Bu tez çalışması 2011-fef-26 nolu proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünce desteklenmiştir.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CENTRO-POLYHEDRAL GRUPLARDA JACOBSTHAL VE PELL DİZİLERİ

Hasan ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

OCAK-2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı Yüksek Lisans öğrencisi Hasan ÖZTÜRK' ün Doç. Dr. Ömür DEVECİ' nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı ''Centro-Polyhedral Gruplarda Jacobsthal ve Pell Dizileri'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği........ ile kabul edilmiştir.

28/01/2015

Adı ve Soyadı	İmza
Başkan:Doç. Dr. Ömür DEVECİ	....
Üye :Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye :Yrd. Doç. Dr. Güventürk UĞURLU	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../2015 gün ve ....../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında hazırlanmıştır.

Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarında etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ' ye teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme, eşime ve kızıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hasan ÖZTÜRK

Ocak-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada ‘‘ Centro-Polyhedral Gruplarda Jacobsthal ve Pell Dizilerinin Orbitlerinin Uzunlukları’’ üzerinde duruldu.

Çalışmanın 2. bölümünde üzerinde çalışılacak gruplar ve lineer indirgemeli diziler tanıtıldı. Ayrıca 2. ve 3. bölümlerde, gerek üzerinde çalışılacak lineer indirgemeli dizilerin faklı gruplara uygulamaları gerekse üzerinde çalışılacak gruplara taşınmış farklı lineer indirgemeli diziler hakkında geniş bilgi verildi.

Çalışmanın 4. bölümünde ise Centro-Polyhedral gruplarda genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal ve Pell dizilerinin periyotlarının uzunlukları hesaplandı.

2015, 85 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Jacosthal dizisi, Pell dizisi, centro-polyhedral grup, orbit, periyot.

ABSTRACT

In this study, “Lenghts of the orbits of Pell and generalized order $-k$ Jacobsthal sequences in Centro-Polyhedral groups” have been emphasized.

Also, at the 2. section of this study have been introduced basic information about lineer recurrence sequences and groups which are been studied in thesis. Afterwards applications of this lineer recurrence sequences in distinct groups have been emphasized. Later, at the 3. section have been given deteiled infotmation about distinct lineer recurrence sequences moved to groups which are been studied in thesis.

Furthermore, in section 4 of this study, the Pell length, generalized order $-k$ Jacobsthal length of orbits of the Centro- Polyhedral groups have been obtained.

2015, 85 Pages

Key Words: The Jacbsthal sequence, The Pell sequence, centro-polyhedral group, orbit, period.

SİMGELER DİZİNİ

e_1	Sol birim eleman
e_2	Sağ birim eleman
e	Grubun birim elemanı
a'	a elemanın tersi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nin m'ye göre modülü
$F_k(G;x_0,x_1,\cdots,x_{j-1})$	G grubunda $x_0,x_1,\cdots,x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile elde edilmiş k-nacci dizisi
G	Grup
$\lvert G\rvert$	G grubunun Mertebesi
G^n	$n.$ mertebeden G grubu
$G=\langle A\rangle$	A kümesinden üretilen G grubu
G/H	G Grubunun H ye göre bölüm grubu
$G\cong H$	G grubu H grubuna izomorf
$G\leq H$	H, G grubunun alt grubu
$H\lhd G$	H, G grubunun normal alt grubu
$H<G$	H, G grubunun öz alt grubu
$Aut(G)$	G grubunun bütün otomorfizmlerin kümesi
$I(G)$	G grubunun bütün iç otomorfizmlerin kümesi
$Ser(A)$	A kümesi üzerindeki serbest grup
$<A>$	Bir G grubunun A'yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin arakesiti
$F(x)$	Karakteristik polinom

$[G:H]$	G ' de H 'ın indeksi
$f_n^{(k)}$	$1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)}$ k -basamak Fibonacci dizisinin $n.$ elemanı
$k(p)$	Standart Fibonacci dizisinin periyodu
$h_k(m)$	$f(k,m)$ ' nin periyodu
$P_k(G;x_0,x_1,...,x_{j-1})$	$F_k(G;x_0,x_1,\cdots,x_{j-1})$ k -nacci dizisinin periodu
$Q_k\left(G;x_0,x_1,\cdots,x_{j-1}\right)$	Grubun Pell dizisi
$\left\{P^{k,m}\right\}$	m modüne göre k -mertebeden Pell dizisi
$hP_k\left(m\right)$	m modüne göre k -mertebeden Pell dizisinin periyodu
$PerQ_k\left(G:x_0,x_1,\cdots.x_{j-1}\right)$	$Q_k\left(G:x_0,x_1,\cdots.x_{j-1}\right)$ dizisinin periyodu
$\left\{P_n\right\}$	Pell dizisi
$\left\{P_n^k\right\}$	Genelleştirilmiş k -Pell sayısı
$\left\{J_n\right\}$	Jacobstal Dizi
$J_A^k\left(G\right)$	Başlangıç elemanları A kümesinde olan ve G grubunun elemanları tarafından oluşturan $k-$ mertebeden Jacobsthal dizinin periyodu
$LJ_A^k\left(G\right)$	Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbitinin periyodunun uzunluğu
$\left\{J^{k,m}\right\}$	m modülüne göre $k-$mertebeden Jacobstal dizi
(l,m,n)	Polyhedral grup
$\langle l,m,n\rangle$	Binary polyhedral grup

1. GİRİŞ

Lineer indirgemeli diziler; fizik ve bilgisayar bilimlerinden güzel sanatlara kadar birçok alandaki modern çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır $[2-4, 27, 31, 36-40]$.

Gruplarda lineer indirgemeli diziler ilk olarak Wall $[42]$ tarafından çalışılmıştır. Wall, bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibanocci dizilerini incelemiştir. Daha sonra yapılan bir çok çalışmada, konsept bazı lineer indirgemeli dizilerin grup ailelerinde incelenmesi olarak genişletilmiştir.

Deveci ve Karaduman ve Sağlam, $[20]$ deki çalışmalarında bazı gruplarda Jacobsthal dizisini incelemiş ve Jacobsthal orbitini tanımlamışlardır. Ayrıca Deveci, Karaduman $[14]$ deki çalışmasında gruplarda Pell dizisini incelemiş ve Pell orbitini tanımlamışlardır.

Deveci ve Karaduman, $[14]$ deki çalışmalarında gruplarda m modülüne göre genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizilerini incelemişler ve $k-$gerenli gruplar için genelleştirilmiş $k-$basamak Pell orbitini tanımlamışlardır.

Bu çalışmanın 2. bölümünde üzerinde çalışılacak gruplar ve lineer indirgemeli diziler tanıtıldı. Ayrıca 2. ve 3. bölümlerde, gerek üzerinde çalışılacak lineer indirgemeli dizilerin faklı gruplara uygulamaları gerekse üzerinde çalışılacak gruplara taşınmış farklı lineer indirgemeli diziler hakkında geniş bilgi verildi.

Bu çalışmanın 4. bölümünde ise Centro-Polyhedral gruplarda genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal ve Pell orbitlerinin uzunlukları hesaplandı.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Grup Takdimleri

Tanım 2.1.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere,

$$*: A \times A \to A$$

dönüşümüne A üzerinde bir ikili işlem denir. Eğer "$*$", A üzerinde bir ikili işlem ise, $(A,*)$ ifadesine A da bir cebirsel yapı denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.2: "$*$", A kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Buna göre;

i. $\forall a \in A$ için,

$$e_1 * a = a$$

olacak şekilde $e_1 \in A$ varsa, e_1'e A kümesinin "$*$" işlemine göre sol birim (özdeş) elemanı denir.

ii. $\forall a \in A$ için,

$$a * e_2 = a$$

olacak şekilde $e_2 \in A$ varsa, e_2'ye A kümesinin "$*$" işlemine göre sağ birim (özdeş) elemanı denir.

iii. $e_1 = e_2 = e$ ise yani $\forall a \in A$ için,

$$a * e = e * a = a$$

ise o zaman $e \in A$ varsa, e'ye "$*$" işlemine göre A' nın birim (özdeş) elemanı denir.

iv. $\forall a,b,c \in A$ için,

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

ise o zaman "$*$" işlemine göre birleşmelidir (Assosyatif) denir.

v. $\forall a,b \in A$ için,

$$a*b = b*a$$

ise o zaman "$*$" işlemine ya da $(A,*)$ cebirsel yapısına değişmelidir (Komutatif, Abelyan) denir.

vi. $\forall a \in A$ için,

$$a * a' = e$$

(burada e, $(A,*)$ cebirsel yapısının birimidir) olacak şekilde $a' \in A$ varsa a' elemanına a ' nın sağ tersi, benzer şekilde

$$a'' * a = e$$

olacak şekilde $a'' \in A$ varsa a'' elemanına da a ' nın sol tersi denir. Eğer $a' = a''$ ise yani $a \in A$ için,

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

ise $a^{-1} \in A$'ya a ' nın tersi denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.3: Bir $A \neq \varnothing$ küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem ‘‘$*$’’ olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(A,*)$ cebirsel yapısına bir yarı grup denir;

i. $\forall a,b \in A$ için $a * b \in A$ (kapalılık şartı)

ii. $\forall a,b,c \in A$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ (birleşme özelliği) (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.4: Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde bir ‘‘$*$’’ ikili işlemi aşağıdaki kuralları sağlıyorsa, G ’ ye bir grup denir;

i. $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ asosyatif kural verilir.

ii. $\forall a \in G$ için $a*e = e*a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. e elemanına G ’nin birim elemanı denir.

iii. $\forall a \in G$ için $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. $a^{-1} \in G$ elemanına a nın inversi (tersi) denir.

Örnek 2.1.1: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur.

Örnek 2.1.2: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere bu kümeler çarpma işlemine göre birer değişmeli gruptur. Burada hemen belirtelim ki $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi çarpma işlemine göre bir grup olmaz. Çünkü her elemanın tersi yoktur. Sözgelimi; $2 \in \mathbb{Z}$ için

$$2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)2 = 1$$

olup,

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

grup tanımındaki ters eleman şartı sağlamadığından grup olmaz.

Tanım 2.1.5: $(G,*)$ bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G ’ de tanımlanan ikili işleme göre bir grup teşkil ederse yani $(H,*)$ cebirsel yapısı bir grup ise o takdirde $(H,*)$’a, $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.6: $H = \{e\}$ ve $H = G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H = \{e\}$ alt grubuna aşikar alt grup ve G ’den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H, G ’ nin bir öz alt grubu ise $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A kümesini içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu takdirde $< A >$, G ’ nin bir alt grubudur. Bu alt grup A kümesini içeren en küçük alt gruptur ve A kümesi tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ oluyorsa H ' ye, G ' nin bir normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: Eğer G grubu normal alt grup içermiyorsa G ' ye basit grup denir.

Tanım 2.1.10: N, G 'nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N, bu çarpıma göre mertebesi $[G:N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G ' nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 2.1.11: A boş olmayan bir küme olmak üzere, $\ell \notin A \cup A^{-1} (A \neq \varnothing)$ ve $A \cup A^{-1} \cup \{\ell\}$ nin elemanları olan $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ dizisi verildiğinde, uygun bir $n \geq 1$ için kelime $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \ell, \ell, \cdots,)$ n. terimden sonraki terimler ℓ ise, bu diziye A üzerinde bir kelime denir. Özel olarak her terimi ℓ olan $1 = (\ell, \ell, \cdots,)$ dizide bir kelime olup, bu kelimeye boş kelime denir (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.12: Eğer $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \ell, \ell, \cdots,)$ kelimesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa x 'e bir kısaltılmış kelime denir.

i. $1 \leq i \leq n-1$ olan bir i için, $x_i = a \in A$ ise $x_{i+1} \neq a^{-1}$'dir ve $x_i = a^{-1} \in A^{-1}$ ise $x_{i+1} \neq a$ dır.

ii. $k \in N$ ve $x_k = \ell$ ise, her $i \geq k$ için $x_i = \ell$ dir (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.13: A üzerindeki bütün kısaltılmış kelimerin kümesi $Ser(A)$, aşağıdaki gibi tanımlanmış ikili işleme göre bir gruptur. Bu gruba A kümesi üzerindeki serbest grup denir.

i. Her $x \in Ser(A)$ için $1.x = x.1 = x$

ii. Her $x, y \in Ser(A)/\{1\}$ için, $x = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}, y = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \cdots b_r^{\alpha_r}$ ise xy çarpımını tanımlarken genelliği bozmadan $n \geq r$ kabul edilebilir. Amacımız x ile y ' yi yan yana yazarak bir kısaltılmış kelime oluşturmaktır. Burada $a_n^{\lambda_n} = b_1^{-\alpha_1}$ ise, x ile y yan yana yazılınca kısaltılmış kelime elde edilmez. Bunun için $0 \le k \le r$ olmak üzere, her $i = 0,1,2,\cdots,k-1$ için $a_{n-i}^{\lambda_{n-i}} = b_{i+1}^{-\alpha_{i+1}}$ koşulunu sağlayan k olsun. Eğer,

$$xy = \begin{cases} a_1^{\lambda_1} \cdots a_{n-k}^{\lambda_{n-k}} b_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \ldots b_r^{\lambda_r}, k < r < n, \\ a_1^{\lambda_1} \cdots a_{n-r}^{\lambda_{n-r}}, k = r < n, \\ 1, k = r = n \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa xy bir kısaltılmış kelime olur ve böylece $Ser(A)$ üzerinde bir ikili işlem elde edilmiş olur (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.14: A boş olmayan bir küme, $B \subseteq Ser(A)$ ve B' nin $Ser(A)$ içindeki normal kapanışı N olsun. Bu taktirde $G = Ser(A)/N$ grubuna, $a \in A$ üreteçleri ve $W = e(W \in B)$ bağıntılarının belirlediği grup denir (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.15: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere, eğer $\varphi : G \to H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x*y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şartını sağlıyorsa, φ' ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca homomorfizm denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.16: $\varphi : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ' ye bir epimorfizm denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.17: $\varphi : G \to H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ' ye bir monomorfiz denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.18: $\varphi : G \to H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ' ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2010).

İzomorf gruplar arasında bire bir eşleme olup grup yapılarıda bu eşleme altında bozulmaz.

Tanım 2.1.19: $\varphi : G \to G$ homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ' ye bir grup otomorfizmi denir.

Tanım 2.1.20: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere, $\forall x \in G$ için $\mathrm{I}_a : G \to G$ otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $\mathrm{I}(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümeside $Aut(G)$ ile gösterilir (Taşçı 2010).

Tanım 2.1.21: G bir grup ve S ' de G ' nin bir alt kümesi olsun. G ' nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna, S alt kümesinin normal kümesinin normal kapanışı denir.

Tanım 2.1.22: X bir küme, $F(X)$, X üzerinde serbest grup, $R \subseteq F(X)$ ve $\overline{R}, F(X)$ deki R kümesinin normal kapanışı olsun. Yani, $\langle g^{-1}rg : g \in F(X), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(X)$ ' in alt grubu verilmiş olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(X)/\overline{R}$ ise G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir (Campbell 2003).

Önerme: Aynı grubun iki takdimi verilmiş olsun. Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden diğer takdim elde edilebilir (Johnson 1997).

Sonuç: Eğer G sonlu gerilmiş bir grup değil ise grup sonlu takdim edilemez. Bu duruma örnek olarak rasyonel sayıların normal toplama işlemine göre bir grup olan Q rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Fakat bazı gruplar vardır ki sonlu gerilmiştir ama sonlu takdim edilemezler. Bu sonuç aşağıdaki iki teoremden elde edilir (Campbell 2003).

Teorem 2.1.1: Sayılabilir çoklukta nonizomorfik sonlu takdim edilmiş grup vardır (Campbell 2003).

Lemma 2.1.1 (Von Dyck's Lemma): $R \subseteq S \subseteq F(X)$ olmak üzere, $G = \langle X / R \rangle$ ve $H = \langle X / S \rangle$ ise, her $x \in X$ elemanını sabitleyen ve $Ker\varnothing = \overline{S / R}$ olacak şekilde bir $\varnothing : G \to H$ epimorfizmi vardır. Tersine, $G = \langle X / R \rangle$' nin her bölüm grubu, $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X / S \rangle$ şeklinde bir takdime sahiptir (Johnson 1997).

Tanım 2.1.23: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.

ii. R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a,b \in R$ için $ab \in R$' dir.

iii. R kümesi çarpma işlemine birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$' dir.

iv. Çarpma işleminin toplama işlemine göre sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

ve

$$(b+c)a = ba + bc$$

dir.

Eğer $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre değişmeli ise yani $\forall a,b \in R$ için $ab = ba$ ise o takdirde $(R,+,\cdot)$ halkasına değişmeli (Komutatif) halka denir. Eğer $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise, $\forall a \in R$ için

$$a1_R = 1_R a = a$$

olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa o zaman $(R,+,\cdot)$ halkasına birimli halka denir.

Tanım 2.1.24: G, $p=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n : r_1,r_2,\cdots,r_m\rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. p ' nin bağıntı matrisi $m\times n$ tipinde bir matris olup, bu matrisin herhangi b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır.

Örneğin, G grubu, $p=\left\langle x,y,z : x^3=y^3, zxz^{-1}=y, (zx)^3=e, (zy)^2=e\right\rangle$ şeklinde takdim edilsin. p bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Campbell 2003).

Tanım 2.1.25: $l,m,n>1$ için (l,m,n) şeklinde verilen polyhedral grup,

$$\langle x,y,z \mid x^l=y^m=z^n=xyz=1\rangle$$

veya

$$\langle x,y : x^l=y^m=(xy)^n=e\rangle$$

takdimleri ile tanımlanır.

Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak $(l,m,n)\cong(m,n,l)\cong(n,l,m)$ olduğu görülebilir.

Eğer $t=lmn\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=mn+lm-lmn$ pozitif ise (l,m,n) polyhedral grubu sonludur. Eğer $1<l\le m\le n$ ise yalnızca aşağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l,m,n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

i. $l=m=2$ ve $n, n\ge 2$ olacak şekilde bir tamsayı ise,

ii. $l=2, m=3$ ve $n,\ 3\le n\le 5$ olacak şekilde bir tamsayı ise,

(l,m,n) polyhedral grubu sonlu ise bu grubun mertebesi $2\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right)^{-1}=\frac{2lmn}{t}$ ' dır (Coxeter ve Moser 1972).

i durumundaki grupların yapısı aşağıdaki teoremle belirlenir.

