T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

HATİCE GÜNER AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK–2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Hatice GÜNER AKSOY'un Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy....birliği... ile kabul edilmiştir.

30 / 01 / 2015

Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan: Doç. Dr. Erhan DENİZ	....
Üye: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../...... gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Hatice GÜNER AKSOY
Yüksek Lisans Tezi
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

ÖZET

Bu tez çalışması “Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü” konusu üzerine hazırlanmıştır.

Tez üç bölümden ibarettir. Birinci bölümde temel bilgiler, ikinci bölümde singüler integrallerin yaklaşımı ve üçüncü bölümde nümerik çözümler verilmiştir.

Tezde, singüler integral denklemler, kapalı aralıkta ve düzlemde kapalı eğri üzerinde incelenmiştir.

2015,81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Singüler integral, Singüler integral denklem

THE APPRAXIMATE SOLUTION OF SINGULER INTEGRAL EQUATIONS

Hatice GÜNER AKSOY
M. Sc. Thesis
The Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ABSTRACT

This thesis work has been prepared on the subject “The Approximate Solution of Singular Integral Equations”.

The thesis includes three main section. In first section major information, in the second section the approximation of sigular integration and in the third section, numerical solutions of singular integral equations are given.

In this thesis, singular integral equations are investigated in closed intervals and on closed curves of the plane as well.

2015,81 pages

Keywords: Singular Integral, Sıngular Integral Equation

ÖNSÖZ

Tez çalışmam esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerini, bilgilerini, yardımlarını ve katkılarını benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' ya (Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi), Doç. Dr. Erhan DENİZ'e (Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi) ve her zaman yanımda olan, maddi manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Kars–2015 Hatice GÜNER AKSOY

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$A(D)$	D'de analitik fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\omega(\varphi,\delta)$	φ'nin süreklilik modülü
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
i	Sanal Birim
$f(U)$	U kümesinin f dönüşümü altındaki görüntüsü
$H_\alpha(X)$	X 'de Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi
$KH_\alpha(X)$	X kümesinde K katsayılı α üssü ile Hölder sınıfı
$KH_\alpha^{(n)}(X)$	X kümesinde n. mertebeden türevi K katsayılı ve α üssü ile Hölder sınıfından olan fonksiyonların kümesi
$C(X)$	X kümesinde sürekli fonksiyonların kümesi
$\arg(z)$	z'nin argümanı
$\operatorname{Re}(z)$	z'nin reel kısmı
$\operatorname{Im}(z)$	z'nin sanal kısmı
$S_r(z_0)$	z_0 merkezli r yarıçaplı yuvar
$T_i(x)$	Birinci çeşit Chebyshev polinomu
$U_i(x)$	İkinci çeşit Chebyshev polinomu
$V_i(x)$	Üçüncü çeşit Chebyshev polinomu
$W_i(x)$	Dördüncü çeşit Chebyshev polinomu

KISALTMALAR

SİD	Singüler İntegral Denklem

GİRİŞ

Bilindiği üzere matematiğin, fiziğin, matematik fiziğin ve mekaniğin birçok probleminin çözümü singüler integral denklemlerin (SİD) çözümüne indirgenmektedir. Bu sebepten dolayıdır ki SİD'in çözümü günümüzde de önem taşımaktadır. Ayrıca, SİD'in çözümüne indirgenen birçok problem için bu SİD'lerin yaklaşık çözümünü bilmek yeterli oluyor. Buna göre SİD'lerin yaklaşık çözümü önem taşımaktadır. Bu konuda birçok çalışma vardır. Bununla ilgili geniş bilgiyi [1-8] den görebiliriz.

Bilindiği üzere [6] klasik Dirichlet probleminin çözümü Cauchy çekirdekli singüler integral denklemin çözümüne indirgeniyor.

Sonlu basit bağlantılı bölgeler olması durumunda Dirichlet modifiyet problemi Dirichlet klasik problemi ile çakışır. Unutmamak gerekir ki eğer ; D^+ düzgün L eğrisi tarafından sınırlanan bir bölge ise sınır integral denklemi

$$\varphi(t_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \tag{1}$$

şeklinde singüler integral denklem yardımı ile yazılabilir. Burada $f(t_0)$ L sınır üzerinde verilen reel bir fonksiyondur.

$\varphi(t)$ reel fonksiyonu (1) denklemi için çözüm olmak üzere istenen harmonik fonksiyon

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - z}dt \quad (z = x + iy \in D^+) \tag{2}$$

şeklinde olup bir Cauchy integralidir.

D^- sonlu bir bölge olması durumunda Dirichlet modifiyet problemi için $u(x, y)$ çözümü, C önceden verilmeyen bir sabit olmak üzere

$$\varphi(t_0) - \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt = f(t_0) + C \quad (\mathrm{Im}\,\varphi(t) \equiv 0) \tag{3}$$

şekilde temsil edilebilir. $\varphi(t)$ ve C bulunduktan sonra Dirichlet klasik problemi için çözümü $u(x,y)-C$ formunda elde edebiliriz.

Aynı zamanda matematiksel fizikte sınır değer problemlerin geniş bir sınıfının çözümü

$$f(t_0)=a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma k(t,t_0)\varphi(t)\,dt \tag{4}$$

şeklindeki singüler integral denklemlere indirgenebilir. Burada Γ, herhangi parçalı düzgün bir eğri [9], t_0 *ve* t noktaları Γ eğrisi üzerinde noktalar, $a(t), b(t)$ *ve* $k(t_0,t)$ fonksiyonları $H_\alpha(\Gamma), 0<\alpha\le 1$ Hölder şartını sağlayan Γ üzerinde tanımlı bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, Γ üzerindeki her yerde $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$ dır.

Bilindiği üzere singüler integral denklemlerin çözümünün varlığı bilinse bile çözümün analitik olarak bulunması her zaman kolay olmuyor. Hatta çoğu zaman bu denklemleri analitik olarak çözmek mümkün olmayabilir. Ayrıca, birçok uygulama alanında bu tür denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunması yeterli olur. Bu sebepten dolayı bu tür denklemleri yaklaşık çözmek önem taşımaktadır. Bunun için singüler integral denklemlere karşılık gelen cebirsel denklemler sisteminin oluşturulması gerekiyor. Bu denklemleri oluşturabilmek için singüler integral denklemlerin içerdiği singüler integrallerin yaklaşımı (aproksimesi) önem taşımaktadır.

Bu tez çalışmasında Cauchy singüler integrallerin yaklaşık çözümü için bazı kuadratik formüller verilmiş ve bu formüllerin uygulanabilirliği ispatlanmıştır.

Tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. İkinci ve üçüncü bölümler de kendi içinde iki alt bölüme ayrılmaktadır.

Birinci bölümde temel bilgiler, ikinci bölümde singüler integrallerin yaklaşımı için kuadratik formüller verilmiştir. Önce kapalı aralıkta tanımlanan singüler integraller için iki farklı yaklaşım şeması verilmiştir. Sonra da kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı singüler integraller için üç farklı yaklaşım şemaları verilmiştir. Bu kuadratik formüllerin yakınsaklığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde hem kapalı aralıkta, hem de kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı singüler integraller için ikinci bölümde verilen yaklaşım şemalarından yararlanarak singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü incelenmiştir.

Ayrıca, bu bölümde çok sayıda örnekler de verilmiştir. Bu örneklerde kesin çözümle yaklaşık çözüm arasındaki fark farklı normlarda değerlendirilmiştir.
Bu tez çalışmasında J. Sanikidze, M. Mirianashvili [6] , Z.K. Eshkuvatov, N.M.A. Nik Long, M. Abdulkawi [10], A. Chakrabarti, G. Vandenberghe [11], M. Nadir, B. Lakehali [12], M. Nadir, D. J. Antidze [9] kaynaklarından yararlanılmış bu çalışmalarda yapılanların bir arada çalışması yapılmıştır.

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. Kompleks Düzlemde Eğri

Bu kısımda tezle ilgili ön bilgi olarak kompleks düzlemde eğri üzerine gerekli tanımlar verilmiştir [13].

Matematiğin temel kavramlarından olan eğri (curve) ve yay (arc) sözcükleri için kesin bir terim birliği sağlanmış değildir. Bazen yay ve eğri kelimeleri eş anlamda kullanıldığı gibi bazen de farklı bir kavram gibi kullanılmaktadır. Biz, günlük konuşmada kullanılan eğri sözcüğünü benimseyecek ve diğerlerini buna bağlı olarak tanımlayacağız. Burada düzlemdeki eğrilerden bahsedilecektir.

Tanım 1.1.1:

a) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise, γ 'ya kapalı eğri denir.

c) Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir bir eğridir denir.

d) γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer, $\gamma'(t)\neq 0$, $t\in\left[a,b\right]$ ise γ 'ya düzgün (regüler) eğri denir.

e) $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda noktası hariç γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ'nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' türevinin bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir denir.

f) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer, her $t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ parçalı düzgün eğridir, denir.

g) Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ'ya basit eğri denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise kapalı basit eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Uyarı 1.1.1:

(1) Burada $\mathbb{C}$ düzlemindeki eğriler söz konusu olduğundan çoğu kez

$$z(t) = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

biçiminde yazacağız. Bazen bir γ eğrisi

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$$

parametrik gösterimi ile de verilebilir.

(2) Bir γ eğrisi verildiğinde

$$z'(t_0) = \gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

var ve $z'(t_0) \neq 0$ ise, eğri $z_0 = z(t_0)$ noktasında bir teğete sahiptir. Teğet z_0 noktasından geçer ve pozitif eksenle $\theta = \arg z'(t_0)$ açısı yapar. Böylece görülüyor ki, düzgün eğriler her noktada, diferansiyellenebilir eğriler ise türevin sıfırdan farklı olduğu noktalarda, teğete sahiptirler. $z_1(t)$ ve $z_2(t)$, t_0'da teğete sahip iseler, teğetler arasındaki açı

$$\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$$

dır.

(3) Tanımdan görülüyor ki, basit eğri kendisini kesmeyen eğridir. Yani bu durumda γ bire-bir sürekli fonksiyondur.

Tanım 1.1.2: Eğer, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu sınırlı değişimli ise, bunun belirttiği γ eğrisine doğrultulabilir eğri denir.

Uyarı 1.1.2: Bir eğri sadece bir noktalar kümesi değildir. Bu noktaların birbirini takip edişleri de önemlidir. Bir

$$\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t),\ 0 \le t \le 1$$

eğrisini ele alalım. Bunun uç noktaları $z_0 = z(0)$ ve $z_1 = z(1)$ olsun. Eğer, eğri üzerindeki noktalar z_0'dan başlamak üzere *t*'nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, γ pozitif yönde dönülmüş olur. Eğer, γ kapalı eğri ise bu eğri üzere hareket zamanı γ eğrisinin sınırladığı sınırlı bölge solda (sağda) kalırsa γ eğrisi pozitif (negatif) yönlüdür denir.

1.2. Analitik Fonksiyonlar

Analitik fonksiyonlarla ilgili gerekli tanım, teorem ve önermeler bu kısımda ön bilgi olarak verilmiştir [14].

Tanım 1.2.1: Bir $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının belirli bir $S_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - z_0 \right| < r \right\}$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa $\varphi(z)$, z_0 noktasında analitiktir (holomorftur) denir.

Eğer, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesinin bütün noktalarında analitikse, $\varphi\, D$ üzerinde analitiktir diyecek ve bunu $\varphi \in A(D)$ şeklinde belirteceğiz.

Kompleks düzlemin her bir noktasında analitik fonksiyona tam fonksiyon denir.

Tanım 1.2.2: (Sidorov., Fedaryuk., Şabunin, 1989) Bir $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının belli bir $S_r(z_0)$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $\varphi(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir $S_\delta\ (z_0)$, $\delta\le$ r komşuluğunda düzgün yakınsak bir

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.(z-z_0)^n$$

serisi şeklinde gösterilebilirse, $\varphi(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir. Tanım 1.2.1 ile Tanım 1.2.2'nin denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.2.1: $\varphi:D\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $z_0\in D$ noktasında analitik olması için onun z_0 'da diferansiyellenebilir olması gereklidir.

Uyarı 1.2.1: Bir $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında analitik olması için onun z_0 'da diferansiyellenebilir olması yeterli değildir.

Tanım 1.2.3: Bir $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $z_0=\infty$ noktasının komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $\varphi(z)$ fonksiyonu $z_0=\infty$ 'un herhangi bir komşuluğunda yakınsak

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.z^{-n}$$

serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $\varphi(z)$ fonksiyonu $z_0=\infty$ noktasında analitiktir denir.

Önerme 1.2.1: $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0=\infty$ noktasında analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $\Phi(\xi)=\varphi(1/\xi)$ fonksiyonunun $\xi_0=0$ noktasında analitik olmasıdır.

Bir kompleks fonksiyonun analitikliği için yeterli koşullar olan aşağıdaki iki teoremi verelim.

Teorem 1.2.2 (Morera Teoremi): $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu basit irtibatlı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı ve *D* üzerinde sürekli olsun. Eğer, $\varphi(z)$ fonksiyonunun *D* bölgesinin içinde kalan her kapalı eğri üzerinde integrali sıfırsa, $\varphi(z)$ D üzerinde analitiktir.

Teorem 1.2.3 (Weierstrass Teoremi): $\varphi_n(z)$, $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ fonksiyonları bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)$ serisi *D*'ye ait olan her kapalı bölgede düzgün yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)=\varphi(z)$$

fonksiyonu D üzerinde analitiktir.

Analitik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. Bir noktada analitik olan fonksiyon bu noktanın belli bir komşuluğundaki her bir noktada da analitiktir. Yani, bir fonksiyonun analitik olduğu noktaların kümesi açık bir kümedir.

2. Eğer, $f(z)$, $\varphi(z)$ fonksiyonları $D\subset\mathbb{C}$ kümesi üzerinde analitikse

a. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için $\alpha f(z)+\beta f(z)$,

b. $f(z)\varphi(z)$ ve

c. $\varphi(z)\neq 0$ olmak üzere $f(z)/\varphi(z)$

fonksiyonları da *D* üzerinde analitiktir.

3. $P_n(z)=\alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+...+\alpha_1 z+\alpha_0$ $(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C})$ polinomu bir tam fonksiyondur.

4. İki analitik fonksiyonun bileşkesi de analitiktir.

5. Analitik fonksiyon istenilen mertebeden diferansiyellenebilir.

6. Basit irtibatlı bölgede analitik fonksiyonun ilkel fonksiyonu ve türevi de analitiktir.

7. Bir $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-z_0\right|<r\right\}$ dairesinde $\varphi(z)$ fonksiyonu bütün D'de yakınsak

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Taylor serisinin toplamı şeklinde gösterilebilir.

8. Bir $z_0\neq\infty$ noktasının analitik $\varphi(z)$ fonksiyonunun m. dereceden sıfırı olması için gerekli ve yeterli koşul $h(z)$ fonksiyonunun $(h(z)\neq 0)$ $z=z_0$ noktasında analitik olmak üzere

$$\varphi(z)=(z-z_0)^m.h(z)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

9. Eğer $z_0\neq\infty$ noktası analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonunun m. dereceden sıfırı ise z_0

$$\Phi(z)=[\varphi(z)]^p\ \ (p\in\mathbb{N})$$

fonksiyonunun mp. dereceden sıfırıdır.

10. $\varphi(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $\varphi(z_0)=0$ ise, z_0'ın öyle komşuluğu vardır ki, bu komşulukta $\varphi(z_0)=0$ ya da z_0'ın öyle komşuluğu vardır ki, $\varphi(z)$'nin bu komşulukta z_0 dışında sıfırı yoktur.

1.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tezin bu kısmında süreklilik modülü ile ilgili gerekli tanımlar ele alınmış ve süreklilik modülünün özellikleri verilmiştir [14].

$\varphi(t),\ (\varphi : X \to Y,\ X \subset \mathbb{R}(X \subset \mathbb{C}),\ \mathrm{Y} \subset \mathbb{R}(Y \subset \mathbb{C}),\ t \in X$ reel veya kompleks bir fonksiyon olsun. Matematik Analizden bilindiği gibi $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde sürekliliği dediğimizde $t_1, t_2 \in X$ için $|t_1 - t_2|$' nin çok küçük değerine $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$ farkının çok küçük değerinin karşılık gelmesi düşünülür. Yani, bir fonksiyon sürekli ise değişken artımı ve fonksiyon artımı aynı zamanda sıfıra gider.

Fakat bir fonksiyonun sürekliliği incelenirken fonksiyon artımının değişken artımına rağmen hangi dereceden küçüklüğü söz konusu değildir. Bu küçüklük derecesi herhangi olabilir. Ancak, fonksiyonların birçok özellikleri, örneğin, fonksiyonların seriye açılımı, bu serilerin yakınsaklık hızı ve başka birçok özellikleri fonksiyonların süreklilik modülü denilen kavramın küçüklük derecesine sıkı bağlıdır.

Tanım 1.3.1: $\varphi : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

$$\omega(\varphi,\delta) = \sup\left\{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| : t_1, t_2 \in X, |t_1 - t_2| < \delta\right\},$$

$$\delta \in (0,\ell],\ \ell = \max\left\{|t_1 - t_2| : t_1, t_2 \in X\right\} = diamX$$

şeklinde tanımlanan $\omega(\varphi,\delta),\ \delta \in (0,\ell]$ fonksiyonuna $\varphi(t)$, $t \in X$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Tanım 1.3.2: $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyonu verilsin. $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir demek ki, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki, $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall t_1, t_2 \in X$ için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

dur.

