T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARI İÇİN FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ

Selçuk ASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

AĞUSTOS-2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Selçuk ASLAN'ın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'ın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı Bi-Univalent Fonksiyonların Alt Sınıfları İçin Fekete-Szegö Problemi adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği......ile kabul edilmiştir.

26/08/2015

Adı ve Soyadı		**imza**
Başkan :	Prof. Dr. Halit Orhan	....
Üye :	Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2015 gün ve ..../.................. Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hidayet Metin ERDOĞAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Tanıştığımız ilk günden itibaren samimi ve içten tutumuyla desteğini hissettiğim, benden bilgi ve tecrübesini esirgemeyen, çalışmalarımı tamamlayabilmem için her türlü yardımı sunan çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.
Çocuklarımızla ilgilenerek çalışma imkanı sağlayan eşime ve manevi desteğini eksik etmeyen anneme teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2015 **Selçuk ASLAN**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde ilk olarak Sălăgean türev operatörü yardımıyla tanımlanan bi-ünivalent fonksiyonların $\Sigma^{n}\ \tau,\gamma,\varphi$ ile gösterilen alt sınıfı tanıtılıp ve çalışıldı. Bu sınıf için katsayı tahminleri ve Fekete-Szegö eşitsizliği ile ilgili teoremler verildi. Bunlara ilave olarak parametrelerin özel durumları için sonuçlar elde edildi.

2015, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Bi-ünivalent fonksiyon, Sălăgean türev operatörü, Fekete-Szegö problemi, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, firstly we introduce and study subclass $\Sigma^n \ \tau,\gamma,\varphi$ of bi-univalent functions which are defined by Sălăgean derivative operator. We obtain coeffficient estimates and Fekete-Szegö inequality for this class. Also, some corollaries are given for special cases of parameters.

2015, 59 pages

Keywords: Analytic function, Univalent function, Bi-univalent function, Sălăgean derivative operator, Fekete-Szegö problem, Subordination.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
U	Birim disk
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel eksen
$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize edilmiş yıldızıl (starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha-$Yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\alpha-$Mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
Σ	Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\mathcal{D}^n$	Sălăgean türev operatörü
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi yaklaşık yüzyıla yakın bir zamandır birçok matematikçi, mühendis ve fizikçinin ilgi odağı olmuştur. Bu teoriyi önemli kılan sebeplerden birincisi fonksiyonların temsil edildiği serinin katsayılarının fonksiyonun geometrik özellikleri üzerindeki etkisi (veya tersine fonksiyonun geometrik özelliklerinin katsayılar üzerindeki etkisi) olmuştur. Biliyoruz ki, gerek fizikte gerekse mühendislikte problemlerin oluşturulması ve çözümü fonksiyonların geometrik özellikleri üzerinden yapılır. Dolayısıyla, fonksiyonların geometrik özelliklerini araştırmak için fonksiyonların katsayıları üzerinde çalışmak doğru bir yol olur. Bu zamana kadar ünivalent fonksiyonların alt sınıfları üzerine birçok araştırma yapılmıştır.

Ünivalent bir fonksiyonun tersi ünivalent olmayabilir. Tersi de ünivalent olan yani bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili ilk çalışmayı Lewin [18] 1967 yılında yapmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ sembolüyle göstererek bu sınıfa ait fonksiyonlar için ikinci katsayının $|a_2| \leq 1.51$ olduğu Lewin tarafından ispatlanmıştır. 1967 yılında, Brannan ve Clunie [4] her $f \in \Sigma$ için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu açık problem olarak ortaya atmıştır. Sonra 1969 da Netanyahu [19] her $f \in \Sigma$ için $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve 1985 te Tan [30] $|a_2| \leq 1.485$ olduğunu göstermişlerdir. 1985 yılında Kedzierawski [15], Brannan ve Clunie'nin $|a_2| \leq \sqrt{2}$ tahminini bi-yıldızıl fonksiyonlar için ispatlamıştır. 1985 ve 1986 yıllarında Brannan ve Taha [3] $\alpha-$mertebeden bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının sınırlarıyla ilgili tahminler elde etmiştir. Son zamanlarda Deniz [6] ve S.S. Kumar, V. Kumar, Ravichandran [17] subordinasyan kullanılarak tanımlanan fonksiyon sınıfları için Brannan ve Taha'nın sonuçlarını hem genelleştirmiş hem de üst sınır için daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir. Maalesef her $n = 2, 3, \ldots$ için $|a_n|$ nin üst sınırı henüz bulunamamıştır. Diğer bir problem de bulunan sınırların kesin olmayışıdır. Son zamanlarda bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli altsınıfları için katsayı tahminleri Srivastava, Mishra ve Gochhayat [26], Frasin ve Aouf [10], Q.-H. Xu, Y.-C. Gui ve Srivastava [31], Q.-H. Xu, H.-G. Xiao ve Srivastava [32], Srivastava, Bulut, Çağlar ve Yağmur [27], Çağlar, Orhan ve Yağmur [6], Bulut [5], Hamidi ve Jahangiri [13] tarafından araştırılmıştır.

Katsayıların bir kombinasyonu olan $\left|a_3 - a_2^2\right|$ nin üst sınırını bulma problemine Fekete-Szegö problemi denir. Bununla ilgili ilk çalışma 1916 yılında Bieberbach tarafından verilmiştir. Bieberbach her ünivalent fonksiyon için $\left|a_3 - a_2^2\right| \leq 1$ olduğunu göstermiştir. 1933 yılında Fekete ve Szegö [9] bu problemi genelleştirerek $0 \leq \mu < 1$ olmak üzere $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ için kesin bir üst sınır elde etmiştir. Daha sonra 1969 yılında $0 \leq \mu < 1$ olmak üzere $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ için Keogh ve Merkes [16] yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için kesin sınırlar bulmuşlardır. Son yıllarda ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için bu problem birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Diğer taraftan bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için Fekete-Szegö problemi 2014 yılında Zaprawa [33] tarafından ele alınmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için hem katsayı eşitsizliği bulma hem de Fekete-Szegö problemi halen güncelliğini korumaktadır.

Bu tez çalışmasında ilk olarak Sălăgean türev operatörü yardımıyla bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanıtılmıştır. Bu sınıf için katsayı eşitsizliği ve Fekete-Szegö problemi ile ilgili teoremler verilmiştir.

Tezin kuramsal temeller bölümü, tezde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur. Ayrıca ünivalent ve bi-ünivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak bu fonksiyonların oluşturduğu sınıflara ait önemli özellikler verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak verilen bölümde son yıllarda katsayılar ve Fekete-Szegö problemi üzerine yapılan çalışmalar tarihsel bir seyir içinde verilmiştir. Ayrıca $\Sigma^{n} \quad \tau,\gamma,\varphi$ sınıfı tanımlanmıştır.

Araştırma bulguları olarak verilen dördüncü bölümde ise $\Sigma^n \ \tau,\gamma,\varphi$ alt sınıfı için sırasıyla katsayı eşitsizliği ve Fekete-Szegö problemi ile ilgili teoremler ispatlarıyla sunulmuştur. Ayrıca bu teoremlerin özel durumu olarak bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (ε-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 merkezli, ε yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $\varepsilon -$komşuluğu) denir. $\overline{B}(z_0,\varepsilon)$ ve $\partial B(z_0,\varepsilon)$ ile sırasıyla $B(z_0,\varepsilon)$ nin kapanışı ve sınırı gösterilecektir. Ayrıca, orijin merkezli ε yarıçaplı disk $B(0,\varepsilon) = B_\varepsilon$ ile ifade edilecektir [22].

Özel durumda. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile orijin merkezli açık birim disk gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktasının en az bir komşuluğu tamamen S kümesinde kalırsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir [22].

