eşitsizlikleri araştırıldı.

Teorem 4.1.1: $m\in\mathbb{N}_0$, $\lambda\geq 0$, $0\leq\alpha<1$ve $f\in\mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|\leq 1-\alpha \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda $f\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ dır [6].

İspat: $f\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ olduğunu göstermek için $\dfrac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{\left(D_\lambda^m f(z)\right)}$ ifadesinin $w=1$ merkezli, $1-\alpha$ yarıçaplı çemberinde olduğunu göstermek yeterlidir. Yani

$$\left|\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{D_\lambda^m f(z)}-1\right|\leq 1-\alpha \tag{4.2}$$

olduğunu göstermek gerekir. Böylece

$$\begin{aligned}\left|\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{\left(D_\lambda^m f(z)\right)}-1\right| &= \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m a_n z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m a_n z^n}\right| \\ &= \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m a_n z^{n-1}}\right| \\ &\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-1)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|}\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.1) dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n| \\
&=\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-1)\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n|+(1-\alpha)\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n|\right) \\
&\leq (1-\alpha)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olur. Dolayısıyla (4.4) eşitsizliğinden

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-1)\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n|}\leq 1-\alpha \tag{4.5}$$

bulunur. Böylece (4.1) ve (4.3) ifadelerinden (4.2) eşitsizliği yeni

$$\left|\frac{z\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)'}{\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)}-1\right|\leq 1-\alpha$$

elde edilir. Bununla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Burada dikkat edilmesi gereken husus (4.1) eşitsizliğinin geçerli olması için (4.5) eşitsizliğindeki paydanın pozitif olması gerektiği unutulmamalıdır. Bunun pozitifliği (4.1) eşitsizliğinden kolaylıkla görülebilir.

Sonuç 4.1.1: $\lambda \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ ve $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^{m}|a_n|\leq 1-\alpha \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ dır [6].

İspat: Alexander teoremine göre

$$D_{\lambda}^{m} f(z)\in \mathcal{C}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)\Leftrightarrow z\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)'\in \mathcal{S}_{m}^{*}(\alpha,\lambda)$$

gerektirmesinin doğru olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$D_{\lambda}^{m} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m} \left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^{m} a_n z^n$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} z\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)' &= z\left[1+\sum_{n=2}^{\infty} n.n^{2m} \left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^{m} a_n z^{n-1}\right] \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1} \left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^{m} a_n z^n \end{aligned}$$

yazılır. Teorem 4.1.1 de a_n yerine na_n yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m} \left(n-\alpha\right)\left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^{m} n\left|a_n\right| &= \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1} \left(n-\alpha\right)\left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^{m} \left|a_n\right| \\ &\leq 1-\alpha \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1 gereği $z\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)' \in \mathcal{S}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ olur. Sonuç olarak

$$D_{\lambda}^{m} f(z) \in \mathcal{C}_{\mathrm{m}}\left(\alpha,\lambda\right) \Leftrightarrow z\left(D_{\lambda}^{m} f(z)\right)' \in \mathcal{S}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$$

gerektirmesi gereğince $D_{\lambda}^{m} f(z) \in \mathcal{C}_{\mathrm{m}}\left(\alpha,\lambda\right)$ olur.

Şimdi $\mathcal{TS}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.1.2: $\lambda \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ ve

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left|a_n\right| z^n$$

olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{TS}_m^*\left(\alpha,\lambda\right)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1) eşitsizliğinin sağlanmasıdır. (4.1) eşitsizliği

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{4^m\left(2-\alpha\right)\left(\lambda+1\right)^m} z^2$$

ekstremal fonksiyonu ile kesindir [6].

İspat: İspatımızın yeter şartı yukarıda verdiğimiz Teorem 4.1.1 in ispatının benzeridir. Bu yüzden sadece gerek şartı göstereceğiz.

Hipotez gereği $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{D_\lambda^m f(z)}\right\} > \alpha$$

ve dolayısıyla

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{D_\lambda^m f(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n| z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n| z^n}\right\} > \alpha \tag{4.7}$$

yazılır.

z değerlerini reel eksende seçtiğimizde

$$\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'}{D_\lambda^m f(z)}$$

ifadesi reel olacaktır. (4.7) eşitsizliğinde $z \to 1^-$ için limit alındığında

$$\frac{1-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|} \geq \alpha$$

olur. Son eşitsizlik düzenlendiğinde

$$1-\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n| \geq \alpha-\alpha\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|$$

$$\Rightarrow 1-\alpha \geq \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|-\alpha\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|$$

$$\Rightarrow 1-\alpha \geq \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha) n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n|$$

ve nihayetinde,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n| \leq 1-\alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.2: Eğer $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ise,

$$|a_n| \leq \frac{1-\alpha}{n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ise

$$f_n(z)=z-\frac{1-\alpha}{n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m} z^n$$

şeklindeki fonksiyonlar ile sağlanır [6].

Sonuç 4.1.3: $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ şeklinde tanımlanan bir $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart (4.6) olarak ifade edilen

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m |a_n| \leq 1-\alpha$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Eşitlik ise

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} z^2$$

ekstremal fonksiyonu ile sağlanır [6].

Teorem 4.1.3: $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$, $0 \le \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_2) \subseteq \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_1)$ ve $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_2) \subseteq \mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_1)$ içerme bağıntıları sağlanır [6].

İspat: Hipotezden $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$ olduğundan dolayı

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda_1(n-1)+1\right)^m |a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda_2(n-1)+1\right)^m |a_n|$$

yazılır. Yine hipotezden $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_2)$ olması ve Teorem 4.1.1 dikkate alındığında

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda_2(n-1)+1\right)^m |a_n| \le 1-\alpha$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda_1(n-1)+1\right)^m |a_n| \le 1-\alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_1)$ olması demektir. Sonuç olarak $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_2) \subseteq \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda_1)$ dır.

Benzer işlemler $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_1)$ ve $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_2)$ sınıfları için yapıldığında

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda_1(n-1)+1\right)^m |a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda_2(n-1)+1\right)^m |a_n| \tag{4.8}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.3 dikkate alındığında

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda_2(n-1)+1\right)^m |a_n| \le 1-\alpha \tag{4.9}$$

yazılabilir. (4.8) ve (4.9) ifadelerinden

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{2m+1}(n-\alpha)\left(\lambda_1(n-1)+1\right)^m |a_n| \le 1-\alpha$$

olur. Böylece $f \in \mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_1)$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_2) \subseteq \mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda_1)$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları için Büyüme ve Bükülme Teoremleri

$\mathcal{S}$ sınıfına veya onun alt sınıflarına ait bir fonksiyonların önemli araştırma konularından biri de bu fonksiyonlar için büyüme ve bükülme sınırlarını elde etmektir. Bu bölümde $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için büyüme ve bükülme teoremlerini vereceğiz.

Teorem 4.2.1: Eğer $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ise $\lambda \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} r^2 \quad \left(|z| = r\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik ise

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} z^2$$

ekstremal fonksiyonu ile sağlanır [6].

