T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DURGUN OLMAYAN *KUAZİ OPTİK* DENKLEMİ İÇİN GALERKİN YÖNTEMİ

Tunç ÇANTAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DURGUN OLMAYAN *KUAZİ OPTİK DENKLEMİ* İÇİN GALERKİN YÖNTEMİ

Tunç ÇANTAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUB'un danışmanlığında Tunç ÇANTAY'ın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi için Galerkin Yöntemi' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oy...birliği.............. ile kabul edilmiştir.

12/.06./2015

	Adı Soyadı	İmza
Başkan :	Prof.Dr. Doğan KAYA	
Üye :	Prof.Dr. Gabil YAGUB	
Üye :	Yrd.Doç.Dr. Nigar Y. Aksoy	N. Yıldırım

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ....../...../20.... gün ve ....../...................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Hidayet Metin ERDOĞAN

Enstitü Müdür V.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada durgun olmayan kuazi optik denklemi için I. ve II. çeşit başlangıç sınır değer problemleri ele alınmıştır. İlk önce ele alınan I. çeşit başlangıç sınır değer problemine Galerkin yöntemi uygulanarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış ayrıca çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirim elde edilmiştir. Daha sonra ise aynı sonuçlar kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için II. çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümü Galerkin yönteminin yardımıyla elde edilmiştir.

Tez çalışmam süresince yardım ve desteklerini esirgemeyen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli bilim adamı Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Doğan KAYA hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2015 Tunç ÇANTAY

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde durgun olmayan kuazi optik denklem için başlangıç sınır değer problemleri ele alınmıştır. 3.1 bölümde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi, 3.2 bölümde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmıştır. 4.1 bölümde durgun olmayan kuazi optik denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemine Galerkin yöntemi uygulanarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış. Ayrıca çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirim elde edilmiştir. 4.2 bölümde ise durgun olmayan kuazi optik denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer problemine Galerkin yöntemi uygulanarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirim elde edilmiştir.

2015-31 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi, Başlangıç Sınır Değer Problemi, Galerkin yöntemi, Galerkin Yaklaşımları.

ABSTRACT

In this thesis, the initial boundary value problems for non-stationary quasi-optics equation are considered. In the sections 3.1 and 3.2 respectively, the first and the second type initial boundary value problems are described. In the section 4.1 by applying Galerkin method to the first type boundary value problems for non-stationary quasi-optics equation, the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. Also on estimation is obtained which shows the continious dependence of the solution on data of the problem. In the section 4.2 by applying Galerkin method to the second type boundary value problems for non-stationary quasi-optics equation, the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. Also on estimation is obtained which shows the continious dependence of the solution on data of the problem.

2015-31 Pages

Key Words: Non-Stationary Quasi-Optics Equation, Initial Boundary Value Problem, Galerkin Method, Galerkin Approximations

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$l > 0$	verilen sayı
$T > 0$	verilen sayı
$L > 0$	verilen sayı
$a(x)$	ölçülebilir reel değerli fonksiyon
$x \in [0, l]$	bağımsız değişken
$t \in [0, T]$	bağımsız değişken
$z \in [0, L]$	bağımsız değişken
[.....]	kaynak numarası sayfa
$\langle .,. \rangle$	iç çarpım işareti

1. GİRİŞ

Kuazi optiğin durgun denklemi için sınır değer problemleri bu çalışmadan önce farklı çalışmalarda da ele alınmıştır [1-8,10-12]. Durgun olmayan (non-stationary) kuazi optik denklem için başlangıç sınır değer problemleri lineer olmayan optikte, çağdaş tekniğin ve fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Bu nedenle kuazi optik denklemi için sınır değer problemlerinin incelenmesi onların genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı, tekliği verilere göre kararlığı sorularının cevaplandırılması büyük önem taşır [8,11].

Durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri denklemin katsayıları ölçülebilir sınırlı ve ölçülebilir sınırlı türeve sahip fonksiyonlar olduğunda ilk önce [6] çalışmalarında incelenmiş ve söz konusu problemlerin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği, ayrıca verilere göre karalığına ait teoremler ispatlanmıştır. Ancak; durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri denklemin katsayıları karesi integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda çok az incelenmiştir .[7] Çalışmasında ilk kez denklemin katsayısı x değişkenine bağlı karesi integrallenebilir fonksiyon olduğunda kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümünün varlığı, tekliği ve verilere göre kararlığına ait hükümler ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasında denklemin katsayısı yalnız z değişkenine bağlı olduğunda bu katsayılar karesi integrallenebilir ve karesi integrallenebilir türeve sahip fonksiyonlar olduğunda durgun olmayan kuazi optik denklem için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı, tekliği ve verilere göre kararlığı incelenmiş bu amaçla Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Durgun olmayan kuazi optik denklem için başlangıç sınır değer problemleri çok az incelendiğinden tez konusu günceldir ve konunun incelenmesi hem teorik anlamda hem de uygulama açısından önem taşımaktadır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1 ve 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1 bölümde durgun olmayan kuazi optik denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmıştır. 3.2 bölümde ise durgun olmayan kuazi optik denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmıştır. Tezin araştırma bulguları bölümü olan 4. bölüm iki alt bölümden, yani 4.1 ve 4.2

bölümlerinden oluşmaktadır. 4.1 bölümünde durgun olmayan kuazi optik denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemine Galerkin yöntemi uygulanarak problemin çözümünün varlığı, tekliği ispatlanmış ve çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirim elde edilmiştir. 4.2 bölümünde ise durgun olmayan kuazi optik denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer problemine Galerkin yöntemi uygulanarak problemin çözümünün varlığı, tekliği ispatlanmış ve çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirim elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve lemma verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^{\ell} u(x)\overline{v}(x)dx \text{ ve } \|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert Uzayı olup elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)dxdt \text{ ve } \|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,l)$ Banach uzayı olup, elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai \max_{x\in(0,l)} |u(x)|.$$

Tanım 2.4: $W_2^1(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ yani Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} \right] dx \text{ ve } \|u\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1(0,\ell)}}.$$

burada $\overline{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$'in kompleks eşleniğidir. $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları 0 ve l noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.5: $W_2^2(0,l)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x'e göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\overline{v}(x)}{dx^2} \right] dx,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^2(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayı $W_2^2(0,l)$'in alt uzayı olup elemanlarının kendisi 0 ve l noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.6: $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların t'ye göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{v}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.7: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,v\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{v}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\overline{v}(x,t)}{\partial x} \right] dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.8: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki; $\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle\psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left[\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial t}\right]dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.9: $W_2^{2,0,0}(\Omega)$ uzayı elemanlarının ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$'dan olan fonksiyonların Sobolev uzayı olup aynı zamanda Hilbert uzayıdır.Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle\psi,\Phi\rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}=\int_\Omega\left[\psi\Phi+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\Phi}}{\partial x^2}\right]dxdtdz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}}<+\infty.$$

Tanım 2.10: $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ uzayı elemanlarının ve onların t ve z değişkenlerine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$'dan olan fonksiyonların Sobolev uzayı olup Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle\psi,\Phi\rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left[\psi\Phi+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z}\right]dxdtdz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}}<+\infty.$$

$$\overset{2,1,1}{W_2}(\Omega)=\overset{2,0,0}{W_2}(\Omega)\cap\overset{0,1,1}{W_2}(\Omega)\text{dır.}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $\overset{2,1,1}{W_2}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığının uçlarında sıfıra dönüşür.