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktası bir iç nokta, yani $içS = S$ ise S kümesine açık küme denir [22].

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): Tümleyeni açık olan $S \subset \mathbb{C}$ kümesine kapalı küme denir [22].

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset M \cup N$, $S \cap M \neq \varnothing$, $S \cap N \neq \varnothing$ ve $S \cap M \cap N = \varnothing$ olacak şekilde M ve N gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir [34]. Örneğin, $\mathbb{C}$ nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir [34].
$\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in S$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir [22].

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir [22].

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan eğriye kapalı eğri denir [22].

Tanım 2.1.10:
a) Basit Kapalı Eğri: Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir.

b) Düzgün Eğri: γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir [22].

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılıp bu fonksiyonlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [34].

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu $f(z)$ kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse $f(z)$ ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [34].

Örneğin; $f(z) = e^z$ bir tam fonksiyon fakat $f(z) = \log z$ bir tam fonksiyon değildir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

ile ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Tam ve sınırlı bir $f(z)$ fonksiyonu sabittir [34].

Analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur [34].

Bu teoremin belirtmek istediği en önemli nokta şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil Nokta): $w=f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0,\varepsilon)-\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir [34].

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu $A(R_1;R_2)$ halka bölgesinde analitik ise bu bölgede a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

olur. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir [22].

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): Eğer $f(z)$ fonksiyonunun Laurent açılımında b_n katsayılarından sonlu tanesi hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşitse z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun bir kutup noktasıdır denir [34].

Örneğin; $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$ fonksiyonunda $\lim_{z\to 1}f(z)=\infty$ olduğundan $z_0=1$, f nin bir kutup noktasıdır.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir [22].

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer alamaz [22].

Sonuç 2.2.10: A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.9 un önemli bir sonucu olan Schwarz lemması aşağıdaki gibidir.

Lemma 2.2.11 (Schwarz lemması): $f(z)$, U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ olur. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile eşitlik sağlanır [22].

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz [22].

Sonuç 2.2.13: A sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.14 (Ünivalent fonksiyon): $f(z)$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa (veya

$f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa) f (z) fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [8].

Örneğin; $f\left(z\right)=\overline{z}$ bir ünivalent fonksiyondur.

Eğer f (z), z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0)\neq 0$ olmasıdır [8].

$f'(z_0)\neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani, $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0)\neq 0$ dır. Tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z)=z^2$ fonksiyonu $A=\{z:\ 1<|z|<2,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0\in A$ için $f'(z_0)\neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir. Eğer $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z\in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.12 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform dönüşüm): Belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyan dönüşümlere bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise $f(z)$ bu bölgede konformdur denir [22].

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.18: $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ ye konformdur denir [22].

Bundan dolayı bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı alt bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilebilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [8].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, bir keyfi basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonunun yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\quad f'(0)=1$ normalleştirme aksiyomları göz önüne alınırsa,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad (z\in U) \tag{2.1}$$

biçiminde olur. Burada (2.1) biçiminde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{A}=\left\{ f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n :\ f \text{ analitik ve } z\in U\right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in\mathcal{A} : \forall z\in U \text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir [8].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

(i) $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\operatorname{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-\{(-\infty,-1/2]\cup[1/2,\infty)\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler doğrudur [8]:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + ...$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatation): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)} \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, ...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Teorem 2.3.3: $f \in \mathcal{S}$ olsun. $f(U) \supseteq U_{1/4}$ dır. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir. Üstelik $\bigcap_{f \in S} f(U) = U_{1/4}$ dır [8].

Teorem 2.3.4: $\mathcal{S}$ sınıfı kompaktır [8].

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ şartlarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [8].

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z), z \in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^2$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen ünivalent değildir.

Lemma 2.3.6: Eğer $p \in \mathcal{P}$ ise

$$|c_n| \le 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

eşitsizliği doğrudur ve bu tahmin kesindir [8].

Tanım 2.3.7 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıf Schwarz fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve Ω ile gösterilir [8].

Bunlara ilaveten, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasındaki önemli bağ aşağıda verilmiştir:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)} \quad (\phi(z) \in \Omega)$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarının tanımlarından sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki biçimde verebiliriz.

Tanım 2.3.8 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme (starlike küme) denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme (veya kısaca yıldızıl küme) adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [8].

Teorem 2.3.9: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \leq n \; (n = 2,3...)$ ifadesi doğrudur [11,12].

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

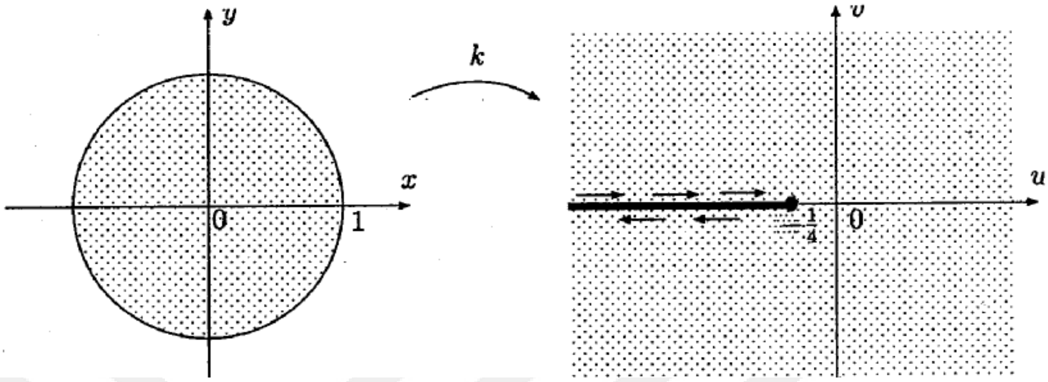
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyon $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}\left[g(z) - 1 \right]$$

biçiminde yazılırsa U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğü görülebilir. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 1: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty} nz^n \in \mathcal{S}^*$ olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 2.3.8 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$
$$=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in U$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

biçiminde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışını hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in U$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]$ fonksiyonu, "*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.10 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [8,21].

Konveks fonksiyonların analitik ifadesi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3.11: $f \in \mathcal{A}$ olsun. O halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \; (n = 2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur [11,12,21].

Teorem 2.3.12 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in U$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [8,11,12,21].

Yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset S \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

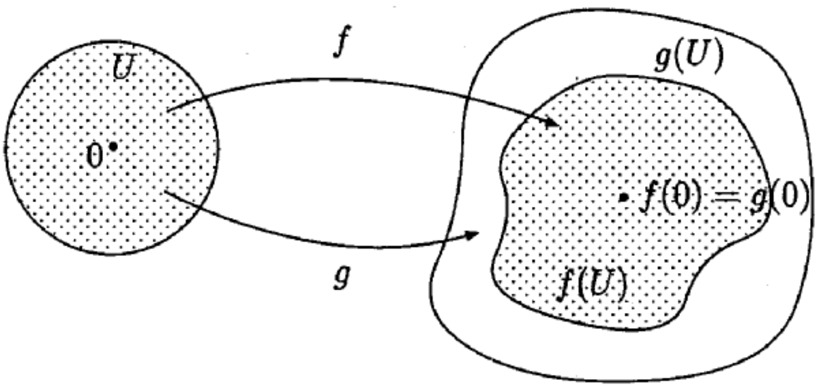
Ünivalentlik kriterlerinden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

- ‘ f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.’

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yeri olan subordinasyon kavramını verelim.

Tanım 2.3.13: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir [8].

Eğer g ünivalent ise $f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur. f nin g ye subordinasyonundan anlaşılacak şey aşağıdaki şekille izah edilmiştir.