İspat: Hipotezden $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olduğundan Teorem 4.1.2 den

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(2-\alpha)4^m(\lambda+1)^m|a_n| &= (2-\alpha)4^m(\lambda+1)^m\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m|a_n| \leq 1-\alpha\end{aligned}$$

yazılabilir. İlk ve son terimden

$$(2-\alpha)4^m(\lambda+1)^m\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq 1-\alpha$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} \tag{4.10}$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.10) eşitsizliği ve $|z|<1$ için $|z|^n \le |z|$ eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left| z - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| z^n \right| \le |z| + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n \\ &\le r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le r + r^2 \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İlk ve son ifadeden

$$|f(z)| \le r + r^2 \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$|f(z)| = \left| z - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| z^n \right| \ge |z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n \ge r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$$

olur. Dolayısıyla

$$|f(z)| \ge r - r^2 \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}$$

bulunur. Böylece

$$r - \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} r^2 \quad (|z| = r)$$

elde edilir. Bununla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Benzer sonucu $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ sınıfı için ispatsız olarak aşağıdaki şekilde verebiliriz. İspatı Teorem4.2.1 dekine benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.2.1: Eğer $f \in \mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ ise $\lambda \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$r-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r^2 \quad (|z|=r)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik ise

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}z^2$$

ekstremal fonksiyonu ile sağlanır [6].

Teorem 4.2.2: $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait herhangi bir fonksiyon birim diski $|w|<1-\dfrac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}$ diskini kapsayan bir bölgeye dönüştürür. $\mathcal{TC}_{\mathrm{m}}(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait herhangi bir fonksiyon birim diski $|w|<1-\dfrac{1-\alpha}{2(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}$ diskini içeren bir bölgeye dönüştürür [6].

İspat: Teorem 4.2.1 de yer alan

$$r-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r^2 \leq |f(z)| \leq r+\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r^2$$

eşitsizliğinde $r \to 1$ için limit alınması yeterlidir.

Teorem 4.2.3: Eğer $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ise $\lambda \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$1-\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r \quad (|z|=r)$$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

İspat: ilk olarak

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \Rightarrow f'(z)=1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}$$

ve dolayısıyla

$$\left|f'(z)\right|\leq 1+\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\left|z\right|^{n-1}\leq 1+r\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right| \tag{4.11}$$

yazılır. Diğer taraftan $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olduğundan

$$2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}n^{2m-1}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m n\left|a_n\right|$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m n\left|a_n\right|\leq 1-\alpha$$

olmaktadır. İlk ve son terimden

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\leq\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.12) ifadelerinden

$$\left|f'(z)\right|\leq 1+\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|f'(z)\right|\geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|z^{n-1}\geq 1-r\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|$$

ve dolayısıyla

$$\left|f'(z)\right|\geq 1-\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r$$

bulunur. Böylece

$$r-\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r\leq\left|f'(z)\right|\leq 1+\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r$$

elde edilip teorem ispatı tamamlanmış olur.

Benzer sonuç $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ sınıfı içinde aşağıdaki şekilde verilir. İspatı Teorem 4.2.2 nin ispatına benzerdir

Sonuç 4.2.2: Eğer $f\in\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ ise $\lambda\geq 0$, $0\leq\alpha<1$ ve $m\in N_0$ olmak üzere

$$1-\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r\leq|f'(z)|\leq 1+\frac{1-\alpha}{(2-\alpha)\left(4(\lambda+1)\right)^m}r\quad(|z|=r)$$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

4.3. $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları için Yıldızıllık ve Konvekslik Yarıçapı

$\mathcal{S}$ **sınıfı için yıldızıllık yarıçapı:** $f\in\mathcal{S}$ olsun. $f(U_r)$ kümesi δ. mertebeden yıldızıl olacak şekilde bütün r sayılarının supremumuna $\mathcal{S}$ sınıfının δ. mertebeden yıldızıl yarıçapı denir. $\mathcal{S}$ sınıfının δ. mertebeden yıldızıl yarıçapı $r_{\mathcal{S}^*}(\delta)$ ile gösterilir.

Kısaca δ. mertebeden yıldızıl yarıçapı

$$r_{\mathcal{S}^*}(\delta)=\sup\left\{r>0:\ \forall z\in U_r\ \text{için}\ \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\delta,\ 0\leq\delta<1\right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $\delta=0$ alınırsa $r_{\mathcal{S}^*}(0)=r_{\mathcal{S}^*}$ yıldızıllık yarıçapı elde edilir. $r_{\mathcal{S}^*}$ yıldızıllık yarıçapı üzerine ilk çalışma Grunsky tarafından 1934 yılınd yapılmıştır. Grunsky $r_{\mathcal{S}^*}=\dfrac{1-e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi/2}}=\tanh\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0.655794...$ olarak bulmuştur. Daha sonra Stankiewicz 1968 yılında δ. mertebeden yıldızıllık yarıçapınının $r_{\mathcal{S}^*}(\delta)=\sin\left(\dfrac{\delta\pi}{2}\right)$ olduğunu ispatlamıştır [8,10, 11].

$\mathcal{S}$ **sınıfı için konvekslik yarıçapı:** $f\in\mathcal{S}$ olsun. $f(U_r)$ kümesi δ. mertebeden konveks olacak şekilde bütün r sayılarının supremumuna $\mathcal{S}$ sınıfının δ. mertebeden konvekslik yarıçapı denir. $\mathcal{S}$ sınıfının δ. mertebeden konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{C}}(\delta)$ ile gösterilir.

Kısaca δ. mertebeden konvekslik yarıçapı

$$r_C(\delta)=\sup\left\{r>0:\ \forall z\in U_r \text{ için } \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\delta,\, 0\le\delta<1\right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $\delta=0$ alınırsa $r_C(\delta)=r_C$ konvekslik yarıçapı elde edilir. r_C konvekslik yarıçapı üzerine ilk çalışma Nevanlinna tarafından 1922 yılında yapılmıştır. Nevanlinna $r_C=2-\sqrt{3}=0.267949....$ olarak bulmuştur. Daha sonra Srivastava ve Bajpai 1972 yılında δ. mertebeden konvekslik yarıçapının $r_C(\delta)=\dfrac{2-\sqrt{3+\delta^2}}{1+\delta}$ olduğunu ispatlamıştır [8, 10, 11].

Biz bu bölümde $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $f\in\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ olması durumunda δ. mertebeden yıldızıl ve δ. mertebeden konvekslik yarıçapını elde edeceğiz.

Teorem 4.3.1: Eğer $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ise, f fonksiyonu $0\le\delta<1$, $0\le\alpha<1$, $\lambda\ge0$ ve $m\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$|z|<r_1=r_1(\alpha,\lambda,\delta,m)=\inf_n\left(\frac{(n-\alpha)(1-\delta)n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{(n-\delta)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\qquad (n=2,3,...)$$

diskinde δ. mertebeden yıldızıldır [6].