Teorem 2.1.2: D, mertebeleri 2 olan iki eleman tarafından üretilmiş bir grup olsun. Bu durumda D grubu aşağıdaki takdime sahiptir,

$$D=\left\langle x,y:x^2=y^2=(xy)^n=e\right\rangle,$$

burada n, ya bir doğal sayıdır ya da $n=\infty$' dur. Eğer $n=\infty$ ise, $(xy)^n=e$ bağıntısı ihmal edilecektir. n'nin sonlu olduğu durumda ise D grubu mertebesi $2n$ olan dihedral gruba izomorf olur. $z=xy$ ve $D_0=\langle z\rangle$ olsun. Bu durumda,

$$x^{-1}zx=y^{-1}zy=z^{-1}$$

elde edilir ve D_0 indeksi 2 olan bir normal alt grup olur. Buna ek olarak eğer n bir tek tamsayı ise, x ve y elemanları D grubunda birbirinin eşleniğidir (conjugedirler) (Suzuki 1982).

$(2,2,n)$ polyhedral grubunda $t=4$ olup, bu grubun mertebesi $2n$' dir. Bu grup dihedral grup diye adlandırılır.

ii durumundaki grupların yapısı aşağıdaki durumlar söz konusudur,

$(2,3,5)$ polyhedral grubu basit bir grup olup, bu grupta $t=1$'dir. Bu grubun mertebesi 60 olup, A_5 alterne grupdur. A_5 alterne grup düzgün icosahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda icosahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,4)$ polyhedral grubu indeksi 2 olan bir alt gruba sahip olup, bu grupta $t=2$' dir. Bu grubun mertebesi 24 olup, S_4 simetrik grupdur. S_4 simetrik grup düzgün octahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda octahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,3)$ polyhedral grubu indeksi 3 olan bir alt gruba sahip olup, bu grupta $t=3$' dür. Bu grubun mertebesi 12 olup, A_4 alterne grupdur. A_4 alterne grup düzgün tetrahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda tetrahedral grup diye adlandırılır.

Tanım 2.1.26: $l,m,n>0$ için $\langle l,m,n\rangle$ şeklinde verilen binary polyhedral grup,

$$\langle x,y,z : x^l = y^m = z^n = xyz\rangle$$

takdimi ile tanımlanır. Burada $l=2$ alındığında $\langle 2,m,n\rangle$ için

$$\langle y,z : y^m = z^n = (yz)^2\rangle$$

gösterimi yazılabilir.

$\langle l,m,n\rangle$ şeklinde verilen binary polyhedral grubun sonu olması için gerek ve yeter şart

$$k = lmn\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+1\right) = mn+nl+lm-lmn$$

sayısının pozitif olmasıdır. Ayrıca $\langle l,m,n\rangle$' nin mertebesi $4lmn/k$' dır (Kılıç ve Taşçı 2006).

Tanım 2.1.27: $l,m,n\in\mathbb{Z}$ için $\langle l,m,n\rangle$ şeklinde verilen centro-polyhedral grup,

$$\langle x,y,z \mid x^l = y^m = z^n = xyz\rangle$$

takdimi ile tanımlanır.

$\langle 2,2,-n\rangle, \langle 2,-n,2\rangle, \langle -n,2,2\rangle$ centro-polyhedral grupların mertebeleri $4n$' dir.

$\langle -2,n,2\rangle, \langle 2,n,-2\rangle, \langle n,2,-2\rangle, \langle n,-2,2\rangle, \langle 2,-2,n\rangle$ ve $\langle -2,2,n\rangle$ centro-polyhedral grupların mertebeler $4n(n-1)$' dir.

2.2. Lineer İndirgemeli Diziler

2.2.1. Lineer İndirgemeli Dizi

Tanım 2.2.1.1: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R' nin elemanlarının $a_1,a_2,\cdots,a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n\geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n \quad (2.1)$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \cdots, c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz (Everest, Poorten, Shparlinski ve Ward 2003).

Tanım 2.2.1.2 : $$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$$

şeklindeki k. dereceden polinoma, (2.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla, tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k, R' nin terslenebilir bir elemanı ise (2.1)' de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots,$ şeklinde devam eder (Everest, Poorten, Shparlinski ve Ward 2003).

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.2.1.3 : R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R' nin elemanlarının $a_1, a_2, \cdots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n \quad (2.2)$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir.

(2.2) bağıntısı için

$$F(x)=\left(x^{k}-c_{1}x^{k-1},...,c_{k-1}x-c_{k}\right)\left(x-1\right)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir (Everest, Poorten, Shparlinski ve Ward 2003).

Kalman $[28]$' de $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ başlangıç değeri ve $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$' ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+....+c_{k-1}a_{n+k-1}$$

şeklindeki $k-$basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanları;

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde etmiştir.

2.2.2. Fibanocci Dizileri

Tanım 2.2.2.1: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $n \geq 0$ ve $F_0=0, F_1=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Fibanocci dizisi,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots,$$

şeklindedir.

Silvester $[35]$' de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir.

Hongsberger $[25]$'de Fibanocci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceğini göstermiştir. Buradaki Q matrisine Fibanocci Q-matrisi denir.

Tanım 2.2.2.2: $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ $k-$basamak Fibanocci dizisi, $n \geq 0$ ve $F_0 = F_1 = \cdots = F_{k-2} = 0$, $F_{k-1} = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + \cdots + F_n^{(k)} \qquad (2.3)$$

şeklindedir.

$k-$basamak Fibanocci dizisi $[28]$'de Kalman tarafından bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1} \qquad (2.4)$$

dizisinin özel bir halidir. Burada $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ reel sabitlerdir. Kalman $[28]$'de

$$A_k = \left[a_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (2.4) deki liner indirgemeli diziler için

$$A_k^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir. Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^{(k)} \\ F_{n+1}^{(k)} \\ F_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ F_{n+k-2}^{(k)} \\ F_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

eşitliği kolayca görülebilir.

2.2.3. Jacobsthal Dizi

Tanım 2.2.3.1: $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi, $n \geq 0$ ve $J_0 = 0, J_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Jacobsthal dizisi

$$0,1,1,3,5,11,21,43,\cdots,$$

şeklindedir.

Köken ve Bozkurt $[33]$' de Jacobsthal sayılarını

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, F^n=\begin{bmatrix}J_{n-1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir.

Yılmaz ve Bozkurt $[43]$' de genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizilerini,

$$J_n^i=\begin{cases}1 & i+n=1 \text{ ise}, \quad 1-k\leq n\leq 0\\ 0 & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

başlangıç koşullarıyla $n>0$ ve $1\leq i\leq k$ için;

$$J_n^i=J_{n-1}^i+2J_{n-2}^i+...+J_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada J_n^i, dizinin $n.$ terimidir. $k=2$ ve $i=1$ için genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir. Köken ve Bozkurt $[33]$' de genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları için aşağıdaki gibi bir denklem elde etmişlerdir;

$$\begin{bmatrix}J_{n+1}^i\\ J_n^i\\ J_{n-1}^i\\ \vdots\\ \vdots\\ J_{n-k+2}^i\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}J_n^i\\ J_{n-1}^i\\ J_{n-2}^i\\ \vdots\\ \vdots\\ J_{n-k+1}^i\end{bmatrix}$$

burada C, $k\times k$ tipindeki matris,

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde olup, genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmıştır.

Ayrıca, $[43]$' de genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri için,

$$B_n == \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$B_n = C^n$$

şeklinde denklem elde edilmiştir.

2.2.4. Pell Dizisi

Tanım 2.2.4.1: $\{P_n\}$ Pell dizisi, $n \geq 0$ ve $P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklinde tanımlanır. O halde Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,\cdots,$$

şeklindedir.

Pell sayılarının bazı özellikleri Horadam tarafından $[24]$'de elde edilmiştir. Bicknell ise, $[1]$' de Pell sayılarının aşağıdaki matris tarafından üretildiğini göstermiştir;

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{Z}$ için,

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Kılıç ve Taşçı $[30]$' da genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell sayılarının bir k dizisini,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1-i \text{ ise} \\ 1 & n \neq 1-i \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleriyle, $n > 0$ ve $1-k \leq n \leq 0$ için;

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada P_n^i, i. dizisinin n. terimidir. $i = k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş $k-$Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k = 2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir ve $i = k$ için, P_n^k ya genelleştirilmiş $k-$Pell sayıları denir.

Ayrıca Kılıç ve Taşçı $[30]$' da genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell matrisini

$$R = \left[r_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Aynı zamanda

$$E_n = \left[e_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R.E_n$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir. Burada R, $k\ x\ k$ tipindeki matris, genelleştirilmiş $k-$ mertebeden Pell matrisi olarak adlandırılmıştır (Kılıç ve Taşçı 2006).

Lemma 2.2.4.1: R ve E_n sırasıyla (2.5) ve (2.6)'daki gibi olsunlar. Bu durumda tüm $n \geq 0$ tamsayıları için,

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

eşitliği yazılabilir (Kılıç ve Taşçı 2006).

Deveci ve Karaduman $[13]$'de genelleştirilmiş Pell dizilerini matematiksel tümevarımla da ispatlanabilen, $\alpha > 0$ sabit katsayıları için,

$$M^{(\alpha)}=\begin{bmatrix}\alpha+1 & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \left(M^{(\alpha)}\right)^n=\begin{bmatrix}P_{n+1}^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}P_n^{(\alpha)}\\ P_n^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}P_{n-1}^{(\alpha)}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisiyle de oluşturulabileceğini göstermişlerdir.

Deveci and Karaduman aynı çalışmada $P_n^{(\alpha)k}$, $k-$basamak geneştirilmiş Pell dizisini, $\alpha>0$ sabit katsayılar, $n\geq 0$ ve $1\leq j\leq k-1$ için $\beta_j=\begin{pmatrix}\alpha+j\\ j+1\end{pmatrix}$ olacak şekilde

$$P_0^{(\alpha).k}=0,\cdots,P_{k-2}^{(\alpha).k}=0,P_{k-1}^{(\alpha).k}=1$$

başlangıç elemanları ile

$$P_{n+k}^{(\alpha).k}=(\alpha+1)P_{n+k-1}^{(\alpha).k}+\beta_1P_{n+k-1}^{(\alpha).k}+\cdots+\beta_{k-1}P_n^{(\alpha).k}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha).2}\right\}=\left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ eşitliğine dikkat edilmelidir.

Deveci and Karaduman yine $[13]$' de $k-$basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için,

$$\begin{bmatrix}P_{n+k}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-1}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k}\\ \vdots\\ P_{n+1}^{(\alpha).k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{n+k-1}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-3}^{(\alpha).k}\\ \vdots\\ P_n^{(\alpha).k}\end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine, $k-$basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir.

2.3. m Modülüne Göre Lineer İndirgemeli Diziler

2.3.1. m Modülüne Göre $k-$Basamak Fibanocci Dizisi

Bu bölümde bir m modülüne göre genelleştirilmiş $k-$basamak Fibanocci dizisi araştırılmıştır.

Tanım 2.3.1.1: $f_n^{(k)}$, $1 \le i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_n^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı, $n > k$ için,

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \quad (3.1)$$

$k-$ basamak Fibonacci dizisinin n. elemanıdır. $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} \pmod{m}$ olmak üzere bu dizi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_n^{(k,m)}, \cdots, \right)$$

dizisi elde edilir ve burada $f_i^{(k,m)}, f_i^{(k)} = \pmod{m}$ ' dir.

O zaman $\left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_k^{(k,m)} \right) = (0, 0, \cdots, 1)$ olup bu dizi için (3.1)' deki tekrar eden dizi bağıntıları aynıdır (Lü ve Wang 2007).

Tanım 2.3.1.2: Eğer dizi belli bir noktadan sonra sabit bir dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodik dizi denir. Tekrar eden alt dizideki eleman sayısına ise dizinin periyodu denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, f, g, d, e, f, g, \cdots,$ dizisi periyodik olup, dizi her 4 elemanda tekrar ettiğinden periyodu 4' dür.

Tanım 2.3.1.3: Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyodlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \cdots,$ dizisi basit periyodik olup, dizi her 5 elemanda tekrar ettiğinden periyodu 5' dir.

Teorem 2.3.1.1: $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir (Lü ve Wang 2007).

İspat: $S_k=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k)|0\le a_i\le m-1\}$ olsun. $S_k=m^k$ olup sonludur, yani her $u\ge 0$ için,

$$f_{u+1}^{(k,m)}=f_{v+1}^{(k,m)},\cdots,f_{u+k}^{(k,m)}=f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $v\ge u$ sayısı vardır. Tanımdan,

$$f_{n+k}^{(k)}=\sum_{j=0}^{k-1}f_{n+j}^{(k)}$$

olur. Yani,

$$f_n^{(k)}=f_{n+k}^{(k)}-\sum_{j=0}^{k-1}f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan kolaylıkla,

$$f_u^{(k,m)}=f_v^{(k,m)},f_{u-1}^{(k,m)}=f_{v-1}^{(k,m)},f_{u-2}^{(k,m)}=f_{v-2}^{(k,m)},\cdots,f_2^{(k,m)}=f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve $f_1^{(k,m)}=f_{v-u+1}^{(k,m)}$ olduğu görülebilir. Böylece $f(k,m)$ periyodik bir dizidir. Böylece ispat tamamlanır.

$h_k(m)$ ile $f(k,m)$'nin en küçük periyodu gösterilir. $f(k,m)$' nin periyodu veya m modülüne göre $k-$basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır.

Örnek 2.3.1.1: $s(4,3)=(0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\cdots,)$ dizisi ele alınırsa, bu dizi $k=4$ basamak için her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar edip $h_4(3)=26$ olur (Lü ve Wang, 2007).

p^i'ler asal sayılar ve e_i'ler pozitif tamsayılar olmak üzere, $m=\prod_{i=1}^{t}p_i^{e_i}$ $(t\ge 1)$ ise $h_k(m)$, $h_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katıdır.

$$G=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\1&1&1&\dots&1\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen $k\times k$ tipli karesel bir matris olsun.

a_{ij} 'ler tamsayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\bmod m$' ye göre indirgenmesi $A \bmod m$ şeklinde ifade edilir. Yani, $A \bmod m = a_{ij} \left(\bmod m\right)$'dir. $\langle G\rangle_m = \left\{G^i \left(\bmod\ m\right) \mid i \geq 0\right\}$ olsun. T, matrisin transpozesi olmak üzere,

$$G^i\left(0,0,\cdots,1\right)^T \left(\bmod\ m\right) = \left(f_{i+1}^{(k,m)}, f_{i+2}^{(k,m)}, \cdots, f_{i+k}^{(k,m)}\right)$$

dir. Bu durumda $h_k\left(m\right)$, aşağıdaki eşitliği sağlayan en küçük h pozitif tamsayısı olarak elde edilir;

$$G^h\left(0,0,\cdots,1\right)^T \left(\bmod\ m\right) = \left(0,0,\cdots,1\right).$$

Şimdi, $a_1 = \left(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1k}\right) = \left(0,1,0,\cdots,0\right)$ şeklinde k boyutlu bir vektör olsun. Burada, $a_n = \left(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nk}\right)$ $\left(n>0\right)$ şeklinde tanımlanıp,

$$a_{n1} = a_{(n-1)k} \text{ ve } a_{ni} = a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(i-1)} \quad \left(i>1\right) \qquad (3.2)$$

dir.

$$G_n^{'} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n+k-1)1} & a_{(n+k-1)2} & \cdots & a_{(n+k-1)k} \end{bmatrix}$$

olsun.

Buradan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.3.1.1: $G_n = G_n^{'}$'dir (Lü ve Wang 2007).

$g_k\left(p^\alpha\right)$, $\langle G\rangle_{p^\alpha}$ grubunun mertebesi olsun. Aşağıdaki teorem $h_k\left(p^\alpha\right)$ ve $g_k\left(p^\alpha\right)$ arasındaki ilişkiyi verir (Lü ve Wang 2007).

Teorem 2.3.1.2: $h_k\left(p^\alpha\right) = g_k\left(p^\alpha\right)$' dır (Lü ve Wang 2007).

İspat: $g_k\left(p^\alpha\right)$, $h_k\left(p^\alpha\right)$ ' a bölünebilir olduğu açıktır. O halde ispatı tamamlamak için $h_k\left(p^\alpha\right)$' nın $g_k\left(p^\alpha\right)$ tarafından bölündüğünü göstermek yeterli olacaktır. $h_k\left(p^\alpha\right)=n$ olsun. O zaman n aşağıdaki eşitliği sağlayan en küçük tamsayıdır;

$$G^n\left(0,0,\cdots,1\right)^T\left(\text{mod } p\right)=\left(0,0,\cdots,1\right)$$

Buradan ve Lemma 2.3.1.1 'den kolaylıkla görülür ki, $0\le j\le k-1$için,

$$a_{(n+j)k}\equiv 0\left(\text{mod } p^\alpha\right) \text{ ve } a_{(n+k-1)k}\equiv 1\left(\text{mod } p^\alpha\right)$$

olur. Buradan ve (3.2) 'den, tüm $j=0,1,\cdots,k-1$ için

$$a_{(n+j-1)i}=a_{(n+j)(i+1)}-a_{(n+j-1)k}\equiv a_{(n+j)(i+1)}\left(\text{mod } p^\alpha\right)$$

olur. Böylece

$$a_{n1}\equiv a_{(n+1)2}\equiv\cdots\equiv a_{(n+k-1)k}\equiv 1\left(\text{mod } p^\alpha\right)$$

elde edilir. $j+1<i<k$ olduğu zaman,

$$a_{(n+j)i}\equiv a_{(n+j+1)(i+1)}\equiv\cdots\equiv a_{(n+k-1)k}\left(\text{mod } p^\alpha\right)$$

ve $j\ge i$ olduğu zaman, (3.2)'den $a_{(n+j-i+1)1}=a_{(n+j-i)k}$ olur. Bundan dolayı

$$a_{(n+j)i}\equiv a_{(n+j-1)(i-1)}\equiv\cdots\equiv a_{(n+j-i+1)1}=a_{(n+j-i)k}\equiv 0\left(\text{mod } p^\alpha\right)$$

dir. Bu takdirde $G^n\equiv I\left(\text{mod } p^\alpha\right)$ olup bu bize n ' nin $g_k\left(p^\alpha\right)$ tarafından bölündüğünü gösterir. Böylece $g_k\left(p^\alpha\right)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi $g_k\left(p\right)$ ve $g_k\left(p^\alpha\right)$ arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 2.3.1.3: t en büyük pozitif tamsayı olmak üzere, $g_k\left(p\right)=g_k\left(p^t\right)$' dir. Her $\alpha>t$ için, $g_k\left(p^\alpha\right)=p^{\alpha-t}g_k\left(p\right)$ olup $g_k\left(p\right)\ne g_k\left(p^2\right)$ ise, her $\alpha>1$ için $g_k\left(p^\alpha\right)=p^{\alpha-1}g_k\left(p\right)$'dir (Lü ve Wang 2007).