Lemma 2.11 (T.H.Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ aralığında

$$0 \le g(t) \le K\exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için 1. ve 2. çeşit başlangıç sınır değer problemleri formülize edilmiştir.

3.1. Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi İçin 1.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi.

Bu alt bölümde ilk önce durgun olmayan kuazi optik denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

$l>0,\quad T>0,\quad L>0$ verilen sayılar, $0\le x\le l,\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le L$, $\Omega_{tz}=(0,l)\times(0,t)\times(0,z),\ \Omega=\Omega_{TL},\ \Omega_L=(0,l)\times(0,L),\ \Omega_T=(0,l)\times(0,T)$ olsun. Bu durumda

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+ia_0\frac{\partial\psi}{\partial z}-a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a(x)\psi+v_0(z)\psi+iv_1(z)\psi=f(x,t,z),\ (x,t,z)\in\Omega \quad (1)$$

denkleminin

$$\psi(x,0,z)=\phi_0(x,z),\quad (x,z)\in\Omega_L, \quad (2)$$

$$\psi(x,t,0)=\phi_1(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T, \quad (3)$$

başlangıç ve

$$\psi(0,t,z)=\psi(l,t,z)=0,\qquad (t,z)\in Q \quad (4)$$

sınır şartları altında çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $a_0>0$ ve $a_1>0$ verilen sayılar, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı reel değerli fonksiyon olup

$$0\le a(x)\le\mu_0\quad,\overset{0}{\forall}x\in(0,l),\ \mu_0=sabit>0 \quad (5)$$

şartını sağlar; $v_0(z)$ ve $v_1(z)$ fonksiyonları ölçülebilir reel değerli fonksiyon olup

$$\|v_m\|_{L_2(0,L)}\le b_m\ ,\left\|\frac{dv_m}{dz}\right\|_{L_2(0,L)}\le d_m, m=0,1\ ,b_0,\ b_1,d_0,d_1=sabit>0,$$
$$v_1(z)\ge 0,\overset{0}{\forall}z\in(0,L) \quad (6)$$

şartlarını sağlar. $\varphi_0(x,z),\varphi_1(x,t)$ ve $f(x,t,z)$ verilen kompleks değerli fonksiyonlar olup

$$\phi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L),\quad \phi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T), \tag{7}$$

$$f \in W_2^{0,1,1}(\Omega) \tag{8}$$

şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.1 : (1) – (4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan (1) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t,z)\in\Omega$ için (2) ve (3) başlangıç değer şartlarını sırası ile $\overset{0}{\forall}(x,z)\in\Omega_L$ ve $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega_T$ için (4) sınır değer şartlarını $\overset{0}{\forall}(t,z)\in Q$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

3.2. Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi İçin 2.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi.

Bu alt bölümde ele alınan durgun olmayan kuazi optik denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

Farz edelim ki, $\ell>0$, $T>0$, $L>0$ verilen sayılar, $0\le x\le \ell, 0\le t\le T, 0\le z\le L$, $\Omega_L=(0,\ell)\times(0,L)$, $\Omega_T=(0,\ell)\times(0,T)$, $\Omega=(0,\ell)\times(0,T)\times(0,L)$ olsun. Bu durumda

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+ia_0\frac{\partial\psi}{\partial z}-a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a(x)\psi+v_0(z)\psi+iv_1(z)\psi=f(x,t,z),\quad (x,t,z)\in\Omega \tag{9}$$

denkleminin

$$\psi(x,0,z)=\varphi_0(x,z),\quad (x,z)\in\Omega_L, \tag{10}$$

$$\psi(x,t,0)=\varphi_1(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T \tag{11}$$

başlangıç değer ve

$$\frac{\psi(0,t,z)}{\partial x}=\frac{\psi(l,t,z)}{\partial x}=0,\qquad (t,z)\in Q \tag{12}$$

sınır değer şartları altında çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $a_0 > 0$ ve $a_1 > 0$ verilen sayılar, $a(x)$ ölçülebilen sınırlı reel değerli fonksiyon olup;

$$\mu_0 \le a(x) \le \mu_1 \quad , \ \mu_0 , \mu_1 = sabit > 0 \tag{13}$$

şartını sağlar; $v_0(z)$ ve $v_1(z)$ fonksiyonları ölçülebilir reel değerli fonksiyon olup

$$\begin{gathered} \|v_m\|_{L_2(0,L)} \le b_m \ , \left\|\frac{dv_m}{dz}\right\|_{L_2(0,L)} \le d_m , m = 0,1 \ , b_0 , \ b_1 , d_0 , d_1 = sabit > 0, \\ v_1(z) \ge 0, \overset{0}{\forall} z \in (0,L) \end{gathered} \tag{14}$$

şartlarını sağlar. $\phi_0(x,z), \phi_1(x,t)$ ve $f(x,t,z)$ verilen kompleks değerli fonksiyonlar olup;

$$\phi_0 \in \overset{2,1}{W}_2(\Omega_L), \ \frac{\partial\phi_0(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial\phi_0(\ell,z)}{\partial x} = 0, \ z \in (0,L), \tag{15}$$

$$\phi_1 \in \overset{2,1}{W}_2(\Omega_T), \ \frac{\partial\phi_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\phi_1(\ell,t)}{\partial x} = 0, \ t \in (0,T), \tag{16}$$

$$f \in \overset{0,1,1}{W}_2(\Omega) \tag{17}$$

şartlarını sağlar.

Tanım 3.2.1 : (9) – (12) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan (9) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t,z) \in \Omega$ için (10) ve (11) başlangıç değer şartlarını sırası ile $\overset{0}{\forall}(x,z) \in \Omega_L$ ve $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega_T$ için (12) sınır değer şartlarını $\overset{0}{\forall}(t,z) \in Q$ için sağlayan $\psi = \psi(x,t,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde durgun olmayan kuazi optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı, tekliği ve çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren hükümler ispatlanmıştır. Bu amaçla Galerkin yönteminden yararlanılmıştır.

4.1. Durgun Olmayan Kuazi Optik Denklemi İçin 1.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Galerkin yöntemiyle Çözümü.

Bu alt bölümde durgun olmayan kuazi optik denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı, tekliği ve çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren teoremi ispatlayacağız.