İspat: $0\le\delta<1$ için $f(z)$ fonksiyonunun δ. mertebeden yıldızıl olduğunu göstermek için

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<1-\delta$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| = \left|\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n}-1\right| = \left|\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n-\left[z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n\right]}{z-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|z^n}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n}\right| \le \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler dikkate alındığında $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<1-\delta$ olduğunu göstermek için

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^{n-1}}<1-\delta$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-\delta}{1-\delta}\right)|a_n||z|^{n-1}<1 \tag{4.13}$$

olduğunu göstermek gerekir. Bunun için (4.13) in sol tarafında

$$|z|^{n-1}<\frac{(1-\delta)(n-\alpha)n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{(1-\alpha)(n-\delta)}$$

yazılırsa $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olduğundan (4.13) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ sınıfı için konvekslik yarıçapını tayin edeceğiz.

Teorem 4.3.2: Eğer $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ ise, f fonksiyonu $0\le\delta<1,\ 0\le\alpha<1,\ \lambda\ge 0\, ve\, m\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere $n=2,3,...$ için

$$|z|<r_2=r_2(\alpha,\lambda,\delta,m)=\inf_n\left(\frac{(n-\alpha)(1-\delta)n^{2m-1}(\lambda(n-1)+1)^m}{(n-\delta)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

diskinde δ. mertebeden konvekstir [6].

İspat: Teoremimin ispatı için $|z|\le r_2$ olmak üzere

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|\le 1-\delta$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Bunun için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|=\left|\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}\right|$$

$$\le\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}}$$

elde edilir. Son eşitsizlik dikkate alındığında $\left|\frac{zf''(z)}{f(z)}\right|\le 1-\delta$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}}\le 1-\delta$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{n-\delta}{1-\delta}\right)|a_n|\left|z^{n-1}\right|<1 \tag{4.14}$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için (4.14) ün sol tarafında

$$|z|^{n-1} < \frac{(n-\alpha)(1-\delta)n^{2m-1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{(n-\delta)(1-\alpha)}$$

yazılırsa $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ olduğundan dolayı (4.14) ün sağlandığı kolayca görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.4. $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları İçin Ekstremum Noktalar

Bu başlık altında $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ alt sınıflarına ait fonksiyonlar için ekstremum noktalar incelenmiştir.

Teorem 4.4.1: $f_1(z) = z$ ve

$$f_n(z) = z - \frac{(1-\alpha)z^n}{n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m} \qquad (n = 2,3,...)$$

olsun bu durumda $\gamma > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n f_n(z)$$

olmasıdır [6].

İspat: $\Leftarrow$: Farzedelim ki,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n f_n(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n \frac{1-\alpha}{n^{2m}(n-\alpha)\left(\lambda(n-1)+1\right)^m} z^n$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)}{1-\alpha}\left(\gamma_n\frac{1-\alpha}{n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m}\right)$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n=1-\gamma_1<1$$

elde edilir. Dolayısıyla $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olur.

$\Rightarrow$: $f\in\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m|a_n|\leq 1-\alpha$$

eşitsizliği ve dolayısıyla

$$|a_n|\leq\frac{1-\alpha}{n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m}\qquad (n=2,3,\ldots)$$

yazılabilir. Şimdi

$$\gamma_n=\frac{n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m|a_n|}{1-\alpha}$$

ve

$$\gamma_1=1-\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n$$

olarak seçildiklerinde ise

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n f_n(z)$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.1: $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ sınıfının ekstremum noktaları

$$f_n(z)=z-\frac{(1-\alpha)z^n}{n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m}\qquad (n=1,2,3,...)$$

fonksiyonlarıdır.

Benzer sonucu $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ sınıfı için aşağıda verilmiştir [6].

Sonuç 4.4.2: $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ sınıfının ekstremum noktaları

$$f_1(z)=z$$

ve

$$f_n(z)=z-\frac{(1-\alpha)z^n}{n^{2m+1}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m}\qquad (n=2,3,...)$$

fonksiyonlarıdır [6].

4.5. $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıflarına ait Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Bu bölümde $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ alt sınıflarına ait fonksiyonların kısmi toplamlar verilmeden önce ünivalent, yıldızıl, konveks fonksiyonların kısmi toplamları hakkında bilgi ve bunlarla alakalı bazı teoremler verilecek.

Ünivalent fonksiyonların kısmi toplamları: f fonksiyonunun *n*. kısmi toplamı f_n ile gösterilir ve

$$f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k$$

şeklinde yazılır. Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutan koebe fonksiyonunun ikinci kısmi toplamını araştıralım. Koebe fonksiyonunun ikinci kısmi toplamı

$$f_2(z)=z+2z^2\quad (z\in U)$$

şeklinde yazılır. f_2 nin $U_{1/4}$ diskinde ünivalent olduğu doğrudan (yada $|z|<1/4$ için $|f_2'(z)-1|<1$ gerçeğinden hareketle) rahatlıkla söylenebilirken aksine $f_2'(-1/4)=0$ olduğundan daha büyük diskler için bu doğru değildir. Bu örnekte de görüldüğü gibi ünivalent fonksiyonların kısmi toplamları U birim diskinde ünivalent olmayabilir. Genel olarak

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$$

fonksiyonunun ikinci kısmi toplam fonksiyonu

$$f_2(z)=z+a_2 z^2$$

şeklindedir. $a_2=0$ olarak alındığında $f_2(z)=z$ olur ki bu fonksiyonun özellikleri açıktır. Varsayalım ki $a_2\neq 0$ olsun, bu durumda $r<\dfrac{1}{2|a_2|}$ olmak şartıyla f_2

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf_2'(z)}{f_2(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(1+\frac{a_2 z}{1+a_2 z}\right)\geq 1-\frac{|a_2|r}{1-|a_2|r}>0$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece f_2 nin yıldızıllık yarıçapı $\dfrac{1}{2|a_2|}$ dir. Böylelikle f_2 nin $|z|<r$ de konveks olması için gerek ve yeter şart zf_2' nin $|z|<r$ de yıldızıl olmasıdır. Bu da f_2 nin konvekslik yarıçapının $\dfrac{1}{4|a_2|}$ olduğunu gösterir.

Eğer f ünivalent veya yıldızıl ünivalent olduğu zaman $|a_2|\leq 2$ olduğundan f_2 nin ünivalentlik ve yıldızıllık yarıçapı $1/4$, konvekslik yarıçapı ise $1/8$ olur.

İlk olarak Owa ve arkadaşlarının 2004 yılında yaptıkları çalışmada $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun ve $l(z)=\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonlarının üçüncü ve dördüncü kısmi toplamlarının yıldızıllık ve konvekslik yarıçapını elde etmişlerdir [18].

Koebe fonksiyonunun ikinci kısmı toplamı, ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının yarıçapı $1/4$ ten daha büyük bir diskte ünivalent olamayacağı sonucunu gösterir. Szegö, bükülme teoremi ve Löwner teorisinden yararlanarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 4. 5. 1 (Szegö teoremi): $\mathcal{S}$ sınıfına ait f ünivalent fonksiyonların kısmi toplamları $U_{1/4}$ diskinde ünivalenttir. Burada $1/4$ yarıçapı kesindir [30].