Bir fonksiyonun süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim:

1. $\omega(\varphi,\delta)$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta azalmayan bir fonksiyondur.

2. $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyonu verilsin. $\varphi(t)$ fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{\delta \to 0_+} \omega(\varphi, \delta) = 0$$

olmasıdır.

3. $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\omega(\varphi, \delta_1 + \delta_2) \le \omega(\varphi, \delta_1) + \omega(\varphi, \delta_2)$$

dir.

Bu özellikten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(\varphi, n.\delta) \le n.\omega(\varphi, \delta)$$

dır.

4. Eğer $\varphi(t)$, X üzerinde düzgün sürekli ise $\omega(\varphi, \delta),\ \delta \in (0, \ell]$ sürekli fonksiyondur.

Tanım 1.3.3: $[0, +\infty)$ aralığında sürekli, azalmayan $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, \ell]$ için

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$$

ve $\omega(0) = 0$ koşullarını sağlayan $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna süreklilik modülü denir.

Bir fonksiyonun süreklilik modülünün yukarıda verilen özelliklerinden de görülür ki, düzgün sürekli bir fonksiyonun süreklilik modülü söylenen tanım anlamında da süreklilik modülüdür. Ayrıca, her bir süreklilik modülü bir düzgün sürekli fonksiyonun süreklilik modülüdür. Bununla ilgili aşağıdaki özelliği verebiliriz.

5. Eğer $\omega(\delta),\ \delta \in [0, +\infty)$ bir süreklilik modülü ise

$$\omega(\varphi, \delta) = \omega(\delta)$$

dır. Yani her süreklilik modülü kendi kendisinin süreklilik modülüdür.

6. Eğer, X sınırlı ve $\ell = diamX$ ise $\delta > \ell$ için

$$\omega(\varphi,\delta) = \omega(\varphi,\ell)$$

dir.

Tanım 1.3.4: $\varphi : X \subset \mathbb{R} \to Y$ fonksiyonu verilsin ve $t_0 \in X$ bir yığılma noktası olsun. Eğer,

$$\varphi(t_0+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \varphi(t) = \varphi(t_0)$$

ise $\varphi(t)$ fonksiyonu t_0 'da sağdan süreklidir denir.

7. Eğer, $[0,+\infty)$ aralığında tanımlı bir $\omega(\delta)$ fonksiyonu azalmayan, sıfırda sağdan sürekli, $\omega(0) = 0$ ve $\omega(\delta)/\delta$ artmayansa $\omega(\delta)$ süreklilik modülüdür.

Tanım 1.3.5: $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer, X kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası X kümesinin içinde kalıyorsa, X'e bir konveks küme denir.

Tanım 1.3.6: $\varphi : X \to Y$ verilsin ve X konveks bir küme olsun. Eğer, her $t_1, t_2 \in X$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\varphi[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \le \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

$$(\varphi[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \ge \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2))$$

oluyorsa, $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde konvekstir (konkavdır) denir.

8. Eğer, $[0,+\infty)$ aralığında $\omega(\delta)$ fonksiyonu konkav, azalmayan, sıfırda sağdan sürekli ve $\omega(0) = 0$ ise $\omega(\delta)$ süreklilik modülüdür.

Bir fonksiyonun süreklilik modülü olması için yeterli koşul 7. ve 8. özelliklerle ifade edilir.

9. $\omega(\delta) = c.t^{\alpha}$, $c > 0$, $0 < \alpha \le 1$ fonksiyonu konkav süreklilik modülüdür.

1.4. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

Bu kısımda tezle ilgili ön bilgi olarak Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı hakkında gerekli tanımlar, sonuçlar, notlar ve özellikler verilmiştir [14].

Tanım 1.4.1: $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyon olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0,\ \alpha > 0$ için

$$\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| \leq K.\left|t_1 - t_2\right|^{\alpha}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde K sabiti ve α üssü ile Hölder koşulunu sağlar diyeceğiz ve bunu $\varphi \in KH_{\alpha}(X)$ şeklinde belirteceğiz.

Uyarı 1.4.1: Süreklilik modülünün tanımından ve Tanım 1.4.1'den görülür ki, eğer, $\varphi \in KH_{\alpha}(X)$ ise $\omega(\varphi;\delta) \leq K.\delta^{\alpha}$ 'dır.

Sonuç 1.4.1: $C(X)$, X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi olsun.

$$KH_{\alpha}(X) \subset C(X)$$

olduğu açıktır.

Tanım 1.3.2: $\varphi : X \to Y$ $n.$ $(\mathrm{n} \in \mathbb{N})$ mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0,\ \alpha > 0$ için

$$\left|\varphi^{(n)}(t_1) - \varphi^{(n)}(t_2)\right| \leq K.\left|t_1 - t_2\right|^{\alpha}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde $KH_{\alpha}^{(n)}(X)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Not 1.4.1: $C^{(n)}(X),\ n.\ (n \in \mathbb{N})$ mertebeden türevi X üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun.

$$KH_{\alpha}^{(n)}(X) \subset C^{(n)}(X)$$

olduğu açıktır.

Not 1.4.2: $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü olsun. $H_{\omega}(X)$ ile X'de sürekli ve süreklilik modülü

$$\omega(\varphi,\delta) \le \omega(\delta)$$

koşulunu sağlayan $\varphi(t),\ t \in X$ fonksiyonları kümesini göstereceğiz.

Not 1.4.3: $H_{\alpha}(X)$ ile $\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$ üstü ve herhangi K sabiti ile bir Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz. Yani,

$$H_{\alpha}(X) = \bigcup_{K>0} KH_{\alpha}(X)$$

dir.

Uyarı 1.4.2: $\alpha > 1$ ise $H_{\alpha}(X)$ sınıfı X'de sabit fonksiyonlar kümesidir.

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü, $\varphi(t)$ X'de sınırlı fonksiyon olsun. Eğer, $\delta \in [0,\delta_0],\ \delta_0 > 0$ için

$$\omega(\varphi,\delta) \le \omega(\delta)$$

ise $\varphi \in H_{K\omega}(X)$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

2. Eğer, X kapalı ve sınırlı ise $0 < \beta < \alpha \le 1$ için

$$H_{\alpha}(X) \subset H_{\beta}(X)$$

dir.

3.Eğer $\varphi : X \to Y$ ve $f : X \to Y$ ve $\varphi \in H_{\alpha_1}(X),\ f \in H_{\alpha_2}(X),\ 0 < \alpha_1,\ \alpha_2 \le 1$ ise $\varphi + f,\ \varphi.f,\ \varphi/f\ \ (f \neq 0)$ fonksiyonları $H_{\alpha}(X)$ sınıfındandır, burada $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2)$ dir.

4. $t = t(s)$, $s \in M$ fonksiyonu $H_\alpha(M),\ 0 < \alpha \le 1$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu da $t = t(s)$ fonksiyonunun değer kümesi üzerinde $H_\beta,\ 0 < \beta \le 1$ sınıfındansa, $\Phi(s) = \varphi(t(s)),\ t \in M$ fonksiyonu M üzerinde $H_{\alpha.\beta}(M)$ sınıfındandır.

5. $t = t(s),\ s \in M$ (M-kapalı kümedir) fonksiyonu $H_\alpha(M),\ 0 < \alpha \le 1$ sınıfından $\varphi(t)$ fonksiyonu da sürekli türevlenebilirse $\Phi(s) = \varphi(t(s))$ fonksiyonu M üzerinde $H_\alpha(M),\ 0 < \alpha \le 1$ sınıfındandır.

6. t ve t_0 noktaları bir $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve kaydolunmuş noktalarsa,

$$\varphi(t) = |t - t_0|^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$$

fonksiyonu γ üzerinde $H_\alpha(\gamma)$ sınıfındandır.

7. $\varphi \in H_\alpha(\gamma),\ 0 < \alpha \le 1,\ t, \gamma$ üzerinde değişken ve $t_0 \in \gamma$ kaydolunmuş noktalar olsun. Bu takdirde, $0 < \beta < \alpha \le 1$ olmak üzere

$$\Phi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\beta}$$

fonksiyonu γ eğrisi üzerinde $H_{\alpha-\beta}(\gamma)$ sınıfındandır.

1.5. Konform Dönüşümler

Tezin bu kısmında konform dönüşümlerle ilgili gerekli tanım, teorem ve önermeler verilmiştir [13].

Bir $w = f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında sürekli olmasının geometrik anlamı oldukça açıktır. Çünkü $w_0 = f(z_0)$ denirse, f ‘nin sürekliliği gereği, z_0’ın yeterince küçük bir komşuluğunun tüm noktalarının resimleri w_0’ın belli bir ε komşuluğuna düşer. Üstelik süreklilik bağlantılığı da koruduğundan, bu söz konusu komşuluğun resmi w_0 noktasını bulunduran bağlantılı bir küme olur. Ancak tüm bunlar, bize w_0'ın bir komşuluğunun tamamen örtülüp örtülmediğini veya bir defadan fazla örtülüp örtülmediğini belirtmez. Ortaya çıkan bu soruların cevabını, ancak f ‘nin analitik ve bire-bir olması koşulu ile verebiliriz. Özellikle $f'(z_0) \neq 0$ koşulu altında önemli sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 1.5.1: $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise, z_0'ın belli bir komşuluğu, w_0'ın belli bir komşuluğunu tam bir defa örter.

Önerme 1.5.1: Eğer $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve bütün $z \in A$ noktaları için $f'(z_0) \neq 0$ ise *f*, *A*'daki açık kümeleri açık kümelere resmeder.

İspat: *U*, *A* içinde bulunan açık bir küme olsun ve $f(U)$ içinde bir $w_0 = f(z_0)$ noktası alalım. Varsayalım gereği $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan z_0'ın öyle bir açık *V* ve w_0'ın da *W* açık komşuluğu vardır ki, $f: V \to W$ fonksiyonu öncelikle süreklidir ve f^{-1} analitiktir. f^{-1} analitik olduğuna göre öncelikle süreklidir. Bu nedenle de, $U \cap V$ açık olduğundan, $(f^{-1})^{-1}(U \cap V)$ kümesi de açıktır ve üstelik *f*, *V*'den *W*'ye bire-bir üzerine olduğundan $w_0 \in (f^{-1})^{-1}(U \cap V) = f(U) \cap W \subset f(U)$ olur. yani $f(U)$ açık bir kümedir.

Teorem 1.5.2: $w = f(z)$ fonksiyonu bir *B* bölgesinde bire-bir ve analitik ise *B*'nin *f* altındaki resmi $f(B)$'yi bir defa örter ve $f(B)$ bir bölgedir.

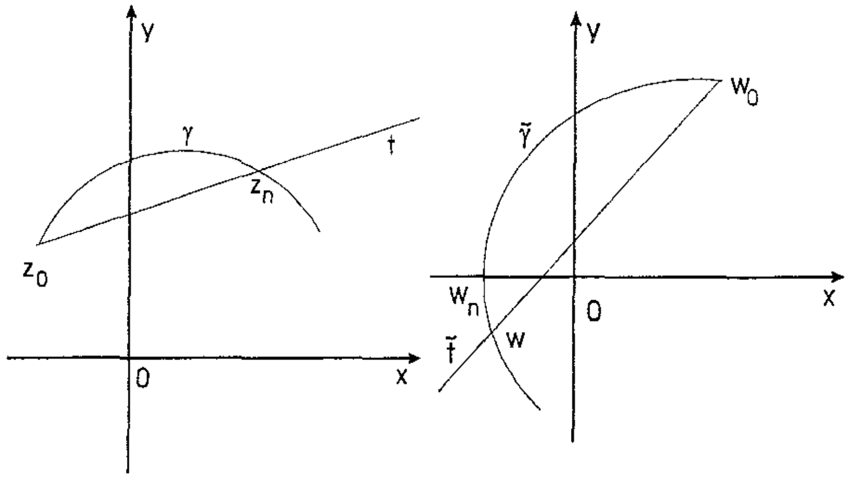
İspat: *B*'nin *f* altındaki resminin $f(B)$'yi tam bir defa örttüğü, *f*'nin birebirliğinden açıktır. $f(B)$'nin açık ve bağlantılı olduğu ise Önerme 1.5.1. ve *f*' nin sürekliliğinden görülür.

Önerme 1.5.2: $w = f(z)$ fonksiyonu z_0'da analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun, z_0'dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0'daki teğeti x-ekseni ile θ açısı yapıyorsa, $\tilde{\gamma}$ resim eğrisinin de w_0'da teğeti vardır ve teğetinin u-ekseni ile yaptığı açı

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0)$$

dır.

İspat: γ üzerinde $w_n \neq w_0$ ve fakat $w_n \to w_0$ olacak şekilde bir (w_n) noktalar dizisi alalım. $w_n = f(z_n)$ denirse γ'da $z_n \neq z_0$ fakat $z_n \to z_0$ olacak biçimde (z_n) noktalar dizisi vardır. O halde



Şekil 1.5.1

olur. Buradan da

$$\arg(w_n - w_0) = \arg(z_n - z_0) + \arg\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} (\bmod 2\pi)$$

bulunur.

Dikkat edilirse $n \to \infty$ için $\arg(z_n - z_0)$, t'nin x-ekseniyle yaptığı açıdır. Yani,

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \arg(z_n - z_0)$$

dır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \arg(w_n - w_0) = \theta + \arg f'(z_0) (\bmod 2\pi)$$

bulunur. Bu son ifade bizi $\tilde{t}$ 'nın $\tilde{\gamma}$ 'ya w_0 'da bir teğet olduğunu ve bunun *u*-ekseni ile yaptığı açının da

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

olduğunu gösterir.

Önerme 1.5.3: *f* fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 'dan geçen ve aralarında α açısı oluşturan γ_1 ve γ_2 düzgün eğrilerin *f* altındaki $\tilde{\gamma}_1$ ve $\tilde{\gamma}_2$ resimleri de, w_0 'da α açısı oluştururlar.

İspat: Önerme 1.5.2 gereği $\phi_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0)$ ve $\phi_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$ olacağından

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$$

bulunur.

Tanım 1.5.1: *B*, $\mathbb{C}$ 'de bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 'da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa *f* fonksiyonuna z_0 'da bir konform dönüşümdür denir. Eğer, her $z_0 \in B$ noktasında *f* konform ise *f*, *B*'de konformdur denir.

Önerme 1.5.4: *f*, bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise *f*, z_0 'da bir konform dönüşümdür.

Uyarı 1.5.1: Eğer, $f'(z_0) = 0$ ise dönüşümün konform olamayacağını aşağıdaki önermeden görebiliriz.

Önerme 1.5.5: $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve bu noktada $f(z) - f(z_0)$ 'ın k. $(k > 2)$ mertebeden sıfırı varsa, z_0 'dan geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün eğrinin resimleri w_0'da $k.\alpha$ açısı yaparlar. Dolayısıyla da z_0'ın bir komşuluğu w_0'ın bir komşuluğunu k defa örter.

İspat: $f(z) = f(z_0) + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + ...,\ k \geq 2,\ a_k \neq 0$ yazılabileceği açıktır. Buradan

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z-z_0)^k g(z)$$

yazabiliriz. $g(z)$ fonksiyonu z_0'da analitik ve $g(z_0)$'dır. Böylece,

$$\arg(w-w_0) = \arg(f(z) - f(z_0)) = k.\arg(z-z_0) + \arg g(z)$$

elde edilir. Şimdi $z \to z_0$ için iki yanın limiti alınır ve de ϕ ile θ Önerme 1.6.2'deki anlamda simgeler olarak düşünülürse,

$$\phi = k\theta + \arg g(z_0)$$

bulunur. Ancak, $\arg g(z_0)$, θ'dan bağımsız olduğundan Önerme 1.6.3 gereği

$$\phi_2 - \phi_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = k\alpha$$

sonucuna varılır.

Uyarı 1.5.2: Açıyı büyüklük ve yön bakımından koruyan dönüşümlere bazen direkt konform dönüşümler de denir. Açının büyüklüğünü koruyan, fakat yönünü değiştiren dönüşümlere de ters (indirekt) konform dönüşümler denir. Dikkat edilirse $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$ ise, açının yönü korunmuştur. Eğer, $\phi_2 - \phi_1 = \theta_1 - \theta_2$ ise açının yönü değişmiştir. Örneğin, $f(z) = z$ dönüşümü herhangi bir noktada direkt konform, fakat $h(z) = \overline{z}$ ise ters konform dönüşüm yapar.

2.BÖLÜM

SİNGÜLER İNTEGRALLER İÇİN BAZI YAKLAŞIM ŞEMALARI VE TEORİK SONUÇLAR

2.1. Kapalı Aralık Üzerinde Tanımlı Singüler İntegraller için Yaklaşım Şeması-1

Tezin bu kısmında Cauchy çekirdekli SİD'in kapalı aralık üzerinde yaklaşık çözüm yöntemleri incelenirken Z.K. Eshkuvatov, N.M.A. Nik Long, M.Abdulkawi'nin çalışmalarından yararlanacağız [10].