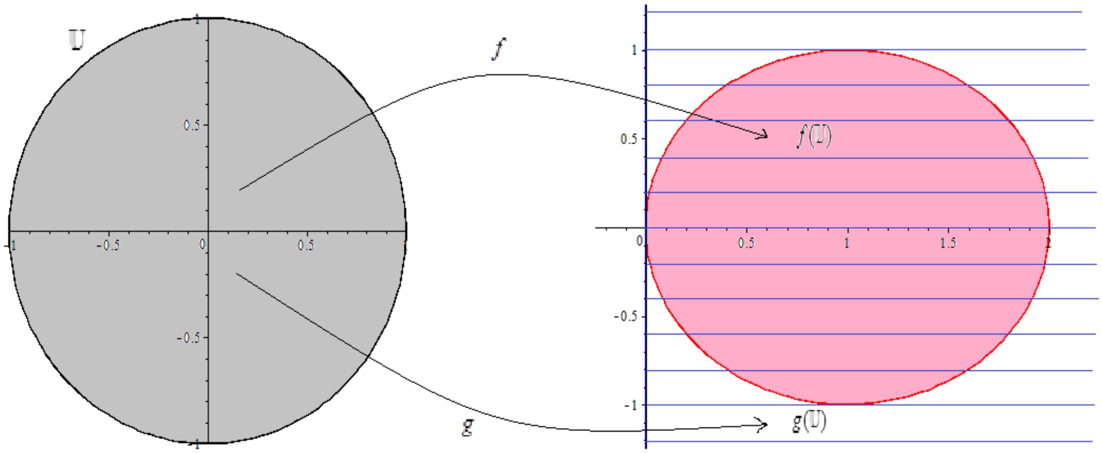


Şekil 2 : $f\prec g$ **Subordinasyonu**

Örneğin; U da analitik olan $f(z)=1+z$ ve $g(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. f nin U da g ye subordine olması için $\forall z\in U$ için $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Böylece,

$$f(z)=g(\omega(z))\Rightarrow 1+z=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\Rightarrow \omega(z)=\frac{z}{z+2}$$

bulunur. $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|=\left|\dfrac{z}{z+2}\right|\leq\dfrac{1}{|z+2|}\leq 1$ olup $\omega\in\Omega$ dır. Dolayısıyla $f\prec g$ dir. Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ dur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 3: $1+z \prec \dfrac{1+z}{1-z}$

Teorik olarak subordinasyonun buradaki anlamı, özelliklerini bilmediğimiz bir fonksiyonu özelliği bilinen bir fonksiyon yardımıyla incelemektir.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(U)\subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\leq|f'(0)|$ ve $g(U_r)\subset f(U_r)$ dir [8].

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq \max_{|z|\leq r}|g(z)| \quad (r\in(0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z)\in\mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z)\prec\frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z)\in\Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z)\prec z$$

gerektirmeleri yazılır.

Tanım 2.3.14 ($\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfı): Her $z\in U$ ve $0\leq\alpha<1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α. mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir [11,12].

Tanım 2.3.15 ($\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir [11,12].

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z},\ 0 \le \alpha < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} :\ 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z},\ 0 \le \alpha < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3.16 ($R(\alpha)$ sınıfı): $\mathcal{A}$ sınıfında

$$\mathrm{Re}\{f'(z)\} > \alpha \quad (z \in U)$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $R(\alpha)$, $\alpha\left(0 \le \alpha < 1\right)$ sınıfındandır denir [11,12].

Tanım 2.3.17: $\varphi : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)>0$, $\mathbb{R}e\varphi(z)>0$ ve $\varphi(u)$ reel eksene göre simetrik şartlarını sağlayan analitik fonksiyonlar Ω sınıfındandır denir. Bu durumda $\varphi \in \Omega$ ise

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots \quad (z \in U,\ B_1 > 0) \tag{2.2}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir [11,12].

Ayrıca Ω sınıfı ile $\mathcal{P}$ sınıfı arasında yakından bir ilişki vardır. Öyle ki; $p_1, p_2 \in P,\ \varphi \in \Omega$ ve $u, v : U \to U,\ u(0) = v(0) = 0$ fonksiyonları için

$$p_1(z) = \frac{1+u(z)}{1-u(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{2.3}$$

ve

$$p_2(z) = \frac{1+v(z)}{1-v(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$u(z) = \frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1} = \frac{c_1}{2} z + \frac{1}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2}) z^2 + \ldots \tag{2.5}$$

ve

$$v(z) = \frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1} = \frac{b_1}{2} z + \frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_1^2}{2}) z^2 + \ldots \tag{2.6}$$

yazılır.

Böylece

$$\varphi(u(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left\{ \frac{1}{2}(c_2 - \frac{c_1^2}{2}) B_1 + \frac{1}{4} c_1^2 B_2 \right\} z^2 + \ldots \tag{2.7}$$

ve

$$\varphi(v(z)) = 1 + \frac{B_1 b_1}{2} z + \left\{ \frac{1}{2}(b_2 - \frac{b_1^2}{2}) B_1 + \frac{1}{4} b_1^2 B_2 \right\} z^2 + \ldots \tag{2.8}$$

elde edilir [1].

Ünivalent fonksiyonların önemli ve ilk çalışmalarından birisi $\mathcal{S}$ sınıfına ait katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu probleme ilk cevabı Bieberbach 1916 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.18 (Bieberbach Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ dir. Eşitlik hali $z \in U$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k_\theta(z) = \dfrac{z}{\left(1 - e^{i\theta} z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir [8,16].

Teorem 2.3.19 (Bieberbach Tahmini): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $n = 2,3,4,...$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği vardır. Eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır [8,21].

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde elde edilmiştir.

$|a_2| \leq 2,$ Bieberbach (1916).

$|a_3| \leq 3,$ Löwner (1923) (Löwner diferensiyel Denklemi).

$|a_4| \leq 4,$ Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği).

$|a_6| \leq 6,$ Pederson (1968), Ozawa (1969).

$|a_5| \leq 5,$ Pederson, Schiffer (1972).

$|a_n| \leq e.n,$ Littlewood (1925).

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n} = 1,$ Hayman (1955).

$|a_n| \leq \sqrt{7/6}\,n < 1.081n,$ FitsGerald (1972).

*** $|a_n| \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ L. De Branges (1984) [2].

Teorem 2.3.20 (Fekete-Szegö problemi): Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq 1 + 2e^{\frac{-2\mu}{1-\mu}} \quad (0 \leq \mu < 1)$$

eşitsizliği yazılır. Bu sınır $[0,1)$ aralığındaki her μ değeri için kesindir [8].

Tanım 2.3.21 (Sălăgean Türev Operatörü): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için, $D^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Sălăgean türev operatörü $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= Df(z) = zf'(z) \\ &\vdots \\ D^n f(z) &= D\left(D^{n-1} f(z)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca D^n için rekürans formülü

$$D^{n+1}f(z)=z\left(D^{n}f(z)\right)'$$

biçiminde de yazılabilir [24].

2.4 Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun tersi olan $g(z)$ analitik fonksiyonu $g(f(z))=z$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, Koebe çeyrek teoremine göre U nun görüntüsü altında her $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $\frac{1}{4}$ yarıçaplı bir diski içerir. Böylece, U daki her f ünivalent fonksiyonunun tersi vardır ve aşağıdaki şartları sağlar:

$$f^{-1}\left(f\left(z\right)\right)=z \quad \left(z\in U\right)$$

ve

$$f^{-1}\left(f\left(w\right)\right)=w \quad \left(\left|w\right|<r_0\left(f\right)\geq\frac{1}{4}\right).$$

Bu durumda,

$$w=f^{-1}(w)+a_2\left[f^{-1}(w)\right]^2+a_3\left[f^{-1}(w)\right]^3+\dots$$

ise

$$g(w)=f^{-1}\left(w\right)=w-a_2w^2+\left(2a_2^2-a_3\right)w^3-\left(5a_2^3-5a_2a_3+a_4\right)w^4+\dots \qquad (2.9)$$

şeklinde olur.