Yıldızıl fonksiyonların kısmi toplamları: Kobori 1934 yılında yıldızıl fonksiyonların kısmi toplamlarının konvekslik yarıçapını aşağıdaki teoremle vermiştir. Ogawa aynı sonucu 1959 yılında farklı bir şekilde ispatlamıştır [13, 14].

Teorem 4.5.2: Eğer f fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyon ise f fonksiyonunun tüm f_n kısmi toplamları $|z| < 1/8$ diskinde konvekstir. Bu $1/8$ sayısı kendisinden daha büyük bir değerle değiştirilemez [13, 14].

Bu teoreme göre Koebe fonksiyonunun kısmi toplamı $|z| < 1/8$ diskinde konvekstir. Ayrıca $\frac{1}{2}$ mertebeden yıldızıl fonksiyonlar için $\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{f_n(z)}\right) > \frac{1}{2}$ olduğu bilinmektedir [21]. Bu sonuç Singh ve Paul tarafından aşağıdaki teoremle genişletilmiştir.

Teorem 4.5.3: Eğer $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ ise, bu durumda λ ve μ negatif olmayan reel sayılar (veya en az biri sıfırdan farklı) veya μ, $|\lambda| > 4|\mu|$ şartını sağlayan kompleks sayı olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\lambda \frac{zf'(z)}{f(z)} + \mu \frac{f_n(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad z \in U$$

dır. Burada λ ve μ değerleri artırılamaz [29].

Konveks fonksiyonların kısmi toplamları: Bir f konveks fonksiyonu için $\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \frac{1}{2}$ olduğu bilinmektedir. Sheil-Small bu teoremi aşağıdaki şekilde vermiştir.

Teorem 4.5.4: $f \in \mathcal{C}$ ise bu durumda f nin f_n kısmi toplamları

$$\left|1 - \frac{f_n(z)}{f(z)}\right| \le |z|^n < 1 \quad (z \in U,\ n \ge 1)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece

$$\operatorname{Re}\frac{f_n(z)}{f(z)} > \frac{1}{2} \quad (z \in U, n \ge 1)$$

olmaktadır [25].

Teorem 4.5.5: Eğer f konveks bir fonksiyon ise, f nin her f_n kısmi toplamları $|z| < 1/4$ diskinde konvekstir [12, 30].

Teorem 4.5.6: Eğer f konveks bir fonksiyon ise, f fonksiyonunun f_n n.kısmi toplamları $|z| < r_n$ diskinde yıldızıldır. Burada r_n, $1-(n+1)r^n - nr^{n+1} = 0$ denkleminin pozitif köküdür. Sonuç her n değeri için

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

fonksiyonu ile kesindir [2].

Teorem 4.5.7: Eğer f fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise, tüm n değerleri için f_n kısmi toplamları $|z| < \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$ diskinde yıldızıldır. Özellikle, f_n kısmi toplamı $|z| < 1/2$ diskinde yıldızıldır ve $1/2$ olan yarıçapı değiştirilemez [27].

Silverman 1997 yılında f ile onun n. kısmi toplamlarının oranları arasında bir ilişki kurdu. Silverman çalışmasında α. mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonları için $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{f_n(z)}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f_n(z)}{f(z)}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f'(z)}{f_n'(z)}\right\}$ ve $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f_n'(z)}{f'(z)}\right\}$ değerleri için kesin alt sınırlar elde etti [28].

$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k$ şeklinde tanımlanan $f\in\mathcal{T}$ fonksiyonunun kısmi toplamları

$$f_n(z)=\begin{cases} z & ; \quad n=1 \\ z-\sum_{k=2}^{n}|a_k|z^k & ; \quad n=2,3,\ldots \end{cases} \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde $\mathcal{TS}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{TC}_m(\alpha,\lambda)$ ait fonksiyonlar için $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{f_n(z)}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f_n(z)}{f(z)}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f'(z)}{f_n'(z)}\right\}$ ve $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f_n'(z)}{f'(z)}\right\}$ oranlarının kesin alt sınırları verildi.

Teorem 4.5.8: $f\in\mathcal{T}$ ve $f_n(z)$ sırasıyla (3.1) ve (4.15) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\theta_k=\frac{k^{2m}(k-\alpha)\left[\lambda(k-1)+1\right]^m}{1-\alpha}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k|a_k|\le 1$$

olsun. Bu durumda $k\ge 2$ için,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{f_n(z)}\right)>1-\frac{1}{\theta_{n+1}} \tag{4.16}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f_n(z)}{f(z)}\right) > \frac{\theta_{n+1}}{1+\theta_{n+1}} \tag{4.17}$$

dır. Eşitlik

$$f(z) = z - \frac{1}{\theta_{n+1}} z^{n+1} \tag{4.18}$$

fonksiyonu ile sağlanır [7].

İspat: Teoremin hipotezinden $\theta_{k+1} > \theta_k > 1,\ k \geq 2$ yazılabilir. Böylece yine hipotezden dolayı

$$\begin{aligned} &\theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\right) \leq 2 - 2\sum_{k=2}^{n}|a_k| - \theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\right) \\ &\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}|a_k| + \theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\theta_k|a_k| \leq 1 \end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Şimdi $w(z)$'yi

$$\begin{aligned} w(z) &= \theta_{n+1}\left[\frac{f(z)}{f_n(z)} - \left(1 - \frac{1}{\theta_{n+1}}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{\theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|z^{k-1}\right)}{1 - \sum_{k=2}^{n}|a_k|z^{k-1}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlayalım.

(4.16) yı göstermek için $\mathrm{Re}(w(z)) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan $\mathrm{Re}(w(z)) > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{w(z)-1}{w(z)+1}\right| < 1$ olduğundan (4.19) ve (4.20) ifadelerinden

$$\left|\frac{w(z)-1}{w(z)+1}\right| = \left|\frac{\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|z^{k-1}}{2-2\sum_{k=2}^{n}|a_k|z^{k-1}-\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|z^{k-1}}\right|$$

$$\leq \frac{\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|}{2-2\sum_{k=2}^{n}|a_k|-\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|} \leq 1 \quad z\in U\,;\, k\geq 2$$

bulunur. Buda $\mathrm{Re}\left(w(z)\right)>0$ olması demektir. Böylece (4.16) nın ispatı tamamlanmış oldu.

(4.18) ile verilen f fonksiyonu için sonucun kesin olduğunu göstermek için $z\to 1^-$ alındığında

$$\frac{f(z)}{f_n(z)} = 1-\frac{1}{\theta_{n+1}}z^n \to 1-\frac{1}{\theta_{n+1}}$$

olur. Bu ise (4.16) deki sınırın kesin olduğunu gösterir.