$K_0(x,t), K(x,t)\, ve\ f(x)$ Hölder sınıfına ait reel değerli fonksiyonlar ve $\varphi(t)$ de çatlakları içeren ([15]) izotropik elastik maddeler ve bunun gibi diğer problemler için matematiksel fiziğin ([16,17]) karmaşık sınır değer problemlerin bir türünde oluşan durumu belirleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{-1}^{1} \frac{K_0(x,t)\varphi(t)}{t-x}dt + \int_{-1}^{1} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1 \tag{2.1.1}$$

biçimindeki bir SİD'i göz önüne alalım. Bu integral bir Cauchy Esas Değer İntegrali gibi göz önüne alınır. Bu tip integral [4, 16,18] referanslarında bulunabilir. Chakrabarti ve Berge [19] $n.$dereceden yaklaşım polinomlarını ve bütün durumlar için birinci çeşit Chebyshev polinomunun sıfırlarından seçilen collacasiyon noktaları kullanarak (2.1.1) deki denklemi çözmek için bir yaklaşım metodu önerdi. Onlar $f(t)$ fonksiyonunun lineer olması durumunda yaklaşım metodunun kesin sonuç verdiğini gösterdiler [19]. Abdou ve Naser [20] de ikinci çeşit Cauchy SİD i göz önüne aldı ve yaklaşık çözümü bulmak için ortogonal polinomları kullandı. Ayrıca, çözümleri bu denklemlerle ifade edilen fizik problemlerini tartıştılar. Rashed [21] de çekirdeğe ve bilinmeyen fonksiyona yaklaşmak için birinci çeşit Chebyshev polinomlarını kullanarak birinci çeşit singüler olmayan integral denklemlerin çözümü için iki nümerik yöntem verdi. Kim [22] de birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının collocasiyon ve apsis noktalarındaki sıfırlarını seçerek ve Gauss kuadratik formülünü kullanarak Cauchy SİD i yaklaşık olarak çözdü. Srivastav ve Zhang [23]'de Cauchy SİD i çözmek için genel kuadratik collacasiyon düğümleri kullandı.

Bu çalışmada $K_0(x,t)=1\,ve\,K(x,t)=0$ olması durumunda (2.1.1) Cauchy SİD'in yaklaşık çözümü ele alındı.

Bu durumda (2.1.1) denklemi aşağıdaki singüler integral denkleme dönüşür:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x),\quad -1<x<1. \tag{2.1.2}$$

Aşağıda (2.1.2) denkleminin tüm analitik çözümlerinin dört durumda verildiğini görebiliriz [5].

Durum I: $x=\pm 1$ ve

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt = C \tag{2.1.3}$$

için

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,f(t)}{t-x}dt + \frac{C}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{2.1.4}$$

olması durumunda çözüm sınırlı değildir.

Durum II: $x=\pm 1$ ve

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \tag{2.1.5}$$

için

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)}dt \tag{2.1.6}$$

olması durumunda çözüm sınırlıdır.

Durum III: $x=-1$ ve

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{f(t)}{t-x}dt \qquad (2.1.7)$$

olması durumunda çözüm sınırlıdır.

Durum IV: $x = 1$ ve

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{f(t)}{t-x}dt \qquad (2.1.8)$$

olması durumunda çözüm sınırlıdır.

Yaklaşık çözümler elde edilirken aşağıdaki işlemler yapılır:

1. Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları $W^{(j)}(x),\ j = 0,1,2,3,4$ yoğunluk fonksiyonları gibi düşünülür ve (I-IV) durumlarının hepsinde yoğunluk fonksiyonuna yaklaşmak için kullanılır.

2. Collocasiyon noktaları Chebyshev polinomlarının sıfırlarından seçilir.

3. $\varphi(t)$ yoğunluk fonksiyonu içindeki ağırlık fonksiyonlarını temsilen olan Chebyshev polinomlarını kullanarak elde edilen singüler integraller tamamen analitik olmalıdır.

4. Sınırsız olması durumu için $\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt = 0$ şartı tek çözümü elde etmek için kullanılır.

5. Nümerik sonuçları elde etmek için Fortran programı kullanılır.

Şimdi (2.1.1) denklemi için bir yaklaşım şeması verelim.

Sırasıyla birinci çeşit $T_i(x)$, ikinci çeşit $U_{i-1}(x)$, Üçüncü çeşit $V_i(x)$ ve dördüncü çeşit $W_i(x)$, $i=0,1,2,...$ Chebyshev polinomları

$$T_i(x)=\cos[i\cos^{-1}(x)], \qquad U_{i-1}(x)=\frac{\sin[i\cos^{-1}(x)]}{\sin[\cos^{-1}(x)]},$$

$$V_i(x)=\frac{\cos[\frac{2i+1}{2}\cos^{-1}(x)]}{\cos[\frac{1}{2}\cos^{-1}(x)]}, \quad W_i(x)=\frac{\sin[\frac{2i+1}{2}\cos^{-1}(x)]}{\sin[\frac{1}{2}\cos^{-1}(x)]}$$

şeklinde tanımlanır [24].

Diğer taraftan ağırlık fonksiyonları

$$W^{(1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad W^{(2)}(x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$W^{(3)}(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad W^{(4)}(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

dır.

(2.1.2) deki bilinmeyen φ fonksiyonuna

$$\varphi_n(x)=W^{(j)}(x)\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}G_i^{(j)}(x), \quad (j=1,2,3,4) \tag{2.1.9}$$

şeklindeki φ_n polinomu ile yaklaşılabilir. Burada $\beta_i^{(j)}$, $i=0,1,2,...,n$ ler bilinmeyen katsayılar ve durum (I) için $W^{(1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $G_i^{(1)}(x)=T_i(x)$, durum (II) için $W^{(2)}(x)=\sqrt{1-x^2}$ ve $G_i^{(2)}(x)=U_i(x)$, durum (III) için $W^{(3)}(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ve $G_i^{(3)}(x)=V_i(x)$ durum (IV) için de $W^{(4)}(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ve $G_i^{(4)}(x)=W_i(x)$ dır.

Bu durumda (2.1.2) deki bilinmeyen $\varphi(t)$ fonksiyonunu (yani $\beta_i^{(j)}$, $i=0,1,2,...,n$ bilinmeyenlerini) yaklaşık bulmak için (2.1.9)'dan elde ederiz.

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}\int_{-1}^{1}\frac{W^{(j)}(t)G_i^{(j)}}{t-x}dt = f(x), \quad -1<x<1, \quad (j=1,2,3,4). \qquad (2.1.10)$$

(2.1.10) denklemi

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}\gamma_i^{(j)}(x) = f(x), \quad -1<x<1, \ (j=1,2,3,4) \qquad (2.1.11)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada

$$\gamma_i^{(j)}(x) = \int_{-1}^{1}\frac{W^{(j)}(t)G_i^{(j)}(t)}{t-x}dt, \quad (j=1,2,3,4) \qquad (2.1.12)$$

dır.

$x_k^{(j)}$, $j=1,2,3,4$ ler sırasıyla $U_n(x)$, $T_{n+2}(x)$, $W_{n+1}(x)$ ve $V_{n+1}(x)$ in sıfırları olsun. Bu durumda

$$\left.\begin{array}{ll} x_k^{(1)} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{(n+1)}\right), & x_k^{(2)} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2(n+2)}\right), \\ x_k^{(3)} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{(2n+3)}\right), & x_k^{(4)} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{(2n+3)}\right) \\ (k=1,2,\dots,n+1) & (k=1,2,\dots,n+1) \end{array}\right\} \qquad (2.1.13)$$

yazılır.

Bilindiği üzere

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}dt = \pi U_{i-1}(x), & \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_i(t)}{t-x}dt = -\pi T_{i+1}(x), \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{V_i(t)}{t-x}dt = \pi W_i(x), & \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{W_i(t)}{t-x}dt = -\pi V_i(x), \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi, & \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0, \end{array}\right\} \qquad (2.1.14)$$

eşitlikleri her $i=1,2,\dots$ için doğrudur [24].

(2.1.11) de (2.1.13) collocasiyon noktaları ve (2.1.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} &\pi\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}U_{i-1}\left(x_k^{(1)}\right)= f\left(x_k^{(1)}\right), \quad k=1,2,...,n \\ &\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(1)}\int_{-1}^{1}W^{(1)}(t)T_i(t)\,dt=\pi\beta_0^{(1)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1.15}$$

$$-\pi\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(2)}T_{i+1}\left(x_k^{(2)}\right)= f\left(x_k^{(2)}\right), \quad k=1,2,...,n+1, \tag{2.1.16}$$

$$\pi\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(3)}W_i\left(x_k^{(3)}\right)= f\left(x_k^{(3)}\right), \quad k=1,2,...,n+1, \tag{2.1.17}$$

$$-\pi\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(4)}V_i\left(x_k^{(4)}\right)= f\left(x_k^{(4)}\right), \quad k=1,2,...,n+1, \tag{2.1.18}$$

şeklindeki lineer denklem sistemi elde edilir. $\beta_i^{(j)}, \ (j=1,2,3,4)$ bilinmeyen katsayıları için (2.1.15)-(2.1.18) sistemi çözülür ve bu değerler (2.1.9) da yerine yazılırsa (2.1.2) denkleminin

$$\varphi(x)\approx W^{(j)}(x)\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}G_i^{(j)}(x), \quad (j=1,2,3,4) \tag{2.1.19}$$

şeklindeki yaklaşık çözümleri elde edilir.

2.2 Kapalı Aralık Üzerinde Singüler İntegraller için Yaklaşım Şeması-2

Tezin bu kısmında A.Chakrabarti ve G.Vanden Berghe'nin çalışmalarından yararlanacağız [11].Sonlu bir aralıkta Cauchy çekirdekli birinci çeşit SİD'ler

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)\left[k_0(t,x)+k(t,x)\right]dt= f(x), \ -1<x<1 \tag{2.2.1}$$

genel denklemi ile verilir. Burada

$$k_0(t,x)=\frac{\hat{k}(t,x)}{t-x}, \quad \left(\hat{k}(t,t)\neq 0\right) \tag{2.2.2}$$

olup $\hat{k}$ ve k fonksiyonları iki değişkenli $(t\ ve\ x)$ düzgün karesi integrallenebilir fonksiyonlar ve k_0 çekirdeği de Cauchy tipli singülerliği içeren bir fonksiyondur. Gerek (2.2.1) şekilli integral denklemler, gerekse diğer farklı denklemler yarıkları olan izotropik elastik maddelerin ileri boyutlu bozulma problemlerinde ([16,25,26]) yatay bariyerler tarafından iki boyutlu dalgaların hareketinde ([27,31]) ve bunlarla alakalı diğer problemlerin olduğu matematiksel fiziğin karışık sınır değer problemlerin bazı tiplerinde karşımıza çıkar. (2.2.1) şeklindeki en basit integral denklem $\hat{k}(t,x)=1\,ve\,k(t,x)=0$ olması durumunda ([16,26])

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x) \tag{2.2.3}$$

şeklindedir.

Burada (2.2.1) denkleminin dört tane önemli ve ilginç durumu vardır. $\hat{k}(t,x)=1\ ve\ k(t,x)=0$ için bu durumlar aşağıdaki şekilde verilir.

Durum (I): $x=\pm 1$ bitiş noktalarının her ikisinde de $\varphi(x)$ sınırsızdır.

Durum (II): $x=-1$ bitiş noktasında $\varphi(x)$ sınırsız fakat $x=+1$ bitiş noktasında $\varphi(x)$ sınırlıdır.

Durum (III): $x=-1$ bitiş noktasında $\varphi(x)$ sınırlı fakat $x=+1$ bitiş noktasında $\varphi(x)$ sınırsızdır.

Durum (IV): $x=\pm 1$ bitiş noktalarının her ikisinde $\varphi(x)$ sınırlıdır.

Yukarıdaki dört durumda (2.2.3) singüler integral denklemin tam analitik çözümlerin ([17,19])

Hal (I):(A_0 keyfi bir sabit) $\varphi(x)=\dfrac{A_0}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}-\dfrac{1}{\pi^2\left(1-x^2\right)^{1/2}}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-t^2\right)^{1/2}f(t)}{(t-x)}dt$ (2.2.4)

Hal (II): $\varphi(x)=-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2}\frac{f(t)}{t-x}dt$ (2.2.5)

Hal (III): $\varphi(x)=-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2}\frac{f(t)}{t-x}dt$ (2.2.6)

Hal (IV): $\varphi(x)=-\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}(t-x)}dt$ (2.2.7)

formülleri kullanılarak belirlenebilir. Burada Hal (IV) çözümün varlığı için gerek ve yeter şart

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt=0 \tag{2.2.8}$$

olmasıdır.

Yukarıdaki analitik sonuçlara bakıldığında, integrantı uygun bir yaklaşım fonksiyonu ile yer değiştirdiğimizde (2.2.1) genel SİD'in yaklaşık çözümünü elde etmek için bir nümerik şema yapılabilir. Bunun ile ilgili şema üçüncü bölümde verilecek. (2.2.3) denkleminin özel durumu oldukça kolaydır. $f(x)$ fonksiyonunun düşük dereceli polinomlar olması durumunda elde edilen özel durumlarda analitik çözümler kolaylıkla bulunabilir.

Bilinmeyen $\varphi(x)$ fonksiyonunu

$$\varphi(x)=\frac{h_r(x)\lambda_r(x)}{\left(1-x^2\right)^{1/2}},\quad (r=1,2,3,4),\quad -1\le x\le 1 \tag{2.2.9}$$

olarak alalım. Burada $h_r(x)$ fonksiyonu Hal (I) de $\lambda_1(x)=1$, Hal (II) de $\lambda_2(x)=1-x$, Hal (III) de $\lambda_3(x)=1+x$ ve Hal (IV) de $\lambda_4(x)=1-x^2$ alınması durumunda $-1\le x\le 1$ aralığında değişkeni x olan iyi tanımlı bir fonksiyondur.

Bu durumda yukarıdaki dört durumda [-1,1] aralığında $T_{n+1}(x)=\cos\left[(n+1)\arccos(x)\right]$ Chebyshev polinomunun ([32]) x_j $(j=0,1,2,...,n)$ sıfırlarını kullanarak (ki bunun adına Chebyshev yaklaşımı denir) bilinmeyen $h_r(x)$ fonksiyonuna

$$h_r(x)\approx\left[\sum_{j=0}^{n}c_j^{(r)}x^j\right],\quad (r=1,2,3,4) \tag{2.2.10}$$

şeklinde $n.$ dereceden bir polinomla yaklaşılır.

(2.2.1) integral denkleminde $\varphi(t)$ yerine (2.2.9) formüşlü kullanılır ve buradaki $h_r(x)$ fonksiyonunu da (2.2.10) şeklindeki yaklaşım alarak $r=1,2,3,4$ ve $-1<x<1$ olmak üzere alınırsa

$$\sum_{j=0}^{n}c_j^{(r)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_r(t)\hat{k}(t,x)t^j}{\left(1-t^2\right)^{1/2}(t-x)}dt+\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_r(t)k(t,x)t^j}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt\right]=f(x) \tag{2.2.11}$$

elde edilir.

Yukarıdaki (2.2.11) denkleminde $-1<t_0<t_1<...<t_m<1\ ve\ -1<t_0<t_1<...<t_s<1$ olmak üzere $t_0,t_1,...,t_m$ noktaları [-1,1] aralığında $T_{m+1}(t)$ in sıfırları ve $\hat{k}_p(x),k_q(x)$ de t_p,t_q noktaları cinsinden elde edilen fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}\hat{k}(t,x)&\approx\sum_{p=0}^{m}\hat{k}_p(x)t^p,\\ k(t,x)&\approx\sum_{q=0}^{s}k_q(x)t^q\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

şeklinde verilen $\hat{k}(t,x)$ ve $k(t,x)$ çekirdeklerinde ‘Chebyshev Yaklaşımları’ kullanılır. Böylece c_j $(j=1,2,...,n)$ bilinmeyen sabitleri bulmak için

$$\sum_{j=0}^{n}c_j^{(r)}\left[\sum_{p=0}^{m}\hat{k}_p(x)\int_{-1}^{1}\frac{t^{p+j}\lambda_r(t)}{(t-x)\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt+\sum_{q=0}^{s}k_q(x)\int_{-1}^{1}\frac{t^{q+j}\lambda_r(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt\right]=f(x) \tag{2.2.13}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^{p+j}\lambda_r(t)}{(t-x)\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt = u_{p+j}^{(r)}(x) \tag{2.2.14}$$

ve

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^{q+j}\lambda_r(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt = \gamma_{q+j}^{(r)} \tag{2.2.15}$$

kısaltmaları kullanılarak (2.2.13) denkleminden

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(r)}\left[\sum_{p=0}^{m}\hat{k}_p(x)u_{p+j}^{(r)}(x)+\sum_{q=0}^{s}k_q(x)\gamma_{q+j}^{(r)}\right]=g(x),\ (r=1,2,3,4),\ -1<x<1 \tag{2.2.16}$$

elde edilir. (2.2.16) da $x = x_l,\ l = 0,1,...,n$ alınırsa $c_j^{(r)}$ $(j = 0,1,...,n)$ bilinmeyen sabitlerin determinantı için

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(r)}\alpha_{j,l}^{(r)} = f_l, \quad (l = 0,1,2,...,n),\ (r=1,2,3,4) \tag{2.2.17}$$

şeklindeki $(n+1)\times(n+1)$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$f_l = f(x_l) \tag{2.2.18}$$

ve

$$\alpha_{j.l}^{(r)} = \sum_{p=0}^{m}\hat{k}_p(x_l)u_{p+j}^{(r)}(x_l)+\sum_{q=0}^{s}k_q(x_l)\gamma_{q+j}^{(r)} \tag{2.2.19}$$

dır. (2.2.17) denklemler sisteminin çözümünü ve (2.2.9), (2.2.10) ifadelerini kullanarak (2.2.1) SİD'in

$$\varphi(x) \approx \lambda_r(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{c_j^{(r)}x^j}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}, \quad (r=1,2,3,4) \tag{2.2.20}$$

şeklindeki yaklaşık çözümü elde edilir.