Eğer f ve f^{-1}, U da ünivalent ise $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonuna U da *bi-ünivalent fonksiyon* denir. U da bi-ünivalent olan ve (2.1) ile verilen tüm $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfını Σ ile göstereceğiz.

Σ sınıfına aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

$$h(z)=\frac{z}{1-z};\quad k(z)=-\log\left(1-z\right);\quad l(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Buna rağmen, $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ile tanımlanan Koebe fonksiyonu Σ sınıfından değildir. Çünkü, Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder. Bu nedenle, görüntü bölgesi U birim diskini ihtiva etmez.

Ayrıca Σ sınıfına ait olmayan fonksiyonlara örnek olarak aşağıdaki fonksiyonları da verebiliriz:

$$t(z)=z-\frac{z^2}{2}; \qquad s(z)=\frac{z}{1-z^2}.$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak son yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları için elde edilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminleri tarihsel bir seyir içinde verilmiştir.

3.1 Bi-Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Tahminleri

Tanım 3.1.1 : $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(f'(z)\right)\right| \leq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(z \in U;\ 0 < \alpha \leq 1\right)$$

ve

$$\left|\arg\left(g'(w)\right)\right| \leq \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(w \in U;\ 0 < \alpha \leq 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa (2.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu H_{Σ}^{α} $\left(0 < \alpha \leq 1\right)$ sınıfındandır denir. Burada $g(w)$ (2.9) da tanımlanan fonksiyondur [26].

Teorem 3.1.2 : $f \in H_{\Sigma}^{\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\alpha\left(3\alpha+2\right)}{3}$$

dır [26].

Tanım 3.1.3 : $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re} f'(z) > \beta \quad \left(z \in U;\ 0 \leq \beta < 1\right)$$

ve

$$\operatorname{Re} g'(w) > \beta \quad \left(w \in U;\ 0 \leq \beta < 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $H_\Sigma(\beta)$ sınıfındandır denir [26].

Teorem 3.1.4 : $f \in H_\Sigma(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3}}$$

ve

$$|a_3| \le \sqrt{\frac{(1-\beta)(5-3\beta)}{3}}$$

dır [26].

Tanım 3.1.5 : $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu $0 < \alpha \le 1$ *ve* $\lambda \ge 1$ olmak üzere $z, w \in U$ için

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

ve

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır denir [10].

Teorem 3.1.6: $f(z) \in B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda+1}$$

dır [10].

Tanım 3.1.7: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \right) > \beta \quad (0 \le \beta < 1,\ \lambda \ge 1,\ z \in U)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right)>\beta \quad \left(0\leq\beta<1,\ \lambda\geq 1,\ w\in U\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $B_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denir [10].

Teorem 3.1.8 : $f\in B_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}}$$

ve

$$|a_3|\leq\frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

dır [10].

Tanım 3.1.9 : $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olmak üzere

$$f'(\mathrm{z})\prec\varphi(\mathrm{z})$$

ve

$$g'(w)\prec\varphi(w)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\varphi)$ sınıfındandır denir [1].

Teorem 3.1.10 : $f\in H_{\Sigma}(\varphi)$ olmak üzere

$$|a_2|\leq\frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3B_1^2-4B_2+4B_1\right|}}$$

ve

$$|a_3|\leq\left(\frac{1}{3}+\frac{B_1}{4}\right)B_1$$

dır [1].

Tanım 3.1.11: $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $\alpha\geq 0$ olmak üzere

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{\alpha z^2 f''(z)}{f(z)}\prec\varphi(z)$$

ve

$$\frac{w\mathrm{g}'(w)}{\mathrm{g}(w)}+\frac{\alpha w^2\,\mathrm{g}''(w)}{\mathrm{g}(w)}\prec\varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $ST_\Sigma(\alpha,\varphi)$ sınıfındandır denir [1].

Teorem 3.1.12 : $f\in ST_\Sigma(\alpha,\varphi)$ olmak üzere

$$|a_2|\le\frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|B_1^2(1+4\alpha)+(\mathrm{B}_1-B_2)(1+2\alpha)^2\right|}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{B_1+|B_2-B_1|}{(1+4\alpha)}$$

dır [1].

Tanım 3.1.13: $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $\alpha\ge0$ olmak üzere

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\prec\varphi(z)$$

ve

$$(1-\alpha)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\alpha(1+\frac{wg''(w)}{\mathrm{g}'(w)})\prec\varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $M_\Sigma(\alpha,\varphi)$ sınıfındandır denir [1].

Teorem 3.1.14 : $f\in M_\Sigma(\alpha,\varphi)$ olmak üzere

$$|a_2|\le\frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{(1+\alpha)\left|B_1^2+(1+\alpha)(\mathrm{B}_1-B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{B_1+|B_2-B_1|}{1+\alpha}$$

dır [1].

Tanım 3.1.15: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{1-\alpha} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)^{1-\alpha} \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $L_{\Sigma}(\alpha,\varphi)$ sınıfındandır denir [1].

Teorem 3.1.16: $f \in L_{\Sigma}(\alpha,\varphi)$ olmak üzere

$$|a_2| \leq \frac{2B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|2(\alpha^2-3\alpha+4)B_1^2+4(\alpha-2)^2(B_1-B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2(3-2\alpha)(B_1+|B_1-B_2|)}{\left|(3-2\alpha)(\alpha^2-3\alpha+4)\right|}$$

dır [1].

Tanım 3.1.17: $h, p : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları

$$\min\left\{\mathbb{R}e\left(h(z)\right),\ \mathbb{R}e\left(p(z)\right)\right\} > 0$$

ve

$$h(0) = p(z) = 1$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu $z, w \in U$ için $f'(z) \in h(U)$ ve $g'(z) \in p(U)$ koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $H_{\Sigma}^{h,p}$ sınıfındandır denir [31].

Teorem 3.1.18: $f \in H_{\Sigma}^{h,p}$ $(0 \leq \beta < 1)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{|h''(0)|+|p''(0)|}{12}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{|h''(0)|}{6}$$

dır [31].

Tanım 3.1.19: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\frac{z^{1-\lambda} f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1,\ \lambda \geq 0,\ z \in U)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{w^{1-\lambda} g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \leq 1,\ \lambda \geq 0,\ w \in U)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $P_\Sigma(\alpha, \lambda)$ sınıfındandır denir [23].

Teorem 3.1.20: $f \in P_\Sigma(\alpha, \lambda)$ olsun**.** $0 < \alpha \leq 1$ *ve* $\lambda \geq 0$ için

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(\alpha+1+\lambda)}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2\alpha}{(2+\lambda)}$$

dır [23].

Tanım 3.1.21: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z^{1-\lambda} f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right] > \beta \quad (0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 0,\ z \in U)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left[\frac{w^{1-\lambda} g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right] > \beta \quad (0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 0,\ w \in U)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $P_\Sigma(\beta, \lambda)$ sınıfındandır denir [23].

Teorem 3.1.22: $f \in P_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ olsun. $0 \le \beta < 1$ ve $\lambda \ge 0$ için

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(1+\lambda)}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2(1-\beta)}{(2+\lambda)}$$

dır [23].