Benzer şekilde

$$\phi(z) = \left(1+\theta_{n+1}\right)\left[\frac{f_n(z)}{f(z)}-\frac{\theta_{n+1}}{1+\theta_{n+1}}\right]$$

$$= 1+\frac{\left(1+\theta_{n+1}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\,z^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{n}|a_k|\,z^{k-1}}$$

alınırsa ve tekrar (4.19) kullanılırsa

$$\left|\frac{\phi(z)-1}{\phi(z)+1}\right| = \left|\frac{\left(1+\theta_{n+1}\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|z^{k-1}}{2-2\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k|z^{k-1}+\left(\theta_{n+1}-1\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|z^{k-1}}\right|$$

$$\leq \frac{\left(1+\theta_{n+1}\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|}{2-2\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k|+\left(\theta_{n+1}-1\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|} \leq 1 \ \left(z\in U;\ k\geq 2\right)$$

elde edilir. Böylece (4.17) de ispatlanmış olur. Dolayısıyla da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.9: $f \in \mathcal{T}$ ve $f_n(z)$ sırasıyla (3.1) ve (4.15) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\theta_k = \frac{k^{2m}\left(k-\alpha\right)\left[\lambda\left(k-1\right)+1\right]^m}{1-\alpha}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k|a_k| \leq 1$$

olsun. Bu durumda $k \geq 2$ için,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{f_n'(z)}\right) > 1-\frac{n+1}{\theta_{n+1}} \tag{4.21}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f_n'(z)}{f'(z)}\right) > \frac{\theta_{n+1}}{n+1+\theta_{n+1}} \tag{4.22}$$

dır. Eşitlik ise (4.18) fonksiyonu ile sağlanır [7].

İspat: Teoremin hipotezinden $\theta_{k+1} > \theta_k > 1,\ k \geq 2$ yazılabilir. Yine hipotezden dolayı

$$\theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|\right) \leq 2(n+1)\left(1-\sum_{k=2}^{n} k|a_k|\right) - \theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|\right) \leq 1 \tag{4.23}$$

olur. $w(z)$'yi

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\theta_{n+1}}{n+1}\left[\frac{f'(z)}{f_n'(z)} - \left(1-\frac{n+1}{\theta_{n+1}}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{\theta_{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|z^{k-1}\right)}{(n+1)\left(1-\sum_{k=2}^{n} k|a_k|z^{k-1}\right)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlayalım.

(4.21) i göstermek için $\text{Re}\left(w(z)\right) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan $\text{Re}\left(w(z)\right) > 0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w(z)-1}{w(z)+1}\right| < 1$ olduğundan (4.23) ve (4.24) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \left|\frac{w(z)-1}{w(z)+1}\right| &= \left|\frac{-\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|z^{k-1}}{2(n+1)\left(1-\sum_{k=2}^{n} k|a_k|z^{k-1}\right) - \theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|z^{k-1}}\right| \\ &\leq \frac{\theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|}{2(n+1)\left(1-\sum_{k=2}^{n} k|a_k|\right) - \theta_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1 \quad z \in U;\ k \geq 2 \end{aligned}$$

bulunur. Buda $\text{Re}\left(w(z)\right) > 0$ olması demektir. Böylece (4.21) in ispatı tamamlanmış oldu.

(4.18) ile verilen f fonksiyonu için sonucun kesin olduğunu göstermek için $z \to 1^-$ alındığında

$$\frac{f(z)}{f_n(z)} = 1 - \frac{1}{\theta_{n+1}} z^n \to 1 - \frac{1}{\theta_{n+1}}$$

olur. Bu ise (4.21) deki sınırın kesin olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$\phi(z)=\frac{1+\theta_{n+1}}{n+1}\left[\frac{f_n'(z)}{f'(z)}-\left(1-\frac{\theta_{n+1}}{\theta_{n+1}+n+1}\right)\right]$$
$$=1+\frac{\left(\theta_{n+1}+1\right)\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}k\left|a_k\right|z^{k-1}\right)}{\left(n+1\right)\left(1-\sum\limits_{k=2}^{n}k\left|a_k\right|z^{k-1}\right)}$$

alındığında

$$\left|\frac{\phi(z)-1}{\phi(z)+1}\right|\leq\frac{\left(1+\theta_{n+1}\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}k\left|a_k\right|}{2\left(n+1\right)\left(1-\sum\limits_{k=2}^{n}k\left|a_k\right|\right)-\left(\theta_{n+1}-1\right)\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}k\left|a_k\right|}\leq 1\ \left(z\in U;\ k\geq 2\right)$$

elde edilir. Böylece $\left(4.22\right)$ de ispatlanmış olur. Dolayısıyla da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.1: $f\in\mathcal{T}$ ve $f_n(z)$ sırasıyla (3.1) ve (4.15) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\varphi_k=\frac{k^{2m+1}\left(k-\alpha\right)\left[\lambda\left(k-1\right)+1\right]^m}{1-\alpha}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}\varphi_k\left|a_k\right|\leq 1$$

olsun. Bu durumda $k\geq 2$ için,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{f_n(z)}\right)>1-\frac{1}{\varphi_{n+1}}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f_n(z)}{f(z)}\right) > \frac{\varphi_{n+1}}{1+\varphi_{n+1}}$$

dır. Eşitlik

$$f(z) = z - \frac{1}{\varphi_{n+1}} z^{n+1}$$

fonksiyonu ile sağlanır [7].

İspat: Teorem 4.5.8'in ispatına benzerdir.

Sonuç 4.5.2: $f \in \mathcal{T}$ ve $f_n(z)$ sırasıyla (3.1) ve (4.15) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\varphi_k = \frac{k^{2m+1}(k-\alpha)\left[\lambda(k-1)+1\right]^m}{1-\alpha}$$

olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k |a_k| \leq 1$$

olsun. Bu durumda $k \geq 2$ için,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{f_n'(z)}\right) > 1 - \frac{n+1}{\varphi_{n+1}}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f_n'(z)}{f'(z)}\right) > \frac{\varphi_{n+1}}{n+1+\varphi_{n+1}}$$

dır. Eşitlik ise (4.18) ile sağlanır.

İspat: Teorem 4.5.9' un ispatına benzerdir.

4.6. $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları İçin Komşuluk Problemi

$\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman [9] tarafından yapılmıştır. Goodman'ın çalışması daha sonra yapılan çalışmalara öncülük etmiştir.

Teorem 4.6.1: $|z|<1$ için,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi orijine göre yıldızıl bir bölgeye resmeder.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi konveks bir bölgeye resmeder [9].

1981 yılında Ruscheweyh, Goodman tarafından verilen komşuluk kavramını genelleştirerek $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının $\tau-$ komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır [22].

Tanım 4.6.1: $f\in\mathcal{A}$ ve $\delta\geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\tau(f)=\left\{g\in\mathcal{A}:g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n,\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n-b_n|\leq\tau\right\}$$

kümesine f fonksiyonunun $\tau-$komşuluğu denir [22].

Buna göre, $e(z)=z$ özdeşlik fonksiyonu için,

$$\mathcal{N}_\tau(e)=\left\{g\in\mathcal{A}:g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n,\ \sum_{n=2}^{\infty}n|b_n|\le\tau\right\}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{N}_1\subset\mathcal{S}^*$ dır.

Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluğu 1990 yılında Walker tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.6.2: $p\in\mathcal{P}$ ve $\delta\ge 0$ için p nin $\delta-$komşuluğu $\mathcal{N}_\delta(p)$ ile gösterilir ve bu küme

$$\mathcal{N}_\delta(p)=\left\{q\in\mathcal{P}:q(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}q_nz^n,\ \sum_{n=2}^{\infty}|p_n-q_n|\le\delta\right\}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Ayrıca son yıllarda $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için komşuluk problemi Altıntaş *et. al* [1], Aouf *et. al* [3], Orhan and Kadıoğlu [15], Orhan and Kamali [16], Orhan [17], Cataş [4] ve Deniz and Orhan [5] tarafından çalışılmıştır.

Şimdi bu bölümde ilk olarak $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ sınıfı için komşuluk kavramını tanımlayıp daha sonra bu sınıfın komşuluğuna ait bir içerme bağıntısı vereceğiz.

Tanım 4.6.3: $\rho>0$ ve genel terimi

$$s_n=\frac{n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m(n-\alpha)}{1-\alpha}\quad(n\in\mathbb{N})\tag{4.25}$$

olan $S=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi olsun. (2.2) şeklinde tanımlanan $f(z)\in\mathcal{A}$ fonksiyonunun $(n,\rho)-$komşuluğu

$$\mathcal{N}_n^\rho(f)=\left\{g:g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n\in\mathcal{A}\ ve\ \sum_{n=2}^{\infty}s_n|b_n-a_n|\le\rho\ \ (\rho\ge 0)\right\}\tag{4.26}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 4.6.3 de $s_n=n$ alınırsa Ruscheweyh'in tanımladığı $\mathcal{N}_\eta-$komşuluğu elde edilir.

Teorem 4.6.2: $f(z)\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ fonksiyonu (2.2) şeklinde tanımlansın. Eğer f fonksiyonu için

$$\frac{f(z)+\varepsilon z}{1+\varepsilon}\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)\quad\left(\varepsilon\in\mathbb{C},|\varepsilon|<\rho,\ \rho\geq 0\right)\tag{4.27}$$

ise bu durumda

$$\mathcal{N}_n^{\rho}(f)\subset\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$$

dır [7].

İspat: Teoremin ispatında $f(z)\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul olan

$$f\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)\Leftrightarrow\left|\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'-D_\lambda^m(z)}{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'+(1-2\alpha)D_\lambda^m f(z)}\right|<1$$

gerektirmesi kullanılacak. Son ifadeden $|\tau|=1$için

$$\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'-D_\lambda^m f(z)}{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'+(1-2\alpha)D_\lambda^m f(z)}\neq\tau\quad\left(z\in U;\ \tau\in\mathbb{C}\right)\tag{4.28}$$

olacağı açıktır. Bu ifadesi ise

$$\begin{aligned}h(z)&=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^n\\&=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\tau\left(-n-1+2\alpha\right)+n-1\right)n^{2m}\left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^m}{2\tau\left(1-\alpha\right)}z^n\quad\left(n\in\mathbb{N}\right)\end{aligned}\tag{4.29}$$

olmak üzere

$$\frac{(f*h)(z)}{z}\neq 0\quad\left(z\in U\right)\tag{4.30}$$

ifadesine denktir. (4.29) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
\left|c_n\right| &= \left|\frac{\left(\tau\left(-n-1+2\alpha\right)+n-1\right)n^{2m}\left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^m}{2\tau\left(1-\alpha\right)}\right| \\
&\leq \frac{(n-\alpha)n^{2m}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{1-\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca hipotezden (4.30) ifadesi

$$
\frac{\left(f(z)+\varepsilon z\right)\left(1+\varepsilon\right)^{-1} * h(z)}{z} \neq 0 \ \left(z \in U\right)
$$

ve

$$
\frac{f(z) * h(z)}{z} \neq \varepsilon \ \left(z \in U\right)
$$

denk olarak

$$
\left|\frac{f(z) * h(z)}{z}\right| \geq \rho \ \left(z \in U;\ \rho > 0\right)
$$

şeklinde yazılır. Şimdi, eğer

$$
g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{N}_n^{\rho}
$$

alınırsa bu durumda $|z|^n < 1$ ve $\mathcal{N}_n^{\rho}$ tanımı dikkate alındığında

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\left(f(z)-g(z)\right) * h(z)}{z}\right| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(a_n - b_n\right) z^{n-1}\right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{\left(n-\alpha\right)n^{2m}\left(\lambda\left(n-1\right)+1\right)^m}{1-\alpha}\right| \left|a_n - b_n\right| \left|z\right|^{n-1} \\
&< \rho \ \left(z \in U; \rho > 0\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece $|\tau| = 1$ olacak şekilde her kompleks τ sayısı için

$$\frac{(g*h)(z)}{z} \neq 0$$

yazılır. Bu ise $g \in \mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ olması demektir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ sınıfı için komşuluk kavramını tanımlayıp daha sonra bu sınıfın komşuluğuna ait bir içerme bağıntısı vereceğiz.

Tanım 4.6.4: $\eta > 0$ ve genel terimi

$$t_n = \frac{n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m (n-\alpha)}{1-\alpha} \quad (n \in N)$$

olan $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi olsun. (2.2) şeklinde tanımlanan $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $(n,\eta)-$komşuluğu

$$\mathcal{N}_n^{\eta}(f) = \left\{ g : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A} \ ve \ \sum_{n=2}^{\infty} t_n |b_n - a_n| \leq \eta \ \ (\eta \geq 0) \right\}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 4.6.4 de $t_n = n$ alınırsa Ruscheweyh'in tanımladığı $\mathcal{N}_\eta -$komşuluğu elde edilir.

Teorem 4.6.3: $f(z) \in \mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ fonksiyonu (2.2) şeklinde tanımlansın. Eğer f fonksiyonu için

$$\frac{f(z)+\varepsilon z}{1+\varepsilon} \in \mathcal{C}_m(\alpha,\lambda) \quad \left(\varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| < \eta, \ \eta \geq 0\right) \tag{4.32}$$

ise bu durumda

$$\mathcal{N}_n^{\eta}(f) \subset \mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$$

dır [7].

İspat: Teoremin ispatında $f(z) \in \mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul olan

$$f \in \mathcal{C}_m(\alpha,\lambda) \Leftrightarrow \left| \frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)''}{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'' + 2(1-\alpha)\left(D_\lambda^m f(z)\right)'} \right| < 1$$

gerektirmesi kullanılacak. Son ifadeden $|\tau| = 1$ için

$$\frac{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)''}{z\left(D_\lambda^m f(z)\right)'' + 2(1-\alpha)\left(D_\lambda^m f(z)\right)'} \neq \tau \quad (z \in U;\ \tau \in \mathbb{C}) \tag{4.33}$$

olacağı açıktır. Bu ifadesi ise

$$\begin{aligned} h(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\tau(-n-1+2\alpha)+n-1\right)n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{2\tau(1-\alpha)} z^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{4.34}$$

olmak üzere

$$\frac{(f*h)(z)}{z} \neq 0 \quad (z \in U) \tag{4.35}$$

ifadesine denktir. (4.34) ifadesinden

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{\left(\tau(-n-1+2\alpha)+n-1\right)n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{2\tau(1-\alpha)} \right| \\ &\leq \frac{(n-\alpha)n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{1-\alpha} \end{aligned} \tag{4.36}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca hipotezden (4.35) ifadesi