Eğer (2.2.16) deki $\hat{k}_p(x), k_q(x)$ *ve* $g(x)$ fonksiyonları onların Chebyshev yaklaşımları ile yer değiştirilirse, $c_j^{(r)}$ bilinmeyen sabitleri karşılıklı x in kuvvetlerine göre katsayıları karşılaştırılarak elde edilebilir.

2.3 Kapalı Eğri Üzerinde Singüler İntegraller için Yaklaşım Şeması-1

Bu çalışmada singüler integraller için bazı kuadratik formüllerin ve Dirichlet modifiyet probleminin ([26,33]) yaklaşık çözümüne uygulaması incelenirken Jemal Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarından yararlanıldı [6]. Bu problem onların bilinen teorik ilgilerinin yanı sıra bazı önemli pratik uygulamalara da sahiptir. Bilindiği gibi klasik Dirichlet problemi (Genelde çok bağlantılı bölgeler için) aynı zamanda bu probleme indirgenebilir.

Sonlu basit bağlantılı bölgeler olması durumunda Dirichlet modifiyet problemi Dirichlet klasik problemi ile çakışır. Unutmamak gerekir ki eğer ; D^+ düzgün L eğrisi tarafından sınırlanan bir bölge ise göz önüne alınan sınır integral denklemi

$$\varphi(t_0) + \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt = f(t_0) \ (t_0 \in L) \tag{2.3.1}$$

formunda SİD (esas değer anlamında) yardımı ile yazılabilir. Burada $f(t_0)$ L sınırı üzerinde verilen reel bir fonksiyondur. $\varphi(t)$ reel fonksiyonu (2.3.1) denklemi için çözüm olmak üzere istenen harmonik fonksiyon

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - z}dt \ \left(z = x + iy \in D^+\right) \tag{2.3.2}$$

şeklindedir.

D^- sonlu bir bölge olması durumunda Dirichlet modifiyet problemi (klasik olmayan) için $u(x, y)$ çözümü, C önceden verilmeyen bir sabit olmak üzere

$$\varphi(t_0) - \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt = f(t_0) + C \ \left(\mathrm{Im}\,\varphi(t) \equiv 0\right) \tag{2.3.3}$$

denklemi altında $z \in D^-$ noktasında (2.3.2) formuyla aynı şekilde temsil edilebilir. $\varphi(t)$ ve C bulunduktan sonra Dirichlet klasik problemi için çözümü $u(x, y) - C$ formunda elde edilebilir.

[26] referansında yukarıdaki C sabiti yay uzunluğuna göre bilinmeyen bir $\varphi(t)$ fonksiyonunu içeren bir integral ile verilebilir. Bu düşünceden hareketle C sabitini

$$C = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}dt$$

şeklinde vermek daha uygun olur.

Burada orijinin D^+ bölgesine ait olduğu anlaşılacaktır. Bu bağlamda uygun integral denklemini

$$(K_n\varphi_n)(t_0) = 0 \tag{2.3.4}$$

denklemi ile veririz.

N.J. Mushkelishvili ([26]) ye göre (2.3.4) denklemi homojen bir denklem olup sıfırdan farklı çözümlere sahip olduğu ispatlanabilir.

Jemal Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarında ([6]) singüler integrallere yaklaşım için belli nümerik bir şema uygulandı ve (2.3.1) denkleminin nümerik çözümü için doğrulandı.

Yukarıdaki durumu açıklamak için ilk olarak Jemal Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarında ([6]) kullanılan şema üzerinde kısaca durmak gerekir. Diğer bir deyişle

$$(S\varphi)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt \ \ (t_0 \in L)$$

singüler integral için kullanılan kuadratik formül $\varphi(t)$ nin

$$\varphi(t) \approx \varphi(t_0) + (t - t_0)\sum_{k=0}^{1} l_{\sigma k}(t)\alpha_{\sigma k}(\varphi; t, t_0)$$

$$\alpha_{\sigma k}(\varphi;t,t_0)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\tau_{\sigma+k})-L_{nv}(\varphi;t_0)}{\tau_{\sigma+k}-t_0}, & \sigma+k\neq v,v+1;\\[2mm] \dfrac{\varphi(\tau_{v+1})-\varphi(\tau_v)}{\tau_{v+1}-\tau_v}, & \sigma+k=v,v+1,\end{cases} \tag{2.3.5}$$

$t\in\tau_\sigma\tau_{\sigma+1},\ \ t_0\in\tau_v\tau_{v+1}\ \ (\sigma,v=0,1,...,n-1)$

yaklaşımı için bir temel teşkil eder.

Burada $\{\tau_j\}_{j=0}^{n-1}$ $(n>2)$ eşitlik kısımları içinde L eğrisini bölen düğümlerdir. j indeksi $\dfrac{jl}{n}$ nin değerlerini belirler, l ise L nin uzunluğudur. $\tau_\mu\tau_{\mu+1}$ yayı L üzerinde pozitif yönde ilerlerken $\tau_\mu\tau_{\mu+1}$ $(0\leq\mu\leq n-1;\ \tau_n=\tau_0)$ bitiş noktaları ile L nin en küçük yayıdır. $l_{\sigma 0}$ ve $l_{\sigma 1}$ de

$$l_{\sigma 0}(t)=\frac{t-\tau_{\sigma+1}}{\tau_\sigma-\tau_{\sigma+1}},\quad l_{\sigma 1}(t)=\frac{t-\tau_\sigma}{\tau_{\sigma+1}-\tau_0}\ \ (t\in\tau_\sigma\tau_{\sigma+1})$$

şeklinde olup ve

$$L_{nv}(\varphi;t_0)=l_{v0}(t_0)\varphi(\tau_v)+l_{v1}(t_0)\varphi(\tau_{v+1})\quad (t_0\in\tau_v\tau_{v+1})$$

dir.

Buradan yola çıkarak eklenen dönüşümlerden sonra Jemal Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarında ([6]) her n için $(\varphi_n\varphi)(t_0)$, $\{\varphi(\tau_j)\}_{j=0}^{n-1}$ in değerleri tarafından belirlenen bir operatör fonksiyonu olmak üzere

$$(S\varphi)(t_0)\approx\varphi(t_0)+(Q_n\varphi)(t_0)\ \ t_0\in L \tag{2.3.6}$$

tipli singüler integralin bir yaklaşımı elde edildi. Jemal Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarından ([6]) (2.3.1) denklemi

$$2\varphi_n(t_0)+\mathrm{Re}(Q_n\varphi_n)(t_0)=f(t_0)$$

ile yer değiştirir. Fakat genelde, singüler integrallerin bir yaklaşık hesaplaması ile ilgili şemalarda bir yöntemin (yaklaşık denklemin çözülebilirliğinin ispatı ve ilgili işlemin yakınsaması) kullanılması Fredholm çekirdek yaklaşımları temelli yöntemlerin tersine gerçekleştirilemez. Burada ilgili operatör fonksiyonun kendine has özelliklerinin uygulaması ve çalışılması gerekli olacaktır. (2.3.6) denklemi için bu durum Jemal

Sanikidze ve Manana Mirianashvili'nin çalışmalarında ([6]) yapılmıştır. $(S\varphi)(t_0)$ singüler integral için benzer bir yaklaşım aynı zamanda (2.3.4) denkleminde de kullanılabilir. Fakat açık olarak belirtmek gerekir ki; bu durumda $\varphi_n(t_0)$ ı içeren terimler ortadan kaldırılır ve (2.3.6) tipli bir denklemin yerine benzer yolla araştırılması mümkün olan başka bir denklem getirilir (düzgün integralin belli bir yaklaşımından sonra).

Yukarıdaki soru ile ilgili olarak, biz (2.3.4) denkleminde (sonsuz basit bağlantılı bölgelerde) $(S\varphi)(t_0)$ singüler integralinin bir tür farklı yaklaşımını göz önüne alacağız. (2.3.5) ifadesinde $\varphi(t)$ yerine $t\varphi(t)$ yazılırsa

$$\varphi(t) \approx \frac{t_0}{t}\varphi(t_0) + \frac{t-t_0}{t}\sum_{k=0}^{1} l_{\sigma k}(t)\alpha_{\sigma k}^{*}(\varphi;t,t_0) \quad (t \in \tau_\sigma\tau_{\sigma+1},\ t_0 \in \tau_v\tau_{v+1}) \tag{2.3.7}$$

yaklaşımı yazılabilir. Burada $\alpha_{\sigma k}^{*}$ ifadeleri $\left(\tau_\sigma\varphi(\tau_\sigma) - L_{nv}(t_0\varphi;t_0)\right)/(\tau_\sigma - t_0)$ ve $\left(\tau_{v+1}\varphi(\tau_{v+1}) - \tau_v\varphi(\tau_v)\right)/(\tau_{v+1} - t_v)$ olup bunlar sırasıyla (2.3.5) ifadesindeki $\left(\varphi(\tau_\sigma) - L_{nv}(\varphi;t_0)\right)/(\tau_\sigma - t_0)$ ve $\left(\varphi(\tau_{v+1}) - \varphi(\tau_v)\right)/(\tau_{v+1} - t_v)$ ifadeleri olarak bilinen $\alpha_{\sigma k}$ lardan elde edilmiştir.

Ayrıca,

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{dt}{t(t-t_0)} = -\frac{1}{t_0}$$

dir ve (2.3.7) kullanılarak

$$(S\varphi)(t_0) \approx -\varphi(t_0) + (G_{nv}\varphi)(t_0) \quad (t_0 \in \tau_v\tau_{v+1};\ v = 0,1,\ldots,n-1) \tag{2.3.8}$$

kuadratik formülü elde edilmiştir. Burada

$$p_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}} \frac{l_{\sigma k}(t)}{t} d_t \quad \left(\sigma = \overline{0,n-1},\ k = \overline{0,1}\right)$$

şeklindedir. Bunların yanı sıra her yerde

$$p_{\sigma 1} + p_{\sigma+1\,0} = (p)_\sigma$$

olarak tanımlanmaktadır.

Burada bu (2.3.8) kuadratik formülün sağ tarafıda bizim için gereklidir. Benzer durumları [6] da görebiliriz. Eğer [6]'daki gibi her v için $\left(v=0,1,\ldots,n-1\right)$ için $\left(G_{nv}\varphi\right)\left(\tau_{v}\right),\left(G_{nv+1}\varphi\right)\left(\tau_{v+1}\right)$ değerleri tarafından lineer interpolasyon yapılabilirse [6] daki gibi aynı doğrultuda keyfi $t_0 \in L$ için belli $\left(G_n\varphi\right)\left(t_0\right)$ operatör fonksiyonları tarafından $\left(S\varphi\right)\left(t_0\right)$ operatör fonksiyonunun yaklaşımını elde edebiliriz. Bu operatör fonksiyonları 1 indeksli Hölder sınıfına aittir.

Böylece (4) denkleminde φ reel fonksiyonu için

$$\varphi\left(t_0\right)-\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi\left(t\right)}{t-t_0}dt \cong 2\varphi\left(t_0\right)-\mathrm{Re}\left(G_n\varphi\right)\left(t_0\right),\ t_0 \in L$$

yaklaşımı kullanılabilir. Bu denklemde

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi\left(t\right)}{t}dt$$

integrali

$$\left(G_n\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)=\left(p\right)_{v-1}\frac{\tau_{v+1}\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)-\tau_v\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{v+1}-\tau_v}+\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq v+1}}^{n-1}\left(p\right)_{\sigma}\frac{\tau_{\sigma+1}\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\tau_v\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}$$

kuadratik toplamı ile yer değiştirebilir.

Böylece (2.3.4) ifadesine yaklaşan

$$\left(K_n\varphi_n\right)\left(t_0\right)\equiv\varphi_n\left(t_0\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(G_n\varphi_n\right)\left(t_0\right)+G_n^{(0)}\left(\varphi_n\right)\right]=\frac{1}{2}f\left(t_0\right) \qquad (2.3.9)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (2.3.9) ve (2.3.4) denklemleri alışılmış norm ile $H_\beta\left(0<\beta<1\right)$ Hölder uzayında göz önüne alınacaktır. Bundan sonraki araştırmaların amacı (2.3.9) denkleminden yola çıkarak

$$\left(K_n\varphi_n\right)\left(t_0\right)=0$$

homojen dekleminin yeteri kadar büyük n ler için sadece tek bir sıfır çözümüne sahip olduğunu göstermek olacaktır.

Aşağıdaki hazırlık aşaması da bu durumun ispatı için kullanılacak. Bunun için öncelikle

$$\left(G_n\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)=\lim_{t_0\to\tau_v}\left(G_n\varphi_n\right)\left(t_0\right)$$

olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$\left(G_{nv}^{(2)}\varphi_n\right)\left(t_v\right),\left(G_{nv+1}^{(2)}\varphi_n\right)\left(\tau_{v+1}\right)\quad\left(v=0,1,2,...,n-1\right)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bazı elemanter dönüşümlerden sonra yukarıdaki ifadeden

$$\left(G_{nv}^{(1)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)=\left\{\left(p\right)_{v-1}\frac{\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{v+1}-\tau_v}+\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq v-1}}^{n-1}\left(p\right)_\sigma\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\right\}\tag{2.3.10}$$

ve

$$\left(p\right)_{v-1}\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)+\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq v-1}}^{n-1}\left(p\right)_\sigma\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)=\left(p\right)_{v-1}\left[\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right]+G_n^{(0)}\left(\varphi_n\right)$$

olmak üzere

$$\left(G_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)=\left(G_{nv}^{(1)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)+\left(p\right)_{v-1}\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)+\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq v\ 1}}^{n-1}\left(p\right)_\sigma\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)$$

elde edilir.

Diğer bir deyişle $\Gamma_n\left(\varphi_n\right)$ kuadratik formülün kalan terimi olmak üzere

$$G_n^{(0)}\left(\varphi_n\right)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_n\left(t\right)}{t}dt-r_n\left(\varphi_n\right)$$

yazılır.

Aşağıdaki $\left(G_{nv}^{(2)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)$ ifadesi

$$\left(G_{nv}^{(2)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)=\left(p\right)_{v-1}\left[\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right]$$

şeklindedir.

Bu durumda

$$\left(G_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)+G_n^{(0)}\left(\varphi_n\right)=\left(G_{nv}^{(1)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)+\left(G_{nv}^{(2)}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)+\frac{2}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_n(t)}{t}dt-2r_n\left(\varphi_n\right) \qquad (2.3.11)$$

ifadesi elde edilir. (2.3.11) eşitliği kullanılarak

$$\varphi_n\left(t_0\right)-\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_n(t)}{t}dt-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\left(G_n^{(1)}\varphi_n\right)\left(t_0\right)+\left(G_n^{(2)}\varphi_n\right)\left(t_0\right)-2r_n\left(\varphi_n\right)\right\}=0 \qquad (2.3.12)$$

denklemini yazabiliriz.

Burada $\left(G_n^{(1)}\varphi_n\right)\left(t_0\right)$ ve $\left(G_n^{(2)}\varphi_n\right)\left(t_0\right)$ ifadeleri sırasıyla

$$\left(G_{nv}^{(1)}\varphi_n\right)\left(t_v\right),\left(G_{nv+1}^{(1)}\varphi_n\right)\left(t_{v+1}\right)$$

ve

$$\left(G_{nv}^{(2)}\varphi_n\right)\left(t_v\right),\left(G_{nv+1}^{(2)}\varphi_n\right)\left(\tau_{v+1}\right) \quad \left(v=0,1,2,...,n-1\right)$$

değerleri tarafından oluşturulan lineer interpolatörlerini gösterir.

Lemma 2.3.1. Eğer (2.3.12) nin çözümü için $\varphi_n\left(\tau_0\right)=\varphi_n\left(\tau_1\right)=...=\varphi_n\left(\tau_n\right)$ sağlanırsa $\varphi_n\left(\tau_n\right)\equiv 0$ dır.

$G_n^{(1)}$ ve $G_n^{(2)}$ nin yapısından dolayı $G_n^{(1)}\left(\varphi_n;t_0\right)=0,\ G_n^{(2)}\left(\varphi_n;t_0\right)=0$ eşitlikleri φ_n fonksiyonları için doğrudur. (2.3.12) denkleminden

$$\varphi_n\left(t_0\right)-\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_n(t)}{t}dt+\operatorname{Re}r_n\left(\varphi_n\right)=0 \qquad (2.3.13)$$

elde edilir. Böylece $\varphi_n\left(t_0\right)\equiv sabit$ olur. $r_n\left(\varphi_n\right)=0$ şartını sağlayan fonksiyonlar için (2.3.13) denkleminden $\varphi_n\left(t_0\right)\equiv 0$ bulunur. Diğer taraftan $h_\beta\left(\varphi_n\right)$ ve $h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)$ yi sırasıyla

$$h_\beta\left(\varphi_n\right)=\sup_{t_1,t_2\in L}\frac{\left|\varphi_n\left(t_1\right)-\varphi_n\left(t_2\right)\right|}{\left|t_1-t_2\right|^\beta},\quad h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)=\max_{\substack{0\le v,j\le n+1\\ j\ne v}}\frac{\left|\varphi_n\left(\tau_j\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right|}{\left|\tau_j-\tau_v\right|^\beta}$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 2.3.2. Yeteri kadar büyük n değerleri için

$$h_\beta(\varphi_n) = O(\ln n) h_{n\beta}(\varphi_n) \qquad (2.3.14)$$

dır.

Eğer L nin düzgünlüğü ve $\max_{\sigma,k}|p_{\sigma k}| = O(n^{-1})$ olduğu kullanılırsa (2.3.12) den lemma ispatlanır.