Tanım 3.1.23: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 < \alpha \le 1, \lambda \ge 0, -1 \le B < A \le 1$ *ve* $z, w \in U$ için f fonksiyonu

$$(1-\lambda)\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} + \lambda\frac{2(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'} \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\alpha}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{2wg'(w)}{g(w)-g(-w)} + \lambda\frac{2(wg'(w))'}{(g(w)-g(-w))'} \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\alpha}$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $M_{\Sigma}^{s}(\alpha,\lambda;A,B)$ sınıfındandır denir [25].

Teorem 3.1.24: $f \in M_{\Sigma}^{s}(\alpha,\lambda;A,B)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{\alpha\sqrt{(A-B)}}{\sqrt{2\left[(1+\lambda)^2 - \alpha\lambda^2\right]}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{\alpha^2(A-B)^2}{4(1+\lambda)^2} + \frac{\alpha(A-B)}{2(1+2\lambda)}$$

dır [25].

Tanım 3.1.25: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$, $\varphi \in \Omega$ olsun. $0 \le \lambda \le 1$, $\gamma \in \mathbb{C}/\{0\}$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z) + (1-\lambda)f(z)} - 1\right) \prec \varphi(z)$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\prec\varphi(w)$$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonu $S_\Sigma(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındandır denir [7].

Teorem 3.1.26: $f\in S_\Sigma(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|\gamma(1+2\lambda-\lambda^2)\,\mathrm{B}_1^2+(1+\lambda)^2(\mathrm{B}_1-\mathrm{B}_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{|\gamma|(B_1+|B_1-B_2|)}{1+2\lambda-\lambda^2}$$

dır [7].

Tanım 3.1.27: $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\qquad (0<\alpha\le 1,\ \mu\ge 0,\ z\in U)$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\qquad (0<\alpha\le 1,\ \mu\ge 0,\ w\in U)$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $N_\Sigma^\mu(\alpha,\lambda)$ sınıfındandır denir [6].

Teorem 3.1.28: $f\in N_\Sigma^\mu(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{4\alpha^2}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{2\alpha}{2\lambda+\mu}$$

dır [6].

Tanım 3.1.29: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\} > \beta \quad (0 \le \beta < 1,\ \mu \ge 0,\ \lambda \ge 1,\ z \in U)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\} > \beta \quad (0 \le \beta < 1,\ \mu \ge 0,\ \lambda \ge 1,\ w \in U)$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denir [6].

Teorem 3.1.30: $f \in N_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ olsun. O halde

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}}, \frac{2(1-\beta)}{\lambda+\mu}\right\}$$

ve

$$|a_3| \le \begin{cases} \min\left\{\dfrac{4(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}, \dfrac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+\mu)^2} + \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu}\right\}, & 0 \le \mu < 1 \\ \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu}, & \mu \ge 1 \end{cases}$$

dir [6].

Tanım 3.1.31: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1\right] \prec \varphi(z) \qquad (0 \le \gamma \le 1,\ \tau \in \mathbb{C}/\{0\},\ z \in U)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right] \prec \varphi(w) \qquad (0 \le \gamma \le 1,\ \tau \in \mathbb{C}/\{0\},\ w \in U)$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $\Sigma(\tau,\gamma,\varphi)$ sınıfındandır denir [28].

Teorem 3.1.32: $f \in \Sigma(\tau,\gamma,\varphi)$ olsun. O halde

$$|a_2| \le \frac{|\tau| B_1^{3/2}}{\sqrt{\left|3\tau B_1^2 (1+2\gamma) + (1+\gamma)^2 (B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le B_1 |\tau| \left(\frac{1}{3(1+2\gamma)} + \frac{B_1|\tau|}{4(1+\gamma)^2} \right)$$

dir [28].

Tanım 3.1.33: $h(0)=1$ $(z \in U, \operatorname{Re} h(z) > 0)$ şartını sağlayan ve $h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$ şeklinde verilen $h: U \to \mathbb{C}$ bir konveks fonksiyon olsun. $f \in \Sigma$ ve $f = g^{-1}$ olmak üzere

$$e^{i\beta}\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \right) \prec h(z)\cos\beta + i\sin\beta$$

$$\left(\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \lambda \ge 1,\ \mu \ge 0\right)$$

ve

$$e^{i\beta}\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \right) \prec h(w)\cos\beta + i\sin\beta$$

$$\left(\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \lambda \ge 1,\ \mu \ge 0\right)$$

şartlarını sağlayan f fonksiyonu $NP_{\Sigma}^{\mu,\lambda}(\beta, h)$ sınıfındandır denir [20].

Teorem 3.1.34: $f \in NP_{\Sigma}^{\mu,\lambda}(\beta, h)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2|B_1|\cos\beta}{(1+\mu)(2\lambda+\mu)}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

ve

$$|a_3| \le \frac{2|B_1|\cos\beta}{(1+\mu)(2\lambda+\mu)} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

dır [20].

Bu kısımda ise son yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları için elde edilen Fekete-Szegö eşitsizlikleri tarihsel bir seyir içinde verilmiştir.

3.2 Bi-Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Fekete-Szegö Problemi:

Tanım 3.2.1: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer

$$f'(z) \prec \varphi(z)$$

ve

$$g'(w) \prec \varphi(w)$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\varphi)$ sınıfındandır denir [33].

Teorem 3.2.2: $f \in H_{\Sigma}(\varphi)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{3} B_1, & |\mu - 1| \leq \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3B_1^2}\right| \\ \dfrac{B_1^3 |\mu - 1|}{\left|3B_1^2 + 4(B_1 - B_2)\right|}, & |\mu - 1| \geq \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3B_1^2}\right| \end{cases}$$

dır [33].

Tanım 3.2.3: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Eğer

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{\alpha z^2 f''(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{g(w)} + \frac{\alpha w^2 g''(w)}{g(w)} \prec \varphi(w)$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $ST_{\Sigma}(\alpha, \varphi)$ sınıfındandır denir [33].

Teorem 3.2.4: $f \in ST_{\Sigma}(\alpha, \varphi)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$$
\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2(1+3\alpha)}, & |\mu-1| \leq \dfrac{1}{2(1+3\alpha)}\left|1+4\alpha+\dfrac{(1+2\alpha)^2(B_1-B_2)}{B_1^2}\right| \\[2ex] \dfrac{B_1^3|\mu-1|}{\left|(1+4\alpha)B_1^2+(1+2\alpha)^2(B_1-B_2)\right|}, & |\mu-1| \geq \dfrac{1}{2(1+3\alpha)}\left|1+4\alpha+\dfrac{(1+2\alpha)^2(B_1-B_2)}{B_1^2}\right| \end{cases}
$$

dir [33].

Tanım 3.2.5: $f\in\Sigma$, $g=f^{-1}$ ve $0\leq\alpha\leq 1$ olsun. Eğer

$$
(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\varphi(z)
$$

ve

$$
(1-\alpha)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\alpha\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\prec\varphi(w)
$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $M_{\Sigma}(\alpha,\varphi)$ sınıfındandır denir [33].

Teorem 3.2.6: $f\in M_{\Sigma}(\alpha,\varphi)$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$
\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2(1+2\alpha)}, & |\mu-1| \leq \dfrac{1+\alpha}{2(1+2\alpha)}\left|1+\dfrac{(1+\alpha)(B_1-B_2)}{B_1^2}\right| \\[2ex] \dfrac{B_1^3|\mu-1|}{\left|(1+\alpha)B_1^2+(1+\alpha)^2(B_1-B_2)\right|}, & |\mu-1| \geq \dfrac{1+\alpha}{2(1+2\alpha)}\left|1+\dfrac{(1+\alpha)(B_1-B_2)}{B_1^2}\right| \end{cases}
$$

dir [33].