Teorem 4.1.1. Farz edelim ki $a(x), v_0(z), v_1(z), \phi_0(x,z)$, $\phi_1(x,t)$ ve $f(x,t,z)$ fonksiyonları (5)-(8) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan genelleştirilmiş çözümü vardır, çözüm tektir ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} \right). \tag{18}$$

Burada $c_0 > 0$ - sabiti φ_0, φ_1 ve f 'den bağımsızdır.

İspat. Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak $L_2(0,l)$ uzayında ortogonal olan

$$LX(x) = \lambda X(x),\ x \in (0,l),\ X(0) = X(l) = 0 \tag{19}$$

özdeğer probleminin çözümü olan ve $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...,$özdeğerlerine karşılık gelen $X = u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...,$ özfonksiyonlarını seçeceğiz. Burada L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L = -a_1 \frac{d^2}{dx^2} + a(x). \tag{20}$$

Bilindiği üzere (19) biçiminde özdeğer problemi [9, sayfa.109-110] çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmaya dayanarak söyleye biliriz ki, (19) özdeğer problemi $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,2,...,$ olduğunda $u_k = u_k(x),\ k = 1,2,...$ çözümlerine sahiptir ve bu çözümler $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar oluşturur. Kolay olsun diye farz edelim ki, bu fonksiyonlar $L_2(0,l)$ uzayında ortogonal fonksiyonlar olsun:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x)\, dx = \delta_k^m,\ k,m = 1,2,.... \tag{21}$$

Burada δ_k^m - sabitleri Kroneker sembolleridir:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m,\ k,m = 1,2,.... \end{cases}$$

Ayrıca söyleye biliriz ki $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonları aşağıdaki anlamda da ortogonaldırlar:

$$\begin{aligned} [u_k, u_m] &= L(u_k, u_m) = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \\ &= \int_0^l \left(a_1 \frac{du_k(x)}{dx} \frac{du_m(x)}{dx} + a(x) u_k(x) u_m(x) \right) dx = \lambda_k \delta_k^m, k,m = 1,2,..., \end{aligned} \tag{22}$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(0,l)} = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \lambda_k^2 \delta_k^m,\ k,m = 1,2,.... \tag{23}$$

$a(x) \geq 0, \forall x \in \overset{0}{(0,l)}$ şartı sağlandığından tüm $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,2,...$ özdeğerleri reeller, pozitifler ve artarak dizilmişlerdir.

Galerkin yöntemine göre yaklaşımları aşağıdaki biçimde arayacağız:

$$\psi^N(x,t,z) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t,z) u_k(x). \tag{24}$$

Burada $c_k^N(t,z) = (\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)},\ k = \overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki şartlardan elde edilir:

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)} + ia_0 \frac{\partial}{\partial z}(\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)} + (L\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)} + \\ &+ (v_0(z)\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)} + i(v_1(z)\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)} = f_k(t,z), \\ &k = \overline{1,N},\ 0 < t \leq T,\ 0 < z \leq L, \end{aligned} \tag{25}$$

$$c_k^N(0,z) = (\psi^N(\cdot,0,z), u_k)_{L_2(0,l)} = \phi_{0k}(z),\ 0 \leq z \leq L,\ k = 1,N, \tag{26}$$

$$c_k^N(t,0)=\left(\psi^N(\cdot,t,0),u_k\right)_{L_2(0,l)}=\varphi_{1k}(t),\ 0\le t\le T,\ k=1,N. \qquad (27)$$

Burada $f_k(t,z)=\left(f(\cdot,t,z),u_k\right)_{L_2(0,l)},\varphi_{0k}(z)=\left(\varphi_0(\cdot,z),u_k\right)_{L_2(0,l)},$

$\varphi_{1k}(z)=\left(\varphi_1(\cdot,z),u_k\right)_{L_2(0,l)},\ k=\overline{1,N}$ dir.

Kolaylıkla göstere biliriz ki, (25) sistemi N sayıda birinci metreden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerden oluşur:

$$i\frac{\partial c_k^N}{\partial t}+ia_0\frac{\partial c_k^N}{\partial z}+\sum_{m=1}^{N}A_{km}(z)c_m^N=f_k(t,z),\ k=1,2,..,N. \qquad (28)$$

Burada $A_{km}=A_{km}(z),\ k=1,2,..,N$ fonksiyonları karesi integrallenebilir ve karesi integrallenebilir türeve sahip fonksiyonlardır. Bu sistemi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\frac{\partial c_k^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial c_k^N}{\partial z}=i\sum_{m=1}^{N}A_{km}(z)c_m^N-if_k(t,z),(t,z)\in Q,k=1,2,..,N. \qquad (29)$$

Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere bu birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemine karşılık gelen birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{a_0}=\frac{dc_k^N}{F_k\left(t,z,c_1^N,c_2^N,...,c_N^N\right)},\ k=1,2,..,N. \qquad (30)$$

Burada $F_k,k=1,2,..,N$ fonksiyonları aşağıdaki formül ile tanımlanır :

$$F_k=F_k\left(t,z,c_1^N,c_2^N,...,c_N^N\right)=i\sum_{m=1}^{N}A_{km}(z)c_n^N-if_k(t,z),\ k=1,2,..,N. \qquad (31)$$

(30) sistemini kullanarak (29) sisteminin çözümü olan $c_k^N(t,z),\ k=\overline{1,N}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&c_k^N(t,z)=c_k^N(0,z-a_0t)+\\&+\int_0^t\left[i\sum_{m=1}^{N}A_{km}\left(z-a_0(t-\tau)\right)c_m^N\left(\tau,z-a_0(t-\tau)\right)-if_k\left(\tau,z-a_0(t-\tau)\right)\right]d\tau,k=\overline{1,N},\end{aligned} \qquad (32)$$

$$c_k^N(t,z)=c_k^N\left(\frac{a_0t-z}{a_0},0\right)+$$
$$+\frac{1}{a_0}\int_0^z\left[i\sum_{m=1}^N A_{km}(\theta)c_m^N\left(\frac{\theta-z+a_0t}{a_0},\theta\right)-if_k\left(\frac{\theta-z+a_0t}{a_0},\theta\right)\right]d\theta,k=\overline{1,N}. \quad (33)$$

Bu bağıntılardan ve

$$c_k^N(0,z-a_0t)=\varphi_{0k}(z-a_0t),\ k=\overline{1,N},$$
$$c_k^N\left(\frac{a_0t-z}{a_0},0\right)=\varphi_{1k}\left(\frac{a_0t-z}{a_0}\right),\ k=\overline{1,N}$$

şartlarından aşağıdaki şartların sağlandığını elde ederiz:

$$c_k^N(0,z)=\varphi_{0k}(z),\ k=\overline{1,N}, \quad (34)$$

$$c_k^N(t,0)=\phi_{1k}(t),\ k=\overline{1,N}. \quad (35)$$

Volter tipli lineer integral denklemler teorisinden bilindiği üzere kabullendiğimiz şartlar altında (32), (33) integral denklemleri (34), (35) başlangıç şartları altında $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayından olan $c_k^N(t,z),\ k=\overline{1,N}$ bir tek çözümüne sahiptir [6].