Lemma 2.3.3. Yeteri kadar büyük n değerleri için

$$\max_{t_0\in L}|\varphi_n(t_0)| = O(n^{-\beta}\ln^2 n) h_{n\beta}(\varphi_n) \qquad (2.3.15)$$

dır.

(2.3.15) ifadesinin ispatı için, singüler integral yaklaşım metoduyla elde edilebilen hata tahminlerinin [7]'dekine benzer şekilde olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun yanı sıra $r_n(\varphi_n)$ için $O(n^{-\beta})h_\beta(\varphi_n)$ tahmini kolay bir şekilde bulunabilir. Bütün bunlardan ve (2.3.14) den $\varphi_n \in H_\beta$ (çözüm) fonksiyonu için

$$\max_{t_0\in L}|R_n(\varphi_n)(t_0)| = O(n^{-\beta}\ln^2 n) h_{n\beta}(\varphi_n)$$

doğrudur. Burada $(R_n\varphi_n)(t_0) = (K\varphi_n)(t_0) - 2(K_n\varphi_n)(t_0)$, (2.3.4) denkleminin sağ tarafının yaklaşımının kalan terimidir. Böylece (2.3.12) den

$$(K\varphi_n)(t_0) = (R_n\varphi_n)(t_0)$$

elde edilir.

L eğrisinin yukarıdaki özellikleri ve (2.3.4) denkleminin çözülebilirliği dikkate alındığında $K : H_\beta \to H_\beta$ operatörü sürekli terslenebilirdir. Bununla birlikte [26] çalışmasından aynı şartlar altında K operatörü C-sürekli fonksiyonların uzayında aynı özelliklere sahiptir. Böylece (2.3.15) eşitliği doğrudur.

Şimdi $h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)$ ifadesinin tahminine bakalım. $\left(j_n\right)$ dizisi $n\to\infty$ iken $j_n\to\infty$ $\left(n^{-1}j_n\to 0\right)$ olacak şekilde doğal sayılar kümesinden bir dizi olsun. Ayrıca $\beta\in\left(0,1\right)$ ve keyfi $\delta\in(0,1]$ için

$$j_n^{-\beta}\ln^2 n\to 0,\quad n^{-\beta}j_n^{\beta+\delta}\to 0\;\left(n\to\infty\right) \tag{2.3.16}$$

olsun. (2.3.15) ifadesini kullanarak, $\left|j-v\right|>j_n$ olduğunda $n\to\infty$ iken

$$\max_{\left|j-v\right|>j_n}\frac{\left|\varphi_n\left(\tau_j\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right|}{\left|\tau_j-\tau_v\right|^{\beta}}=O\left(j_n^{-\beta}\ln^2 n\right)h_{n\beta}\left(\varphi_n\right) \tag{2.3.17}$$

elde edilir.

$\left|j-v\right|\le j_n$ için $h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)$ ifadesinin tahmininde $j=v+\lambda\;(\lambda=\lambda(n)),\;1\le\lambda\le j_n$ olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

(2.3.12) den

$$\begin{aligned}&\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\\&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\left(G^{(1)}_{nv+\lambda}\varphi_n\right)\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\left(G^{(1)}_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)+\left(G^{(2)}_{nv+\lambda}\varphi_n\right)\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\left(G^{(2)}_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

elde edilir. Bu durumda $p_{\sigma k}$ katsayılarının tahmininden ve $G^{(2)}_{nv}$ ifadesinden

$$\begin{aligned}\left(G^{(2)}_{nv+\lambda}\varphi_n\right)\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\left(G^{(2)}_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)&=O\left(n^{-1}\right)\left\{\left|\tau_{v+\lambda+1}-\tau_{v+\lambda}\right|^{\beta}+\left|\tau_{v+1}-\tau_v\right|^{\beta}\right\}h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\\&=O\left(n^{-1-\beta}\right)h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

olduğu görülür. $\left(G^{(1)}_{nv}\varphi_n\right)\left(\tau_v\right)$ için (2.3.10) ifadesindeki $p_{\sigma k}$ katsayıları için

$$p_{\sigma k}=\frac{1}{\tau_v}p_\sigma+p^{v}_{\sigma k}$$

dönüşümünü kullanacağız. Burada

$$p_\sigma=\frac{1}{\pi i}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}l_{\sigma k}\left(t\right)dt\,\frac{1}{2\pi i}\left(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma\right)\;\left(k=\overline{0,1}\right)$$

(2.3.6) ifadesindeki katsayılar ve

$$p^{v}_{\sigma k}=\frac{1}{\pi i}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau_v}\right)l_{\sigma k}\left(t\right)dt=\frac{1}{\tau_v\pi i}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\left(\tau_v-t\right)\frac{l_{\sigma k}\left(t\right)}{t}dt$$

dır. $\left(G_{n\nu+\lambda}^{(1)}\varphi_n\right)\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)$ için bu dönüşümler göz önüne alındığında

$$\left(G_{n\mu}^{(1)}\varphi_n\right)\left(\tau_\mu\right)=\left(Q_{n\mu}\varphi_n\right)\left(\tau_\mu\right)+\left(Q_n^\mu\varphi_n\right)\left(\tau_\mu\right)\ \left(\mu=\nu,\nu+\lambda\right)$$

yazılır. Burada $\left(Q_{n\mu}\varphi_n\right)\left(\tau_\mu\right)=\left(Q_n\varphi_n\right)\left(t_0\right)\Big|_{t_0=\tau_\mu}$, (2.3.6) daki toplam olup $\left(Q_n^\mu\varphi_n\right)\left(\tau_\mu\right)$ $\left(\mu=\nu,\nu+1\right)$ da $p_{\sigma k}$ katsayılarının $p_{\sigma k}^\mu$ ile yer değiştirmesiyle oluşan $G_{n\mu}^{(1)}(\tau_\mu)$ dan elde edildi. [6]'da (2.3.16) şartındaki δ nın L eğrisinin Lyapunov indeksi olması durumunda $\varepsilon_n,\varepsilon_{n0}\to 0\ (n\to\infty)$ iken

$$\frac{\operatorname{Re}\left\{\left(Q_{n\nu+\lambda}\varphi_n\right)\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)-\left(Q_{n\nu}\varphi_n\right)\left(\tau_\nu\right)\right\}}{\left|\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu\right|^\beta}=\left(1+\varepsilon_n\right)\frac{\varphi_n\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)-\varphi_n\left(\tau_\nu\right)}{\left|\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu\right|^\beta}+\varepsilon_{n0}h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\qquad(2.3.20)$$

olduğu gösterilmiştir.

Diğer taraftan $\left(Q_n^{\nu+\lambda}\varphi_n\right)\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)-\left(Q_n^\nu\varphi_n\right)\left(\tau_\nu\right)$ ifadesini göz önüne alalım. $(p_\mu)_\sigma = p_{\sigma 1}^\mu + p_{\sigma+10}^\mu \quad (0\le\sigma\le n-1;\ \mu=\nu,\nu+\lambda)$ olmak üzere ilk tahminde

$$\sum=\tau_{\nu+\lambda}\left[\left(p_{\nu+\lambda}\right)_{\nu+\lambda-1}\frac{\varphi_n\left(\tau_{\nu+\lambda+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)}{\tau_{\nu+\lambda+1}-\tau_{\nu+\lambda}}+\sum_{\substack{\sigma=\nu-2j_n\\ \sigma\neq\nu+\lambda-1}}^{\nu+2j_n}\left(p_{\nu+\lambda}\right)_\sigma\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_{\nu+\lambda}\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_{\nu+\lambda}}\right]$$
$$-\tau_\nu\left[\left(p_\nu\right)_{\nu-1}\frac{\varphi_n\left(\tau_{\nu+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_\nu\right)}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu}+\sum_{\substack{\sigma=\nu-2j_n\\ \sigma\neq\nu-1}}^{\nu+2j_n}\left(p_\nu\right)_\sigma\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_\nu\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_\nu}\right]$$

yazılır. Burada ve ilerleyen tahminlerde L eğrisinin düzgün ve bazı bitiş noktalarında oluşan kiriş için de L nin en küçük yayını gösterdiğini kabul edeceğiz. Özellikle bu anlamda σ,ν nin bağımsız değişken $O\left(n^{-2}\right)$ nın da bir sabit olması göz önüne alındığında $(p_\nu)_\sigma=O\left(n^{-2}\right)\left|\sigma-\nu\right|$ olur.

Böylece

$$\tau_v\left[\left(p_v\right)_{v-1}\frac{\varphi_n\left(\tau_{v+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{v+1}-\tau_v}+\sum_{\substack{\sigma=v-2j_n\\ \sigma\neq v-1}}^{v+2j_n}\left(p_v\right)_\sigma\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\right]$$

$$=\left[O\left(n^{-1-\beta}\right)+O\left(n^{-2}\right)\sum_{\substack{\sigma=v-2j_n\\ \sigma\neq v-1}}^{v+2j_n}\frac{\left|\sigma-v\right|}{n^{-1+\beta}\left|\sigma+1-v\right|^{1-\beta}}\right]h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)$$

$$=\left[O\left(n^{-1-\beta}\right)+O\left(n^{-1-\beta}\right)\sum_{\substack{\sigma=-2j_n\\ \sigma\neq -1}}^{2j_n}\frac{\left|\sigma\right|}{\left|\sigma+1\right|^{1-\beta}}\right]h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)=O\left(n^{-1-\beta}\right)h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\sum_{\sigma=1}^{j_n}\sigma^\beta$$

$$=O\left(n^{-1-\beta}j_n^{1+\beta}\right)h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)$$

yazılır. $\tau_{v+\lambda}$ çarpanı ile alakalı toplam için aynı tahminin elde edildiğini aşağıda göreceğiz.

Dolayısıyla,

$$\sum=O\left(n^{-1-\beta}j_n^{1+\beta}\right)h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\quad\left(1\leq\lambda\leq j_n\right)\tag{2.3.21}$$

olur.

Kalan toplam ise

$$\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}+\sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)}\right)\left\{\left[\tau_{v+\lambda}\left(p_{v+\lambda}\right)_\sigma-\tau_v\left(p_v\right)_\sigma\right]\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_{v+\lambda}}\right.$$
$$\left.+\tau_v\left(p_v\right)_\sigma\left[\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_{v+\lambda}}-\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\right]\right\}\tag{2.3.22}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\alpha_n=\left[n/2\right]$ olmak üzere $\alpha_n'=\begin{cases}\alpha_n-1; & n \text{ çift ise}\\ \alpha_n; & n \text{ tek ise}\end{cases}$ dır.

$\tau_{v+\lambda}p_{\sigma k}^{v+\lambda}-\tau_v p_{\sigma k}^{v}=\left(\tau_{v+\lambda}-\tau_v\right)p_{\sigma k}\ \left(k=\overline{0,1}\right)$ olduğundan dolayı v ve σ ya göre düzgün olarak

$$\tau_{v+\lambda}\left(p_{v+\lambda}\right)_\sigma-\tau_v\left(p_v\right)_\sigma=O(n^{-2})\lambda$$

olduğu görülür. L nin düzgünlüğünden dolayı

$$\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n} = O\left(n^{-1-\beta}\right)\lambda h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\sum_{\sigma=2j_n+1}^{\alpha_n}\frac{1}{\left(\sigma+1-\lambda\right)^{1-\beta}} = O\left(n^{-1}\right)\lambda h_{n\beta}\left(\varphi_n\right) \tag{2.3.23}$$

elde edilir. Benzer terimler ile $\sum\limits_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)}$ için benzer tahminler elde edilebilir.

Ayrıca, (2.3.22) ifadesinde τ_v çarpanı ile alakalı toplam

$$\begin{aligned}&\tau_v\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}+\sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)}\right)\left(p_v\right)_\sigma\left\{\left(\tau_{v+\lambda}-\tau v\right)\frac{\varphi_n\left(\tau_{\sigma+1}\right)-\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)}{\left(\tau_{\sigma+1}-\tau_v\right)\left(\tau_{\sigma+1}-\tau_{v+\lambda}\right)}\right.\\&\left.-\frac{\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\right\}\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

olur.

İlk olarak $\left(\tau_{v+\lambda}-\tau_v\right)$ çarpanı ile alakalı toplamın tahminine bakalım. Bunun için $\sum\limits_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}$ toplamını göz önüne alalım.

Böylece istenilen tahmin

$$O\left(n^{-1-\beta}\right)\lambda h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}\frac{\sigma-\lambda}{\left(\sigma+1-v-\lambda\right)\left(\sigma+1-v-\lambda\right)^{1-\beta}}$$

ve sonuçta

$$O\left(n^{-1-\beta}\right)\lambda h_{n\beta}\left(\varphi_n\right)\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}\frac{1}{\left(\sigma+1-\lambda\right)^{1-\beta}} = O\left(n^{-1}\right)\lambda h_{n\beta}\left(\varphi_n\right) \tag{2.3.25}$$

yazılır. (2.3.24)'de son ifade $\left(\tau_{v+\lambda}-\tau_v\right)$ çarpanı ile alakalı toplamı için bir tahmin belirtir. Dolayısıyla, $p_{\sigma k}=\frac{1}{\tau_v}p_\sigma+p_{\sigma k}^v$ $\left(k=\overline{0,1}\right)$ kullanılarak (2.3.24) deki kalan terim için

$$\begin{aligned}&-\tau_v\left[\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right]\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}+\sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)}\right)\frac{\left(p_v\right)_\sigma}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\\&=\left[\varphi_n\left(\tau_{v+\lambda}\right)-\varphi_n\left(\tau_v\right)\right]\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n}+\sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)}\right)\left\{\frac{p_\sigma+p_{\sigma+1}}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}-\tau_v\frac{\left(p\right)_\sigma}{\tau_{\sigma+1}-\tau_v}\right\}\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

yazılır.

Diğer taraftan Sanikidze ([6]) $n \to \infty$ için

$$\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n} + \sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)} \right) \frac{p_\sigma + p_{\sigma+1}}{\tau_{\sigma+1} - \tau_v} \to \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{dt}{t - \tau_v}$$

olduğunu gösterdi.

Benzer şekilde $n \to \infty$ için

$$\left(\sum_{\sigma=v+2j_n+1}^{v+\alpha_n} + \sum_{\sigma=v-\alpha_n'}^{v-(2j_n+1)} \right) \frac{(p)_\sigma}{\tau_{\sigma+1} - \tau_v} \to \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{dt}{t(t - \tau_v)}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Son singüler integrallerin değerleri dikkate alındığında, (2.3.26) eşitliğindeki toplam

$$2\left[\varphi_n(\tau_{v+\lambda}) - \varphi_v(\tau_v)\right](1+\varepsilon_{n1}),\ \varepsilon_{n1} \to 0\ (n \to \infty)$$

şeklinde olur.

(2.3.19), (2.3.21), (2.3.23), (2.3.25) tahminlerini ve (2.3.16) şartlarını kullanarak

$$\frac{\left(Q_n^{v+\lambda}\varphi_n\right)(\tau_{v+\lambda}) - \left(Q_n^v\varphi_n\right)(\tau_v)}{\left|\tau_{v+\lambda} - \tau_v\right|^\lambda} \quad (1 \le \lambda \le j_n)$$

ifadesi için bir asimptotik temsil elde edilir. Bu durumda bu λ için (2.3.18) ve (2.3.20) ifadelerine göre

$$\frac{\left(Q_n^{v+\lambda}\varphi_n\right)(\tau_{v+\lambda}) - \left(Q_n^v\varphi_n\right)}{\left|\tau_{v+\lambda} - \tau_v\right|^\beta} = \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon_n^{(1)}\right)\frac{\varphi_n(\tau_{v+\lambda}) - \varphi_n(\tau_v)}{\left|\tau_{v+\lambda} - \tau_v\right|^\beta} + \varepsilon_n^{(2)} h_{n\beta}(\varphi_n)$$

bulunur. Burada $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)} \to 0\ (n \to \infty)$ dır. Son olarak (2.3.17) den yeteri kadar büyük n ler için $h_{n\beta}(\varphi_n) = 0$ ve Lemma 1.1 den $\varphi_n(t_0) = 0$ elde edilir.

Teorem 2.3.1. Belli bir n değerlerinden başlayarak, keyfi reel $f \in H_\beta$ fonksiyonları için (2.3.9) denklemi tek bir çözüme sahiptir.

Sanikidze ([29]) nin bulgularına benzer olarak, yaklaşık çözümün hata tahminlerini elde etmemize imkân sağlayarak $\left\|K_n^{-1}\right\| = O(\ln n)\ (n \to \infty)$ olduğu gösterilebilir. Özellikle, eğer $\varphi(t)$ fonksiyonu L nin sınırında ikinci mertebeden sınırlı ve türevlenebilirse bu durumda H_β uzayında $O(n^{-2+\beta}\ln^2 n)$ tahminine varılabilir.

2.4 Kapalı Eğri Üzerinde Singüler İntegraller için Yaklaşım Şeması-2

Tezin bu kısmında Mostefa Nadir, B. Lakehali'nin çalışmalarından yararlanılmıştır [12]. Bu çalışmanın amacı Γ düzgün bir eğri t ve t_0 noktaları Γ üzerinde noktalar $a(t), b(t), k(t,t_0)$ ve $f(t)$ fonksiyonları Γ üzerinde tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere

$$a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt+\int_\Gamma k(t,t_0)\varphi(t)dt = f(t_0) \tag{2.4.1}$$

şeklindeki Cauchy çekirdekli singüler integral denklemin nümerik çözümü için bazı nümerik şemaları oluşturmak olacaktır.