Tanım 3.2.7: $f\in\Sigma$, $g=f^{-1}$ olsun. Eğer

$$
\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)z+\lambda f(z)}\prec\varphi(z) \qquad (0\leq\lambda\leq 1,\ z\in U)
$$

ve

$$
\frac{wf'(w)}{(1-\lambda)w+\lambda f(w)}\prec\varphi(w) \qquad (0\leq\lambda\leq 1,\ w\in U)
$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $M_{\Sigma}^{\lambda}(\alpha,\varphi)$ sınıfındandır denir [14].

Teorem 3.2.8: $f \in M_{\Sigma}^{\lambda}(\varphi)$ olsun. O halde

$$\left|a_3 - \frac{\lambda(2-\lambda)}{3-\lambda}a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{3-\lambda}, & |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{|B_2|}{3-\lambda}, & |B_2| \geq B_1 \end{cases}$$

dir [14].

Tanım 3.2.9: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ olsun. Eğer

$$\frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z) + \lambda z f''(z)} \prec \varphi(z) \qquad (0 \leq \lambda < 1,\ z \in U)$$

ve

$$\frac{g'(w) + wg''(w)}{g'(w) + \lambda w g''(w)} \prec \varphi(w) \qquad (0 \leq \lambda < 1,\ w \in U)$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $K_{\Sigma}(\varphi, \lambda)$ sınıfındandır denir [14].

Teorem 3.2.10: $f \in K_{\Sigma}(\varphi, \lambda)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - \frac{2(1+\lambda)}{3}a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{6(1-\lambda)}, & |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{|B_2|}{6(1-\lambda)}, & |B_2| \geq B_1 \end{cases}$$

dir [14].

Tanım 3.2.11: $f \in \Sigma$, $g = f^{-1}$ olsun. Eğer

$$\alpha < \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{\lambda z^2 f''(z)}{f(z)}\right) < \beta \qquad (\lambda \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1 < \beta,\ z \in U)$$

ve

$$\alpha < \mathrm{Re}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)} + \frac{\lambda w^2 g''(w)}{g(w)}\right) < \beta \qquad (\lambda \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1 < \beta,\ w \in U)$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $K(\lambda; \alpha, \beta)$ sınıfındandır denir [29].

Teorem 3.2.12: $f\in K(\lambda;\alpha,\beta)$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq\frac{|B_1|}{2(3\lambda+1)}\max\left\{1,\left|\frac{B_2}{B_1}-\frac{2(3\lambda+1)\mu-(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)^2}B_1\right|\right\}$$

dir. Bu sonuç kesindir [29].

Tanım 3.2.13: $f\in\Sigma,\ g=f^{-1}$ olsun. Eğer

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\prec\varphi(z)\qquad(\lambda\geq1,\ \mu\geq0,\ z\in U)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\prec\varphi(w)\qquad(\lambda\geq1,\ \mu\geq0,\ w\in U)$$

şartları sağlanırsa f fonksiyonu $N_{\Sigma}^{\mu,\lambda}(\varphi)$ sınıfındandır denir [20].

Teorem 3.2.14: $f\in N_{\Sigma}^{\mu,\lambda}(\varphi)$ ve $\delta\in\mathbb{R}$ olsun. O halde

$$\left|a_3-\delta a_2^2\right|\leq\begin{cases}\dfrac{B_1}{2\lambda+\mu}, & |\delta-1|\leq\dfrac{\mu+1}{2}\left|1+\dfrac{2(B_1-B_2)(\lambda+\mu)^2}{B_1^2(2\lambda+\mu)(1+\mu)}\right|\\[2ex] \dfrac{2B_1^3|\delta-1|}{\left|(2\lambda+\mu)(1+\mu)B_1^2+2(B_1-B_2)(\lambda+\mu)^2\right|}, & |\delta-1|\geq\dfrac{\mu+1}{2}\left|1+\dfrac{2(B_1-B_2)(\lambda+\mu)^2}{B_1^2(2\lambda+\mu)(1+\mu)}\right|\end{cases}$$

dir [20].

Bizde bu tez çalışmasında, Tanım 2.3.21 ve Tanım 3.1.31 yardımıyla, analitik ve bi-ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfını aşağıdaki gibi tanımlayarak, bu sınıf için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminlerini elde ettik. Ayrıca, Fekete-Szegö problemi olarak bilenen $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ fonksiyoneli için bir üst sınır bulduk.

Tanım 3.2.15: $f\in\Sigma,\ g=f^{-1}$ olsun. Eğer

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\left(D^n f(z)\right)'+\gamma z\left(D^n f(z)\right)''-1\right]\prec\varphi(z)\qquad \left(0\le\gamma\le 1,\ \tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ n\in\mathbb{N},\ z\in U\right)$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\left(D^n g(w)\right)'+\gamma w\left(D^n g(w)\right)''-1\right]\prec\varphi(w)\qquad \left(0\le\gamma\le 1,\ \tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ n\in\mathbb{N},\ w\in U\right)$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ sınıfındandır denir. Burada D^n Sălăgean türev operatörüdür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. $\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ Sınıfı İçin Katsayı Tahminleri:

Teorem 4.1.1: $0\le\gamma\le 1,\ \tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ n\in\mathbb{N},\ B_1>0$ ve $f\in\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{|\tau|\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right|}} \tag{4.1}$$

ve

$$|a_3|\le B_1|\tau|\left(\frac{B_1|\tau|}{4^{n+1}(1+\gamma)^2}+\frac{1}{3^{n+1}(1+2\gamma)}\right) \tag{4.2}$$

elde edilir.

İspat: $f\in\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. O halde

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(D^n f(z))'+\gamma z(D^n f(z))''-1\right]=\varphi(u(z))\qquad (z\in U) \tag{4.3}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(D^n g(w))'+\gamma w(D^n g(w))''-1\right]=\varphi(v(w))\qquad (w\in U) \tag{4.4}$$

şartlarını sağlayan (2.3) ve (2.4) ile tanımlanan $u,v:U\to U$ $\left(u(0)=v(0)=0\right)$ analitik fonksiyonları vardır.

İlk olarak, (2.7) eşitliği (4.3) de, (2.8) eşitliği (4.4) de dikkate alınarak sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(D^n f(z))'+\gamma z(D^n f(z))''-1\right]=1+\frac{1}{2}B_1c_1z+\left[\frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right]z^2+\ldots \tag{4.5}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\; D^n g \;\; w \;\;' + \gamma w \;\; D^n g \;\; w \;\;'' -1\right] = 1+\frac{1}{2}B_1 b_1 w + \left[\frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2 b_1^2\right]w^2+....$$

(4.6)

Sălăgean türev operatörünün tanımı kullanılarak (4.5) ve (4.6) aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{\tau}\left[\; 1+\gamma \;\; 2^{n+1}a_2 z + 3^{n+1} \;\; 1+2\gamma \;\; a_3 z^2 + ...\right] \\ &= 1+\frac{1}{2}B_1 c_1 z + \left[\frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2 c_1^2\right]z^2+... \end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{\tau}\left[-\;\; 1+\gamma \;\; 2^{n+1}a_2 w + 3^{n+1} \;\; 1+2\gamma \;\;\; 2a_2^2 - a_3 \;\; w^2 + ...\right] \\ &= 1+\frac{1}{2}B_1 b_1 w + \left[\frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2 b_1^2\right]w^2+.... \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.7) ve (4.8) de polinom eşitliğini kullanılırsa

$$\frac{\;1+\gamma \;\; 2^{n+1}a_2}{\tau} = \frac{1}{2}B_1 c_1 \tag{4.9}$$

$$\frac{3^{n+1} \;\; 1+2\gamma \;\; a_3}{\tau} = \frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2 c_1^2 \tag{4.10}$$

ve

$$-\frac{\;1+\gamma \;\; 2^{n+1}a_2}{\tau} = \frac{1}{2}B_1 b_1 \tag{4.11}$$

$$\frac{3^{n+1} \;\; 1+2\gamma \;\;\; 2a_2^2 - a_3}{\tau} = \frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2 b_1^2 \tag{4.12}$$

değerleri elde edilir.