Şimdi (24) biçiminde olan Galerkin yaklaşımları için kestirim elde edelim.

Lemma 4.1.1. (24) biçiminde olan Galerkin yaklaşımları için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi^N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ N=1,2,... \quad (36)$$

Lemmanın ispatı. (25) sisteminin her k'cı denklemini kendi $\bar{c}_k^N(t,z)$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen eşitlikleri k üzerinden $k=1$'den $k=N$'e kadar toplayalım. Bu taktirde elde edilen eşitliğin $Q_{tz}=(0,t)\times(0,z)$ bölgesi üzerinden integrasyonunu yapıp kısmi integrasyon formülünü kullanırsak:

$$\int_{\Omega_{tz}}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N+ia_0\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\bar{\psi}^N+a_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2+a(x)|\psi^N|^2+\right.$$
$$\left.+v_0(z)|\psi^N|^2+iv_1(z)|\psi^N|^2\right)dxd\tau d\theta=\int_{\Omega_{tz}}f\bar{\psi}^N dxd\tau d\theta,\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarıp $v_1(z)$ için olan şarttan yararlanırsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu kanısına varırız:

$$\begin{aligned} &\left\|\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} \le \\ &\le \left\|\psi^N(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \int_{\Omega_{tz}} \left|\psi^N\right|^2 dx d\tau d\theta + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{37}$$

$\forall t \in [0,T]$, $\forall z \in [0,L]$. (24) formülünün ve (26), (27) şarlarının yardımıyla aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(\cdot,0,z)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{N}\left|c_k^N(0,z)\right|^2 = \sum_{k=1}^{N}\left|\varphi_{0k}(z)\right|^2, \tag{38}$$

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{N}\left|c_k^N(t,0)\right|^2 = \sum_{k=1}^{N}\left|\phi_{1k}(t)\right|^2. \tag{39}$$

(38) eşitliğini z 'ye bağlı $(0,L)$ aralığı üzerinden , (39) eşitliğini ise t 'ye bağlı $(0,T)$ aralığı üzerinden integralini alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le \left\|\varphi_0\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}, \tag{40}$$

$$\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le \left\|\phi_1\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \tag{41}$$

Bu eşitsizliklerin ve Gronwall lemmasının yardımıyla (37) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$\begin{aligned} &\left\|\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \left\|\psi^N(\cdot,\cdot,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_1\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \\ &\forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L]. \end{aligned} \tag{42}$$

Burada $c_1 > 0$ -sabiti N, φ_0, φ_1 ve f 'den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial z}$ türevleri için kestirim elde etmeğe çalışalım. Bu amaçla (25) sistemini her iki tarafının t' ye göre türevini bulup elde edilen k 'cı denklemin her iki tarafını kendi $\dfrac{\partial \bar{c}_k^N(t,z)}{\partial t}$ fonksiyonuna çarpalım ve elde edilen tüm eşitlikleri k üzerinden $k=1$'den $k=N$ 'e kadar toplayalım. Bu taktirde elde edilen eşitliğin Q_{tz}

üzerinden integrasyonunu yapıp $u_k(0)=u_k(l)=0,\ k=1,2,...,$ sınır değer şartlarını kullanarak kısmi integrasyon formülünü uygularsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{\Omega_{tz}} \left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} + ia_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial z\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} + a_1\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial t}\right|^2 + a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + \right.$$

$$\left. +v_0(\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 + iv_1(\theta)\left|\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right|^2 \right) dxd\tau d\theta = \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} dxd\tau d\theta, \forall t\in[0,T], \forall z\in[0,L].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarıp elde edilen eşitlikte Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini ve denklemin katsayıları üzerine konulan şartları kullanırsak eşitsizliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial t}\right|^2 dxd\theta + a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\le \int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial t}\right|^2 dxd\theta + a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau + \tag{43}$$

$$+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 dxd\tau d\theta, \forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L].$$

Galerkin yaklaşımları için formülü ve z'ye göre başlangıç şartları kullanırsak eşitliğini yazabiliriz:

$$\frac{\partial\psi^N(x,t,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial c_k^N(t,0)}{\partial t}u_k(x) = \sum_{k=1}^{N}\frac{d\varphi_{1k}(t)}{dt}u_k(x). \tag{44}$$

Bu eşitlikten yaralanarak eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau \le \left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \tag{45}$$

(43) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan birinci terimi değerlendirmek için (25) sisteminin k 'cı denklemini $t=0$ için kendi $\frac{\partial\overline{c}_k^N(0,z)}{\partial t}$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen eşitlikleri k üzerinden $k=1$'den $k=N$'e kadar toplayalım. Elde edilen eşitliğin $(0,L)$ aralığı üzerinden integrasyonunu bulup Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \leq \int_{\Omega_L} \Big| \left(ia_0 \frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial z} + L\psi^N(x,0,z) + v_0(x)\psi^N(x,0,z) + \right. \tag{46}$$
$$\left. + iv_1(x)\psi^N(x,0,z) - f(x,0,z)\right) \Big|^2 dxdz.$$

Galerkin yaklaşımları için formülü ve t'ye göre başlangıç şartları kullanırsak eşitliği yazabiliriz:

$$\frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial c_k^N(0,z)}{\partial z} u_k(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d\phi_{0k}(z)}{dz} u_k(x). \tag{47}$$

Bu eşitlikten yaralanarak eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \leq \left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}. \tag{48}$$

Ayrıca [9, sayfa 78] çalışmasından bildiğimiz eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(x,0,\cdot)\right\|_{L_2(0,L)} \leq \beta \left\|\frac{\partial\psi^N(.,0,.)}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Omega_L)} \left\|\psi^N(.,0,.)\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Omega_L)}, \forall x\in[0,l]. \tag{49}$$

Burada $\beta > 0$ - bilinen sabittir. Buradan (24) formülüne dayanarak $t = 0$ için kolaylıkla eşitsizliğini yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0,\cdot)\right\|_{L_\infty(0,l;L_2(0,L))} \leq c_2 \left\|\varphi_0\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega_L)} \tag{50}$$

Bu eşitsizliğin ve (48) eşitsizliğinin yanı sıra

$$\left\|L\psi^N(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \leq c_3 \left\|\phi_0\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega_L)}, \tag{51}$$

$$\left\|f(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \leq c_4 \left(\int_0^T \left\|f(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} dt + \int_0^T \left\|\frac{\partial f(\cdot,t,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} dt \right), \forall t\in[0,T] \tag{52}$$

eşitsizliklerinin yardımıyla (46)'dan kolaylıkla aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \leq c_5 \left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \left\|f\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \right). \tag{53}$$

Burada $c_5 > 0$ -sabiti N 'den bağımsızdır.