İspat: Tanımdan görüldüğü üzere her r pozitif tamsayısı için, $G^{gk\left(p^{r+1}\right)} \equiv \mathrm{I}\left(\bmod p^{r+1}\right)$ olduğunda bu $G^{gk\left(p^{r+1}\right)} \equiv \mathrm{I}\left(\bmod p^{r}\right)$ olarak elde edilir ki buda $g_k\left(p^r\right)$' nin $g_k\left(p^{r+1}\right)$' i böldüğünü gösteririr. Diğer taraftan, $G^{gk\left(p^r\right)} = \mathrm{I} + \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)$ yazılabilir.

$$G^{gk\left(p^r\right)p} = \left(\mathrm{I} + \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)^i \equiv \mathrm{I}\left(\bmod p^{r+1}\right)$$

olduğundan $g_k\left(p^{r+1}\right)$' nin $g_k\left(p^r\right)$' i böldüğü görülmektedir. Böylece ya $g_k\left(p^{r+1}\right) = g_k\left(p^r\right)$ ya da $g_k\left(p^{r+1}\right) = g_k\left(p^r\right)p$ olmalıdır. Burada ikinci durum ancak p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(r)}$ elemanın mevcut olması ile mümkündür. $g_k\left(p^t\right) \neq g_k\left(p^{t+1}\right)$ olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(r)}$ elemanı mevcuttur. Böylece; $g_k\left(p^{t+1}\right) \neq g_k\left(p^{t+2}\right)$ elde edilir ve t üzerinden tümevarım yöntemi ile ispat tamamlanır.

2.3.2: m Modülüne Göre Genelleştirilmiş $k-$Mertebeden Jacobsthal Dizileri

Bu bölümde bir m modülüne göre genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal dizileri araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal dizisi, $k \geq 2$ için $\bmod m$'ye indirgenirse

$$\left\{J_n^{k,m}\right\} = \left\{J_{1-k}^{k,m}, J_{2-k}^{k,m}, \cdots, J_0^{k,m}, J_1^{k,m}, \cdots, J_i^{k,m}, \cdots\right\}$$

eşitliği elde edilir, burada $J_i^{k,m} = J_i^k \left(\bmod m\right)$' dir.

Teorem 2.3.2.1: $\left\{J_n^{k,m}\right\}$ $\left(k \geq 2\right)$ dizisi periyodiktir (Deveci, Karaduman ve Sağlam Baskıda).

İspat: $U_k=\{(x_0,x_1,\cdots,x_k)|0\le x_i\le m-1\}$ olsun. $|U_k|=m^k$ sonlu olduğundan her $a\ge 0$ için,

$$J^{k,m}_{a+1}=J^{k,m}_{b+1},\cdots,J^{k,m}_{a+k}=J^{k,m}_{b+k}$$

olacak şekilde $b\ge a$ tam sayısı vardır. $\{J^{k,m}_n\}$ $(k\ge 2)$ dizisinin en küçük periyodu $hJ^{k,m}$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.2.1: $\{J^{3,3}_n\}=\{1,0,0,1,1,0,0,1,\cdots\}$ şeklinde olup dizi her dört terimde bir tekrar eder. Böylece $hJ^{3,3}=4$ ’ dir.

$p\ne 2$ için $\langle C\rangle_{p^\alpha}=\{C^i(\bmod p^\alpha)|i\ge 0\}$ ve $\langle E\rangle_{p^\alpha}=\{E^i(\bmod p^\alpha)|i\ge 0\}$ devirli gruplar olup bu grupların mertebeleri $|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ ve $|\langle E\rangle_{p^\alpha}|$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.3.2.2: $p\ne 2$ ise $hJ^{k,p^\alpha}=|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ ’ dir (Deveci, Karaduman ve Sağlam Baskıda).

İspat: Öncelikle, $hJ^{k,p^\alpha}=|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ durumunu ele alalım. $|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ ’ nın, hJ^{k,p^α} tarafından bölünebilir olduğu açıktır. İspatı tamamlamak için hJ^{k,p^α} ’ nın $|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ tarafından bölünebilir olması gerektiğini göstermemiz yeterli olacaktır. $hJ^{k,p^\alpha}=n$ olsun. [9] ’ da $B_n=C.B_{n-1}$ ve $B_n=C^n$ olduğu gösterilmiştir. $B_n\equiv I(\bmod p^\alpha)$ (I birim matristir) olduğundan $C^{n+1}\equiv C(\bmod p^\alpha)$ sonucuna varılır. Böylece, $C^n\equiv I(\bmod p^\alpha)$ olup n ’nin $|\langle C\rangle_{p^\alpha}|$ tarafından bölünebilir olduğu görülür.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2.3: t, $hJ^{k,p}=hJ^{k,p^t}$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $p\ne 2$ olmak üzere her $\alpha\ge t$ için,

$$hJ^{k,p^t} = p^{\alpha-t}.hJ^p$$

dir (Deveci, Karaduman ve Sağlam, Baskıda).

İspat:. q bir pozitif tamsayı olsun. $C^{hJ^k p^{q+1}} \equiv I\left(\bmod p^{q+1}\right)$ yani $C^{hJ^k p^{q+1}} \equiv I\left(\bmod p^q\right)$ olduğu için, $hJ^k p^q$' nın $hJ^k p^{q+1}$' yı böldüğü görülmektedir. $C^{hJ^k p^q} = I + \left(\bmod p^q\right)$ yazılarak,

$C^{hJ^k p^q . p} \equiv \left(I + \left(a_{ij}^{(q)} . p^q\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(q)} . p^q\right)^i \equiv I\left(\bmod p^q + 1\right)$ elde ederiz ki, bu da $hJ^{k,p^{q+1}}$'nın hJ^{k,p^q}' yu böldüğünü gösterir ki, buradaki ikinci durum ancak ve ancak $a_{ij}^{(q)}$' nun p tarafından bölünmemesi halinde sağlanır. Bir a_{ij}, p tarafından bölünmemek koşuluyla $hJ^{k.p^t} \neq hJ^{k,p^{t+1}}$ eşitliği elde edilir. Böylece $hJ^{k.p^{t+1}} \neq hJ^{k,p^{t+2}}$ sonucuna ulaşılır. q üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2.4: p^i**'** ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $t \geq 1$ ise,

$$hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$$

dir (Deveci, Karaduman ve Sağlam Baskıda).

(Burada $okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$; $hJ^{k,p_1^{e_1}}$, $hJ^{k,p_2^{e_2}}, \cdots, hJ^{k,p_t^{e_t}}$ lerin en küçük ortak katıdır.)

İspat: $hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$ durumunu ele alalım. $hJ^{k,p_i^{e_i}}, \left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$dizisinin periyodu olduğunda $\left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$ dizisi $u \in \mathbb{N}$ için, $J^{k,p_i^{e_i}}$ terimde bir tekrar eder. Buradan $\left\{J^{k,m}\right\}$, $\left\{J^{k,m}\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan her i değeri için, $\left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$ dizisi tekrar eder. Böylece $hJ^{k,m}$ terimde bir tekrar eder. $hJ^{k,m}$, $u.J^{k,p_i^{e_i}}$ formda olup buradan $hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$ elde edilir.

2.3.3 : m Modülüne Göre Genelleştirilmiş $k-$Mertebeden Pell Dizileri

Bu bölümde bir m modülüne göre genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizileri araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisini m modülüne indirgenerek,

$$\left\{P^{k,m}\right\}=\left\{P_{1-k}^{k,m},P_{2-k}^{k,m},\cdots,P_{0}^{k,m},P_{1}^{k,m},P_{2}^{k,m},\cdots,P_{n}^{k,m},\cdots,\right\}$$

ile gösterilen indirgemeli bir dizi elde edilebilir. Burada

$$P_n^{k,m}=P_n^k(\operatorname{mod} m)$$

dir. (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

Teorem 2.3.3.1: $\left\{P^{k,m}\right\}$ periyodik bir dizidir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: $U_k=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\middle|0\le x_i\le m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $\left|U_k\right|=m^k$ sonlu olur. Yani herhangi bir $a\ge 0$ için,

$$P_{a+1}^{k,m}=P_{b+1}^{k,m},\cdots,P_{a+k}^{k,m}=P_{b+k}^{k,m}$$

olacak şekilde $b\ge a$ tamsayısı vardır. $\left\{P_n^k\right\}$, genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisinin tanımından

$$P_{n+k}^k=2P_{n+k-1}^k+P_{n+k-2}^k+\cdots+P_n^k$$

olacaktır. Böylece ,

$$P_a^{k,m}=P_b^{k,m},P_{a-1}^{k,m}=P_{b-1}^{k,m},\cdots,P_2^{k,m}=P_{b-a+2}^{k,m},P_1^{k,m}=P_{b-a+1}^{k,m}$$

eşitlikleri elde edilir ki bu eşitlikler $\left\{P^{k,m}\right\}$' nin periyodik olduğunu gösterir.

$\left\{P^{k,m}\right\}$' nin periyodunu gösteren $hP_k\left(m\right)$' ye m modülüne göre genelleştirilmiş k - mertebeden Pell dizisinin periyodu denir. Burada $k=2$ alındığında $hP_2\left(m\right)$ notasyonu m modülüne göre Pell dizisinin periyodunu gösterir.

Örneğin;

$$\left\{P^{3,2}\right\}=\{1,0,0,1,0,1,1,1,0,0,\cdots,\}$$

olur ve bu her 7 adımda tekrar eder. O halde $hP_3\left(2\right)=7$ yazılabilir.

Teorem 2.3.3.2: $u\in\mathbb{N}$ için $hP_2\left(2^u\right)=2^u$ olur (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: $\left\{P_n\right\}$ Pell dizisinin tanımından $u\in\mathbb{N}$ için,

$$P_{2^u}=2P_{2^u-1}+P_{2^u-2}=2^u\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{N})$$

$$P_{2^u+1}=2P_{2^u}+P_{2^u-1}=2^{u+1}\lambda+2^{u+1}\beta+1 \qquad (\beta\in\mathbb{N})$$

yazılabilir. $P_{2^u}\equiv 0 \pmod{2^u}$ ve $P_{2^u+1}\equiv 1\pmod{2^u}$ olduğundan devir 2^u. elemanla tekrar başlar. Yani

$$P_{2^u}\equiv P_0\left(\bmod 2^u\right), P_{2^u+1}\equiv P_1\left(\bmod 2^u\right),\cdots,$$

olur. Böylece,

$$hP_2\left(2^u\right)=2^u$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.3.3.3: $hP_2\left(m\right)$ bir çift sayırdır (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: $P_\alpha\equiv P_\varphi\left(\bmod m\right)$ ve $P_{\alpha+1}\equiv P_{\varphi+1}\left(\bmod m\right)$ olsun. $\left\{P_n\right\}$, Pell dizisinin tanımından

- **i.** Eğer P_φ tek ise $P_{\varphi+1}$ çifttir.
- **ii.** Eğer P_φ çift ise $P_{\varphi+1}$ tektir.

ifadeleri yazılabilir. Bu yüzden 2, $hP_2\left(m\right)$' yi bölmelidir.

Böylece $hP_2(m)$' nin 2 tarafından bölünmesi gerektiği görülür ki, bu da bize $hP_2(m)$ nin çift olduğunu gösterir.

$\langle R\rangle_{p^\alpha}=\{R^i \bmod(p^\alpha) \mid i\geq 0\}$ devirli bir grup ve $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|, \langle R\rangle_{p^\alpha}$' nın mertebesini göstersin. Bu durumda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.3.3.4: $hP_k(p^\alpha)=\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$' dır (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$' nın $hP_k(p^\alpha)$ tarafından bölündüğü açıktır. O halde $hP_k(p^\alpha)$'nında $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$ tarafından bölündüğünü gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $hP_k(p^\alpha)=n$ olsun. $E_{n+1}=R^{n+1}=R.E_n$ olduğunu biliyoruz. $E_n\equiv \mathrm{I} \bmod(p^\alpha)$ (I birim matris olsun) olduğu için $R^{n+1}\equiv R \bmod(p^\alpha)$ elde edilir. Böylece $R^n=\mathrm{I} \bmod(p^\alpha)$ olduğu görülür ki, bu da $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$'nın n' yi böldüğünü gösterir. Böylece $hP_k(p^\alpha)=\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.3.3.5: P_i' ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $(t\geq 1)$ ve $hP_k(p_i^{e_i})$'nin en küçük ortak katı $okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]$ olsun. Bu durumda

$$hP_k(m)=okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]$$

dir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: $okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]\equiv\delta$ olsun. $P_\delta^k\equiv P_0^k(\bmod m), P_{\delta+1}^k\equiv P_1^k(\bmod m),\cdots,$ ve $P_{\delta+k+1}^k\equiv P_{k-1}^k(\bmod m)$ olduğundan,

$$hP_k(m)=okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]$$

dir.

Teorem 2.3.3.6: $t, hP_k\left(p\right) = hP_k\left(p^t\right)$ olacak şekilde en büyük pozitif tam sayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için,

$$hP_k\left(p^{\alpha}\right) = P^{\alpha - t} hP_k\left(p\right)$$

olur. Özel olarak eğer $hP_k\left(p\right) \neq hP_k\left(p^2\right)$ olursa bu durumda her $\alpha > 1$ için $hP_k\left(p^{\alpha}\right) = P^{\alpha-1} hP_k\left(p\right)$ olur (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: θ, pozitif bir tamsayı olsun. $R^{hP_k\left(P^{\theta+1}\right)} \equiv I \ \left(\bmod p^{\theta+1}\right)$ olduğu için, yani $R^{hP_K\left(P^{\theta+1}\right)} \equiv I \ \left(\bmod p^{\theta}\right)$ olduğundan $hP_k\left(p^{\theta}\right)$' nin $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$' yi böldüğü açıktır. Diğer taraftan $R^{hP_k\left(P^{\theta}\right)} \equiv I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)$ ifadesi yazılırsa $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$' nin, $hP_k\left(p^{\theta}\right)$' yi böldüğünü gösteren

$$R^{hP_k\left(p^{\theta}\right)p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)^i \equiv I \ \left(\bmod p^{\theta+1}\right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $hP_k\left(p^{\theta+1}\right) = hP_k\left(p^{\theta}\right)$ veya $hP_k\left(p^{\theta+1}\right) = hP_k\left(p^{\theta}\right) p$ olduğu görülür. Burada son yazılan eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ olmasıdır. $hP_k\left(p^t\right) \neq hP_k\left(p^{t+1}\right)$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Böylece $hP_k\left(p^{t+1}\right) \neq hP_k\left(p^{t+2}\right)$ yazılabilir ve ispat t üzerinden tümevarım yöntemiyle tamamlanmış olur.

3. METARYEL VE YÖNTEMf

3.1. Gruplarda Fibanocci Dizileri

3.1.1. Fibanocci Orbiti ve $k-$nacci Dizisi

Tanım 3.1.1.1: G grubu $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ tarafından gerilen bir grup olsun. Bu takdirde $x_1=a_1, x_2=a_2,\cdots,x_n=a_n$, $x_{i+n}=\prod_{j=1}^{n} x_{i+j-1}\,, i\geq 1$ dizisine G grubunun Fibanocci orbiti denir ve $F_A\left(G\right)$ ile gösterilir (Campell ve Campell 2005).

Tanım 3.1.1.2: Sonlu bir gruptaki bir $k-$nacci ($k-$basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin herbir elemanı, verilen $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n=\begin{cases} x_0x_1x_2\cdots x_{n-1}; \; j\leq n<k \\ x_{n-k}x_{n-k+1} \qquad ;n\geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}$ elemanları grubu germesi gerekir. Böylece, bu $k-$nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}$ elemanları tarafından gerilen sonlu bir gruptaki $k-$nacci dizisi $F_k\left(G;x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}\right)$ ile gösterilir. Buna göre tamsayılardaki $\bmod m$ ' ye göre klasik Fibanocci dizisi, $F_2\left(Z_m;0,1\right)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir $2-$ nacci dizisi sonlu bir grubun Fibanocci dizisi olarak adlandırılır. Bir $F_k\left(G;x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}\right)$ $k-$nacci dizisinin periyodu $P_k\left(G;x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{j-1}\right)$ şeklinde gösterilir. $k-$gerenli bir grubun Fibanocci orbiti bu gruptaki $k-$nacci dizisidir.

Tanım 3.1.1.2: G bir grup olsun. G ' nin her elemanın içinde bulunduğu bir $k-$nacci dizisi mevcut ise G ' ye $k-$nacci dizilendirilebilirdir (Knox 1992).

Şimdi bazı özel gruplardaki $k-$nacci dizilerinin periyodlarını araştıralım.

Teorem 3.1.1.1: $n\geq 3$ olmak üzere $\langle x,y:x^n=y^2=e,yx=x^{-1}y\rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubunda $P_k(D_n;x,y)=P_k(D_n;y,x)=2k+2$ (Knox 1992).

Teorem 3.1.1.2: G, $2-$gerenli bir grup ve G'nin birim elemanı $F_2(G;x,y)$ veya $F_2(G;y,x)$ Fibanocci dizilerinde görülüyorsa G abelyendir (Knox 1992).