(4.9) ve (4.11) den

$$c_1 = -b_1 \tag{4.13}$$

bulunur.

(4.10) ve (4.12) taraf tarafa toplanıp sonra (4.13) göz önüne alınırsa

$$\frac{2.3^{n+1}(1+2\gamma)a_2^2}{\tau}=\frac{1}{2}B_1(b_2+c_2)-\frac{1}{2}B_1c_1^2+\frac{1}{2}B_2c_1^2 \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir.

(4.9) da her iki tarafın karesi alınırsa

$$a_2^2=\frac{\tau^2B_1^2c_1^2}{(1+\gamma)^2\,2^{2n+4}} \tag{4.15}$$

veya

$$c_1^2=\frac{(1+\gamma)^2\,2^{2n+4}a_2^2}{\tau^2B_1^2} \tag{4.16}$$

değerleri bulunur.

(4.16) eşitliği (4.14) te yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_2^2=\frac{\tau^2B_1^3(b_2+c_2)}{4\left[3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right]} \tag{4.17}$$

veya

$$a_2=\frac{\tau B_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{b_2+c_2}}{2\sqrt{3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}} \tag{4.18}$$

(4.18) in her iki tarafının mutlak değeri alınıp Lemma 2.3.6 dan $|b_2|\leq 2$, $|c_2|\leq 2$ olduğu dikkate alırnırsa

$$|a_2|\leq\frac{|\tau|\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right|}} \tag{4.19}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi $|a_3|$ katsayı sınırını bulalım:

(4.13) dikkate alınarak (4.12) ile (4.10) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\frac{2.3^{n+1}(1+2\gamma)a_2^2}{\tau}-\frac{2.3^{n+1}(1+2\gamma)a_3}{\tau}=\frac{1}{2}B_1(b_2-c_2) \tag{4.20}$$

bulunur.

(4.15) eşitliği (4.20) de yerine yazılırsa

$$a_3 = \frac{B_1^2 \tau^2 b_1^2}{(1+\gamma)^2 4^{n+2}} + \frac{B_1 \tau}{4.3^{n+1}(1+2\gamma)}(c_2 - b_2) \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.21) in her iki tarafının mutlak değeri alınıp Lemma 2.3.6 dan $|b_2| \le 2$, $|c_2| \le 2$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiş olur:

$$|a_3| \le B_1 |\tau| \left(\frac{B_1 |\tau|}{4^{n+1}(1+\gamma)^2} + \frac{1}{3^{n+1}(1+2\gamma)} \right) \tag{4.22}$$

Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1 de $n = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $0 \le \gamma \le 1, \tau \in \mathbb{C} / \{0\}, B_1 > 0$ $f \in \Sigma^0(\tau, \gamma, \varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{|\tau|\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3\tau B_1^2(1+2\gamma) + 4(1+\gamma)^2(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le B_1 |\tau| \left(\frac{B_1 |\tau|}{4(1+\gamma)^2} + \frac{1}{3(1+2\gamma)} \right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. de $\gamma = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3: $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}, n \in \mathbb{N}, B_1 > 0$ $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$ ve $f \in \Sigma^n(\tau, 0, \varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{|\tau|\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3^{n+1}\tau B_1^2 + 4^{n+1}(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq B_1|\tau|\left(\frac{B_1|\tau|}{4^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 de $\tau = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5: $0 \leq \gamma \leq 1, n \in \mathbb{N}, B_1 > 0$ ve $f \in \Sigma^n(1,\gamma,\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3^{n+1}B_1^2(1+2\gamma) + 4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq B_1\left(\frac{B_1}{4^{n+1}(1+\gamma)^2} + \frac{1}{3^{n+1}(1+2\gamma)}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 de $n = 0$ ve $\gamma = 1$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.6: $\tau \in \mathbb{C}/\{0\}$ ve $f \in \Sigma^0(\tau,1,\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{|\tau|\sqrt{B_1^3}}{\sqrt{\left|3^2\tau B_1^2 + 4^2(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq B_1|\tau|\left(\frac{B_1|\tau|}{4^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$

elde edilir.

4.2. $\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ Sınıfı İçin Fekete-Szegö Problemi

Teorem 4.2.1: $0\le\gamma\le1$, $\tau\in\mathbb{C}/\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}$, $B_1>0$ ve $f\in\Sigma^n(\tau,\gamma,\varphi)$ olsun. O halde

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{B_1|\tau|}{3^{n+1}(1+2\gamma)}, & |\mu-1|\le\left|1+\dfrac{4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3^{n+1}(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right| \\ \dfrac{B_1^3|\tau|^2|\mu-1|}{\left|3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right|}, & |\mu-1|\ge\left|1+\dfrac{4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3^{n+1}(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right|\end{cases}.$$

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatında katsayılar bulunduğu için ve bu ispatta da aynı katsayılar kullanılacağı için tekrar hesaplanmaya ihtiyaç duyulmamıştır.

(4.10) eşitliğinden (4.12) eşitliğini çıkarıp bulunan sonuçta (4.13) dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_3=a_2^2+\frac{\tau B_1(c_2-b_2)}{4.3^{n+1}(1+2\gamma)} \tag{4.23}$$

$\mu\in\mathbb{R}$ olmak üzere, (4.17) ve (4.23) ten

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{\tau B_1}{4.3^{n+1}(1+2\gamma)}\left\{\left[\frac{3^{n+1}(1-\mu)(1+2\gamma)\tau B_1^2}{\left[3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right]}-1\right]b_2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{3^{n+1}(1-\mu)(1+2\gamma)\tau B_1^2}{\left[3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right]}+1\right]c_2\right\}$$

elde edilir.

$$h(\mu)=\frac{3^{n+1}(1-\mu)(1+2\gamma)\tau B_1^2}{\left[3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right]}$$ olarak alınırsa

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{\tau B_1}{4.3^{n+1}(1+2\gamma)}\left[(h(\mu)-1)b_2+(h(\mu)+1)c_2\right] \tag{4.24}$$

şeklinde yazılır.

(4.24) ifadesinde her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|=\frac{|\tau|B_1}{4.3^{n+1}(1+2\gamma)}\left|\left(h(\mu)-1\right)b_2+\left(h(\mu)+1\right)c_2\right| \tag{4.25}$$

olur.