$$\int_{\Omega_z} \left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial t}\right|^2 dxd\theta \leq \left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \tag{54}$$

eşitsizliğinin ve (45), (53) kestirimlerinin yardımıyla (43)'den aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial t}\right|^2 dxd\theta + a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\le c_6\left(\|\phi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\phi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)}\right) + \int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau d\theta, \tag{55}$$

$$\forall t\in[0,T], \forall z\in[0,L].$$

Burada $c_6>0$ - sabiti N 'den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten Gronwall lemmasının yardımıyla kestirimi kolaylıkla elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le c_7\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)}\right), \forall t\in[0,T], \tag{56}$$

burada $c_7>0$-sabiti φ_0,φ_1,f ve N 'den bağımsızdır. Bu kestirimin yardımıyla (55) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimi de buluruz:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial t}\right|^2 dxd\theta + \int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\le c_8\left(\|\phi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\phi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)}\right) \forall t\in[0,T], \forall z\in[0,L], \tag{57}$$

burada $c_8>0$-sabiti N 'den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial\psi^N}{\partial z}$ türevini değerlendirmeğe çalışalım. Bu amaçla yine de (25) sistemini kullanalım. (25) sisteminin her iki tarafının z değişkenine göre türevini bulup elde edilen sistemin k 'cı denklemini kendi $\dfrac{\partial\bar{c}_k^N(t,z)}{\partial z}$ fonksiyonu ile çarpalım. Bu taktirde elde edilen eşitlikleri k üzerinden $k=1$'den $k=N$ 'e kadar toplayıp Q_{tz} bölgesi üzerinden integrallersek aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{\Omega_{tz}}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial z}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+ia_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial z^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+a_1\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial z}\right|^2+a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{dv_0(\theta)}{dz}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+i\frac{dv_1(\theta)}{dz}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+v_0(\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+iv_1(\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2\right]dxd\tau d\theta=$$

$$=\int_{\Omega_{tz}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)dxd\tau d\theta,\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak ve denklemi katsayıları üzerine konulan şartları kullanırsak kolaylıkla eşitsizliğini elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le$$

$$\le\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial z}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{dv_0(\theta)}{dz}\right|\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|dxd\tau d\theta+2\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{dv_1(\theta)}{dz}\right|\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|dxd\tau d\theta+$$

$$+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta,\ \forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

Burada sağ tarafta yer alan üçüncü ve dördüncü terimlere Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak eşitsizliğini buluruz:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le$$

$$\le\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial z}\right|^2dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{dv_0(\theta)}{dz}\right|^2\left|\psi^N\right|^2dxd\tau d\theta+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{dv_1(\theta)}{dz}\right|^2\left|\psi^N\right|^2dxd\tau d\theta+$$

$$+3\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta,\ \forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L].$$

(42) kestiriminden ve (6) şartlarından yaralanırsak kolaylıkla bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan üçüncü ve dördüncü terimlerin toplamını aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\int_{\Omega_{tz}} \left|\frac{dv_0(\theta)}{dz}\right|^2 \left|\psi^N\right|^2 dxd\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} \left|\frac{dv_1(\theta)}{dz}\right|^2 \left|\psi^N\right|^2 dxd\tau d\theta \le$$
$$\le c_9\left(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Bu eşitsizliği bir önceki eşitsizlikte dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\int_{\Omega_z} \left|\frac{\partial \psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2 dxd\theta + a_0 \int_{\Omega_t} \left|\frac{\partial \psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2 dxd\tau \le$$
$$\le \int_{\Omega_z} \left|\frac{\partial \psi^N(x,0,\theta)}{\partial z}\right|^2 dxd\theta + a_0 \int_{\Omega_t} \left|\frac{\partial \psi^N(x,\tau,0)}{\partial z}\right|^2 dxd\tau +$$
$$+3\int_{\Omega_{tz}} \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right|^2 dxd\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dxd\tau d\theta +$$
$$+c_9\left(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\ \forall t \in [0,T],\ \forall z \in [0,L].$$

(56) ve (57) kestirimlerinin (46) eşitsizliğinden elde edilmesine denk olarak sonuncu eşitsizlikten kestirimlerin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(\cdot,\cdot,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_{10}\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,0,1}(\Omega)}\right),\ \forall z \in [0,L], \quad (58)$$

$$\int_{\Omega_z} \left|\frac{\partial \psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2 dxd\theta + a_0 \int_{\Omega_t} \left|\frac{\partial \psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2 dxd\tau \le$$
$$\le c_{11}\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,0,1}(\Omega)}\right)\ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L]. \quad (59)$$

Burada $c_{10} > 0, c_{11} > 0$ -sabitleri N 'den bağımsızdır.

Şimdi $L\psi^N$ 'i değerlendirmeğe çalışalım. Bu amaçla (25) sisteminin k 'cı denklemini kendi $\lambda_k \overline{c}_k^N(t,z)$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen tüm eşitlikleri k üzerinden $k=1$ 'den $k=N$ 'e kadar toplayalım. Bu taktirde Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygulayarak eşitsizliğini buluruz:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \int_D \left| -i\frac{\partial \psi^N(x,t,z)}{\partial t} - ia_0\frac{\partial \psi^N(x,t,z)}{\partial z} - v_0(z)\psi^N(x,t,z) - \right.$$
$$\left. -iv_1(z)\psi^N(x,t,z) + f(x,t,z)\right|^2 dx. \quad (60)$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını $Q=(0,T)\times(0,L)$ bölgesi üzerinden integrallersek, bu taktirde

$$\left\|L\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le 5\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 5a_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \tag{61}$$
$$+5\int_\Omega |v_0(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz + 5\int_\Omega |v_1(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz + 5\|f\|^2_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terimleri değerlendirelim. Gerçekten $v_m = v_m(z)$, $m=0,1$ fonksiyonları için (6) şartlarını ve

$$|v_m(z)| \le c_{12}\|v_m\|_{W_2^1(0,L)}$$

eşitsizliğini kullanırsak (42) kestiriminin yardımıyla

$$5\int_\Omega |v_0(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz + 5\int_\Omega |v_1(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz$$

terimini aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$5\int_\Omega |v_0(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz + 5\int_\Omega |v_1(z)|^2 \left|\psi^N(x,t,z)\right|^2 dxdtdz \le \tag{62}$$
$$\le c_{13}\left(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Bu kestirimi ve (56) ve (58) kestirimlerini kullanırsak (61) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimi buluruz.

$$\left\|L\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_{14}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right). \tag{63}$$

Burada $c_{14}>0$ -sabiti N 'den bağımsızdır.

[9, sayfa 118] çalışmasından bildiğimiz eşitsizliğe dayanarak eşitsizliğini yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \le c_{15}\left\|L\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)} + c_{16}\left\|\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{64}$$

Bu eşitsizliği $Q=(0,T)\times(0,L)$ üzerinden integrallersek ve (42) ve (63) kestirimlerinden yaralanırsak kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0,0}(\Omega)} \le c_{17}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right). \tag{65}$$

Burada $c_{17}>0$ -sabiti N 'den bağımsızdır.