$$\frac{\left(f(z)+\varepsilon z\right)(1+\varepsilon)^{-1} * h(z)}{z} \neq 0 \ (z \in U)$$

ve

$$\frac{f(z)*h(z)}{z} \neq \varepsilon \quad (z \in U)$$

denk olarak

$$\frac{f(z)*h(z)}{z} \geq \eta \quad (z \in U;\ \eta > 0)$$

şeklinde yazılır. Şimdi, eğer

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{N}_n^{\eta}$$

alınırsa bu durumda $|z|^n < 1$ ve $\mathcal{N}_n^{\eta}$ tanımı dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \left| \frac{\left(f(z)-g(z)\right)*h(z)}{z} \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(a_n - b_n\right) z^{n-1} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(n-\alpha)n^{2m+1}\left(\lambda(n-1)+1\right)^m}{1-\alpha} \right| |a_n - b_n||z|^{n-1} \\ &< \eta \ (z \in U; \eta > 0) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $|\tau| = 1$ olacak şekilde her kompleks τ sayısı için

$$\frac{(g*h)(z)}{z} \neq 0$$

yazılır. Bu ise $g \in \mathcal{C}_m(\alpha, \lambda)$ olması demektir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.7. $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}(\alpha,\lambda)$ Alt Sınıfları İçin Subordinasyon Sonuçları

İlk defa 1961 yılında Wilf [31] $g \in \mathcal{C}$ olmak üzere $(f * g)(z) \prec g(z)$ koşulunu sağlayan f nin katsayılarından oluşan dizi için yeni bir tanım vermiştir.

Tanım 4.7.1: $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ kompleks bir dizi olsun. Eğer, $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu ünivalent ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n \prec f(z) \quad (z \in U;\ a_1 = 1)$$

şartını sağlıyorsa $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine subordinasyon faktör dizisi denir [31].

Teorem 4.7.1: $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki bir dizinin bir subordinasyon faktör dizisi olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\right) > 0 \quad (z \in U)$$

olmasıdır [31].

Bu bölümde $\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_m(\alpha,\lambda)$ alt sınıfları için subordinasyon faktör dizisi ile alakalı bazı sonuçlar ve bu sonuçlar yardımıyla bazı eşitsizlikler elde edildi.

Teorem 4.7.2: $f \in \mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $g \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda her $z \in U$ için

$$\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m + (1-\alpha)}(f * g)(z) \prec g(z) \tag{4.37}$$

olur. Ayrıca

$$\operatorname{Re}(f(z)) > -\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m + (1-\alpha)}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m} \quad (z \in U) \tag{4.38}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.37) de ki subordinasyon sonucundaki sabit faktör daha büyük bir değer ile değiştirilemez [7].

İspat: $f(z)\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ ve $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n\in\mathbb{C}$ olsun. Böylece

$$\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}(f*g)(z)$$

$$=\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}c_na_nz^n\right) \tag{4.39}$$

ifadeleri yazılabilir. Eğer

$$b_n=\left\{\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_n\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.40}$$

dizisi bir subordinasyon faktör dizisi ise Tanım 4.7.1 den dolayı (4.37) için subordinasyon sonucu doğru olacaktır $(a_1=1)$. Dolayısıyla Teorem 4.7.1 den

$$\operatorname{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_nz^n\right)>0 \quad (z\in U) \tag{4.41}$$

olduğunu göstermek yeterli olur. $\operatorname{Re} z\le|z|=r<1$ özelliği ve Teorem 4.1.1 deki (4.1) eşitsizliği dikkate alındığında

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_n z^n\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(1+\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}z\right.\\
&\left.+\frac{1}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\sum_{n=2}^{\infty}2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m a_n z^n\right)\\
&\geq 1-\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r\\
&-\frac{1}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\sum_{n=2}^{\infty}\left[n^{2m}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m\right]|a_n|r^n\\
&>1-\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r-\frac{1-\alpha}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r\\
&=1-r>0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.41) eşitsizliği gösterilmiş olur. Dolayısıyla (4.37) ifadesi doğrudur.

(4.38) ise (4.37) ifadesindeki eşitsizliğinin sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. $g(z)$ fonksiyonu olarak

$$g(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{n=2}^{\infty}z^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu ve $y(z)\in\mathcal{S}_m^*(\alpha,\lambda)$ fonksiyonu olarak da

$$y(z)=z-\frac{1-\alpha}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}z^2 \quad (\lambda\geq 0,\ 0\leq\alpha<1)$$

fonksiyonunu seçelim. (4.37) den

$$\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}y(z)\prec\frac{z}{1-z} \quad (z\in U)$$

yazılabilir. Buradan $y(z)$ fonksiyonu için

$$\min\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}y(z)\right)\right\}=-\frac{1}{2},\quad (z\in U)$$

olduğu kolayca görülebilir. Buda gösterir ki

$$\frac{2^{2m-1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}$$

en iyi sabittir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.3: $f\in\mathcal{C}(\alpha,\lambda)$ ve $g(z)\in\mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}(f*g)(z)\prec g(z) \tag{4.42}$$

olur. Ayrıca

$$\operatorname{Re}(f(z))>-\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}\quad (z\in U) \tag{4.43}$$

eşitizliği sağlanır. (4.42) de ki subordinasyon sonucundaki sabit değer daha büyük bir değer ile değiştirilemez [7].

İspat: $f(z)\in\mathcal{C}(\alpha,\lambda)$ ve $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n\in\mathcal{C}$ olsun. Böylece

$$\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}(f*g)(z)$$

$$=\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}c_na_nz^n\right) \tag{4.44}$$

ifadeleri yazılabilir. Eğer

$$b_n=\left\{\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_n\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4.45}$$

dizisi bir subordinasyon faktör dizisi ise Tanım 4.7.1 den dolayı (4.42) için subordinasyon sonucu doğru olacaktır $(a_1 = 1)$. Dolayısıyla Teorem 4.7.1 den

$$\operatorname{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_n z^n\right)>0 \quad (z\in U) \qquad (4.46)$$

olduğunu göstermek yeterli olur. $\operatorname{Re} z \le |z| = r < 1$ özelliği ve sonuç 4.1.1 deki (4.6) eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}a_n z^n\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(1+\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}z\right.\\
&\left.+\frac{1}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\sum_{n=2}^{\infty}2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m a_n z^n\right)\\
&\ge 1-\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r\\
&-\frac{1}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}\sum_{n=2}^{\infty}\left[n^{2m+1}(n-\alpha)(\lambda(n-1)+1)^m\right]|a_n|r^n\\
&>1-\frac{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r-\frac{1-\alpha}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}r\\
&=1-r>0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.46) eşitsizliği elde edilmiş olur. Dolayısıyla (4.42) ifadesi doğrudur.