Bu şemalar oluşturulurken, nümerik integrasyon operatörlerin bir dizisi tarafından tanımlanan Cauchy çekirdekli

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt,\ \ t,t_0\in\Gamma \tag{2.4.2}$$

şeklindeki singüler integral operatörün yaklaşımı için kuadratik formül kullanıldı.

Verilen bir $\varphi(t)$ yoğunluk fonksiyonu için bu integralin esas değerinin varlığı hususunda bilinen süreklilikten daha fazlasına ihtiyaç vardır. Diğer bir deyişle, $\varphi(t)$ yoğunluk fonksiyonu $H(\mu)$ Hölder şartını sağlamak zorundadır. Böylece Cauchy çekirdekli birinci çeşit singüler integral operatörler sıfır indekse sahiptir. Özellikle birinci çeşit bire-bir singüler integral operatörler bire-bir ve üzerine olup sınırlı tersi vardır.

$s \in [a,b]$ olmak üzere $t = t(s) = x(s) + iy(s)$, s parametresine göre Γ eğrisinin parametrik denklemi olsun. n keyfi yeteri kadar büyük bir doğal sayı olmak üzere $[a,b]$ aralığını

$$[a,b] = \{a = s_0 < s_1 < ... < s_n = b\}$$

şeklinde n tane eşit alt aralığa bölelim.

Böylece

$$S_\sigma = a + \sigma \frac{1}{n}, \sigma = 0,1,...n$$

için $[a,b]$ aralığı $I_{\sigma+1} = [s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ şeklinde eşit aralıklara bölünebilir.

Bunun yanı sıra m doğal bir sayı, $\{x_k\}$ da [0,1) aralığına alt artan dizinin elemanları olmak üzere $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ alt aralıkların her biri

$$s_{\sigma k} = s_\sigma + hx_k \ , \quad h = \frac{1}{n}, k = 0,1,...,m$$

noktaları tarafından tekrar alt aralıklara bölünebilir. Diğer taraftan

$$t_\sigma = t(s_\sigma), t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}); \sigma = 0,1,...n; k = 0,1,...m$$

olsun.

Farzedelim ki; $\sigma, v = 0,1,...,n-1$ için t ve t_0 noktaları $t_\sigma \overset{\frown}{t}_{\sigma+1}$ ve $t_v \overset{\frown}{t}_{v+1}$ yaylarına ait olsun.

$\sigma, v = 0,1,...,n-1$ keyfi sayıları için $\beta_{\sigma v}(\varphi; t, t_0)$ fonksiyonunu

$$\beta_{\sigma v}(\varphi; t, t_0) = U(\varphi; t, \sigma) - U(\varphi; t_0, v) \qquad (2.4.3)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada φ yoğunluk fonksiyonu $H(\mu)$ sınıfından olup Γ eğrisi üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ve $U(\varphi; t, \sigma)$ da Γ eğrisinin $[t_\sigma, t_{\sigma+1})$ alt aralıkları üzerinde $\varphi(t)$ yoğunluk fonksiyonun yaklaşımı olmak üzere

$$U(\varphi,t,\sigma)=\frac{t_{\sigma(k+1)}-t}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi(t_{\sigma k})+\frac{t-t_{\sigma k}}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right),\quad k=0,1,\ldots,m-1$$

şeklinde verilir. Eğer $\sigma=v$ alınırsa $t-t_0=0$ olur. Bu durumda $\beta_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonu

$$\beta_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0)=U(\varphi;t,\sigma)-U(\varphi;t_0,\sigma) \tag{2.4.4}$$

şeklinde olur ve $(t-t_0)$ ı içerir.

Şimdi

$$\psi_{\sigma v}(\varphi;t,t_0)=\begin{cases}\varphi(t_0)+\beta_{\sigma v}(\varphi;t,t_0),\ t\in t_\sigma t_{\sigma+1},\ t_0\in t_v t_{v+1}\\ \sigma=0,1,\ldots,n-1,\ v=0,1,\ldots,n-1\end{cases} \tag{2.4.5}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda (2.4.2) de tanımlanan

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$$

singüler integrali

$$S(\varphi;t_0)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\psi_{\sigma v}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt=\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\frac{\beta_{\sigma v}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt \tag{2.4.6}$$

şeklinde olur.

Teorem 2.4.1: Γ düzgün yönlü bir eğri ve φ de $H(\mu)$ Hölder koşulunu sağlayan bir yoğunluk fonksiyonu olsun.

Bu durumda

$$\left|F(t_0)-S(\varphi;t_0)\right|\le\max\left(\frac{C\ln(mn)}{(mn)^\mu},\frac{C}{n^\mu}\right),\quad (n,m>1)$$

sağlanır. Burada C sabiti sadece Γ eğrisine bağlıdır.

İspat: Herhangi $t\in t_\sigma t_{\sigma+1}$ ve $t_0\in t_\sigma t_{\sigma+1}$ $(\sigma\ne v)$ için

$$\varphi(t)-\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)=\varphi(t)-\varphi(t_0)$$
$$-\left\{\frac{t_{\sigma(k+1)}-t}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi(t_{\sigma k})+\frac{t-t_{\sigma k}}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\right. \tag{2.4.7}$$
$$\left.-\frac{t_{\nu(k+1)}-t_0}{t_{\nu(k+1)}-t_{\nu k}}\varphi(t_{\nu k})-\frac{t_0-t_{\nu k}}{t_{\nu(k+1)}-t_{\nu k}}\varphi\left(t_{\nu(k+1)}\right)\right\}$$

yazılır.

Eğer $\sigma=\nu$ ise

$$\varphi(t)-\psi_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0)=\varphi(t)-\varphi(t_0)$$
$$-\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\left(\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)-\varphi(t_{\sigma k})\right) \tag{2.4.8}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (2.4.7) ve (2.4.8) ifadelerinden

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)-\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt=\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma+1}}\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right.$$
$$-\left\{\frac{t_{\sigma(k+1)}-t}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi(t_{\sigma k})+\frac{t-t_{\sigma k}}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\right. \tag{2.4.9}$$
$$\left.\left.-\frac{t_{\nu(k+1)}-t_0}{t_{(k+1)}-t_k}\varphi(t_{\nu k})-\frac{t_0-t_{\nu k}}{t_{\nu(k+1)}-t_{\nu k}}\varphi\left(t_{\nu(k+1)}\right)\right\}\frac{1}{t-t_0}\right\}dt$$

bulunur.

(2.4.9) ifadesinin tahmini $t_0\in t_\sigma\widehat{t}_{\sigma+1}$ ve $\sigma\neq\nu$ için

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\nu}}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_{\sigma k}t_{\sigma k+1}}\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right.\\ \displaystyle-\left\{\frac{t_{\sigma(k+1)}-t}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi(t_{\sigma k})+\frac{t-t_{\sigma k}}{t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\right.\\ \displaystyle\left.\left.-\frac{t_{\nu(k+1)}-t_0}{t_{\nu(k+1)}-t_{\nu k}}\varphi(t_{\nu k})-\frac{t_0-t_{\nu k}}{t_{\nu(k+1)}-t_{\nu k}}\varphi\left(t_{\nu(k+1)}\right)\right\}\frac{1}{t-t_0}\right\}dt\end{array}\right|=O\left(\frac{\ln mn}{m^\mu n^\mu}\right)$$

şeklinde olur. Yukarıdaki tahmin $H(\mu)$ Hölder uzayının bir elemanı olan φ yoğunluk fonksiyonu yardımıyla elde edilir. Bunun yanı sıra

$$\max_{t_0 \in t_\nu t_{\nu+1}} \left| O\left(\frac{1}{m^\mu n^\mu}\right) \sum_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma\neq\nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{\sigma k} t_{\sigma(k+1)}} \frac{dt}{t-t_0} \right| = O\left(\frac{\ln mn}{m^\mu n^\mu}\right)$$

olduğunu görmek kolaydır.

Ayrıca, $\sigma = \nu$, $\varphi \in H(\mu)$ ve Γ nın düzgün eğri olması durumunda

$$\left| \int_{t_\nu t_{\nu+1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} dt \right| \leq A \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \left| s-s_0 \right|^{\mu-1} ds = O\left(n^{-\mu}\right)$$

elde edilir.

2.5 Kapalı Eğri Üzerinde Singüler İntegraller için Yaklaşım Şeması-3

Bu çalışmada parçalı düzgün bir integrasyon yolu üzerinde bir singüler integral denklemin yaklaşık çözümü için bir yöntem verilirken Mostefa Nadir ve D.Jemal Antidze'nin çalışmalarından yararlanıldı [9]. Bir sonlu aralık üzerinde, özellikle [-1,1] aralığı üzerinde Cauchy SİD i çözmek için bir çok çalışma nümerik çözüm kullanılarak yapılmıştır. Cauchy tipli singüler integral denklemler elastik teorisinde airodinamikler, elektrodinamikler, teknoloji ve fen bilimlerinin diğer dallarındaki problemleri çözmede sık sık kullanılır. Aynı zamanda matematiksel fizikte sınır değer problemlerin geniş bir sınıfının çözümü

$$f(t_0) = a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0} d_t + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma k(t,t_0)\varphi(t)\, dt \qquad (2.5.1)$$

şeklindeki singüler integral denklemlere indirgenebilir. Burada Γ, herhangi parçalı düzgün bir eğri ([9]), t_0 *ve* t noktaları Γ eğrisi üzerinde noktalar, $a(t), b(t)$ *ve* $k(t,t_0)$ fonksiyonları $H(\alpha), 0 < \alpha \leq 1$ Hölder şartını sağlayan Γ üzerinde tanımlı bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, Γ üzerindeki her yerde $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ dır. Bilindiği gibi yukarıdaki (2.5.1) denkleminin esas kısmının integrali $H_\alpha(\Gamma)$ Hölder şartını sağlayan bütün φ yoğunluk fonksiyonları için vardır. Aynı zamanda bu integral bütün $\varphi \in L^2(\Gamma)$ fonksiyonları için de vardır.

Bu çalışmada Sandıkıdze ([8]) tarafından öne sürülen Cauchy tipli singüler integral denklemlerin değerlendirilmesi için kuadratik formülün şekli verilmiştir. Bu kuadratik formül $\varphi(x)$ yoğunluk fonksiyonunun klasik Langrance interpolasyonu üzerinde inşa edilir.

Cauchy singüler integral denklemi nümerik olarak çözmek için uygun bir kuadratik formül kullandıktan sonra Lineer cebirsel denklemler sistemine indirgenebilen bir yöntem vereceğiz.

Aşağıda ([8])

$$\begin{aligned} \varphi(t) \cong \psi_{\sigma v}(t) = \varphi(t_0) + \sum_{k=0}^{m-1} l_{\sigma k}(t)\varphi(t_{\sigma k})\frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \\ + \sum_{k=0}^{m-1} l_{\sigma k}(t) A_v(t_0)\frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}}, \quad t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, \quad t_0 \in\in \tau_v \tau_{v+1} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

ifadesindeki yoğunluk $\varphi(t)$ fonksiyonu için $\psi_{\sigma v}(t)$ yaklaşımını tanımlayalım.

Burada

$$l_{\sigma,k}(t) = \frac{\omega(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'(t_{\sigma k})}, \quad \omega(t) = \prod_{k=0}^{m-1}(t-t_{\sigma k})$$

ve

$$A_v(t_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega(t_0)}{(t_0-t_{vk})\omega'(t_{vk})}\varphi(t_{vk})$$

şeklindedir.

Yoğunluk $\varphi(t)$ fonksiyonunun ve $k(t,t_0)$ çekirdeğinin klasik Langrance interpolasyonunu kullanarak singüler integral denklemin düzgün kısmı

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} k(t,t_0)\varphi(t)\,dt \cong \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega(t)\,k(t_{\sigma k},t_0)\varphi(t_{\sigma k})}{(t-t_{\sigma k})\,\omega'(t_{\sigma k})}dt \tag{2.5.3}$$

şeklinde verilecektir.

(2.5.3) ün sağ tarafı

$$\alpha_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i\omega'(t_{\sigma k})}\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{\omega(t)}{t-t_{\sigma k}}dt$$

olmak üzere $\alpha_{\sigma k}$ 'nın ve $k(t,t_0)\varphi(t)$ fonksiyon çarpımının ortak bir ifadesiyle temsil edilebilir. Böylece

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} k(t,t_0)\varphi(t)\,dt \cong \sum_{\substack{\sigma=0\\ t_0\neq t_{\sigma k}}}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\sigma k}\,k(t_{\sigma k},t_0)\varphi(t_{\sigma k}) \tag{2.5.4}$$

yazılır.

(2.5.2) yaklaşım formülünü göz önüne alınarak (2.5.1) SID in karakteristik kısmının singüler integrali

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \cong \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_{\sigma v}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt$$

$$=\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'(t_{\sigma k})}.\frac{A_v(t_0)}{t_0-t_{\sigma k}}dt-\int_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'(t_{\sigma k})}.\frac{\varphi(t_{\sigma k})}{t_0-t_{\sigma k}}dt\right)$$

şeklinde yazılır.

$\sigma \neq v$ için yukarıdaki ifadeden

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_{\sigma k}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}d_t = \varphi(t_0)+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}\left(A_v(t_0)-\varphi(t_{\sigma k})\right)\right)$$

$$=\varphi(t_0)+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}\times\sum_{\substack{p=0\\ t_0\neq t_{vp}}}^{m-1}\frac{\omega(t_0)}{(t_0-t_{vp})\omega'(t_{vp})}\varphi(t_{vp})-\varphi(t_{\sigma k})\right)$$

ve $\sigma = v$ için kolayca görülür ki

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}\left(\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\omega(t_0)}{(t_0-t_{vp})\omega'(t_{vp})}\varphi(t_{vp})-\varphi(t_{\sigma k})\right)\right) \tag{2.5.5}$$

ifadesi

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{k=0\\ t_0\neq t_{\sigma k}}}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}\left(\sum_{\substack{p=0\\ p\neq k,t_0\neq t_{\sigma p},\omega(t_0)\neq 0}}^{m-1}\frac{\omega(t_0)}{(t_0-t_{\sigma p})\omega'(t_{\sigma p})}\varphi(t_{\sigma p})-\varphi(t_{\sigma k})\right)\right)$$

şeklinde olur.

Son olarak $\sigma, v=0,1,...,n-1\ ve\ i=0,1,...,m-1$ için (2.5.5) ifadesi

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{k=0\\ i\neq k}}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_{\sigma i}-t_{\sigma k}}\left(\sum_{\substack{p=0\\ p\neq k,p\neq i}}^{m-1}\frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{m-1}(t_{\sigma i}-t_{\sigma j})}{(t_{\sigma i}-t_{\sigma p})\omega'(t_{\sigma p})}\varphi(t_{\sigma p})-\varphi(t_{\sigma k})\right)\right)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.5.1: Keyfi bir $\varphi\in H(\alpha)$ fonksiyonu için

$$\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_{av}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt\right|\leq\frac{C_m\ln n}{n^{\alpha}}\qquad(n>1)$$

tahmini doğrudur. Burada C_m sabiti sadece Γ eğrisine ve φ fonksiyonunun Hölder sabitine bağlıdır.

Bu yaklaşımın ([34,35]) inşaasında kullanılan alt aralıklardaki noktalar sistemine göre (2.5.1) singüler integral denklemi

$$f(t_0)=a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}k(t,T_0)\varphi(t)dt\Rightarrow$$

$$f(t_0)=\left(a(t_0)+b(t_0)\right)\varphi(t_0)+b(t_0)\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{p=0\\ t_0\neq t_{v,p},\omega(t_0)\neq 0}}^{m-1}\frac{\omega(t_0)}{(t-t_0)\omega'(t_{vp})}\varphi(t_{vp})-\varphi(t_{\sigma k})\right)+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\sigma k}k(t_{\sigma k},t_0)\varphi(t_{\sigma k})$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı zamanda

$$g\left(t_0\right)=\frac{f\left(t_0\right)}{a\left(t_0\right)+b\left(t_0\right)}$$

olmak üzere

$$g\left(t_0\right)=\varphi\left(t_0\right)+\frac{1}{a\left(t_0\right)+b\left(t_0\right)}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{b\left(t_0\right)\alpha_{\sigma k}}{t_0-t_{\sigma k}}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{p=0\\ t_0\neq t_{v,p},\omega(t_0)\neq 0}}^{m-1}\frac{\omega\left(t_0\right)}{\left(t_0-t_{vp}\right)\omega'\left(t_{vp}\right)}\varphi\left(t_{vp}\right)-\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\right)+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\sigma k}k\left(t_{\sigma k},t_0\right)\varphi\left(t_{\sigma k}\right)$$

ifadesini yazabiliriz.

Diğer taraftan t_0 noktası τ_v ve τ_{v+1} arasındaki alt aralıkların τ_{vi} noktalar sistemiyle yer değiştirilirse

$$g\left(t_{vi}\right)=\varphi\left(t_{vi}\right)+\frac{1}{a\left(t_{vi}\right)+b\left(t_{vi}\right)}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{b\left(t_{vi}\right)\alpha_{\sigma k}}{t_{vi}-t_{\sigma k}}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{p=0\\ p\neq i,\omega(t_{vi})\neq 0}}^{m-1}\frac{\omega\left(t_{vi}\right)}{\left(t_{vi}-t_{vp}\right)\omega'\left(t_{vp}\right)}\varphi\left(t_{vp}\right)-\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\right)+\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{\sigma k}k\left(t_{\sigma k},t_{vi}\right)\varphi\left(t_{\sigma k}\right)$$

veya daha açık olarak

$$g\left(t_{\sigma i}\right)=\varphi\left(t_{\sigma i}\right)+\frac{1}{a\left(t_{\sigma i}\right)+b\left(t_{\sigma i}\right)}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{m-1}\alpha_{\sigma k}k\left(t_{\sigma k},t_{\sigma i}\right)\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=0\\ i\neq k}}^{m-1}\frac{b\left(t_{\sigma i}\right)\alpha_{\sigma k}}{t_{\sigma i}-t_{\sigma k}}\left(\sum_{\substack{p=0\\ p\neq k,\,p\neq i}}^{m-1}\frac{\prod\limits_{j=0,\,j\neq i}^{m-1}\left(t_{\sigma i}-t_{\sigma j}\right)}{\left(t_{\sigma i}-t_{\sigma p}\right)\omega'\left(t_{\sigma p}\right)}\varphi\left(t_{\sigma p}\right)-\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\right)\right)$$

elde edilir.