Buradan (56) kestirimini t' ye göre $(0,T)$ aralığı üzerinden, (58), kestirimini z 'ye göre $(0,L)$ aralığı üzerinden integralleyip elde edilen kestirimleri (65) kestirimi ile toplarsak sonuçta kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_{18}\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \left\|\varphi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ N=1,2,\dots. \qquad (66)$$

Burada $c_{18}>0$ sabiti N,φ_0,φ_1 ve f 'den bağımsızdır. $c_0=c_{18}$ alarak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 1 ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. (36) kestirimine dayanarak $\left\{\psi^N(x,t,z)\right\}$ dizisinden öyle bir $\left\{\psi^{N_m}(x,t,z)\right\}$ alt diziyi seçebiliriz ki bu alt dizi $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında $\psi=\psi(x,t,z)$ fonksiyonuna zayıf yakınsar. Gösterelim ki bu fonksiyon (1)-(4) probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan genelleştirilmiş çözümüdür. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(\Omega_L))$ ve $C^0([0,L],L_2(\Omega_T))$ uzaylarına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:

$m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,t,\cdot)-\psi(\cdot,t,\cdot)\right\|_{L_2(\Omega_L)}\to 0,\ \forall t\in[0,T], \qquad (67)$$

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,z)-\psi(\cdot,\cdot,z)\right\|_{L_2(\Omega_T)}\to 0,\ \forall z\in[0,L]. \qquad (68)$$

Aşağıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$\left\|\psi(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)} \le \left\|\psi(\cdot,0,\cdot)-\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)\right\|_{L_2(\Omega_L)} + \left\|\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)}, \qquad (69)$$

$$\left\|\psi(\cdot,\cdot,0)-\phi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)} \le \left\|\psi(\cdot,\cdot,0)-\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(\Omega_T)} + \left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)-\phi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)}. \qquad (70)$$

(67) ve (68) limit bağıntılarından dolayı $t=0$ ve $z=0$ olduğunda $m\to\infty$ için (69), (70) eşitsizliklerinin birinci terimleri sıfıra yaklaşıyor. Ayrıca (69), (70) eşitsizliklerinin ikinci terimlerinin de $m\to\infty$ için sıfıra yaklaştığını gösterelim. Galerkin yaklaşımlarını $N=N_m$ için kullanırsak aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$\psi^{N_m}(x,0,z)=\varphi_0^{N_m}(x,z),\ (x,z)\in\Omega_L, \qquad (71)$$

$$\psi^{N_m}(x,t,0)=\varphi_1^{N_m}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T. \qquad (72)$$

yani $\psi^{N_m}(x,0,z)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)$ uzayına ait olan $\varphi_0(x,z)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamı, $\psi^{N_m}(x,t,z)$ ise $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)$uzayına ait olan $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamıdır. Bu taktide $\varphi_0^{N_m}(x,z)$, $\varphi_1^{N_m}(x,t)$ kısmi toplamları sırasıyla $\varphi_0(x,z)$ ve $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonlarına $L_2(\Omega_L)$, $L_2(\Omega_T)$ uzaylarının normlarında yakınsar. Bu nedenle $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)}\to 0, \qquad (73)$$

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)-\varphi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)}\to 0, \qquad (74)$$

limit bağıntıları geçerlidir. Böylelikle (67), (68) ve (73), (74) limit bağıntılarını kullanıp (69) ve (70) eşitsizliklerinin her iki tarafında $m\to\infty$ olduğunda limite geçersek $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonunun $\forall(x,z)\in\overset{0}{\Omega}_L$ için (2) ve $\forall(x,t)\in\overset{0}{\Omega}_T$ için ise (3) başlangıç şartlarını sağladığını söyleyebiliriz. (4) sınır değer şartlarının sağlanması $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olmasından çıkar. $\{\psi^{N_m}(x,t,z)\}$ dizisinin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında $\psi(x,t,z)$ fonksiyonuna zayıf yakınsamasını kullanarak kolaylıkla gösterebiliriz ki $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonu hemen hemen $(x,t,z)\in\Omega$ için (1) denklemin sağlar. Ayrıca (36) kestiriminde $N=N_m$, $m=1,2,\ldots$ için $m\to\infty$ olduğunda alt limite geçersek ve normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak $\psi(x,t,z)$ fonksiyonunun (18) kestirimini sağladığını da hükmedebiliriz. Bu kestirimden yaralanarak (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün bir tek olduğu da kolaylıkla ispatlanır. Teorem 4.1.1 ispatlandı.

4.2. Durgun Olmayan Kuazi Optiğin Denklemi İçin 2.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Galerkin Yöntemiyle Çözümü.

Bu alt bölümde ele alınan durgun olmayan kuazi optiğin denklemi için 2. çeşit başlangıç sınır değer probleminin, yani (9)-(12) başlangıç sınır değer probleminin çözümüne Galerkin yöntemini uygulayıp çözümün varlığı, tekliği ve çözümün verilere bağlı sürekli olduğunu gösteren hükmü elde edeceğiz.

Teorem 4.2.1. Farz edelim ki $a(x), v_0(z), v_1(z), \phi_0(x,z)$, $\phi_1(x,t)$ ve $f(x,t,z)$ fonksiyonları (13)-(16) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (9)-(12) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan genelleştirilmiş çözümü vardır, çözüm tektir ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{W_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_{19}\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right). \tag{75}$$

Burada $c_1 > 0$ - sabiti φ_0, φ_1 ve f 'den bağımsızdır.

İspat. Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaçla $W_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak $L_2(0,l)$ uzayında ortogonal olan

$$LX(x) = \lambda X(x),\ x \in (0,l),\ X'(0) = X'(l) = 0 \tag{76}$$

özdeğer probleminin çözümü olan ve $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...,$ özdeğerlerine karşılık gelen $X = u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...,$ özfonksiyonlarını seçeceğiz. Burada L operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L = -a_1\frac{d^2}{dx^2} + a(x). \tag{77}$$

Bilindiği üzere (19) biçiminde özdeğer problemi [9, sayfa.109-110] çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmaya dayanarak söyleye biliriz ki, (19) özdeğer problemi $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...,$ olduğunda $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...$ çözümlerine sahiptir ve bu çözümler $W_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar oluşturur. Kolay olsun diye farz edelim ki, bu fonksiyonlar $L_2(0,l)$ uzayında ortogonal fonksiyonlar olsun:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x)\,dx = \delta_k^m;\ k,m = 1,2,... . \tag{78}$$

Burada δ_k^m - sabitleri Kroneker sembolleridir:

$$
\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m, \; k,m = 1,2,.... \end{cases}
$$

Ayrıca söyleye biliriz ki $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...$ fonksiyonları aşağıdaki anlamda da ortogonaldırlar:

$$
\begin{aligned}
&[u_k, u_m] = L(u_k, u_m) = (u_k, u_m)_{W_2^1(0,l)} = \\
&= \int_0^l \left(a_1 \frac{du_k(x)}{dx} \frac{du_m(x)}{dx} + a(x) u_k(x) u_m(x) \right) dx = \lambda_k \delta_k^m, k,m = 1,2,... ,
\end{aligned} \tag{79}
$$

$$
\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(0,l)} = (u_k, u_m)_{W_2^2(0,l)} = \lambda_k^2 \delta_k^m, \; k,m = 1,2,... . \tag{80}
$$

$0 < \mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \forall x \in (0,l)$ şartı sağlandığından tüm $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,...$ özdeğerleri reeller, pozitifler ve artarak dizilmişlerdir.