(4.43) ise (4.42) ifadesindeki eşitsizliğinin sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

$g(z)$ fonksiyonu olarak

$$g(z)=\frac{z}{1-z}=z+\sum_{n=2}^{\infty}z^n\in\mathcal{C}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu ve $h(z)$ fonksiyonu olarak da

$$h(z)=z-\frac{1-\alpha}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}z^2 \quad (\lambda\geq 0,\ 0\leq\alpha<1)$$

fonksiyonunu seçelim. (4.42) den

$$\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}h(z)\prec\frac{z}{1-z} \quad (z\in U)$$

yazılabilir. Buradan $h(z)$ fonksiyonu için

$$\min\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}h(z)\right)\right\}=-\frac{1}{2} \quad (z\in U)$$

olduğu kolayca görülür. Buda gösterir ki

$$\frac{2^{2m}(2-\alpha)(\lambda+1)^m}{2^{2m+1}(2-\alpha)(\lambda+1)^m+(1-\alpha)}$$

en iyi sabittir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada $\mathcal{D}_{\lambda}^{m}$ ile gösterilen yeni bir differensiyel operatör tanımlanarak, bu operatör yardımıyla analitik fonksiyonların $\mathcal{S}_{m}^{*}(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_{m}(\alpha,\lambda)$ biçimindeki alt sınıfları oluşturuldu. Bu alt sınıflar için katsayı tahminleri, distorsiyon teoremleri, konvekslik ve yıldızıllık yarıçapları, ekstremum noktalar, kısmi toplamlar, komşuluk ve subordinasyon sonuçları elde edildi.

Gerek $\mathcal{D}_{\lambda}^{m}$ operatörü gerekse $\mathcal{S}_{m}^{*}(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_{m}(\alpha,\lambda)$ sınıfları bu alanda çalışma yapacak araştırmacılara önemli bir yol gösterir. Öyle ki $\mathcal{D}_{\lambda}^{m}$ operatörü yardımıyla analitik fonksiyonların yeni alt sınıfları oluşturulabilir. Oluşturulan bu sınıfların birçok özellikleri araştırılabilir. Diğer taraftan $\mathcal{S}_{m}^{*}(\alpha,\lambda)$ ve $\mathcal{C}_{m}(\alpha,\lambda)$ sınıflar için değişik subordinasyon sonuçları konvülasyon problemleri, bi ünivalentlik fonksiyonların alt sınıfları için katsayı tahminleri ve kesirsel türev gibi diğer birçok özellikleri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Altıntas, O., and Owa, S. 1996. ‘‘Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients’’, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 1(4), 797–800.

[2] Bernardi, S. D., 1974. ‘‘New distortion theorems for functions of positive real part and applications to the partial sums of univalent convex functions’’, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 113-118.

[3] Aouf, M., et al, 2008. “Some families of linear operators associated with certain subclasses of multivalent functions” , Computers & Mathematics with Applications, 55, 535-549.

[4] Cataş, A., 2009. ‘‘Neighborhoods of a certain class of analytic functions with negative coefficient’’, Banach J. Math. Anal. 3(1), 111-121.

[5] Deniz, E. and Orhan, H., 2010. ‘‘Some properties of certain subclasses of analytic functions with negative coefficients by using generalized Ruscheweyh derivative operator’’, Czechoslovak Math. *J.* 60(3), 699-713.

[6] Deniz, E. and Özkan, Y, 2014. ‘‘Subclass of analytic functions defined by a new differential operator’’, Acta Uni. Apulensis, 40(7), 85-95.

[7] Deniz, E. and Özkan, Y, 2015. ‘‘Some properties for certain subclasses of analytic functions defined by a general differential operator’’, (11-12 haziran 2015 tarihinde 10. Ankara Matematik Günlerinde sunuldu)

[8] Duren, P., 1983 . “Univalent Functions”, Springer, New York,

[9] Goodman, A.W., 1957. "Univalent functions and nonanalytic curves", Proc. Amer. Math. Soc., 8, 598–601.

[10] Goodman, A. W., 1983. “Univalent Functions”, I. Mariner Publishing Company., s-245, Tapma, Florida,

[11] Goodman, A. W., 1983. “Univalent Functions”, II. Mariner Publishing Company., s-311, Tapma, Florida,

[12] Goodman, A. W., and Schoenberg, I. J. 1984. ‘‘On a theorem of Szegö on univalent convex maps of the unit circle’’, Journal d’Analysse Mathèmatique, 44(1), 200-204

[13] Kobori A., 1934. ‘‘Zwei satze über die abschnitte der schlichten potenzreihen’’, Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Unıv. Ser. A. 17, 171-186.

[14] Ogawa S., 1959. ‘‘A note on close-to-close convex functions’’, II, J. Nara Gakugei Univ. 8, no. 2, 11-17.

[15] Orhan, H. and Kadıoğlu, E., 2004. ‘‘Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients’’, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 20 (2), 135-142.

[16] Orhan, H. and Kamali, M., 2005. ‘‘Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients’’ Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), 21 (1), 55-61.

[17] Orhan, H., 2007. "On neighborhoods of analytic functions defined by using hadamard product". Novi Sad J. Math. 37(1), 17-25.

[18] Owa S., et al, 2004. ‘‘Partial sums of certain classes of analytic functions’’, Int. J. Comput. Math. 81, no. 10, 1239-1256.

[19] Ponnusamy, S., ve Silverman, H., 2006. “Complex variables with Applications”, Birkhäuser. Boston,

[20] Pommerenke, Ch., 1975. “Univalent Functions”, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s-376, Göttingen, Berlin,

[21] Ruscheweyh, St. and Sheil-Small, T., 1973. “Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture”, Comment. Math. Helv. 48, 119-135.

[22] Ruscheweyh, St., 1981. "Neighborhoods of univalent functions", Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (4), 521-527.

[23] Sălăgean, G., 1983. "Subclasses of univalent functions", Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 362-372 .

[24] Schild, A., 1965. ‘‘ On starlike function of order α,’’ American Journal Math. 87(1), 65-70.

[25] Sheil-Small T., 1970 . ‘‘A note on the partial sums of convex schlicht functions’’, Bull. London Math. Soc. 165-168.

[26] Silverman H., 1975. ‘‘ Univalent functions with negative coefficients’’, Proceedings of the American Mathematical Society, (51), 109-116,

[27] Silverman H., 1988. ‘‘Radii problems for section of convex functions’’, Proc. Amer. Math. Soc. 104(4), 1191-1196.

[28] Silverman H. 1997. ‘‘ Partial Sums of Starlıke and Convex functions”, J. Math. Anal. Appl. 209(1), 221-227.

[29] Singh, R. and Paul, S., 1987. ‘‘Linear sums of certain analytıc functions’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 99(4), 719-725.

[30] Szegö G., 1928. ‘‘Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Math. Ann’’, 100(1), 188-211.

[31] Walker, J.B., 1990. ‘‘A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences’’, 13 (3), 425-429.

[32] Wilf , H. S. 1961. ‘‘Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle’2, Proc. Amer. Math. Soc., 12(68).

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Kars'ın Sarıkamış ilçesinde doğdu. İlköğretimi Armutlu köyünde, orta öğrenimini ise Sarıkamış'ta tamamladı. 2008 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2012 yılında bölüm üçüncüsü olarak mezun oldu. 2012 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.