İspat: Genelliği bozmaksızın G' nin $F_2(G;x,y)$ Fibanocci dizisini düşünelim. n doğal sayısı için G' nin birim elemanın bu dizinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin $n.$ elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x,y,\cdots,s,e,\cdots$$

şeklinde bir dizi elde edilebilir. Yalnız $s^{-1},(n-1)$. pozisyon için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer şekilde s^2 dizinin $(n-2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizinin $(n-3)$. pozisyonunda olur. Bu şekilde devam ederek,

$$x,y,\cdots,s^{-8},s^5,s^{-3},s^2,s^{-1},s^1,\cdots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2}=-u_{i-1}+u_1$ bağıntısı kullanılarak s' nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif işaretli tamsayılardan bir Fibanocci dizisi oluşturulur. Böylece, grubun bir Fibanocci dizisi aşağıdaki gibi iki forma sahip olur;

i. n tek ise, dizi,

$$s^{u_n},s^{-u_{n-1}},s^{u_{n-2}},\cdots,s^5,s^{-3},s^2,s^{-1},s^1,e,\cdots$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_n}=x,s^{-u_{n-1}}=y$$

(bu da $s^{u_{n-1}}=y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{u_{n-2}}=xy$' dir.

$$s^{u_{n-1}}s^{u_{n-2}}=s^{u_{n-1}+u_{n-2}}=s^{u_n}$$

olduğundan $y^{-1}xy=x$ veya $xy=yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

ii. n çift ise**,** dizi,

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \cdots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \cdots$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{-u_n} = x, s^{u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{-u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{-u_{n-2}} = xy$ ' dir.

$$s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} = s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n}$$

olduğu için $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım,

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

Abelyen grubunu göz önüne alalım. Bu grubun Fibanocci dizileri,

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y$$

$$x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy, \cdots$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y,$$

$$x^8y, x^7y, x^6, x^4, xy, x^5, x^6y, x^2y, x^8, xy, y, x, xy, \cdots$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 3.1.1.1: $2-$nacci dizilenebilir bir grup devirlidir (Knox 1992).

İspat: G, $2-$nacci dizilebilir bir grup olsun. Bu takdirde G grubu ya $1-$gerenli ya da $2-$gerenlidir. G, $2-$gerenli bir grup ise e, G ' nin $2-$nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi, G 'nin s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G 'nin her elemanı kendisinin $2-$nacci dizisinde bulunur ve bu yüzden G 'nin bütün elemanları, sadece s elemanının terimleri ile takdim edilir (s 'nin üsleri ile). O halde G grubu $1-$gerenlidir ya da devirlidir.

Genel olarak $k \geq 3$ için $k-$nacci dizilenebilir gruplar abelyen değildir. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı, $k-$nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 3.1.1.3: G**,** $2-$gerenli bir grup olsun. G'nin birim elemanı bu grubun bir Fibanocci dizisinde görülürse, bu takdirde dizinin $x_i = e$ özelliğini sağlayan x_i elemanlarının indislerinin bir koleksiyonu aritmetik bir dizilişe sahip bir dizi ihtiva eder (Knox 1992).

İspat: Yukarıdaki teorem 3.1.1.2' den $G = \langle x, y \rangle$ abelyendir. Bu yüzden dizinin *n.* terimi $x^{u_{n-1}} y^{u_n}$ şeklindedir. Wall' ın $[42]$ 'deki çalışmasından, $u_n \equiv 0 \bmod(m)$ olan terimlerin basit aritmetik dizilişte olan indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^3, \cdots, y^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikisi de indisleri aritmetik dizilişte olan pozisyonda e' yi ihtiva eder. e' nin ortaya çıkışının periyodu x ve y'nin mertebelerine bağlıdır. $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots,$ e' nin ortaya çıkışının bu periyodu e' nin $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \cdots, y^{u_n}$' deki periyodlarının en küçük ortak katı olur. Böylece, e'nin $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots,$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliş ihtiva eden altindisler olacaktır.

$k-$nacci dizilenebilir bir grubun homomorfik görüntüsü de $k-$nacci dizilenebilirdir. $k-$nacci dizilenebilir bir grubun, $k-$nacci dizilenebilir bir grup tarafından genişlemesinin $k-$nacci dizisinin dizilenebilir olduğunu gerektirmez. $k-$nacci dizilenebilir gruplarının direct çarpımlarının da $k-$nacci dizisinin dizilenebilir olması gerekmez. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

Abelyen grubunu ele alalım, bu grup $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ devirli gruplarının direct çarpımıdır.

$\langle x \rangle$ grubu için Fibanocci dizisi,

$$F_2(\langle x \rangle; e, x) = e, x, x, x^2, x^3, x^5, x^8, x^4, x^3, x^7, x, x^8,$$

$$e, x^8, x^8, x^7, x^6, x^2, x^8, x, e, x, x, \cdots$$

ve $\langle y \rangle$ grubu için Fibanocci dizisi,

$$F_2(\langle y\rangle; e, y) = e, y, y, e, \cdots$$

şeklinde olup bu iki grup da $2-$nacci dizilenebilir olmasına ragmen bu grupların direct çarpımı $2-$nacci dizilenebilir değildir (Knox 1992).

3.2. Centro-Polyhedral Gruplarda $k-$nacci Periyotlarının Uzunlukları

$u_1 = a_1, u_2 = a_2, \cdots, u_k = a_k$ olmak üzere her bir elemanı $\bmod m$ ye göre indirgenen $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_{n-k}$ indirgenme bağıntısının periyodu $h_{k(a_1,a_2,\cdots,a_k)}(m)$ ile gösterilsin.

Örneğin $u_1 = 2, u_2 = 3$ ise $h_{2(2,3)}(m)$ değerini hesaplamak için 2-basamak Fibanocci dizisisinin başlangıç değerleri $f_1^{(2,m)} = 2,\ f_2^{(2,m)} = 3$ veya $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 2, u_5 = 3$ ise $h_{5(0,0,0,2,3)}(m)$ değerini hesaplamak için 5-basamak Fibanocci dizisinin başlangıç değerleri $f_1^{(5,m)} = 0,\ f_2^{(5,m)} = 0,\ f_3^{(5,m)} = 0,\ f_4^{(5,m)} = 2,\ f_5^{(5,m)} = 3$ olarak seçilmiş olur (Deveci, Karaduman ve Campell 2010)

Lemma 3.2.1 : $a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{Z}$ $m > 0$ olmak üzere**,** $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ve $x_1, x_2, \cdots, x_k$ değerleri hepsi birden $\bmod m$ 'ye göre sıfıra denk değilse

$$h_{k(a_1,a_2,\cdots,a_k)}(m) = h_{k(x_1,x_2,\cdots,x_k)}(m)$$

eşitliği sağlanır (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat : Lü and Wang [34]' daki çalışmalarında U_n ve G 'yi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamışlardır,

$$U_n = \left[u_{n,} u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}\right]$$

ve

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu takdirde $U_n = U_1\left(G^T\right)^n$'dir. Burada T bir matrisin transpozesini gösterir. Tamsayılar $\bmod m$'ye göre denklik sınıflarının sonlu bir kümesi formunda olduğundan $\left(G^T\right)^n$, kxk tipinde bir matris olur. Böylece $U_n \equiv U_1$ (mod m) elde edilmiştir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.1 : : $a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots, x_k, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $a_1, a_2, \cdots, a_k$ ve $x_1, x_2, \cdots, x_k$ değerleri hepsi birden $\bmod m$'ye göre sıfıra denk değilse,

$$h_{k(a_1,a_2,\cdots,a_k)}(\alpha) \,\Big|\, h_{k(x_1,x_2,\cdots,x_k)}(\alpha\beta)$$

elde edilir (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat: Lemma 3.2.1' den $h_{k(a_1,a_2,\cdots,a_k)}(\alpha) = h_{k(x_1,x_2,\cdots,x_k)}(\alpha)$ eşitliği elde edilir ve p_i ler farklı asal sayılar, e_i ler farklı pozitif tamsayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}\ (t \geq 1)$ ise $h_k(m), h_k\left(p_i^{e_i}\right)$'nin en küçük ortak katına eşittir. Bu durumda;

$$h_{k(a_1,a_2,\cdots,a_k)}(\alpha) \,\Big|\, h_{k(x_1,x_2,\cdots,x_k)}(\alpha\beta)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 : $n > 2$ için $\langle -2, n, 2\rangle, \langle 2, n, -2\rangle, \langle n, -2, 2\rangle ve \langle n, 2, -2\rangle$ centro-polyhedral gruplarında k-nacci dizisinin periyodu $h_k(4(n-1))$' dir (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat: Bu grupların mertebesi $4n(n-1)$'dir.

İlk olarak $\langle -2, n, 2\rangle$ takdimi ile verilen grubu ele alalım. Bu grubta x^{-2} ve z^2 merkezi elemanları olduğu kolaylıkla görülür ayrıca burada $|x| = |z| = 4(n-1), |y| = 2n(n-1)$ ve $x^{-3} = yz$'dır.

Eğer $k = 2$ ise,

$$u_m = u_{m-2} + u_{m-1}, u_3 = 0, u_4 = 3;$$

$$v_m = v_{m-2} + v_{m-1}, v_3 = 1, v_4 = 0;$$

şeklinde tanımlanan lineer indirgeme bağıntılarını göz önüne alalım. Bu durumda tümevarım yöntemi kullanılarak $k-nacci$ dizisinin $m.$ elemanındaki x^{-1} ve z bileşenlerinin kuvvetleri sırasıyla u_m ve v_m olarak elde edilir.

Burada $2-nacci$ dizi,

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = yz = x^{-3}, x_5 = x^{-2}zx^{-1},$$
$$x_6 = x^{-4}x^{-1}zx^{-1}, x_7 = x^{-8}x^{-1}z^2, \cdots.$$

şeklindedir.

Bu dizi $m > 5$ için aşağıdaki formda yazılabilir:

$$x_m = \begin{cases} x^{-(u_m-2)}x^{-1}zx^{-1}z^{v_m-1} & m \equiv 0 \bmod 6, \\ x^{-(u_m-1)}x^{-1}z^{v_m} & m \equiv 1 \bmod 6, \\ x^{-(u_m-1)}x^{-1}zz^{v_m-1} & m \equiv 2 \bmod 6, \\ x^{-u_m}zz^{v_m-1} & m \equiv 3 \bmod 6, \\ x^{-(u_m-1)}x^{-1}z^{v_m} & m \equiv 4 \bmod 6 \\ x^{-(u_m-1)}zx^{-1}z^{v_m-1} & m \equiv 5 \bmod 6. \end{cases}$$

Şimdi $x_{h_2+3} = z$ ve $x_{h_2+4} = x^{-3}$ olduğunu göstermemiz ispatı tamamlamak için yeterli olacaktır. Burada $h_2(m)$, h_2 ile gösterilir.

$2-$nacci dizisi yukarıdaki formda görüldüğü gibi periyodu $6.\mu$' dür $(\mu \in \mathbb{N})$ yani $P+3 \equiv 3 \bmod 6$ ve $P+4 \equiv 4 \bmod 6$' dır. Burada P ile $P_2(\langle -2, n, 2\rangle; x, y, z)$' nin periyodu ifade edilir.

Bu ifade daha ayrıntılı bir şekilde yazılırsa,

$$x_{P+3} = x^{-u_{P+3}}zz^{(v_{P+3}-1)}$$
$$x_{P+4} = x^{-(u_{P+4}-1)}x^{-1}z^{(v_{P+4})}$$

elde edilir. Burada $P+3 \equiv 3 \bmod 6$ ve $P+4 \equiv 4 \bmod 6$ denklikleri kullanılarak,

$$u_{p+3} = u_3 = 0, v_{p+3} = v_3 = 1, u_{p+4} = u_4 = 3 \text{ ve } v_{p+4} = v_4 = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece yukarıdaki birinci denklemden

$$x_{P+3} = x^{-u_{P+3}}z^{v_{P+3}} = z$$

ikinci denklemden ise

$$x_{P+4} = x^{-u_{P+4}}z^{v_{P+4}} = x^{-3}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu şartları sağlayan aşikar olmayan en küçük tamsayı $h_2\left(4(n-1)\right)$ olduğundan dizinin periyodu $h_2\left(4(n-1)\right)$'dir.

Eğer $k=3$ise ispat için $[5]$' e bakınız.

Eğer $k\geq 4$ ise aşağıdaki lineer indirgeme bağıntılarını göz önüne alalım.

$$u_m = u_{m-k} + u_{m-(k-1)} + u_{m-(k-2)} + \cdots + u_{m-1},$$

$$u_3=0, u_4=0, \cdots, u_{k+1}=0, u_{k+2}=3;$$

$$v_m = v_{m-k} + v_{m-(k-1)} + v_{m-(k-2)} + \cdots + v_{m-1},$$

$$v_3=1, v_4=2, v_5=2^2, \cdots, v_{k+1}=2^{k-2}, v_{k+2}=2+2^2+\cdots+2^{k-2}.$$

Tümevarım yöntemi kullanılarak $k-$nacci dizisinin $m.$ elemanındaki x^{-1} ve z bileşen-lerinin kuvvetleri sırasıyla u_m ve v_m olarak elde edilir.

Burada $k-$nacci dizisi,

$$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=z^2, x_5=z^{2^2}, \cdots, x_k=z^{2^{k-3}},$$

$$x_{k+1}=z^{2^{k-2}}, x_{k+2}=x^{-2}x^{-1}z^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)}, x_{k+3}=x^{-2}zx^{-1}z^{\left(2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}\right)},$$

$$x_{k+4}=x^{-4}x^{-1}zx^{-1}z^{\left(2^3+2^4+\cdots+2^{k}\right)}, x_{k+5}=x^{-12}z^{\left(2^4+2^5+\cdots+2^{k+1}\right)}, \cdots.$$

şeklindedir.

Bu dizi $m>k+3$için aşağıdaki formda yazılabilir:

$$x_m = \begin{cases} x^{-(u_m-1)}x^{-1}z^{v_m} & m \equiv 1 \bmod 2k+2, \\ x^{-(u_m-1)}x^{-1}zz^{v_m-1} & m \equiv 2 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}zz^{v_m-1} & m \equiv 3 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv 4 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv 5 \bmod 2k+2, \\ \vdots, & \vdots, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv k \quad \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv k+1 \bmod 2k+2, \\ x^{-(u_m-1)}x^{-1}z^{v_m} & m \equiv k+2 \bmod 2k+2, \\ x^{-(u_m-1)}zx^{-1}z^{v_m-1} & m \equiv k+3 \bmod 2k+2, \\ x^{-(u_m-2)}x^{-1}zx^{-1}z^{v_m-1} & m \equiv k+4 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv k+5 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv k+6 \bmod 2k+2, \\ \vdots, & \vdots, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv 2k+1 \bmod 2k+2, \\ x^{-u_m}z^{v_m} & m \equiv 0 \quad \bmod 2k+2. \end{cases}$$

Şimdi,

$$x_{h_k+3} = z, x_{h_k+4} = z^2, x_{h_k+5} = z^{2^2}, \cdots, x_{h_k+k} = z^{2^{k-3}}, x_{h_k+k+1} + 1 = z^{2^{k-2}}, x_{h_k+k+2} = x^{-3}z^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)}$$

olduğunu göstermemiz ispatı tamamlamak için yeterli olacaktır.

Burada $h_k(m)$, h_k ile gösterilir.

Bu ifade daha ayrıntılı bir şekilde yazılırsa,

$$x_{P+3} = x^{-u_{P+3}}zz^{v_{P+3}-1},$$

$$x_{P+4} = x^{-u_{P+4}}z^{v_{P+4}},$$

$$x_{P+5} = x^{-u_{P+5}}z^{v_{P+5}},$$

$$\vdots,$$

$$x_{P+k} = x^{-u_{P+k}}z^{v_{P+k}},$$

$$x_{P+k+1} = x^{-u_{P+k+1}}z^{v_{P+k+1}},$$

$$x_{P+k+2} = x^{-(u_{P+k+2}-1)}x^{-1}z^{v_{P+k+2}}$$

elde edilir.

Burada P ile $P_k\left(\langle -2,n,2\rangle ; x,y,z\right)$'nin periyodu ifade edilir.

Lemma 3.2.1 kullanılarak yukarıdaki eşitlikler,

$$x_{P+3} = x^{-u_{P+3}} z^{v_{P+3}} = z,$$

$$x_{P+4} = x^{-u_{P+4}} z^{v_{P+4}} = z^2,$$

$$x_{P+5} = x^{-u_{P+5}} z^{v_{P+5}} = z^3,$$

$$\vdots,$$

$$x_{P+k} = x^{-u_{P+k}} z^{v_{P+k}} = z^{2^{k-3}},$$

$$x_{P+k+1} = x^{-u_{P+k+1}} z^{v_{P+k+1}} = z^{2^{k-2}},$$

$$x_{P+k+2} = x^{-u_{P+k+2}} z^{v_{P+k+2}} = x^{-3} z^2.$$

şeklinde yazılabilir.

Bu şartları sağlayan aşikar olmayan en küçük tamsayı $h_2\left(4(n-1)\right)$ olduğundan dizinin periyodu $h_2\left(4(n-1)\right)$' dir.

$\langle 2,n,-2\rangle, \langle n,-2,2\rangle ve \langle n,2,-2\rangle$ grupları için ispat benzerdir.

Teorem 3.2.2 : $n>2$ için $\langle 2,-2,n\rangle ve \langle 2,-2,n\rangle$ centro-polyhedral gruplarında k-nacci dizisinin periyodu aşağıdaki gibidir:

i. Eğer k=2 ise periyod $h_2(4(n-1))$' dir.

ii. Eğer $k \geq 3$ ise periyod $4n \left| P_k(\langle 2,-2,n\rangle ; x,y,z), h_k\ (4(n-1)) \right| P_k(\langle 2,-2,n\rangle ; x,y,z)$ olmak üzere aşikar olmayan en küçük tam sayıdır (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat: Bu grupların mertebeleri $4n.(n-1)$'dir. $\langle 2,-2,n\rangle$ takdimi ile verilen grubu ele alalım. Bu grupta $|x| = 4(n-1) = |y|, |z| = 2n(n-1), z = y^{4(n-1)-1}x, x = yz$ olup

$$z = y^{-1}x, zxz = y^{-1}xxz = y^{-1}zx^2 = y^{-1}y^{-1}xx^2 =$$
$$= y^{-2}xx^2 = y^{-4}x = \left(y^{-2}\right)^2 x = z^{2n}x$$

eşitlikleri söz konusudur.

i. İspat teorem 3.2.1' in ispatına benzerdir.

ii. $k=3$ ise ispat için $[5]$ ' e bakınız.