Galerkin yöntemine göre yaklaşımları aşağıdaki biçimde arayacağız:

$$
\psi^N(x,t,z) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t,z) u_k(x). \tag{81}
$$

Burada $c_k^N(t,z) = (\psi^N(\cdot,t,z), u_k)_{L_2(0,l)}$, $k = \overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki şartlardan elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^N(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} + ia_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi^N(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} + \left(L\psi^N(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} + \\
&+\left(v_0(z)\psi^N(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} + i\left(v_1(z)\psi^N(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} = f_k(t,z),
\end{aligned} \tag{82}
$$

$k = \overline{1,N}$, $0 < t \le T$, $0 < z \le L$,

$$
c_k^N(0,z) = \left(\psi^N(\cdot,0,z), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \phi_{0k}(z), \; 0 \le z \le L, \; k = 1, N, \tag{83}
$$

$$
c_k^N(t,0) = \left(\psi^N(\cdot,t,0), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \varphi_{1k}(t), \; 0 \le t \le T, \; k = 1, N. \tag{84}
$$

Burada $f_k(t,z) = \left(f(\cdot,t,z), u_k\right)_{L_2(0,l)}, \varphi_{0k}(z) = \left(\varphi_0(\cdot,z), u_k\right)_{L_2(0,l)}$,

$\varphi_{1k}(z) = \left(\varphi_1(\cdot,z), u_k\right)_{L_2(0,l)}$, $k = \overline{1,N}$ dir.

Kolaylıkla göstere biliriz ki, (82) sistemi N sayıda birinci mertebeden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerden oluşur:

$$
i\frac{\partial c_k^N}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial c_k^N}{\partial z} + \sum_{m=1}^N A_{km}(z) c_m^N = f_k(t,z), \; k = 1,2,.., N. \tag{85}
$$

Burada $A_{km} = A_{km}(z),\ k = 1,2,..,N$ fonksiyonları karesel integrallenebilir ve karesi integrallenebilir türeve sahip fonksiyonlardır. Bu sistemi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\frac{\partial c_k^N}{\partial t} + a_0 \frac{\partial c_k^N}{\partial z} = i\sum_{m=1}^{N} A_{km}(z) c_m^N - i f_k(t,z), (t,z) \in Q,\ k = 1,2,..,N. \tag{86}$$

Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere bu birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemine karşılık gelen birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{a_0} = \frac{dc_k^N}{F_k\left(t,z,c_1^N,c_2^N,...,c_N^N\right)},\ k = 1,2,..,N. \tag{87}$$

Burada $F_k,\ k = 1,2,..,N$ fonksiyonları aşağıdaki formül ile tanımlanır :

$$F_k = F_k\left(t,z,c_1^N,c_2^N,...,c_N^N\right) = i\sum_{m=1}^{N} A_{km}(z) c_n^N - i f_k(t,z),\ k = 1,2,..,N. \tag{88}$$

(87) sistemini kullanarak (86) sisteminin çözümü olan $c_k^N(t,z),\ k = \overline{1,N}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$c_k^N(t,z) = c_k^N(0, z - a_0 t) + \int_0^t \left[i\sum_{m=1}^{N} A_{km}(z - a_0(t-\tau)) c_m^N(\tau, z - a_0(t-\tau)) - i f_k(\tau, z - a_0(t-\tau)) \right] d\tau, k = \overline{1,N}, \tag{89}$$

$$c_k^N(t,z) = c_k^N\left(\frac{a_0 t - z}{a_0}, 0\right) + \frac{1}{a_0}\int_0^z \left[i\sum_{m=1}^{N} A_{km}(\theta) c_m^N\left(\frac{\theta - z + a_0 t}{a_0}, \theta\right) - i f_k\left(\frac{\theta - z + a_0 t}{a_0}, \theta\right)\right] d\theta, k = \overline{1,N}. \tag{90}$$

Bu bağıntılardan ve

$$c_k^N(0, z - a_0 t) = \varphi_{0k}(z - a_0 t),\ k = \overline{1,N},$$

$$c_k^N\left(\frac{a_0 t - z}{a_0}, 0\right) = \varphi_{1k}\left(\frac{a_0 t - z}{a_0}\right),\ k = \overline{1,N}.$$

Şartlarından aşağıdaki şartların sağlandığını elde ederiz:

$$c_k^N(0,z) = \varphi_{0k}(z),\ k = \overline{1,N}, \tag{91}$$

$$c_k^N(t,0) = \phi_{1k}(t),\ k = \overline{1,N}. \tag{92}$$

Volter tipli lineer integral denklemler teorisinden bilindiği üzere kabullendiğimiz şartlar altında (89) ve (90) integral denklemleri (91) ve (92) başlangıç şartları altında $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayından olan $c_k^N(t,z),\ k=\overline{1,N}$ bir tek çözümüne sahiptir [6].

Şimdi (81) biçiminde olan Galerkin yaklaşımları için kestirim elde edelim.

Lemma 4.2.1. (81) biçiminde olan Galerkin yaklaşımları için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{W_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_{19}\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_L)} + \left\|\varphi_1\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ N=1,2,\dots . \tag{93}$$

Bu lemmanın ispatı lemma 4.1.1' in ispatı ile ufak değişikliklerle aynıdır.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. (93) kestirimine dayanarak $\left\{\psi^N(x,t,z)\right\}$ dizisinden öyle bir $\left\{\psi^{N_m}(x,t,z)\right\}$ alt diziyi seçebiliriz ki bu alt dizi $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında $\psi=\psi(x,t,z)$ fonksiyonuna zayıf yakınsasın. Gösterelim ki bu fonksiyon (9)-(12) probleminin $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan genelleştirilmiş çözümüdür. $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(\Omega_L))$ ve $C^0([0,L],L_2(\Omega_T))$ uzaylarına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,t,\cdot)-\psi(\cdot,t,\cdot)\right\|_{L_2(\Omega_L)}\to 0,\ \forall t\in[0,T], \tag{94}$$

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,z)-\psi(\cdot,\cdot,z)\right\|_{L_2(\Omega_T)}\to 0,\ \forall z\in[0,L]. \tag{95}$$

Aşağıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$\left\|\psi(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)} \le \left\|\psi(\cdot,0,\cdot)-\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)\right\|_{L_2(\Omega_L)} + \left\|\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)}, \tag{96}$$

$$\left\|\psi(\cdot,\cdot,0)-\phi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)} \le \left\|\psi(\cdot,\cdot,0)-\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(\Omega_T)} + \left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)-\phi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)}. \tag{97}$$