Buna göre

$$Q\left(m,n,\sigma,v\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(t_{vi}\right)+b\left(t_{vi}\right)}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{k=0\\ t_{\sigma k}\neq t_{vi}}}^{m-1}b\left(t_{vi}\right)\left(\sum_{\substack{p=0\\ \sigma=v}}^{n-1}\sum_{\substack{q=0\\ t_{pq}\neq t_{vi}}}^{m-1}\frac{\alpha_{pq}l_{\sigma k}\left(t_{vi}\right)}{t_{vi}-t_{pq}}+-\frac{\alpha_{\sigma k}}{t_{vi}-t_{\sigma k}}\right)+\alpha_{\sigma k}k\left(t_{\sigma k},t_{vi}\right)\right)$$

olmak üzere

$$g(t_{vi}) = \varphi(t_{vi}) + Q(k, m, n, \sigma, v)\varphi(t_{\sigma k}),$$
$$\sigma, v = 0,1,\dots,n-1 \, ve \; k = 0,1,\dots,m-1$$

bilinmeyenlerinden oluşan $m \times n$ tipli Lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

3.BÖLÜM

SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI NÜMERİK SONUÇLAR

3.1.Kapalı Aralık Üzerinde Tanımlı Singüler İntegral Denklemler için Bazı Nümerik Sonuçlar

2.1 de yapılan çalışmada $K_0(x,t)=1\, ve\, K(x,t)=0$ olması durumunda (2.1.1) Cauchy SİD in yaklaşık çözümü ele alındı.

Singüler integral denklemin

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x), \quad -1<x<1 \tag{3.1.1}$$

şeklinde olduğu verildi. (3.1.1) denkleminin tüm analitik çözümleri dört durumda incelendi.

$\beta_i^{(j)}$, $(j=1,2,3,4)$ bilinmeyen katsayıları için (2.1.15)-(2.1.18) sistemi çözülüp ve bu değerler (2.1.9) da yerine yazılarak (3.1.1) denkleminin

$$\varphi(x)\approx W^{(j)}(x)\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}G_i^{(j)}(x), \quad (j=1,2,3,4) \tag{3.1.2}$$

şeklindeki yaklaşık çözümleri elde edildi.

Sonuç 3.1.1. Eğer (3.1.1) denkleminde $f(x)$ bir lineer fonksiyon olarak alınırsa bu durumda (3.1.2) yaklaşık çözümü tamdır.

İspat. (3.1.1) denkleminde, a ve b bilinmeyen sabitler olmak üzere $f(x)$

$$f(x)=ax+b, \quad (-1<x<1) \tag{3.1.3}$$

şeklinde bir lineer fonksiyon olsun. (3.1.3) de tanımlanan fonksiyon yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i^{(j)}\gamma_i^{(j)}(x)=ax+b, \quad (j=1,2,3,4) \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıda verilen tablodaki sonuçlar verilebilir.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	…
$\gamma_i^{(1)}$	0	π	$2\pi x$	$\pi\left(4x^2-1\right)$	$\cdots$
$\gamma_i^{(2)}$	$-\pi x$	$-\pi\left(2x^2-1\right)$	$-\pi\left(4x^3-3x\right)$	$-\pi\left(8x^4-8x^2+1\right)$	$\cdots$
$\gamma_i^{(3)}$	π	$\pi\left(2x+1\right)$	$\pi\left(4x^2+2x-1\right)$	$\pi\left(8x^3+4x^2 4x-1\right)$	$\cdots$
$\gamma_i^{(4)}$	$-\pi$	$-\pi\left(2x-1\right)$	$-\pi\left(4x^2-2x-1\right)$	$-\pi\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)$	$\cdots$

Tablo 3.1.1

Bilinmeyen $\beta_i^{(j)}$ katsayıları, (2.1.15)-(2.1.18) deki denklem sistemini çözmeden de bulunabilir. Bunun yerine, (3.1.4) ün her iki tarafındaki x lerin aynı kuvvetten terimlerinin katsayıları karşılaştırılarak $\beta_i^{(j)}$ katsayıları bulunabilir. Elde edilen $\beta_i^{(j)}$ katsayıları (3.1.1) denkleminin $\varphi_n(x)$ yaklaşık çözümünü vermesi için (2.1.9) da yerine yazılır.

Bunu Durum (II) için $n=3$ seçerek yapalım. (2.1.6) dan dolayı (3.1.4) deki b sabiti sıfır olmalıdır.

Böylece

$$\left[\beta_0^{(2)}\gamma_0^{(2)}\left(x\right)+\beta_1^{(2)}\gamma_1^{(2)}\left(x\right)+\beta_2^{(2)}\gamma_2^{(2)}\left(x\right)+\beta_3^{(2)}\gamma_3^{(2)}\left(x\right)\right]=ax \qquad (3.1.5)$$

elde edilir. Tablo 3.1.1 den (3.1.5) denklemi

$$-\pi\left[\beta_0^{(2)}x+\beta_1^{(2)}\left(2x^2-1\right)+\beta_2^{(2)}\left(4x^3-3x\right)+\beta_3^{(2)}\left(8x^3-8x^2+1\right)\right]=ax \qquad (3.1.6)$$

şeklinde olur.

Bu durumda

$$\pi\left[\beta_1^{(2)}-\beta_3^{(2)}\right]=0,$$
$$\pi\left[3\beta_2^{(2)}-\beta_0^{(2)}\right]=a,$$
$$\pi\left[8\beta_3^{(2)}-2\beta_1^{(2)}\right]=0,$$
$$-4\pi\beta_2^{(2)}=0,$$
$$-8\pi\beta_3^{(2)}=0$$

bulunur.

Böylece

$$\beta_0^{(2)}=-\frac{a}{\pi},\quad \beta_i^{(2)}=0,\quad i=1,2,3. \tag{3.1.7}$$

elde edilir. (2.1.9) ifadesinde (3.1.7) değerleri yerine yazılırsa

$$\varphi_n\left(x\right)=-a\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \tag{3.1.8}$$

şeklindeki yaklaşık çözüm elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda (2.1.5) tarafından elde edilen tam çözümdür.

Durum (III) için $n=3$ seçerek, Tablo 3.1.1 den (3.1.4) denklemi

$$\pi\left[\beta_0^{(3)}+\beta_1^{(3)}\left(2x+1\right)+\beta_2^{(3)}\left(4x^2+2x-1\right)+\beta_3^{(3)}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)\right]=ax+b \tag{3.1.9}$$

şeklinde olur. Böylece

$$\pi\left[\beta_0^{(3)}+\beta_1^{(3)}-\beta_2^{(3)}-\beta_3^{(3)}\right]=b,$$
$$\pi\left[2\beta_1^{(3)}+2\beta_2^{(3)}-4\beta_3^{(3)}\right]=a,$$
$$4\pi\left[\beta_2^{(3)}+\beta_3^{(3)}\right]=0,$$
$$8\pi\beta_3^{(3)}=0$$

bulunur. Buradan

$$\beta_0^{(3)}=\frac{2b-a}{2\pi},\quad \beta_1^{(3)}=\frac{a}{2\pi},\quad \beta_i^{(3)}=0,\quad i=2,3 \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (2.1.9) ifadesinde (3.1.10) değerleri yerine yazılırsa

$$\varphi_n\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[a\left(x-1\right)+b\right] \tag{3.1.11}$$

şeklindeki yaklaşık çözüm elde edilir. Bu çözüm aynı zamanda (2.1.7) tarafından elde edilen tam çözümle çakışır.

Durum (II) ve Durum (III) için sunulan bu işlemlerin benzeri Durum (I) ve Durum (IV) içinde yapılabilir.

Bu kısımda

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - (11/8), \quad -1 < x < 1 \tag{3.1.12}$$

şeklindeki singüler integral denklemi göz önüne alalım. (2.1.3)-(2.1.8) ifadeleri kullanılarak (3.1.12) denkleminin

Durum(I): $$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} \left[t^5 + 5t^4 + \frac{3}{2}(t^3 - t^2) - \frac{5}{2}t - \frac{9}{8} \right] \tag{3.1.13}$$

Durum(II): $$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{1-t^2} \left[t^3 + 5t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{7}{2} \right] \tag{3.1.14}$$

Durum(III): $$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left[t^4 + 4t^3 - \frac{5}{2}t^2 + t - \frac{7}{2} \right] \tag{3.1.15}$$

Durum(IV): $$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left[t^4 + 6t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 6t + \frac{7}{2} \right] \tag{3.1.16}$$

tam çözümleri elde edilir. (3.1.12) denkleminin yaklaşık çözümlerinin hataları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

n=20	
x	Error
-0.950	8.881784197001252E-016
-0.900	-6.661338147750939E-016
-0.700	7.494005416219807E-016
-0.500	-5.551115123125783E-016
-0.300	4.163336342344337E-016
-0.100	-3.330669073875470E-016
0.000	1.665334536937735E-016

0.100	5.551115123125783E-016
0.300	0.00000000000000E+000
0.500	-7.771561172376096E-016
0.700	0.000000000000000E+000
0.900	9.436895709313831E-016
0.950	8.881784197001252E-016

Tablo 3.1.2

n=20	
x	Error
-0.950	1.665334536937735E-016
-0.900	3.330669073875470E-016
-0.700	1.776356839400250E-015
-0.500	-5.551115123125783E-016
-0.300	2.220446049250313E-016
-0.100	2.220446049250313E-016
0.000	6.661338147750939E-016
0.100	0.000000000000000E+000
0.300	6.661338147750939E-016
0.500	8.881784197001252E-016
0.700	0.000000000000000E+000
0.900	2.220446049250313E-016
0.950	4.440892098500626E-016

Tablo 3.1.3

n=20	
x	Error
-0.950	5.551115123125783E-016
-0.900	7.771561172376096E-016

-0.700	2.220446049250313E-016
-0.500	0.000000000000000E+000
-0.300	-1.110223024625157E-016
-0.100	-8.881784197001252E-016
0.000	-4.440892098500626E-016
0.100	0.000000000000000E+000
0.300	0.000000000000000E+000
0.500	-6.661338147750939E-016
0.700	-2.220446049250313E-016
0.900	1.110223024625157E-015
0.950	-6.661338147750939E-016

Tablo 3.1.4

n=20

x	Error
-0.950	3.053113317719180E-015
-0.900	3.219646771412954E-015
-0.700	3.330669073875470E-016
-0.500	-2.220446049250313E-016
-0.300	1.443289932012704E-015
-0.100	6.661338147750939E-016
0.000	6.661338147750939E-016
0.100	2.220446049250313E-016
0.300	2.220446049250313E-016
0.500	4.440892098500626E-016
0.700	4.440892098500626E-016
0.900	-8.881784197001252E-016
0.950	-2.220446049250313E-016

Tablo 3.1.5

Şimdi de 2.2 de yapılan çalışmada sonlu bir aralıkta Cauchy çekirdekli birinci çeşit singüler integral denklemler

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\left[k_0(t,x)+k(t,x)\right]dt = f(x), \ -1<x<1 \tag{3.1.17}$$

genel denklemi ile verildi. Burada

$$k_0(t,x)=\frac{\hat{k}(t,x)}{t-x}, \quad \left(\hat{k}(t,t)\neq 0\right) \tag{3.1.18}$$

olup $\hat{k}$ ve k fonksiyonları iki değişkenli $(t \text{ ve } x)$ düzgün karesi integrallenebilir fonksiyonlar ve k_0 çekirdeği de Cauchy tipli singülerliği içeren bir fonksiyondur.

(3.1.17) şeklindeki en basit integral denklem $\hat{k}(t,x)=1 \text{ ve } k(t,x)=0$ olması durumunda ([6,33])

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x) \tag{3.1.19}$$

şeklinde olduğu ve burada (3.1.17) denkleminin dört tane önemli durumu $\hat{k}(t,x)=1 \text{ ve } k(t,x)=0$ için incelendi.

(2.2.3) basit denklemi için ilk olarak $f(x)$ fonksiyonunu b_0 ve b_1 bilinen sabitler olmak üzere

$$f(x)=b_0+b_1x, \quad (-1<x<1) \tag{3.1.20}$$

şeklinde birinci dereceden bir polinom olarak seçelim. Dolayısıyla (2.2.8) çözümün varlığı için, göz önüne alındığında Hal (IV) için $b_0=0$ olmalı diğer Hal (I), (II), (III) $b_0\neq 0$ olabilir. Bu durumda (2.2.3) denklemi için (2.2.12)-(2.2.15) ve (2.2.19) yardımıyla ve

$$\hat{k}(t,x)=1 \text{ ve } k(t,x)=0 \tag{3.1.21}$$

alınarak (Gakhov'un kitabındaki [26] standart bir yel integralini kullanarak)

$$f(x)=1 \ \alpha_{j,l}^{(r)}=u_j^{(r)}(x_l)=\pi PP\left[x^{j-1}\lambda_r(x)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2}\right]_{x=x_l} \tag{3.1.22}$$

elde edilir ($PP\left[V(x)\right]$, büyük x için $V(x)$ in esas kısmını temsil ediyor). Ayrıca (2.2.16) denklemi

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(r)} u_j^{(r)}(x) = b_0 + b_1 x, \quad (r = 1,2,3,4) \tag{3.1.23}$$

şeklindeki basit polinom eşitliğine indirgenir. Böylece (3.1.23) denkleminin her iki tarafındaki x in kuvvetlerinin aynı olduğu katsayılarını eşitleyerek $c_j^{(r)}$ bilinmeyen sabitler bulunabilir. Dolayısıyla bu basit durum için (2.2.17) denklemler sistemini çözmeye gerek yoktur. j nin değerlerine göre kolaylıkla

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\cdots$
$u_j^{(1)}$	0	π	πx	$\pi\left(\frac{1}{2}+x^2\right)$	$\cdots$
$u_j^{(2)}$	$-\pi$	$\pi(1-x)$	$\pi\left(-\frac{1}{2}+x-x^2\right)$	$\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+x^2-x^3\right)$	$\cdots$
$u_j^{(3)}$	π	$\pi(1+x)$	$\pi\left(\frac{1}{2}+x+x^2\right)$	$\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+x^2+x^3\right)$	$\cdots$
$u_j^{(4)}$	$-\pi x$	$\pi\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$	$\pi\left(\frac{x}{2}-x^3\right)$	$\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{x^2}{2}-x^4\right)$	$\cdots$

(3.1.24)

elde edilir. Böylece $c_j^{(r)}$ sabitleri kolayca belirlenebilir ve bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunun son hali (2.2.4)-(2.2.7) ifadelerinden bulunabilir.

Örneğin $r=4$ olması durumunda (3.1.23) denkleminden

$$c_0^{(4)} u_0^{(4)}(x) + c_1^{(4)} u_1^{(4)}(x) + c_2^{(4)} u_2^{(4)}(x) + \ldots = b_0 + b_1 x$$

veya

$$c_0^{(4)}(-\pi x) + c_1^{(4)}\left[-\pi\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right] + c_2^{(4)}\left[-\pi\left(x^3-\frac{x}{2}\right)\right] + \ldots = b_0 + b_1 x$$

yazılır. Son denklemde aynı dereceden x lerin katsayıları karşılaştırılırsa ve (2.2.8) de hesaba katarak

$$c_1^{(4)}\frac{\pi}{2}=b_0=0,$$
$$c_0^{(4)}\left[-\pi\right]+c_2^{(4)}\left[\frac{\pi}{2}\right]=b_1,$$
$$c_j^{(4)}=0,\quad j=2,3,...,$$

elde edilir. Buradan $j=0,1,2,...$ için $c_j^{(4)}=0$ *ve* $c_0^{(4)}=-\frac{b_1}{\pi}$ bulunur. Bu durumda (2.2.9),(2.2.10) ve $\lambda_4(x)=1-x^2$ için $f(x)$ fonksiyonu

$$\varphi(x)=-b_1\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\pi}$$

şeklinde olur. Bu da aynı zamanda (3.1.20) de verilen $g(x)$ için (2.2.7) tarafından elde edilen kesin bir değerdir.