Eğer $k \geq 4$ ise,

$$u_m = u_{m-k} + u_{m-(k-1)} + u_{m-(k-2)} + \cdots + u_{m-1},$$
$$u_3 = 1, u_4 = 0, \cdots, u_{k+1} = 0, u_{k+2} = 0;$$
$$v_m = v_{m-k} + v_{m-(k-1)} + v_{m-(k-2)} + \cdots + v_{m-1},$$
$$v_3 = 1, v_4 = 2, v_5 = 2^2, \cdots, v_{k+1} = 2^{k-2}, v_{k+2} = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2}\right) + 1.$$

şeklinde tanımlanan lineer indirgeme bağıntılarını göz önüne alalım.

Tümevarım yöntemi kullanılarak $k-$naccidizisinin $m.$ elemanındaki x^{-1} ve z bileşenlerinin kuvvetleri sırasıyla u_m ve v_m olarak elde edilir.

Burada $k-$nacci dizisi,

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = x^2, x_5 = x^{2^2}, \cdots, x_k = x^{2^{k-3}},$$
$$x_{k+1} = x^{2^{k-2}}, x_{k+2} = x^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)+1}, x_{k+3} = zxx^{\left(2^2+2^3+\cdots+2^{k-1}\right)},$$
$$x_{k+4} = xzxx^{\left(2^3+2^4+\cdots+2^{k}\right)}, x_{k+5} = xz^2xx^{\left(2^4+2^5+\cdots+2^{k+1}\right)}, \cdots.$$

şeklindedir.

Bu dizi $m > k+3$ için aşağıdaki formda yazılabilir;

$$x_m = \begin{cases} z^{\left(u_m-(m-1)/2\right)n} z^{(m-1)/4} x x^{v_m-1}, & m \equiv 1 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-1\right)n} z x x^{v_m-1}, & m \equiv 2 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-1\right)n} z x x^{v_m}, & m \equiv 3 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-4)/2\right)n} z^{(m-4)/2} x^{v_m}, & m \equiv 4 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-5)/2\right)n} z^{(m-5)/2} x^{v_m}, & m \equiv 5 \bmod 2k+2, \\ \quad \vdots, & \quad \vdots, \\ z^{\left(u_m-(m-k)/2\right)n} z^{(m-k)/2} x^{v_m}, & m \equiv k \quad \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-(k+1))/2\right)n} z^{(m-(k+1))/2} x^{v_m}, & m \equiv k+1 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-(k+2))/2\right)n} z^{(m-(k+2))/2} x^{v_m-1}, & m \equiv k+2 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-1\right)} z x x^{v_m-1}, & m \equiv k+3 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-1\right)} x z x x^{v_m-2}, & m \equiv k+4 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-(k+5))/4+2\right)n} x z^{(m-(k+5))/4+2} x x^{v_m-2}, & m \equiv k+5 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-(k+6))/4+2\right)n} x z^{(m-(k+6))/4+2} x x^{v_m-2}, & m \equiv k+6 \bmod 2k+2, \\ \quad \vdots, & \quad \vdots, \\ z^{\left(u_m-(m-(2k+1))/4+2\right)n} x z^{(m-(2k+1))/4+2} x x^{v_m-2}, & m \equiv 2k+1 \bmod 2k+2, \\ z^{\left(u_m-(m-(2k+2))/4+2\right)n} x z^{(m-(2k+2))/4+2} x x^{v_m-2}, & m \equiv 2k+1 \bmod 2k+2. \end{cases}$$

$P_k\left(\langle 2,-2,n\rangle; x,y,z\right)$ yerine P yazılarak,

$$\begin{aligned} x_{P+3} &= z^{\left(u_{P+3}-1\right)n} z x^{v_{P+3}}, \\ x_{P+4} &= z^{\left(u_{P+4}-(P+4-4)/2\right)n} z^{(P+4-4)/2} x^{v_{P+4}}, \\ x_{P+5} &= z^{\left(u_{P+5}-(P+5-5)/2\right)n} z^{(P+5-5)/2} x^{v_{P+5}}, \\ &\vdots \\ x_{P+k} &= z^{\left(u_{P+k}-(P+k-k)/2\right)n} z^{(P+k-k)/2} x^{v_{P+k}}, \\ x_{P+k+1} &= z^{\left(u_{P+k+1}-(P+k+1-(k+1))/2\right)n} z^{(P+k+1-(k+1))/2} x^{v_{P+k+1}}, \\ x_{P+k+2} &= z^{\left(u_{P+k+2}-(P+k+2-(k+2))/2\right)n} z^{(P+k+2-(k+2))/2} x^{v_{P+k+2}-1}, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu takdirde $h_k\left(|x|\right)|P$ yani $h_k\left(4(n-1)\right)|P$ olduğunu göstermeliyiz. Burada $h_k\left(m\right)$, m pozitif sayısının $k-adım$ Wall sayısıdır.

Lemma 3.2.1 ve Sonuç 3.2.1 kullanılarak yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned}
&x_{P+3} = z^{(1-1)n} z x^0 = z,\\
&x_{P+4} = z^{(0-(P/2))n} z^{(P)/2} x^2 = z^{(P/2)(1-n)} x^2,\\
&x_{P+5} = z^{(0-(P/2))n} z^{(P)/2} x^4,\\
&\vdots\\
&x_{P+k} = z^{(0-(P/2))n} z^{(P)/2} x^{2^{k-3}},\\
&x_{P+k+1} = z^{(0-(P/2))n} z^{(P)/2} x^{2^{k-2}},\\
&x_{P+k+2} = z^{(0-(P/2))n} x z^{(P)/2} x^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)+1} = x z^{(P/2)(1-n)} x^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)+1},
\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşırız. Bu takdirde eğer,

$x_{P+4} = x^2, x_{P+5} = x^{2^2}, \cdots, x_{P+k} = x^{2^{k-3}}, x_{P+k+1} = x^{2^{k-2}}$ ve $x_{P+k+2} = x^{\left(2+2^2+\cdots+2^{k-2}\right)+1}$ ise

$2n \left| {}^{P}\!/_{2} \right.$ olduğunu göstermeliyiz. Böylece P ' nin $4n|P$ ve $h_k\left(4(n-1)\right)|P$ şartlarını sağlayan en küçük tam sayı olması gerektiği sonucuna ulaşırız, bu da ispatı tamamlar.

Grup $\langle -2, 2, n\rangle$ için ispat benzerdir.

Teorem 3.2.3 : $n > 2$ için $\langle -n, 2, 2\rangle ve \langle 2, -n, 2\rangle$ centro-polyhedral gruplarında k-nacci dizisinin periodu $2k+2$ 'dir (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat: Bu grupların mertebeleri $4n$ ' dir. İlk olarak $\langle -n, 2, 2\rangle$ takdimi ile verilen grubu ele alalım. Grubun takdiminden kolaylıkla görülür ki, z^2 grubun merkezi elemanıdır ve $|y| = 4, |z| = 4$, $|x| = 2n$ ve $x^{-n} = x^n$ 'dir.

Eğer $k = 2$ ise

$$\begin{gathered}
x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = yz, x_5 = zyz, x_6 = y\underline{zz}yz =\\
= z^2 \underline{yy}z = \underline{z}^2 \underline{y}^2 z = z, x_7 = zy\underline{zz} = zyz^2 = x\underline{yyz}^2 = x,\\
x_8 = zz^3 y = y, x_9 = xy = z \cdots
\end{gathered}$$

şeklindeki dizi elde edilir ki bu dizinin periyodu 6' dır.

$k=3$ ise ispat için $[5]$' e bakınız.

$k \geq 4$ ise dizinin ilk k terimi

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = x^2, x_5 = x^{2^2}, \cdots, x_k = x^{2^{k-3}},$$

şeklindedir. Yukarıdaki bilgiler kullanılarak bu dizi,

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = z^2, x_5 = 1, \cdots, 1$$

şekline indirgenir ve burada $5 \leq j \leq k$ için $x_j = 1$ dir.

Böylece,

$$x_{k+1} = \coprod_{i=1}^{k} x_i = z^{2^{k-2}} = 1, x_{k+2} = \coprod_{i=2}^{k+1} x_i = yz^3, x_{k+3} = \coprod_{i=3}^{k+2} x_i = zyz,$$

$$x_{k+4} = \coprod_{i=4}^{k+3} x_i = z, x_{k+5} = \coprod_{i=5}^{k+4} x_i = y\underline{z}^3\ \underline{z}\underline{y}zz = \underline{yy}\underline{z}\underline{z} = 1, \cdots$$

.

olur. Buradan $5 \leq j \leq k$ için $x_{j+1} = 1$ sonucuna ulaşılır.

Ayrıca,

$$x_{k+1} = \coprod_{i=1}^{k} x_i = z^{2^{k-2}} = 1, x_{k+2} = \coprod_{i=2}^{k+1} x_i = yz^3, x_{k+3} = \coprod_{i=3}^{k+2} x_i = zyz,$$

$$x_{k+4} = \coprod_{i=4}^{k+3} x_i = z, x_{k+5} = \coprod_{i=5}^{k+4} x_i = y\underline{z}^3\ \underline{z}\underline{y}zz = \underline{yy}\underline{z}\underline{z} = 1, \cdots$$

$$x_{k+j} = 1$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = y\underline{z}^3\underline{z}yzz = \underline{yy}\underline{zz} = 1,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = \underline{z}yz^2 = x\underline{yy}\underline{z}^2 = x,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = zx = y, x_{k+k+5} = \prod_{i=k+5}^{k+k+4} x_i = xy = z$$

elde edilir.

$x_{2k+3}, x_{2k+4}, x_{2k+5}$ şeklinde devam eden terimlerin değerleri x, y ve z ' ye bağlı olduğundan dizi $2k+3.$ terimle tekrar etmeye başlar yani $x_1 = 2k+3, x_2 = 2k+4, x_3 = 2k+5, \cdots,$ ' dır.

Böylece $P_k\left(\langle -n,2,2\rangle ; x,y,z\right) = 2k+2$ olur.

$\langle 2,-n,2\rangle$ grup için ispat benzerdir.

Sonuç 3.2.2 : $n > 2$ için $\langle 2, 2-n\rangle$ centro-polyhedral grubunun k-nacci dizisinin periyodu aşağıdaki gibidir;

i. $\langle 2, 2-n\rangle$ grubunda $\{z, y, x\}$ geren kümesine göre k-nacci dizisinin periyodu $2k+2$ ' dir.

ii. $\langle 2, 2-n\rangle$ grubunda $\{x, y, z\}$ geren kümesine göre k-nacci dizisinin periyodu aşağıdaki gibidir;

i'. $P_2(\langle 2,2,-n\rangle ; x,y,z) = 6$ 'dır.

ii'. $P_{3,4}(\langle 2,2,-n\rangle ; x,y,z) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}$

iii'. $k \geq 5$ olsun (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

1. Eğer n ' nin tek çarpanı t oluyorsa ve $\left[3, k-2\right]$ aralığında bir t elemanı bulunmuyorsa;

$$P_k(\langle 2,2,-n\rangle ; x,y,z) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

2. α , $\left[3, k-2\right]$ aralığında n ' nin en büyük tek çarpanı olsun. Bu takdirde iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin \left[3, k-2\right]$ ise,

$$P_k(\langle 2,2,-n\rangle ; x,y,z) = \begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ii'. Eğer β , $\left[3, k-2\right]$ aralığında en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise

$$P_k(\langle 2,2,-n\rangle; x,y,z)=\begin{cases}\beta(n(k+1)), & n \text{ çift ise}\\ \beta(2n(k+1)), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

İspat: İlk olarak z ' nin mertebesinin $2n$, x ve y ' nin mertebesinin 4 ve grubun mertebesi nin $4n$ olduğunu belirtelim.

i. İspat teorem 3.2.3'e benzerdir.

ii.i'. $k=2$ ise

$$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=yz, x_5=zx=y^3\underline{xx}=\underline{y}^3\underline{y}^2=y,$$

$$x_6=xy, x_7=yxy, x_8=x\underline{yy}xy=\underline{xx}^2\underline{xy}=y,$$

$$x_9=yx\underline{yy}=y^3xz, x_{10}=yz=x,\cdots.$$

dizisi elde edilir.

Böylece $P_2\left(\langle 2,2-n\rangle; x,y,z\right)=6$ olur.

$\langle 2,2-n\rangle \cong \langle 2,2,n\rangle$ olduğundan ispat $\langle 2,2,n\rangle$ için verilen sonuçlarla yapılır.

ii'. $k=3$ ise $[5]$'e bakınız ve $k\geq 4$ ise ispat için $[19]$'a bakınız.

Sonuç 3.2.3 : $n>2$ için $(-2,2,n),(2,-2,n)$ ve $(2,2,-n)$ gruplarının $k-$ nacci dizisinin periodu aşağıdaki gibidir;

i. $(-2,2,n),(2,-2,n)$ ve $(2,2,-n)$ grubunun $\{z,y,x\}$ ile geren kümesine bağlı k-nacci dizisinin periodu $2k+2'dir$.

ii. $(-2,2,n),(2,-2,n)$ ve $(2,2,-n)$ grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine bağlı k-nacci dizisinin periodu aşağıdaki gibidir;

i'. $P_2(G_n; x,y,z)=6$' dır.

$$\textbf{ii'}.\ P_{3,4}(G_n;x,y,z)=\begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & n\equiv 0 \bmod 4\\ n(k+1), & n\equiv 2 \bmod 4\\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

iii'. Eğer $k\geq 5$ ise (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

1. Eğer n ' nin tek çarpanı t olacak oluyorsa ve $[3,k-2]$ aralığında bir t elemanı bulunmuyorsa;

$$P_k(\langle 2,2,-n\rangle;x,y,z)=\begin{cases} n(k+1), & n \text{ çift ise}\\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & n\equiv 0 \bmod 4\\ n(k+1), & n\equiv 2 \bmod 4\\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

2. Eğer α , n ' nin $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek çarpanıysa ve $j\in N$ için $\beta=\alpha 3^j$ eşitliğini sağlıyorsa,

i'. Eğer $\alpha.3^j\notin[3,k-2]$, $j\in N$ ise,

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} \alpha\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & n\equiv 0 \bmod 4\\ \alpha\left(n(k+1)\right), & n\equiv 2 \bmod 4\\ \alpha\left(2n(k+1)\right), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ii'. Eğer β , n' nin $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek çarpanıysa ve $j\in N$ için $\beta=\alpha 3^j$ eşitliğini sağlıyorsa

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} \beta\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & n\equiv 0 \bmod 4\\ \beta\left(n(k+1)\right), & n\equiv 2 \bmod 4\\ \beta\left(2n(k+1)\right), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olur.

Burada G_n, $(-2,2,n),(2,-2,n)$ ve $(2,2,-n)$ gruplarından biridir.

İspat: z **’** nin G_n grubunda mertebesi n, x ve y ’nin G_n grubunda mertebesi 2 ve G_n grubunun mertebesi $2n$ ’dir.

i. İspat teorem 3.2.3’ e benzerdir.

ii. i’. Eğer $k=2$ ise

$$x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=yz=x, x_5=zx=yxx=y,$$

$$x_6=xy, x_7=yxy, x_8=x\underline{yy}xy=\underline{xx^2x}y=y,$$

$$x_9=yx\underline{yy}=yx=z, x_{10}=yz=x,\cdots,$$

Böylece $P_2(G_n;x,y,z)=6$ olur.

$G_n\cong(2,2,n)$ olduğundan ispatlar, $(2,2,n)$ için bulunan ispatlardan çıkartılır.

içinde geçerlidir. Eğer $k=3$ ise $[5]$’e, $k\geq 4$ ise $[19]$’ a ispatlar için bakılabilir.

Sonuç 3.2.4: $n>2$ için G_n, $(-2,n,2),(2,-n,2),(2,n,-2),(-n,2,2),(n,-2,2)$ ve $(n,2,-2)$ gruplarından birini temsil etmek üzere $P_k(G_n;x,y,\mathrm{z})=2k+2$ ’dir (Deveci, Karaduman ve Campell 2010).

İspat:
$$(-2,n,2)\cong(2,-n,2)\cong(2,n,-2)\cong(2,n,2)$$

ve

$$(-n,2,2)\cong(n,-2,2)\cong(n,2,-2)\cong(n,2,2)$$

olduğundan ispatlar $(2,n,2)$ ve $(n,2,2)$ için bulunan ispatlardan çıkarılır. Eğer $k=3$ ise $[5]$’e, $k\geq 4$ ve $k=2$ ise $[19]$’ a ispatlar için bakılabilir.

3.3. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş $k-$ Mertebeden Jacobsthal Dizileri

Tanım 3.3.1: $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ olmak üzere sonlu üretilmiş $G=\langle A\rangle$ grubunun A üreteç kümesine göre genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbiti, $0\le i\le k-1$

$$0\le i\le k-1 \text{ için } x_i=a_i+1$$

ve $i\ge 0$ için

$$x_{i+k}=\begin{cases} (x_i)^2(x_{i+1}), & k=2 \\ (x_i)\cdots(x_{i+k-2})^2(x_{i+k-1}) & k\ge 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\{x_i\}$ dizisidir (Deveci, Karaduman ve Sağlam, Baskıda).

Teorem 3.3.1: Sonlu bir genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbiti periyodik bir dizidir (Deveci, Karaduman ve Sağlam, Baskıda).

İspat: G grubunun mertebesi n olsun . G nin elemanlarının n^k tane farklı sıralı $k-$lısı mevcut olacağından, bu sıralı $k-$lılardan en az bir tanesi G nin genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbitinde iki defa karşımıza çıkacaktır. Bu tekrardan dolayı genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbitinin periyodik olduğu sonucuna ulaşılır.

$[20]$' deki çalışmada $J_A^k(G)$ genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal orbitinin periyodunun uzunluğu $LJ_A^k(G)$ şeklinde gösterilmiş ve bu ifade G grubunun genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal uzunluğu diye adlandırılmıştır.

Tanımdan da açıkca görüldüğü gibi sonlu bir grubun genelleştirilmiş $k-$ mertebeden Jacobsthal uzunluğu , seçilen üreteç kümesine ve bu üreteç elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişiklik gösterebilmektedir.

3.4. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş $k-$ Mertebeden Pell Dizileri

Bu bölümde sonlu gruplarda genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizileri incelenmiş olup, D_n dihedral bir gruptaki genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizilerinin periyotları elde edilmiştir.