(94) ve (95) limit bağıntılarından dolayı $t=0$ ve $z=0$ olduğunda $m\to\infty$ için (96) ve (97) eşitsizliklerinin birinci terimleri sıfıra yaklaşıyor. Ayrıca (96) ve (97) eşitsizliklerinin ikinci terimlerinin de $m\to\infty$ için sıfıra yaklaştığını gösterelim. Galerkin yaklaşımlarını $N=N_m$ için kullanırsak aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$\psi^{N_m}(x,0,z)=\varphi_0^{N_m}(x,z),\ (x,z)\in\Omega_L, \tag{98}$$

$$\psi^{N_m}(x,t,0)=\phi_1^{N_m}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{99}$$

yani $\psi^{N_m}(x,0,z)$ fonksiyonu $W_2^{2,1}(\Omega_L)$ uzayına ait olan $\varphi_0(x,z)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamı, $\psi^{N_m}(x,t,z)$ ise $W_2^{2,1}(\Omega_T)$uzayına ait olan $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamıdır. Bu taktirde (15) ve (16) şartlarından yararlanarak $\varphi_0^{N_m}(x,z)$, $\varphi_1^{N_m}(x,t)$ kısmi toplamlarının sırasıyla $\varphi_0(x,z)$ ve $\varphi_1(x,t)$ fonksiyonlarına $L_2(\Omega_L)$, $L_2(\Omega_T)$ uzaylarının normlarında yakınsadığını hükmedebiliriz. Bu nedenle $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,0,\cdot)-\varphi_0\right\|_{L_2(\Omega_L)}\to 0, \tag{100}$$

$$\left\|\psi^{N_m}(\cdot,\cdot,0)-\phi_1\right\|_{L_2(\Omega_T)}\to 0, \tag{101}$$

limit bağıntıları geçerlidir. Böylelikle (94) ve (95), (100) ve (101) limit bağıntılarını kullanıp (96) ve (97) eşitsizliklerinin her iki tarafında $m\to\infty$ olduğunda limite geçersek $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall}(x,z)\in\Omega_L$ için (10) ve $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega_T$ için ise (11) başlangıç şartlarını sağladığını söyleyebiliriz. (12) sınır değer şartlarının sağlanması $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonunun $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olmasından ve $W_2^{2,1,1}(\Omega)$uzayından olan $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonunun $(0,l)$aralığının uçlarında $\dfrac{\partial\psi(0,t,z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\psi(l,t,z)}{\partial x}$ izlerine sahip olmasından ve bu fonksiyonlara $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}(0,t,z)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}(l,t,z)}{\partial x}\right\}$ dizilerinin $L_2(Q)$ uzayında zayıf yakınsamasından çıkar. $\{\psi^{N_m}(x,t,z)\}$ dizisinin $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında $\psi(x,t,z)$ fonksiyonuna zayıf yakınsamasını kullanarak kolaylıkla gösterebiliriz ki $\psi(x,t,z)$ limit fonksiyonu hemen hemen $(x,t,z)\in\Omega$ için (9) denklemini sağlar. Ayrıca (36) kestiriminde $N=N_m$, $m=1,2,...$ için $m\to\infty$ olduğunda alt limite geçersek ve normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak $\psi(x,t,z)$ fonksiyonunun (75) kestirimini sağladığını da hükmedebiliriz. Bu kestirimden yaralanarak (9)-(12) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün bir tek olduğu da kolaylıkla ispatlanır. Teorem 4.2.1 ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan başlangıç sınır değer problemleri formülize edilme açısından önceki çalışmalardaki [1-8,10-12] problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması büyük önem taşır.

Bu tezde denklemin katsayısı yalnız z değişkeninin fonksiyonu olduğu ve bu fonksiyonların karesi integrallenebilir, karesi integrallenebilir türeve sahip olması durumunda durgun olmayan kuazi optik denklem için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı, tekliği ispatlanmış ve çözümün problemin verilerine sürekli bağımlılığını gösteren kestirimin elde edilmesi için Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Bu tezde elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki [1-8,10-12] sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1]Aksoy, Y.N., "Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı", Doktora Tezi, Erzurum, 150 s, 2009.

[2] Ibrahimov, N.S., "The convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics", Scientific Proceedings of the Azerbaijan SSR. tehn. Univ. Ser. Basic Sciences, № 4, p.54-60. 2010, (Rusça).

[3] Ibrahimov, N.S., "A numerical method for solving the problem of identification of linear time-dependent equation of quasi optics", Journal of Computational and Applied Mathematics, Kiev. Zap them. Shevchenko, № 2 (101), p. 44-59. 2010, (Rusça).

[4] Ibrahimov, N.S., "On the order of accuracy of the difference method for solving initial value problems for the non-stationary equation of quasi optics", Journal of Qafqaz University Mathematics and Computer Science, Vol 1, № 31, p. 55-68. 2011, (Rusça).

[5] Ibrahimov, N.S., "On the rate of convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics", Journal of Computational and Applied Mathematics, Kiev. Zap them. Shevchenko, № 3, p. 43-58. 2011, (Rusça).

[6] Iskenderov, A.D., Ibrahimov, N.S., "The initial-boundary value problems for the non stationary equation of quasi optics", Bulletin of the Lankaran State. Univ. Ser. Science, Lankaran, p. 47-66. 2009, (Rusça).

[7] Iskenderov, A.D., Akber, A.C.Soluability of the initial boundary value problem for nonstationary quasi optics equation with the square integrable coefficient.Bulletin of the Lankaran State.Univ.Ser of matematics and natural sciences, 2013,Lankaran.

[8] İskenderov, A.D.,Yagubov, G.Y., Musayeva, M.A., " Kuantum Potansiyellerinin İdentifikasyonu", Çaşıoğlu Yayınevi, 552 s. Bakü, 2012, (Rusça).

[9] Ladijenskaya, O.A. Boundary-value problems of mathemetical physics M.: Nauua,1973.

[10] Senger, O., “Lineer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, 53 s. Kars, 2006.

[11] Vorontsov, M.A., Şhmalquazen, V.I. “Adaptiv Optiğin Prensipleri”, Moskova, Nauka, 1985, (Rusça).

[12] Yetiskin, H., “Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Farklar Yaklaşımı”, Doktora Tezi, ,Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 92 s. 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Tunç ÇANTAY

Dogum Yeri :KARS

Dogum Tarihi :19/07/1987

Medeni Hali :Bekar

Yabancı Dili :İngilizce

Egitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise :Kars Cumhuriyet Lisesi YDA (2001-2005)

Lisans :Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2005-2009)

Yüksek Lisans:Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2012-2015)

Çalıstıgı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Selim Benliahmet Şehit Öğretmen Taşkın Senger Ortaokulu (2011-2014)

Kars Fevzipaşa Ortaokulu (2014-...)