İkinci basit bir örnek olarak

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x}+(t+x)\right]\varphi(t)\,dt=f(t),\quad -1<x<1 \tag{3.1.25}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemden $\hat{k}(t,x)=1$ *ve* $k(t,x)=t+x$ yazılır. Böylece $j=0,1,2,...$ için

$$\hat{k}_0(x)=1,\ \ \hat{k}_1(x)=\hat{k}_2(x)=...=0,$$
$$k_0(x)=x,\ \ k_1(x)=1,\ \ k_2(x)=k_3(x)=...=0$$

$$u_{0+j}^{(r)}(x)\equiv u_j^{(r)}=\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_r(t)t^j}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt,$$

$$\gamma_j^{(r)}=\int_{-1}^{1}\frac{t^j\lambda_r(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt,$$

$$\gamma_{1+j}^{(r)}\equiv\gamma_{j+1}^{(r)}=\int_{-1}^{1}\frac{t^{j+1}\lambda_r(t)}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt$$

elde edilir. Özel durumda $r=1$ alalım. Bu durumda

$$\gamma_j^{(1)}=\int_{-1}^{1}\frac{t^j}{\left(1-t^2\right)^{1/2}}dt$$

olur. Özellikle

$$\begin{aligned}&\gamma_0^{(1)}=\pi,\quad \gamma_1^{(1)}=0,\\ &\gamma_2^{(1)}=\frac{\pi}{2},\quad \gamma_3^{(1)}=0,\\ &\gamma_4^{(1)}=\frac{3\pi}{8},\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

ve

$$\begin{aligned}&u_0^{(1)}=0,\quad u_1^{(1)}=\pi,\\ &u_2^{(1)}=\pi x,\quad u_3^{(1)}=\pi\left(x^2+\frac{1}{2}\right),\quad \ldots\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.1.1) kullanılarak $r=1$ için

$$\alpha_{j,l}^{(1)}=u_j^{(1)}x_l+x_l\gamma_j^{(1)}+\gamma_{j+1}^{(1)},\quad \left(j,l=0,1,2,3,\ldots\right)$$

elde edilir. Özel olarak $j=0,1,2,3$ için

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,l}^{(1)}=x_l\gamma_0^{(1)}+\gamma_1^{(1)},\\ &\alpha_{1,l}^{(1)}=\pi+x_l\gamma_1^{(1)}+\gamma_2^{(1)},\\ &\alpha_{2,l}^{(1)}=\pi x_l+x_l\gamma_2^{(1)}+\gamma_3^{(1)},\\ &\alpha_{3,l}^{(1)}=\pi\left(x_l^2+\frac{1}{2}\right)+x_l\gamma_3^{(1)}+\gamma_4^{(1)},\\ &\quad\vdots\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

veya (3.1.26)'da kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\alpha_{0,l}^{(1)}=\pi x_l,\\ &\alpha_{1,l}^{(1)}=\frac{3\pi}{2},\\ &\alpha_{2,l}^{(1)}=\frac{3\pi}{2x_l},\\ &\alpha_{3,l}^{(1)}=\pi\left(x_l^2+\frac{7}{8}\right).\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

yazılır. Son olarak $n=3$ seçerek Hal (I) ve $r=1$ için (2.2.17) sistemini çözmek istiyoruz. Bunun için

$$\sum_{j=0}^{3} c_j^{(1)} \alpha_{j,l}^{(1)} = f_l, \quad (l = 0,1,2,3) \tag{3.1.29}$$

sistemini çözmemiz gerekir. Özel olarak $f(x) = 1$ alalım. Böylece (3.1.25) denklemini μ_0 *ve* μ_1

$$\mu_0 = -\int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt, \quad \mu_1 = -\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt \tag{3.1.30}$$

olmak üzere

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = (1+\mu_0) + \mu_1 x \tag{3.1.31}$$

şeklinde olur. Hal (I) de (2.2.4) ifadesini kullanarak ve (3.1.30) özel şartları yardımıyla (3.1.31) denklemini kolayca çözebiliriz. Bu durumda $\varphi(x)$ fonksiyonu B_0 keyfi bir sabit olmak üzere

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{\left(1-x^2\right)^{1/2}} + \frac{2}{3\pi}\left[x - B_0 \pi x^2\right] \tag{3.1.32}$$

şeklinde bulunur. Aynı zamanda $l = 0,1,2,3$ için $f_l = 1$ ve (3.1.29) denklemler sistemini kullanarak x_l nin $(-1 \le x_l \le 1)$ herhangi dört değeri için B_0 keyfi bir sabit olmak üzere

$$c_0^{(1)} = B_0,\ c_1^{(1)} = \frac{2}{3\pi},\ c_2^{(1)} = -\frac{2}{3}B_0 \ \textit{ve}\ c_3^{(1)} = 0 \tag{3.1.33}$$

elde edilir. Son olarak Hal (I) de (2.2.4) ifadesinde (3.1.33) sabitleri kullanılarak (yani $r = 1$ için) (3.1.32) çözümü elde edilir. Bu da özel olarak $\varphi(x) = 1$ olması durumunda (3.2.8) denklemi için kesin bir çözümdür.

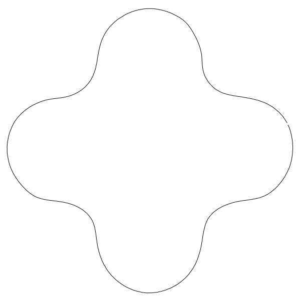
3.2 Kapalı Eğri Üzerinde Singüler İntegral Denklemler için Nümerik Sonuçlar

Bu bölümdeki nümerik hesaplamaların birçoğu 2.3 deki şema kullanılarak konform dönüşümler yapılmıştır. Testlerde n değerlerinin artmasıyla oldukça hızlı bir yakınsama ve yüksek bir doğruluk olduğu görülmüştür. Örnek olarak parametrik denklemleri

$$x = \rho(1+m)\cos\theta,\ x = \rho(1-m)\sin\theta \ \ (0 \le \theta \le 2\pi)$$

şeklinde verilen bir elipsin dışını bir diskin dışına dönüştüren bir dönüşüm verilebilir. Hesaplamalar ρ ve m nin farklı birçok değerleri için yapıldı. Elde edilen sonuçlar bilinen test fonksiyonunun değerleriyle karşılaştırıldı. Göz önüne alınan şemanın basit yapısı, bölgenin sınırının testi yapılmış bir sınır olması durumunda onun gerçeklik oranını belirler.

Örnek 3.2.1. D^{-} nin sınırı aşağıdaki şekilde verilen bir eğri olsun. Nümerik sonuçlar Tablo 3.2.1 de verildi. Sınırda test için dört z noktası alındı. n düğümlerin sayısı, $\zeta = w(z)$ dönüşümü D^{-} yi birim diskin dışına dönüştüren konform bir dönüşüm ve $|\zeta|$ da dönüşüm noktalarının orijinden olan mesafesi olsun. Bu durumda herhangi bir test fonksiyonunu kullanamayız fakat son kolon D^{-} nin sınırının birim çember üzerine belli bir hatayla dönüştürüldüğünü gösterir. Sınırdaki düğümler ve test noktaları Matlab programı yardımıyla seçilir.



Şekil 3.2.1

z	n	ζ	$\lvert\zeta\rvert$
4.27219 + 0.85057i	100	0.96009+0.28074	1.00029
	200	0.95994+0.28043	1.00006
	400	0.95991+0.28037	1.00001
-0.40995+4.20951i	100	-0.18986+0.98204	1.00022
	200	-0.18990+0.98185	1.00005
	400	-0.18992+0.98181	1.00001
-4.06886-0.52539i	100	-0.98020-0.19925	1.00025
	200	-0.98000-0.19925	1.00005

	400	-0.97996-0.19927	1.00001
0.68121-4.17829i	100	0.20001-0.98003	1.00024
	200	0.20012-0.97982	1.00005
	400	0.200018-0.97877	1.00001

Tablo 3.2.1

Burada 2.4 deki yaklaşımları kullanarak, singüler integraller için algoritmalar uygulandı. Bunun sonucunda hesaplamaların doğruluğu ile alakalı sonuçlar verildi. Tablolarda I ile singüler integralin esas değerini ve $\tilde{I}$ ile de interpolasyon değerleri noktalarındaki yaklaşım tarafından üretilen yaklaşık hesaplama gösterilir.

Örnek 3.2.2. Γ birim çember ve $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ olmak üzere

$$I = F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{t(t-t_0)}dt$$

singüler integralini göz önüne alalım. Bu durumda farklı normlarda aşağıdaki tablo ortaya çıkar:

n	m	$\left\Vert I-\tilde{I}\right\Vert_1$	$\left\Vert I-\tilde{I}\right\Vert_2$	$\left\Vert I-\tilde{I}\right\Vert_\infty$
10	3	4.7835599E-03	4.7812131E-03	4.3059266E-03
10	4	2.8606000E-03	2.4213300E-03	2.2799596E-03
10	5	1.8950893E-03	1.5464505E-03	1.4939693E-03

Örnek 3.2.3. Γ birim çember ve $\varphi(t) = \frac{\sin t + \cos t}{t}$ olmak üzere

$$I = F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sin t + \cos t}{t(t-t_0)}dt$$

singüler integralini göz önüne alalım. Bu durumda farklı normlarda aşağıdaki tablo ortaya çıkar:

n	m	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_{\infty}$ $\left\|I-\tilde{I}\right\|_{1}$	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_{2}$	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_{\infty}$
10	3	4.6366839E-03	4.0219417E-03	3.5962313E-03
10	4	3.8213600E-03	3.2955576E-03	3.0960667E-03
10	5	1.8740431E-03	1.4832552E-03	1.3956153E-03

Bu bölümde 2.5 deki yaklaşımın nümerik ve programlama ile ilgili sonuçları verilmiştir. Aynı zamanda yaklaşım integralinin hata tahmini elde edilmiştir. Bunların yanı sıra yaklaşık çözümlerin bir tam çözüme noktasal yakınsaması elde edilmiştir.

Bütün durumlarda Γ eğrisi olarak birim çemberi ve sağ tarafı da tam çözümünün olduğu bir $f(t)$ fonksiyonu olarak seçelim. Bu tam çözüm kullandığımız metottan doğru bir şekilde elde edilen nümerik çözümü göstermek amacıyla kullanıldı.

Cauchy SİD’i çözmek için [34]’de kullanılan algoritmalar kullanıldı. Ayrıca nümerik sonuçlardaki hesaplamaların doğruluğuyla alakalı sonuçlar verildi. Kullanılan yaklaşım tarafından verilen cebirsel denklemler sisteminin matrisinin terslenebilir olduğu kolayca görülür ([34,35]’den bu durum doğrulanabilir).

Her tabloda φ Cauchy Esas Değerinin varlığı durumunda verilen tam çözümü temsil eder. $\tilde{\varphi}$’da interpolasyonda karşılığı olan noktalarda yaklaşım tarafından oluşturulan yaklaşık çözümü gösterir ([36]).

Örnek 3.2.4.

Bu örnekte

$$t_0(t_0+2)\varphi(t_0)+\frac{(t_0+2)(t_0-6)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{(t-t_0)}dt=-\frac{6}{t_0}$$

düzgün (regular) kısmı olmaksızın en kolay tipli singüler integral denklemini göz önüne alalım. Burada $f(t_0)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ çözümünün

$$\varphi(t)=\frac{-2t^2+8t+12}{4t\left(t^2-t-6\right)}$$

şeklinde verilmesi durumunda seçilir. Bu durumda aşağıdaki tablo elde edilir.

n ve m	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_1$	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_2$	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\infty$
10 ve 4 10 ve 3	1.6154085 E-03 8.2964720 E-03	7.0876902 E-04 3.5810359 E-03	4.3220818 E-04 2.0005703 E-03
n ve m	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_1$	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_2$	$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\infty$
9 ve 4 9 ve 3	2.6929409 E-03 1.2383505 E-02	1.1711853 E-03 5.3870520 E-03	7.0869923 E-04 3.0545730 E-03

4. ARAŞTIRMA BULGUARI

Tez çalışmasında kapalı aralık ve kapalı eğri üzerinde tanımlı integrallerin yaklaşımı ve singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü üzerine bazı teoremler verildi ve ispatlandı.

5.SONUÇ

Bu tez çalışmasında bazı sınıf singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü için birkaç yöntem verildi.

KAYNAKLAR

[1] Mustafayev N., 1991, ‘’Düzgün eğri boyunca tanımlı singüler integraller için formül ve bunların singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulanması’’, Doktora Tezi, Bakü, (Rusça).

[2] Mustafayev N. M., 1985, “Kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara yaklaşım”,Genç Matematikçilerin 6. Respublika Konferansı, Bakü, 171–174.

[3] Mustafayev N. M.,1988, “Kapalı düzgün eğri üzere singüler integrallerin yaklaşımının hatası”, Dep. V. VİNİTİ, 338-B88 .

[4] Sanikidze, D.G.,1974, On a uniform estimate for the approximation of singular integrals with Chebyshev weight by interpolation sums, Soobsh. AN Gruz. SSR 75 (1) 53-55.

[5] Lifanov, I.K. ,1996, Singular Integral Equation and Discrete Vortices, VSO, The Netherlands.

[6] Sanıkıdze, J. and Mırıanashvili, M.2004 ,Appraximation schemes for singular integrals and their application to some boundary problems, 4(1), pp. 94-104.

[7] Sanikidze, D.G. ,1993, On numerical solution of boundary problems by method of approximation of singular integrals, Differ. Uravn., 29 , No. 9, pp. 1632-1644, in Russian.

[8] Sanikidze, J. , 1971, Approximate solution of singular integral equations in the case of closed contours of integration, Seminar of Institute of Applied Mathematics, Tbilssi.

[9] Nadir ,M. ve Antıdze ,D.J. ,2004, On the numerical solution of singuler integral equations using Sandikidze’s approximation, 10(1), pp. 83-89.

[10] Eshkuvatov, Z.K. *at all,* 2009, Approximate solution of singular integral equations of the first kind with Cauchy kernel, 22, pp. 651-657.

[11] Chakrabartı. A. and Vanden Berghe, G. ,2004, Approximate solution of singular integral equations, 17, pp. 553-559.

[12] Nadir , M. and Lakehalı, B. , 2007, On the approximation of singuler integrals, 2(2), pp. 236-240.

[13] Başkan, T., 2007, ‘’Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 4. Baskı’’, VİPAŞ A.Ş.

Bursa.
[14] Demirhan , M. 2007, ‘’Kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara yaklaşım yöntemleri’’, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.
[15] Martin, P.A. and Rizzo, F.J. , 1989, On boundary integral equations for crack problems, Proc. Roy. Soc. A. 421, 341-345.
[16] Gakhov,F.D. , 1963,Boundary Value Problems (I.N. Sneddon, Transl.), Pergamon Press Ltd.
[17] Ladopoulos, E.G.,2000, Singular Integral Equations, Linear and Non-Linear, Theory and its Applications in Science and Engineering, Springer-Verlag.
[18] Lifanov,I.K. and Poltavskii, L.N., G.M. Vainikko, 2004, Hypersingular Integral Equations Their Applications, Chapman and Hall/CRC.
[19] Chakrabarti,A. and Berghe, V.G. , 2004, Approximate solution of singular integral equations. Science direct, Appl. Math. Lett. 17, 553-559.
[20] Abdou, M.A. and Naser, A.A. , 2003, On the numerical treatment of the singular integral equation of the second kind, Appl. Math. Comput. 146 , 373-380.
[21] Rashed, M.T., 2003, Numerical solutions of the integral equations of the first kind, Appl. Math. Comput. 145, 413-420.
[22] Kim, S. ,1998, Solving singular integral equations using Gaussian quadrature and overdetermined system, Appl. Math. Comput. 35, 63-71.
[23] Srivastav, R.P. and Zhang, F., 1991, Solution Cauchy singular integral equations by using general quadrature_collocation nodes, Appl. Math. Comput. 21, 59-71.
[24] Mason, J.C. and Handscomb, D.C. , 2003, Chebyshev Polynomials, CRC Press LLC.
[25] Martin, P.A. and Rizzo, F.J. , 1989, On boundaryintegral equationsforcrack problems, Proc. Roy. Soc. A421, 341-345.
[26] Mushkelishvili, N.J. 1953, Singular IntegralEquations, Noordhoff, Groningen.
[27] Chakrabarti, A., 1989, Solution oftwosingular integral equationsarising in water Wave problems, ZAMM 69, 457-459.
[28] Chakrabarti , A.Andbharatti, V.L. , 1992, A newapproach to the problem of scatteringofwater waves by vertical barriers, ZAMM72, 415-423.
[29] Ursell, F. ,The effectofafixedvertical barrier onsurface wavesindeep water,

Proc.Camb. Phil. Soc.43, 374-382, (1947).

[30] Williams, W.E. , 1966, Anoteonscatteringofwaterwavesbyaverticalbarrier, Proc. Camb.Phil.Soc.62,507-509.

[31] Martin, P.A. , 1991, End-pointbehaviours ofsolutions tohypersingularintegral equations,Proc.Roy. Soc.A432, 301-320.

[32] Atkinson, K.E. , 1988, An Introductionto Numerical Analysis, Wiley.

[33] Mikhlin, S.G. , 1949, Integral equatons, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, in Russian.

[34] Nadir, M. , 2003, On the approximation of the Hilbert transform. Far East J. App. Math.1, 71-786.

[35] Sanikidze, J. , 1970, On approximate calculation of singular line integral. Seminar of Institute of Applied Mathematics,Tbilissi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hatice GÜNER AKSOY
Doğum Yeri: Kars
Doğum Tarihi:07.10.1984
Medeni Hali: Evli
Yabancı Dili: İyi

Eğitim Durumu

İlk ve Orta Öğretim : Kars Ziya Gökalp İlköğretim Okulu
Lise : Kars Cuhuriyet Lisesi
Lisans : İstanbul Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü (Tezsiz)
Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi)

Çalıştığı Kurumlar

1.Kars Final Dergisi Dershanesi (2007-2008 ve 2009-2010)
2.Özel Çelik Başarı İlköğretim Okulu (2008-2009)
3.Selim Şehit Teğmen Gökhan Yaşartürk Lisesi (2010-2011)
4.Faik Fikrîye Torunoğulları Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (2011-Devam)