Tanım 3.4.1: Sonlu bir gruptaki k. mertebeden genelleştirilmiş Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots,$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots (x_{n-1})^2; & j \leq n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots (x_{n-1})^2; & n \geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Böylece genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi, grubun yapısını yansıtır. $x_0, \cdots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi $Q_k\left(G; x_0, \cdots, x_{j-1}\right)$ ile gösterilir.

Tamsayılarda bir m modülüne göre klasik Pell dizisi $Q_2\left(\mathbb{Z}_m; 0,1\right)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizisi sonlu bir grubun Pell dizisi olarak adlandırılır (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

Teorem 3.4.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizileri periyodiktir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: G**,** sonlu bir grup olsun ve $|G|$, G grubunun mertebesini göstersin. G grubunun $|G|^k$ tane farklı sıralı $k-$lısı olduğundan bu sıralı $k-$lılardan en az bir tanesinin grubun genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisinde iki defa görüleceği açıktır. Sıralı $k-$lılar tekrar ettiğinden dolayı genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi periyodiktir denir. $Q_k\left(G; x_0, \cdots, x_{j-1}\right)$ dizisinin periyodu $PerQ_k\left(G; x_0, \cdots, x_{j-1}\right)$ ile gösterilsin. Tanımdan sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisinin periyodunun seçilen üreteç kümesine ve $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişeceği açıktır. Ayrıca $hP_k(m)$' nin C_m devirli grubunun genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisinin periyodu olduğu aşikardır (Deveci and Karaduman, Baskıda)

Tanım 3.4. 2: G sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanı dizide görünecek şekilde G' nin elemanlarının bir genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi varsa bu durumda G grubuna genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizilenebilirdir denir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizilenebilir grupların direkt çarpımları genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizilenebilir olamayabilir. Örneğin; e birim olmak üzere;

$$\langle x, y : x^2 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

şeklinde verilen D_2 grubu ele alınsın. D_2 grubunun $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ gruplarının direkt çarpımı olduğu açıktır. D_2 grubunun Pell dizileri

$$Q_2(D_2; x, y) = x, y, x, y, \cdots,$$

$$Q_2(D_2; y, x) = y, x, y, x, \cdots,$$

şeklinde olacaktır. Burada xy elemanı iki dizide de olmadığı için D_2 grubu genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilir değildir. Ancak $\langle x \rangle$ grubu

$$Q_2(D_2; e, x) = e, x, e, x, \cdots,$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir.

Benzer şekilde $\langle y \rangle$ grubu

$$Q_2(D_2; e, y) = e, y, e, y, \cdots,$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

Sonuç 3.4.1: D_2 grubunun genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisinin periyodu $hP_k(2)$' dir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Teorem 3.4.2: $n>2$ için $D_n=\left\langle x,y \,\middle|\, x^2=y^2=(xy)^n=e\right\rangle$ olsun. Bu durumda,

i. $k=2,4$ olsun. $PerQ_k(D_n;x,y)=hP_k(2)$.

$$\textbf{ii.}\ PerQ_3(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(h\left(P_3(2)\right)\right) & n\equiv 0 \pmod 4\\ n\left(hP_3(2)\right) & n\equiv 2 \pmod 4\\ 2n\left(hP_3(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

iii. $k\geq 5$ olsun.

1. Eğer n'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3,k-2]$ aralığında değil ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(h\left(P_k(2)\right)\right) & n\equiv 0 \pmod 4\\ n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2 \pmod 4\\ 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

2. Eğer η, n'nin $[3,k-2]$ aralığında çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

2.1. Eğer $j\in\mathbb{N}$ $\eta 3^j\notin[3,k-2]$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\eta\frac{n}{2}\left(h\left(P_k(2)\right)\right) & n\equiv 0 \pmod 4\\ \eta n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2 \pmod 4\\ \eta 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

2.2. Eğer μ, $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in\mathbb{N}$ için $\mu=\eta 3^j$ ise periyod aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman, Baskıda);

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\mu\frac{n}{2}\left(h\left(P_k(2)\right)\right) & n\equiv 0 \pmod 4\\ \mu n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2 \pmod 4\\ \mu 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda}\cdot\end{cases}$$

İspat i. $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x,y,x,y,\cdots,$$

Böylece bu dizinin periyodu $hP_2(2)=2$ olur. Eğer $k=4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, x, xy, y, e, e, x, y, xy, \cdots,$$

ve periyodu $hP_4(2)=7$ ' dir.

ii. $hP_3(2)=7$ olup $k=3$ ise aşağıdaki dizi edilir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_3 = x, \cdots,$$

$$x_{14} = (xy)^8 x, x_{15} = (xy)^7 x, x_{16} = (xy)^4 x, \cdots,$$

$$x_{28} = (xy)^{16} x, x_{29} = (xy)^{14} x, x_{30} = (xy)^8 x, \cdots,$$

şeklindedir. Burada $v \in \mathbb{N}$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer, $n \equiv 0 \bmod (4)$ ise bu durumda $i = \frac{n}{4}$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{4}.7 = \frac{n}{2}.7 = \frac{n}{2}\left(hP_3(2)\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer, $n \equiv 2 \bmod (4)$ ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{2}.7 = n.7 = n\left(hP_3(2)\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer $n \equiv 1 \bmod (4)$ veya $n \equiv 3 \bmod (4)$ ise $i = n$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.n.7 = n.7 = 2.n\left(hP_3(2)\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

iii. $k \geq 5$ için $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_3 \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, x_3 = xy, x_4 = y, x_5 = x, \cdots$$

$$x_{2i.hP_k(2)-k+2} = (yx)^{4i}, x_{2i.hP_k(2)-k+3} = (yx)^{\varepsilon_1 4i}, x_{2i.hP_k(2)-k+4} = (yx)^{\varepsilon_2 4i}, \cdots$$

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = (yx)^{\varepsilon_{k-3} 4i}, x_{2i.hP_k(2)} = (yx)^{\tau} x, x_{2i.hP_k(2)+1} = (yx)^{\tau-1} x \cdots$$

Burada $w \in \mathbb{N}$ için $4i = n.w$ olacak şekilde bir en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise üç durum söz konusudur;

1.1. $n \equiv 0 \bmod(4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \dfrac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{4} hP_k(2) = \frac{n}{2} hP_k(2)$$

eşitlikleri yazılabilir.

1.2. $n \equiv 2 \bmod(4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \dfrac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{2} hP_k(2) = nhP_k(2)$$

eşitlikleri yazılabilir.

1.3. $n \equiv 1 \bmod(4)$ ya da $n \equiv 3 \bmod(4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.nhP_k(2)$$

eşitliği yazılabilir.

2. Eğer η, n'nin $\left[3,k-2\right]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük olanı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

2.1. Eğer $j\in\mathbb{N}$ için $\eta 3^{i}\notin\left[3,k-2\right]$ ise üç durum söz konusudur:

2.1.1. $n\equiv 0\ \left(\text{mod}\,4\right)$ ve $\eta|\tau$ ise bu durumda $1\leq l\leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2.\eta\frac{n}{4}hP_k\left(2\right)=\eta\frac{n}{2}hP_k\left(2\right)$$

eşitlikleri yazılabilir.

2.1.2. $n\equiv 2\ \left(\text{mod}\,4\right)$ ve $\eta|\tau$ ise bu durumda $1\leq l\leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2.\eta\frac{n}{2}hP_k\left(2\right)=\eta nhP_k\left(2\right)$$

eşitlikleri yazılabilir.

2.1.3. $n\equiv 1\text{mod}(4)$ ya da $n\equiv 3\text{mod}(4)$ ve $\eta|\tau$ ise bu durumda $1\leq l\leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\eta n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2.\eta nhP_k\left(2\right)$$

eşitliği yazılabilir.

2.2. Eğer $\mu, \left[3, k-2\right]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \mu 3^{i}$ ise aşağıdaki üç durum söz konusudur:

2.2.1. $n \equiv 0 \pmod{4}$ ve $\eta | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \frac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu \frac{n}{4} hP_k\left(2\right) = \mu \frac{n}{2} hP_k\left(2\right)$$

eşitlikleri yazılabilir.

2.2.2. $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve $\eta | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu \frac{n}{2} hP_k\left(2\right) = \mu n hP_k\left(2\right)$$

eşitlikleri yazılabilir.

2.2.3. $n \equiv 1 \mathrm{mod}(4)$ ya da $n \equiv 3 \mathrm{mod}(4)$ ve $\eta | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan,

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = \mu 2n hP_k\left(2\right)$$

eşitlikliği yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.5. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş Pell Orbitlerinin Uzunlukları

Bu bölümde $G=\langle A\rangle$ sonlu grubu için bir A geren kümesine göre $P_A^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Pell orbitinin tanımı yapılmıştır. Daha sonra $\alpha=2$ ve $n\geq 3$ için Q_{2^n} quaternion gruplarının genelleştirilmiş Pell orbitlerinin uzunlukları elde edilmiştir.

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ olmak üzere $G=\langle A\rangle$ sonlu grubu için bir A geren kümesine göre $P_A^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Pell orbiti, $\beta_j=\begin{pmatrix}\alpha+j\\ j+1\end{pmatrix}$ ve $1\leq j\leq n-1$ için

$$0\leq i\leq n-1 \text{ için } x_i=a_{i+1}$$

başlangıç elemenları ile

$$i\geq 0 \text{ için } x_{i+n}=(x_i)^{\beta_{n-1}}(x_{i+1})^{\beta_{n-2}}\cdots(x_{i+n-2})^{\beta_1}(x_{i+n-1})^{(\alpha+1)}$$

şeklinde tanımlanan G 'nin elemanının bir $\{x_i\}$ dizisidir.

Örneğin; $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ olmak üzere $P_A^{(\alpha)}(G)$, $i\geq 0$ için

$$x_0=a_1, x_1=a_2, x_2=a_3 \ x_{i+3}=(x_i)^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}}(x_{i+1})^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}(x_{i+2})^{(\alpha+1)}$$

eşitliği yazılabilir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

Teorem 3.5.1. Sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş Pell orbiti periyodiktir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: Teoremin ispatı $[32]$' deki çalışmadaki teorem 1' in ispatı ile benzerdir.

$P_A^{(\alpha)}(G)$ dizisinin periyot uzunluğu $LEN_A P^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilir ve buna bir A geren kümesine göre G grubunun genelleştirilmiş Pell uzunluğu denir.

$[24]$' de $\alpha=1$ alındığında $P_A(G)$' ye bir A geren kümesine göre G ' nin Pell orbiti denir ve bu $P_A(G)$ dizisinin periyot uzunluğunu $LEN_A P^{(\alpha)}(G)$ olarak gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi genelleştirilmiş Pell orbitinin uzunluğu seçilmiş olan geren elemanlarının kümesine ve $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ geren elemanlarının sırasına bağlıdır.

$n \geq 3$ için,

$$Q_{2^n} = \left\langle x, y \middle| x^{2n-1} = e, y^2 = x^{2n-2}, y^{-1}xy = x^{-1} \right\rangle$$

şeklinde takdim edilen Q_{2^n} grubuna 2^n mertebeli quaternion grup denir. Burada x ve y ' nin mertebelerinin sırasıyla 2^{n-1} ve 4 olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.5.2. $n \geq 3$ için,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right) = LEN_{\{y,x\}} P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right) = 2^{n-3}.3$$

olur (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

İspat: ilk olarak $\{x, y\}$ geren çifti ve $a = 2$ için genelleştirilmiş Pell orbiti ele alınsın. Bu durumda genelleştirilmiş Pell orbiti $i \geq 0$ için,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_{i+2} = \left(x_i\right)^3 \left(x_{i+1}\right)^3$$

olacaktır. Burada r_1 ve r_2 tek sayılar olmak üzere genelleştirilmiş Pell orbiti aşağıdaki formda elde edilir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3y^3, x_3 = x^{-3}, x_4 = yx^{-12}, x_5 = x^3y^3,$$

$$x_6 = x^9, x_7 = yx^{24}, \cdots,$$

$$x_{12} = x^{81}, x_7 = yx^{240}, \cdots,$$

$$x_{2^{n-3}.3} = x^{r_1.2^{n-1}+1}, x_{2^{n-3}.3+1} = yx^{r_2.2^{n-1}}, \cdots,.$$

Eğer $n = 3$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3y^3, x_3 = x = x_0, x_4 = y = x_1, \cdots,.$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right) = 3$ eşitliği elde edilir.

Eğer $n \geq 4$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = x, x_1 = y, \cdots, x_{2^{n-3}3} = x = x_0, x_{2^{n-3}3+1} = y = x_1, \cdots,.$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right)=2^{n-3}3$ eşitliği elde edilir.

Şimdi $\{y,x\}$ geren çifti ve $a=2$ genelleştirilmiş Pell orbiti ele alınsın. Bu durumda genelleştirilmiş Pell orbiti,

$$i\geq 0 \quad \text{için}\; x_0=y, x_1=x, x_{i+2}=\left(x_i\right)^3\left(x_{i+1}\right)^3$$

olacaktır. Burada ω tek sayı olmak üzere genelleştirilmiş Pell orbiti aşağıdaki formda elde edilir;

$$x_0=y, x_1=x, x_2=y^3x^3, x_3=y, x_4=x^{-3}, x_5=y^3x^{-9},$$

$$x_6=y, x_7=x^9,\cdots,$$

$$x_{12}=y, x_7=x^{81},\cdots,$$

$$x_{2^{n-3}.3}=y, x_{2^{n-3}.3+1}=x^{\omega.2^{n-1}+1},\cdots,.$$

Eğer $n=3$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0=y, x_1=x, x_2=y^3x^3, x_3=y=x_0, x_4=x=x_1,\cdots,$$

Böylece $LEN_{\{y,x\}}P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right)=3$ eşitliği elde edilir.

Eğer $n\geq 4$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0=y, x_1=x,\cdots, x_{2^{n-3}3}=y=x_0, x_{2^{n-3}3+1}=x=x_1,\cdots,$$

Böylece $LEN_{\{y,x\}}P^{(2)}\left(Q_{2^n}\right)=2^{n-3}3$ eşitliği elde edilir.

3.6. Binary Polihedral Grupların Pell Orbitlerinin Uzunlukları

Bu bölümde $n>2$ için $\langle 2,2,2\rangle,\langle n,2,2\rangle,\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ Binary Polyhedral grupla-rın Pell orbitlerinin uzunlukları incelenecektir.

İlk olarak $\{x, y\}$ geren çifti ve $\{x, y, z\}$ geren üçlüsü için bu grupların Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir.

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x, x_1 = y, x_{i+2} = (x_i)(x_{i+1})^2$$

ve

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_{i+2} = (x_i)(x_{i+1})(x_{i+2})^2.$$

Teorem 3.6.1: $\langle 2,2,2 \rangle$ Binary Polyhedral grubun Pell orbitlerinin uzunlukları aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 4$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 14$.

İspat.i. $\langle 2,2,2 \rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x, y\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x, y sıralamasına göre $\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle$ takdimi verilir ve $|x| = 4, |y| = 4, xy = y^3x$ ve $yx = x^3y$ ' dir. Bu durumda $P_{\{x,y\}}(\langle 2,2,2 \rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3, x_3 = y^3, x_4 = x = x_0, x_5 = y = x_1, \cdots,$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 4$ elde edilir.

ii. $\langle 2,2,2 \rangle$ Binary Polyhedral grubu, $\{x, y, z\}$ geren kümesi ve geren elemanlarının x, y, z sıralamasına göre $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x| = 4, |y| = 4, |z| = 4, x = yz, y = x^3z$ ve $z = xy$ 'dir. Bu durumda $P_{\{x,y,z\}}(\langle 2,2,2 \rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = yz^3, x_5 = z^2, x_6 = zx, x_7 = yz^3, x_8 = zx,$$

$$x_9 = z^3, x_{10} = z, x_{11} = x, x_{12} = z^2, x_{13} = y, x_{14} = x = x_0, x_{15} = y = x_1, x_{16} = z = x_2, \cdots,$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 14$ elde edilir.

Teorem 3.6.2: $\langle n,2,2\rangle$ Binary Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P\left(\langle n,2,2\rangle\right)=\begin{cases}2n & n \text{ çift sayı ise}\\ 4n & n \text{ tek sayı ise}\end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P\left(\langle n,2,2\rangle\right)=\begin{cases}7n & n \text{ çift sayı ise}\\ 14n & n \text{ tek sayı ise .}\end{cases}$

İspat.i. $\langle n,2,2\rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x,y\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y sıralamasına göre $\left\langle x,y : x^n = y^2 = (xy)^2\right\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x|=2n, |y|=4, xy=yx^{-1}$ ve $yx=x^{-1}y$ ' dir. Bu durumlar ele alınarak aşağıdaki dizi elde edilir:

$$x, y, xy^2, yx^2, x, yx^4, xy^2, yx^6, x, yx^8, \cdots,$$

O halde $P_{\{x,y\}}\left(\langle n,2,2\rangle\right)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, \cdots,$$

$$x_4 = x, x_5 = yx^4, \cdots,$$

$$x_8 = x, x_9 = yx^8, \cdots,$$

$$x_{4i} = x, x_{4i+1} = yx^{4i}, \cdots,$$

Burada $k \in N$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde bir i doğal sayına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift sayı ise bu durumda $i=\frac{n}{2}$ olur. Böylece $4i=2n$ v $LEN_{\{x,y\}}P\left(\langle n,2,2\rangle\right)=2n$ eşitliği elde edilir.

Eğer n tek ise $i=n$ olur. Böylece $4i=4n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P\left(\langle n,2,2\rangle\right)=4n$ eşitliği elde edilir.

ii. $\langle n,2,2\rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x,y,z\}$ geren kümesi ve geren elemanlarının x,y,z sıralamasına göre $\langle x,y,z : x^n = y^2 = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve

$|x|=2n, |y|=4, |z|=4, x=zy^3, y=x^{-1}z$ ve $z=xy$ ’dir. Bu durumlar ele alınarak elde edilen dizi

$$x, y, z, z^3, x^{-1}, x^{-2}, zx^{n-5}, x^{n-3}, zx^{n-8}, zx^{n-6}, x, zx^{-4}z, x^{n-3}z, x^5, zx^9, x^{-3}zx^5,$$

$$z^3x^4, x^{-1}, x^{-6}, zx^{n-9}, x^{n-7}, zx^{n-17}, zx^{n-16}, zx^{n-10}, x, zx^{-8}z, x^{n-7}z, x^9, zx^{17}, x^{-7}zx^9, \cdots,$$

olur. Yukarıdaki dizi kullanılarak

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, \cdots,$$

$$x_{14} = x^5, x_{15} = zx^9, x_{16} = x^{-3}zx^5, \cdots,$$

$$x_{28} = x^9, x_{29} = zx^{17}, x_{30} = x^{-7}zx^9, \cdots,$$

$$x_{14i} = x^{4i+1}, x_{14i+1} = zx^{8i+1}, x_{14i+2} = x^{-4i+1}zx^{4i+1}, \cdots,$$

elde edilir.