$B_j\in\mathbb{R}$, $B_1>0$, $|b_2|\le 2$, $|c_2|\le 2$ olduğu (4.25) eşitliğinde göz önüne alınırsa ele alınan sınıf için Fekete-Szegö eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{B_1|\tau|}{3^{n+1}(1+2\gamma)}|h(\mu)|, & |h(\mu)|\ge 1\\[2ex] \dfrac{B_1|\tau|}{3^{n+1}(1+2\gamma)}, & 0\le|h(\mu)|\le 1.\end{cases}$$

Burada $h(\mu)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{B_1|\tau|}{3^{n+1}(1+2\gamma)}, & |\mu-1|\le\left|1+\dfrac{4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3^{n+1}(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right|\\[3ex] \dfrac{B_1^3|\tau|^2|\mu-1|}{\left|3^{n+1}\tau B_1^2(1+2\gamma)+4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right|}, & |\mu-1|\ge\left|1+\dfrac{4^{n+1}(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3^{n+1}(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right|\end{cases}$$

elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1 de $n=0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $0\le\gamma\le 1$, $\tau\in\mathbb{C}/\{0\}$, $\mu\in\mathbb{R}$ ve $f\in\Sigma^0(\tau,\gamma,\varphi)$ olsun. O halde

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}\dfrac{B_1|\tau|}{3(1+2\gamma)}, & |\mu-1|\le\left|1+\dfrac{4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right|\\[3ex] \dfrac{B_1^3|\tau|^2|\mu-1|}{\left|3\tau B_1^2(1+2\gamma)+4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)\right|}, & |\mu-1|\ge\left|1+\dfrac{4(1+\gamma)^2(B_1-B_2)}{3(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right|\end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1 de $n=1$ için aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 4.2.3: $0 \le \gamma \le 1$, $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $f \in \Sigma^1(\tau, \gamma, \varphi)$ olsun. O halde

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{B_1|\tau|}{9(1+2\gamma)}, & |\mu - 1| \le \left|1 + \dfrac{16(1+\gamma)^2 (B_1 - B_2)}{9(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right| \\ \dfrac{B_1^3 |\tau|^2 |\mu - 1|}{\left|9\tau B_1^2 (1+2\gamma) + 16(1+\gamma)^2 (B_1 - B_2)\right|}, & |\mu - 1| \ge \left|1 + \dfrac{16(1+\gamma)^2 (B_1 - B_2)}{9(1+2\gamma)\tau B_1^2}\right| \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1 de $n=0$ ve $\gamma = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.4: $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $f \in \Sigma^0(\tau, 0, \varphi)$ olsun. O halde

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{B_1|\tau|}{3}, & |\mu - 1| \le \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3\tau B_1^2}\right| \\ \dfrac{B_1^3 |\tau|^2 |\mu - 1|}{\left|3\tau B_1^2 + 4(B_1 - B_2)\right|}, & |\mu - 1| \ge \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3\tau B_1^2}\right| \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1 de $n=0$, $\gamma = 0$ ve $\tau = 1$ için aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 4.2.5: $\mu \in \mathbb{R}$ ve $f \in \Sigma^0(1, 0, \varphi)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{B_1}{3}, & |\mu - 1| \le \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3B_1^2}\right| \\ \dfrac{B_1^3 |\mu - 1|}{\left|3B_1^2 + 4(B_1 - B_2)\right|}, & |\mu - 1| \ge \left|1 + \dfrac{4(B_1 - B_2)}{3B_1^2}\right| \end{cases}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında $D^n f(z)$ Sălăgean türev operatörü yardımıyla bi-ünivalent fonksiyonların $\Sigma^n\ \tau,\gamma,\varphi$ alt sınıfı tanımlanarak bu sınıfa ait katsayı tahminleri ve Fekete-Szegö eşitsizliği elde edilmiştir.

Bu yeni ve popüler alanda çalışacak olan araştırmacılar, tezde kullanılan yöntem ile bi-ünivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanımlayıp bu sınıflar için katsayı tahminlerini ve Fekete-Szegö eşitsizliklerini elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Ali R. M. *et al,* 2012. “Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions”, Applied Mathematics Letters, 25, 344-351.

[2] Branges L. De., 1985. “A proof of the Bieberbach conjecture”, Acta Math. 154, 137–152.

[3] Brannan, D. A. and Taha, T. S., 1986. “On some classes of bi-univalent functions”, in: S.M. Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February 18.21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53.60. see also Studia Univ. Babe¸s-Bolyai Math. 31(2), 70-77.

[4] Brannan, D. A. and Clunie, J. G. (Eds.), 1980. “Aspects of Contemporary Complex Analysis” (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1‑20, 1979), Academic Press, New York and London.

[5] Bulut, S., 2014. “Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions”, C. R.acad. Sci. Paris, Ser. I, 352(6), pp. 479-484.

[6] Çağlar, M. *et al,* 2013. ”Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions”, Filomat 27:7, 1165-1171.

[7] Deniz, E., 2013. “Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions”, J. Class. Anal., 2(1), 49-60.

[8] Duren, P. L., 1983. “Univalent functions”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 259, Springer, New York.

[9] Fekete, M. and Szegö, G., 1933. “Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen”, J. London Math. Soc., 8, 85-89.

[10] Frasin, B.A. and Aouf, M. K., 2011. “New subclasses of bi-univalent functions”, Appl. Math. Lett. 24, 1569-1573.

[11] Goodman, A. W., 1983. “Univalent Functions-I”, Mariner Publishing Company., s-245, Tampa, Florida.

[12] Goodman, A. W., 1983. “Univalent Functions-II”, Mariner Publishing Company., s-311, Tampa, Florida.

[13] Hamidi, S.G. and Jahangiri, J. M., 2014. “Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions”, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352, 17-20.

[14] Jahangiri, J. M. *et al*, 2015. “Fekete-Szegö inequalities for classes of bi-stralike and bi-convex functions”, Electronic J. Math. Analysis and Applications, Vol. 3(1), 133-140.

[15] Kedzierawski, A. W., 1988. “Some remarks on bi-univalent functions”, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 39, 77-81.

[16] Keogh, F.R. and Merkes, E. P., 1969. “A coefficient inequality for certain classes of analytic functions”, Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8-12.

[17] Kumar, S. *et al*, 2013. “Estimates for the initial coefficient of bi-univalent functions”, Tamsui Oxford J. Inform. Math. Sci. 29(4), 487-504.

[18] Lewin, M., 1967. “On a coefficient problem for bi-ünivalent functions”, Proc. Amer. Math. Soc., 18, 63-68.

[19] Netanyahu, E., 1969. “The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$”, Arch. Rational Mech. Anal., 32, 100-112.

[20] Orhan, H. *et al*, 2014. “Fekete-Szegö problem for certain classes of Ma-Minda bi-univalent functions”, arXiv: 1404.0895v1.

[21] Pommerenke, Ch., “Univalent Functions”, Vandenhoeck and Rupercht, Göttingen, 1975.

[22] Ponnusamy, S. and Silverman, H., “Complex variables with Applications”, Birkhäuser. Boston, 2006.

[23] Prema, S. and Keerthi, B. S., 2013. “Coefficient bounds for certain subclasses of analitic functions”, Journal of Mathematical Analysis, vol.4, pp.22-27.

[24] Sălăgean, G., 1983. “Subclasses of univalent functions”, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 362-372 p.

[25] Singh, G., 2013. “Coefficient estimates for bi-univalent functions with respect to symmetric points”, J. Nonlinear Funct. Anal. ISSN 2052-532X.

[26] Srivastava, H. M. *et al*, 2010. “Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, Appl. Math. Lett. 23, 1188-1192.

[27] Srivastava, H. M. *et al*, 2013. “Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions”, Filomat, 27:5, 831-842.

[28] Srivastava, H. M. and Bansal, D., 2015. “Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 23, 242-246.

[29] Sun, Y. *et al*, 2015. “Coefficient estimates for certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, Filomat, 29:2, 351-360.

[30] Tan D.-L., 1984. “Coefficient estimates for bi-univalent functions”, Chinese Ann. Math. Ser. A 5, 559–568.

[31] Xu, Q.-H. *et al*, 2012. “Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions”, Appl. Math. Lett., 25, 990-994.

[32] Xu, Q.-H. *et al*, 2012. “A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems”, Appl. Math. Comput., 218, 11461-11465.

[33] Zaprawa, P., 2014. “On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions”, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 21, 169-178.

[34] Zill, D. G. and Shanahan, P. D., “Complex analysis with applications”, Jones and Bartlett Publishers, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Selçuk Aslan
Doğum Yeri : Kdz. Ereğli
Doğum Tarihi : 30.03.1979
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Alpaslan Lisesi
Lisans : Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Çalıstığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : 2013 yılından beri Akyaka Kaymakamlığında çalışmaktadır.