Burada $k \in N$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift sayı ise $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $14i = 7n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 7n$ olur.

Eğer n tek ise $i = n$ olur. Böylece $4i = 4n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 14n$ olur.

Teorem 3.6.3: $\langle 2,n,2\rangle$ Binary Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,n,,2\rangle) = \begin{cases} 2n & n \text{ çift sayı ise} \\ 4n & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,n,2\rangle) = 14$.

İspat : i. İspatı teorem 3.4.2. ispatına benzerdir.

ii. $\langle 2,n,2\rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y,z sıralamasına göre $\langle x,y,z : x^2 = y^n = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x| = 4, |y| = 2n, |z| = 4, x = yz, y = xz^3$ ve $z = y^{-1}x$ 'dir. O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle 2,n,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = yz^3, x_5 = z^2, x_6 = zx, x_7 = y^2x\\&x_8 = zx, x_9 = y^{n+3}x, x_{10} = y^3x, x_{11} = y^{n+2}x, x_{12} = z^2,\\&x_{13} = y, x_{14} = x = x_0, x_{15} = y = x_1, x_{16} = z = x_3, \cdots,\end{aligned}$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,n,2\rangle) = 14$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.6.4: $\langle 2,2,n\rangle$ Binary Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 4$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = \begin{cases} 7n & n \text{ çift ise} \\ 14n & n \text{ tek ise .}\end{cases}$

İspat.i. $\langle 2,2,n\rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x,y\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y sıralamasına göre $\langle x,y : x^2 = y^2 = (xy)^n\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x| = 4, |y| = 4$ ve $|xy| = 2n$ 'dir. Bu durumda $P_{\{x,y\}}(\langle 2,2,n\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3, x_3 = y^3, x_4 = x = x_0, x_5 = y = x_1, \cdots,$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 4$ eşitliği elde edilir.

ii. $\langle 2,2,n\rangle$ Binary Polyhedral grubu $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y,z sıralamasına göre $\langle x,y,z : x^2 = y^2 = z^n = xyz\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x| = 4, |y| = 4, |z| = 2n, x = yz, y = xz^{-1}$ ve $z = y^3x$ 'dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$\begin{aligned}&x, y, z, z^{n+1}, xz^2, z^2, z^{n-5}x, z^{n-4}x, z^{-3}x, z^{-1}, z^{-3}, xz^{-4}, z^{n-4}, xz^{-9}, xz^{-8}, xz^{-5}, z,\\&z^{n+1}, xz^{-2}, z^2, xz^{n+1}, z^nx, zx, z^{-1}, z^{-3}, xz^{-8}, z^{n-4}, xz^{-13}, xz^{-12}, xz^{-9}, z, \cdots,\end{aligned}$$

O halde $P_{\{x,y,x\}}(\langle 2,2,n\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, \cdots,$$
$$x_{14} = xz^{-8}, x_{15} = xz^{-5}, x_{16} = z, \cdots,$$
$$x_{28} = xz^{-12}, x_{29} = xz^{-9}, x_{30} = z, \cdots,$$
$$x_{14i} = xz^{-4i-4}, x_{14i+1} = xz^{-4i-1}, x_{14i+2} = z, \cdots,$$

Burada $k \in N$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde bir i doğal sayına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift sayı ise bu durumda,

$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14} = xz^{-4\left(i+\frac{n}{2}\right)-4} = xz^{-4i-4-2n} = xz^{-4i-4} = x_{14i},$$
$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14+1} = xz^{-4\left(i+\frac{n}{2}\right)-1} = xz^{-4i-1-2n} = xz^{-4i-1} = x_{14i+1}$$
$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14+2} = z = x_{14i+2}, \cdots,$$

olur. Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 14i + 7n - 14i = 7n$ eşitliği elde edilir.

Eğer n tek ise bu durumda,

$$x_{(i+n)14} = xz^{-4(i+n)-4} = xz^{-4i-4-4n} = xz^{-4i-4} = x_{14i},$$
$$x_{(i+n)14+1} = xz^{-4(i+n)-1} = xz^{-4i-1-4n} = xz^{-4i-1} = x_{14i+1},$$
$$x_{(i+n)14+2} = z = x_{14i+2}, \cdots,$$

olur. Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 14i + 7n - 7i = 14n$ eşitliği elde edilir.

3.7. $n>2$ için $(2,2,2),(n,2,2),(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral Grupların Pell Orbitlerinin Uzunlukları

Bu bölümde $n>2$ için $\{x,y\}$ ve $\{x,y,z\}$ geren kümelerine göre $(2,2,2),(n,2,2),(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral grupların Pell orbitlerinin uzunlukları ele alınmıştır.

İlk olarak bu gruplarda $\{x,y\}$ ve $\{x,y,z\}$ geren kümelerine göre ve geren elemanlarının x,y,z sıralamalarına Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir;

$$i\geq 0 \text{ için } x_0=x, x_1=y, x_{i+2}=(x_i)(x_{i+1})^2$$

ve

$$i\geq 0 \text{ için } x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_{i+2}=(x_i)(x_{i+1})(x_{i+2})^2 .$$

Teorem 3.7.1: $(2,2,2)$ Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P((2,2,2))=2$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P((2,2,2))=7$.

İspat. **i.** İspatı teorem 3.6.2.**i** ispatına benzerdir.

ii. $(2,2,2)$ Polyhedral grubu $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y,z sıralamasına göre $\langle x,y,z : x^2=y^2=z^2=xyz=e\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x|=2, |y|=2, |z|=z, x=yz, y=xz$ ve $z=xy$'dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir;

$$x,y,z,z,x,e,y,x,y,z,\cdots,.$$

Böylece,

$$LEN_{\{x,y,z\}}P((2,2,2))=7$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 3.7.2: $(n,2,2)$ Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P((n,2,2))=\begin{cases} n & n \text{ çift sayı ise} \\ 2n & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P((n,2,2))=\begin{cases} \frac{7}{2}n & n\equiv 0 \pmod 4 \\ 7n & n\equiv 2 \pmod 4 \\ 14n & \text{diğer durumlarda .} \end{cases}$

İspat.i. $(n,2,2)$ Polyhedral grubu $\{x,y\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y sıralamasına göre $\langle x,y : x^n = y^2 = (xy)^2 = e\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x|=2n, |y|=2, xy=yx^{-1}$ ve $yx=x^{-1}y$ ' dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, xy^2, yx^2, x, yx^4, \cdots,$$

O halde $P_{\{x,y\}}((n,2,2))$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, \cdots,$$

$$x_2 = x, x_5 = yx^2, \cdots,$$

$$x_4 = x, x_9 = yx^4, \cdots,$$

$$x_{2i} = x, x_{2i+1} = yx^{2i}, \cdots,$$

Burada $k \in N$ için $2i = kn$ olacak şekilde bir i doğal sayına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Eğer n çift sayı ise $i=\frac{n}{2}$ olur. Böylece $2i=n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P((n,2,2))=n$ eşitliği elde edilir.

Eğer n tek ise $i=n$ olur. Böylece $2i=2n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P\left((n,2,2)\right)=2n$ eşitliği elde edilir.

ii. $(n,2,2)$ Polyhedral grubu $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanlarının x,y sıralamasına göre $\langle x,y,z : x^n=y^2=z^2=xyz\rangle$ şeklinde takdimi verilir ve $|x|=2n, |y|=2, |z|=2, x=zy, y=x^{-1}z$ ve $z=xy$ 'dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, z, x^{-1}, x^{-2}, zx^{-5}, x^{-3}, zx^{-9}, zx^{-8}, zx^{-6}, x, x^{4}, zx^{3}, x^{4}, zx^{9}, zx^{8},$$
$$zx^{4}, x^{-1}, x^{-6}, zx^{-9}, x^{-7}, zx^{-17}, zx^{-16}, zx^{-10}, x, x^{8}, zx^{7}, x^{9}, zx^{17}, zx^{-16}$$

O halde $P_{\{x,y,z\}}\left((n,2,2)\right)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0=x, x_1=y, x_2=z, \cdots,$$
$$x_{14}=x^5, x_{15}=zx^9, x_{16}=zx^8, \cdots,$$
$$x_{28}=x^9, x_{29}=zx^{17}, x_{30}=zx^{16}, \cdots,$$
$$x_{14i}=x^{4i+1}, x_{14i+1}=zx^{8i+1}, x_{14i+2}=zx^{8i}, \cdots,$$

Burada $k\in N$ için $4i=kn$ olacak şekilde i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Eğer $n\equiv 0 \pmod 4$ ise bu durumda $i=\frac{n}{4}$ olur. Böylece $14i=\frac{7}{2}n$ ve

$LEN_{\{x,y,z\}}P\left((n,2,2)\right)=\frac{7}{2}n$ eşitlikleri elde edilir.

Eğer $n\equiv 2 \pmod 4$ ise $i=\frac{n}{2}$ olur. Böylece $14i=7n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P\left((n,2,2)\right)=7n$ eşit-likleri elde edilir.

Eğer $n\equiv 1 \pmod 4$ veya $n\equiv 3 \pmod 4$ ise $i=n$ olur. Böylece, $14i=14n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P\left((n,2,2)\right)=14n$ eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.7.3: $(2,n,2)$ Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P\left((2,n,2)\right)=\begin{cases} n & n \text{ çift sayı ise} \\ 2n & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P\left((2,n,2)\right)=14$.

İspat : i. İspatı teorem 3.6.2.**i** ispatına benzerdir.

ii. İspatı teorem 3.6.1.**ii** ispatına benzerdir.

Teorem 3.3.4.4: $(2,2,n)$ Polyhedral grubun Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir (Deveci ve Karaduman 2011);

i. $LEN_{\{x,y\}}P\left((2,2,n)\right)=2$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P\left((2,2,n)\right)=\begin{cases} \frac{7}{2}n, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \\ 7n, & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \\ 14n, & \text{diğer durumlarda}. \end{cases}$

İspat. i. İspatı teorem 3.6.2.i ispatına benzerdir.

ii. Teorem 3.6.2.ii ’ in ispatına benzerdir.

3.8. $n>2$ ve $\alpha=2$ için $(2,2,2),(n,2,2),(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral Grupların Genelleştirilmiş Pell Orbitlerinin Uzunlukları

Bu bölümde harhangi bir $n>2$ ve $\alpha=2$ için $\{x,y\}$ ve $\{x,y,z\}$ geren kümelerine göre $(2,2,2),(n,2,2),(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral grupların genelleştirilmiş Pell orbitlerinin uzunlukları ele alınmıştır.

İlk olarak bu gruplarda $\{x,y\}$ ve $\{x,y,z\}$ geren kümelerinin $\alpha=2$ için genelleştirilmiş Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir;

$$i\geq 0 \text{ için } x_0=x, x_1=y, x_{i+2}=(x_i)^3(x_{i+1})^3$$

ve

$$i\geq 0 \text{ için } x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_{i+2}=(x_i)^4(x_{i+1})^3(x_{i+2})^3.$$

Teorem 3.8.1: $\alpha=2$ için $(2,2,2)$ Polyhedral grubun Genelleştirilmiş Pell orbitinin uzunluğu 3'dür (Deveci ve Karaduman 2011).

İspat. $P^{(2)}_{\{x,y\}}((2,2,2))$ grubun genelleştirilmiş Pell orbiti;

$$x_0=x, x_1=y, x_2=xy, x_3=x, x_4=y, \cdots,$$

ve $P^{(2)}_{\{x,y,z\}}((2,2,2))$ grubun genelleştirilmiş Pell orbiti;

$$x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_3=x, x_4=y, x_5=z, \cdots,$$

şeklinde olup periyotları 3' dür.

Teorem 3.8.2: G_n, herhangi bir $n>2$ için $(n,2,2),(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ Polyhedral gruplarından herhangi biri olsun. Bu durumda (Deveci ve Karaduman 2011),

i. İki gerenli durumda $\alpha=2$ için genelleştirilmiş Pell orbitinin uzunluğu aşağıdaki gibidir;

i' . Eğer $u\in\mathbb{N}$ için $n=3^u$ ise bu durumda $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_n)=3$.

ii'. 1. $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_4)=3$.

2. $\beta\geq 2$ için $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_{2^\beta})=2^{\beta-3}.3$.

iii'. Eğer $n>3$ olacak şekilde bir n asal sayısı varsa bu durumda i, $n|3^i+1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $n|3^i-1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayı olmak üzere $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_4)=3i$ olur.

vi'. $p, p>3$ olacak şekilde bir asal sayı ve t,

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_p\right)=LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_{p^t}\right)$$

olacak şekilde en büyük doğal sayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için,

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_{p^\alpha}\right)=p^{\alpha-t}LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_p\right)$$

eşitliği elde edilir

v'. p_j 'ler farklı asal sayılar olmak üzere $\alpha \geq 1$ için eğer $n=\prod_{j=1}^{\alpha} p_j^{e_j}$ oluyorsa bu durumda,

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_n\right)=\text{lcm}\left[LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_{p_j^{e_j}}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir.

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P^{(2)}\left(G_n\right)=3$.

İspat: $(2,n,2)$ grubunu ele alalım. $P^{(2)}_{\{x,y\}}\left((2,n,2)\right)$ genelleştirilmiş Pell Orbiti aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}&x_0=x, x_1=y, x_2=xy^3, x_3=x, x_4=y^{-3}, x_5=xy^{-9}, x_6=x, x_7=y^9,\\&x_8=xy^{27}, x_9=x, x_{10}=y^{-27}, x_{11}=xy^{-81}, x_{12}=x, x_{13}=y^{81},\cdots,.\end{aligned}$$

Böylece i pozitif tek tamsayısı için $x_{3i}=x, x_{3i+1}=y^{-3^i}$ ve i pozitif çift sayısı için $x_{3i}=x, x_{3i+1}=y^{3^i}$ eşitlikleri elde edilir. Buradan,

i.i'. $\varepsilon, i \in \mathbb{N}$ için eğer $3^\varepsilon \left| 3^i\right.$ oluyorsa bu durumda $3^\varepsilon \left| 3^{i+1}\right.$ olur. Böylece

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left((2,n,2)\right)=3$$

eşitliği dizinin genel formundan kolayca elde edilir.

ii'.1. $P^{(2)}_{\{x,y\}}\left((2,4,2)\right)$ ifadesi $x_0=x, x_1=y, x_2=xy^3, x_3=x, x_4=y,\cdots,$ şeklinde olup periyodu 3' dür.

2. $P^{(2)}_{\{x,y\}}\left((2,n,2)\right)$ genelleştirilmiş Pell orbitinin genel formu, ω tek doğal sayı olmak üzere,

$$x_6 = x, x_7 = y^9 = y^{2^3+1}, \cdots,$$
$$x_{12} = x, x_{13} = y^{81} = y^{2^4.5+1}, \cdots,$$
$$x_{6.2^\lambda} = x, x_{6.2^\lambda+1} = y^{81} = y^{2^{\lambda-3}.\omega+1}, \cdots,$$

şeklindedir. Böylece $k \in \mathbb{N}$ için $2^{\lambda+3} = k2^\beta$ olmak üzere λ doğal sayısı $\beta - 3$'e eşit olduğundan $\beta \geq 2$ için,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(\left(2, 2^\beta, 2\right)\right) = 2^{\beta-2}.3$$

eşitliği elde edilmiş olur.

iii'. i pozitif tek tamsayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{-3^i}$ ve i pozitif çift sayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{3^i}$ olduğundan ya $-3^i \equiv 1 \pmod{n}$ ya da $3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer $p, p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ise ve i, $n \mid 3^i + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ise bu durumda $-3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olur ve $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{-3^i} = y$ eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(G_n\right) = 3i$$

olur.

Eğer $p, p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ise ve i, $n \mid 3^i - 1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayı ise bu durumda $3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olur ve $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{3^i} = y$ eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(G_n\right) = 3i$$

olur.

vi'. $p, p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ve $t, u \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(G_p\right) = LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(G_{p^t}\right)$$

olacak şekilde en büyük doğal sayı olsun. Bu durumda u, $p^t \mid 3^u + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $p^t \mid 3^u - 1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayıdır.

Eğer, $p^t \left| 3^u + 1 \right.$ ise bu durumda her $\alpha \geq t$ için $p^\alpha \left| p^{\alpha - t}\left(3^u + 1\right) \right.$ olur. Burada $p^{\alpha-t}\left(3^u+1\right) \left| 3^m + 1 \right.$ olacak şekilde en küçük m doğal sayısına ihtiyaç vardır. Bu en küçük m doğal sayısının, $p^{\alpha-t}\left(3^u+1\right) \left| 3^m + 1 \right.$ olmak üzere $p^{\alpha-t}.u$ ' ya eşit olduğu matematiksel tümevarım yöntemi ile görülebilir.

Eğer, $p^t \left| 3^u - 1 \right.$ ise bu durumda her $\alpha \geq t$ için $p^\alpha \left| p^{\alpha - t}\left(3^u - 1\right) \right.$ olur. Burada $p^{\alpha-t}\left(3^u-1\right) \left| 3^m - 1 \right.$ olacak şekilde en küçük m doğal sayısına ihtiyaç vardır. Bu en küçük m doğal sayısının, $p^{\alpha-t}\left(3^u-1\right) \left| 3^m - 1 \right.$ olmak üzere $p^{\alpha-t}.u$ ' ya eşit olduğu matematiksel tümevarım yöntemi ile görülebilir.

v'. p_j 'ler farklı asal sayılar olmak üzere $\alpha \geq 1$için $n = \prod_{j=1}^{\alpha} p_j^{e_j}$ ve $\tau_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(\left(2, p_j^{e_j}, 2\right)\right) = 3\tau_j \quad \left(\tau_j \in \mathbb{N}\right)$$

olsun. Burada τ_j, $p_j^{e_j} \left| 3^{\tau_j} + 1 \right.$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $p_j^{e_j} \left| 3^{\tau_j} - 1 \right.$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayısıdır. $n \left| 3^\eta + 1 \right.$ ya da $n \left| 3^\eta - 1 \right.$ olacak şekilde en küçük η doğal sayısına ihtiyaç vardır. Bu en küçük η doğal sayısının, $n \left| 3^\eta + 1 \right.$ ya da $n \left| 3^\eta - 1 \right.$ olmak üzere $\mathrm{Icm}\left[3\tau_j\right]$' ye eşit gösterilebilir. Böylece,

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left((2, n, 2)\right) = \mathrm{Icm}\left[LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\left(\left(2, p_j^{e_j}, 2\right)\right)\right]$$

eşitlikliği elde edilir.

ii. $P^{(2)}_{\{x,y\}}\left((2,n,2)\right)$ grubun genelleştirilmiş Pell orbiti;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = y^3 z, x_4 = y, x_5 = z, x_6 = y^3 z, \cdots,$$

şeklindedir ve periyodu 3' dür.

$(n,2,2)$ ve $(2,2,n)$ gruplar içinde ispatlar benzerdir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Centro-Polyhedral Gruplarda Genelleştirilmiş $k-$Mertebeden Jacobsthal Orbitinin Uzunluğu

Teorem 4.1.1: G, $\langle 2,-n,2\rangle$ grubu olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Jacobsthal orbitinin uzunluğu 7' dir yani

$$LEN_{(x,y,z)}J\left(\langle 2,-n,2\rangle\right)=7$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspat. Hemen belirtelim ki, bu grup $\left\langle x,y,z : x^2=y^{-n}=z^2=xyz\right\rangle$ şeklinde takdim edilir ve mertebesi $4n$' dir. Grubun takdiminden kolaylıkla görülür ki, z^2 grubun merkezi elemanıdır ve $|y|=2n, |x|=|z|=4$ ve $y^{-n}=y^n$' dir.

n'nin tüm değerleri için grubun oluşturduğu Jacobsthal dizisi,

$$x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_3=zx, x_4=e, x_5=yx, x_6=x^3, x_7=x, x_8=y, x_9=z$$

şeklinde meydana gelip, bu dizinin periyodunun uzunluğu 7 olur.

Teorem 4.1.2: G, $\langle -2,n,2\rangle$ veya $\langle 2,n,-2\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Jacobsthal orbitinin uzunluğu

$$LJ^3_{(x,y,z)}\left(\langle -2,n,2\rangle\right)=LJ^3_{(x,y,z)}\left(\langle 2,n,-2\rangle\right)=hJ^{3,4(n-1)}$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspat. Bu grupların mertebesi $4n(n-1)$' dir. İlk olarak $\left\langle x,y,z : x^{-2}=y^n=z^2=xyz\right\rangle$ şeklinde takdim edilen $\langle -2,n,2\rangle$ grubunu ele alalım. Grubun takdiminden kolaylıkla görülür ki, x^{-2} ve z^2 grubun merkezi elemanlarıdır ve $|x|=|z|=4(n-1), |y|=2n(n-1)$ ve $x^{-3}=yz$' dir.

$n \geq 3$ için aşağıdaki lineer indirgeme bağıntılarını göz önüne alalım:

$$u_0 = 1, u_1 = 0 \quad \text{ve} \quad u_2 = 0,$$
$$v_0 = 0, v_1 = 1 \quad \text{ve} \quad v_2 = 0,$$
$$w_0 = 0, w_1 = 0 \quad \text{ve} \quad w_2 = 1.$$

Burada $u_{n+3} = u_n + 2u_{n+1} + u_{n+2}$, $v_{n+3} = v_n + 2v_{n+1} + v_{n+2}$ ve $w_{n+3} = w_n + 2w_{n+1} + w_{n+2}$ ' dir.

Bu durumda tümevarım yöntemi kullanılarak Jacobsthal dizisinin $n.$ elemanındaki x, y ve z bileşenlerinin kuvvetleri sırasıyla u_n, v_n ve w_n olarak elde edilir.

Burada $J^3_{(x,y,z)}\left(\langle -2, n, 2\rangle\right)$ orbiti,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xy^2, x_4 = y^3xz^3, x_5 = x^3y^7z^6,$$
$$x_6 = x^6z^{13}y^{15}, x_7 = x^{13}y^{32}z^{28}, x_8 = x^{28}y^{69}z^{60}, \cdots.$$

şeklindedir.

Jacobsthal dizisi aşağıdaki formda yazılabilir;

$$x_n = \begin{cases} x^{u_n} z^{w_n} y^{v_n} & n \equiv 0 \bmod 6 \\ x^{u_n} y^{v_n} z^{w_n} & n \equiv 1 \bmod 6 \\ x^{u_n} y^{v_n} z^{w_n} & n \equiv 2 \bmod 6 \\ x^{u_n} y^{v_n} z^{w_n} & n \equiv 3 \bmod 6 \\ y^{v_n} x^{u_n} z^{w_n} & n \equiv 4 \bmod 6 \\ x^{u_n} y^{v_n} z^{w_n} & n \equiv 0 \bmod 6 \end{cases}$$

Şimdi $x_{hJ^{3,4(n-1)}} = x, x_{hJ^{3,4(n-1)}+1} = y, x_{hJ^{3,4(n-1)}+2} = z$ olduğunda Jacobsthal dizisinin tekrar ettiği gösterilirse ispat tamamlanır. Yukarıdaki formda görüldüğü gibi Jacobsthal dizisinin periyodu $6.\mu$ ' dür $(\mu \in \mathbb{N})$ yani $P \equiv 0 \mod 6$, $P+1 \equiv 1 \mod 6$ ve $P+2 \equiv 2 \mod 6$ ' dir.

Burada P ile $LJ^3_{(x,y,z)}(\langle -2, n, 2\rangle)$ grubu tanımlanır.

Bu ifade daha ayrıntılı bir şekilde yazılırsa,

$$x_P = x^{u_P} z^{w_P} y^{v_P},$$
$$x_{P+1} = x^{u_{P+1}} y^{v_{P+1}} z^{w_{P+1}},$$
$$x_{P+2} = x^{u_{P+2}} y^{v_{P+2}} z^{w_{P+2}}.$$

elde edilir. Burada $P \equiv 0 \bmod 6 \left\langle 2, n-2 \right\rangle$, $P+1 \equiv 1 \bmod 6$ ve $P+2 \equiv 2 \bmod 6$ denklikleri kullanılarak,

$$u_p \equiv u_0 = 1, u_{p+1} \equiv u_1 = 0, u_{p+2} \equiv u_2 = 0,$$
$$v_p \equiv v_0 = 0, v_{p+1} \equiv v_1 = 1, v_{p+2} \equiv v_2 = 0,$$
$$w_p \equiv w_0 = 0, w_{p+1} \equiv w_1 = 0, w_{p+2} \equiv w_2 = 1,$$

eşitlikleri elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerden

$$x_P = x, x_{P+1} = y, x_{P+2} = z$$

eşitlikleri elde edilir.

Böylece yukarıdaki şartları sağlayan aşikar olmayan en küçük tamsayı $hJ^{2,2^{n-1}}$ olduğunda $LJ^3_{(x,y,z)}\left(\left\langle -2, n, 2 \right\rangle\right) = hJ^{3,4(n-1)}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$\left\langle 2, n-2 \right\rangle$ grubu için ispat yukarıdaki ispata benzerdir.

Teorem 4.1.3: G , $\left\langle -n, 2, 2 \right\rangle, \left\langle 2, 2, -n \right\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x, y, z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Jacobsthal orbitinin uzunluğu

$$LEN_{(x,y,z)} J\left(G\right) = \begin{cases} \frac{7}{2} n, & n \text{ çift sayı ise} \\ 7n, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspat: İlk olarak $\left\langle x, y, z : x^{-n} = y^2 = z^2 = xyz \right\rangle$ şeklinde takdim edilen $\left\langle -n, 2, 2 \right\rangle$ grubunu ele alalım. Grubun takdiminden kolaylıkla görülür ki $|x| = 2n$ ve $|y| = |z| = 4$ 'dür.

$J_{(x,y,z)}\left(\left\langle -n, 2, 2 \right\rangle\right)$ dizisi,

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z, \cdots,\\
&x_7 = x,\ x_8 = y,\ x_9 = z^{-3}, \cdots,\\
&x_{14} = x,\ x_{15} = y,\ x_{16} = z^{-7}, \cdots,\\
&\ \vdots \qquad ,\qquad \vdots \quad ,\quad \vdots\ , \cdots,\\
&x_{7i} = x, x_{7i} = y, x_{7i+2} = z^{1-4i} \qquad (i \geq 1)
\end{aligned}$$

şeklinde olup, bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirlemek için $x_{7i} = x_0 = x,\ x_{7i+1} = x_1 = y,\ x_{7i+2} = x_2 = z \quad 2nk = 4i\ (k \in N)$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek gerekir.

n çift sayı ise $i = \frac{n}{4}$ olur. Böylece $14i = \frac{7}{2}n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P\langle(-n,2,2)\rangle = \frac{7}{2}n$ olur.

n tek olursa $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $14i = 7n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P\langle(-n,2,2)\rangle = 7n$ olur.

Lemma 4.1.

i. $LEN_{(x,y,z)}J(\langle -2,2,3\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 3,2,-2\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 2,-2,3\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 3,-2,2\rangle) = 42$.

ii. $LEN_{(x,y,z)}J(\langle -2,2,4\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 4,2,-2\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 2,-2,4\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 4,-2,2\rangle) = 28$.

iii. $LEN_{(x,y,z)}J(\langle -2,2,5\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 5,2,-2\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 2,-2,5\rangle) = LEN_{(x,y,z)}J(\langle 5,-2,2\rangle) = 140$.

İspat. İspat Teorem 4.1.1' nin ispatına benzer olarak direk hesaplama ile yapılır (Deveci ve Ozturk 2014).

4.2. Centro-Polyhedral Gruplarda Pell Orbitinin Uzunluğu

Teorem 4.2.1: G , $\langle -n,2,2\rangle, \langle -2,n,2\rangle, \langle 2,2,-n\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu

$$LEN_{(x,y,z)}P(G) = \begin{cases} 7n, & n \text{ çift ise,} \\ 14n, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspat: İspatı $\langle -n,2,2\rangle$ grubu için yapacağız. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^{-n} = y^2 = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|x| = 2n$ ve $|y| = |z| = 4$ ' dür. n ' nin durumuna göre $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti için aşağıdaki iki durum söz konusudur;

Eğer n sayısının tek çarpanı var ise, $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti,

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\cdots,\\
&x_{14} = x^5,\ x_{15} = x^{\alpha_1}z,\ x_{16} = x^{\alpha_2}z,\cdots,\\
&x_{28} = x^9,\ x_{29} = x^{\alpha_1+2\lambda_1}z,\ x_{30} = x^{\alpha_2+2\lambda_2}z,\cdots,\\
&x_{14+14i} = x^{5+4i},\ x_{15+14i} = x^{\alpha_1+2i\lambda_1}z,\ x_{16+14i} = x^{\alpha_2+2i\lambda_2}z,\cdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\alpha_1,\alpha_2 \in N$ ve λ_1 ve λ_2 ya 1 ya da 2' dir. Bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{14+14i} = x_{14},\ x_{15+14i} = x_{15},\ x_{16+14i} = x_{16}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olacaktır. Dolayısıyla $2nk = 4i$ $(k \in N)$ yani $nk = 2i$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir.

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle) = 14\frac{n}{2} = 7n$ olur.

Eğer n tek ise $i = n$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle) = 14n$ olur.

Eğer $n = 2^u, (u \in N)$ şeklinde ise, $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti

$$\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\cdots,\\
&x_{14} = x^5,\ x_{15} = y,\ x_{16} = z,\cdots,\\
&x_{28} = x^9,\ x_{29} = y,\ x_{30} = z,\cdots,\\
&x_{14i} = x^{1+4i},\ x_{14i+1} = y,\ x_{14i+2} = z,\cdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{14i} = x_0 = x,\ x_{14i+1} = x_1 = y,\ x_{14i+2} = x_2 = z$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olacaktır. Dolayısıyla $2nk = 4i$ $(k \in N)$ yani $nk = 2i$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir. n çift olduğundan $i = \frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal olup $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle) = 14\frac{n}{2} = 7n$ olur.

$\langle -2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,-n\rangle$ grupları için ispat benzer şekildedir.

Teorem 4.2.2: G **,** $\langle 2,-n,2\rangle$ gurubu olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu 14' dür yani

$$LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-n,2\rangle) = 14$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspat. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^2 = y^{-n} = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|y| = 2n$ ve $|x| = |z| = 4$ ' dür .

n ' nin tüm değerleri için grubun oluşturduğu Pell dizisi

$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = x^3, x_5 = x^2, x_6 = y, x_7 = x^3, x_8 = y, x_9 = z^3, x_{10} = z, x_{11} = x, x_{12} = x^2,$
$x_{13} = y, x_{14} = x, x_{15} = y, x_{16} = z, \cdots$

şeklinde olup bu dizinin peryodunun uzunluğu 14 olur.

Teorem 4.2.3: G **,** $\langle 2,-2,n\rangle$, veya $\langle n,-2,2\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu

$$LEN_{(x,y,z)}P(G) = \begin{cases} \frac{n}{2} hP_3(4(n-1)), & n \text{ çift ise,} \\ nhP_3(4(n-1)), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

İspatı $\langle 2,-2,n\rangle$ grubu için yapacağız. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^2 = y^{-2} = z^n = xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|x| = |y| = 4(n-1)$ ve $|z| = 2n(n-1)$' dir.

n nin durumuna göre $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti için aşağıdaki iki durum söz konusudur:

Eğer n sayısının tek çarpanı var ise, $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti,

$$
\begin{aligned}
& x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z, \cdots, \\
& x_{hP_3(4(n-1))} = xz^8,\ x_{hP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha},\ x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots, \\
& x_{2hP_3(4(n-1))} = xz^{16},\ x_{2hP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha+(n+1)\lambda},\ x_{2hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots, \\
& x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))} = xz^{8i+8},\ x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha+(n+1)i\lambda},\ x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olup burada $\alpha, \lambda \in N$' dir. Bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))} = x_{hP_3(4(n-1))}$, $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+1} = x_{hP_3(4(n-1))+1}$, $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+2} = x_{hP_3(4(n-1))+2}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belilemek yeterli olacaktır. Dolayısıyla $2n(n-1)k_1 = (n+1)i$ ve $n(n-1)k_2 = 4i$ $(k \in N)$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir.

Eğer n çift ise $i = \dfrac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle) = \dfrac{n}{2} hP_3(4(n-1))$ olur.

Eğer n tek ise $i = n$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle) = nhP_3(4(n-1))$ olur.

Eğer $n = 2^u, (u \in N)$ şeklinde ise, $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti,

$$x_0 = x,\, x_1 = y,\, x_2 = z, \cdots,$$
$$x_{hP_3(4(n-1))} = x,\, x_{hP_3(4(n-1))+1} = yz^{4(n-1)},\, x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,$$
$$x_{2hP_3(4(n-1))} = x,\, x_{hP_3(4(n-1))+1} = yz^{8(n-1)},\, x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,$$
$$x_{ihP_3(4(n-1))} = x,\, x_{ihP_3(4(n-1))+1} = yz^{4(n-1)i},\, x_{ihP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots$$

şeklinde olup bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{hP_3(4(n-1))i} = x_0 = x,\, x_{hP_3(4(n-1))i+1} = x_1 = y,\, x_{hP_3(4(n-1))i+2} = x_2 = z$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olacaktır. Dolayısıyla $2n(n-1)k = 4(n-1)i \quad (k \in N)$ yani $nk = 2i$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir. n çift olduğundan $i = \frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal olup $LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle) = \frac{n}{2} hP_3(4(n-1))$ olur.

Varsayım 4.2.1: G **,** $\langle 2,n,-2\rangle$ gurubu olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu $hP_3(4(n-1))$ dir yani

$$LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,n,-2\rangle) = hP_3(4(n-1))$$

şeklindedir (Deveci ve Ozturk 2014).

Lemma 4.2.1.i. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,3\rangle) = LEN_{(x,y,z)}P(\langle 3,2,-2\rangle) = 84$ **.**

ii. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,4\rangle) = LEN_{(x,y,z)}P(\langle 4,2,-2\rangle) = 28$ **.**

iii. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,5\rangle) = LEN_{(x,y,z)}P(\langle 5,2,-2\rangle) = 280$ **.**

iv. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,6\rangle) = LEN_{(x,y,z)}P(\langle 6,2,-2\rangle) = 168$ **.**

İspat. İspat Teorem 4.2.2' nin ispatına benzer olarak direk hesaplama ile yapılır (Deveci ve Ozturk 2014).

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında; Centro-Polyhedral grupların genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobtshal ve Pell orbitleri çalışıldı. Bu çalışmların sonucunda bu orbitlerin uzunlukları hesaplandı. Yapılan bu araştırmaları en iyi şekilde ifade eden teoremler verilerek ispatlandı.

KAYNAKLAR

[1] Bicknell.M. ‘‘A primer on the Pell sequences and Related sequence’’ FibanocciQuart.,13(4)1975),345-350.

[2] Borevich A. I. and Shafarevich I. R., Number theory, *Academic Press*, New York, 1996.

[3] Bosma W. and Kraaikamp C., Mertical theory for optimal continued fractions, *J. Number Theory*, 34(3) (1990), 251-270.

[4] Box G. E. P. and Jenkins G. M., times series analysis. Forecasting and control, Holden Day, San Francisco, Calif., 1970.

[5] C. M. Campbell, P. P. Campbell, The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups, J. Appl. Math. Comput., 19 (2005), 231-240.

[6] Campbell P. P., 2003. Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews.

[7] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] O. Deveci, The k-nacci sequences and the generalized order-k Pell sequences in the semi-direct product of finite cyclic groups, Chiang Mai J. Sci., 40(1) (2013), 89-98.

[9] O. Deveci and E. Karaduman, "On the basic k-nacci sequences in finite groups", Discrete Dyn. Nat. Soc., (2011), 639476-1-639476-13.

[10] O. Deveci and E. Karaduman, The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices, Linear Algebra and its Appl., 437 (2012), 2538-2545.

[11] O. Deveci and E. Karaduman, The Pell sequences in finite groups, Util. Math., to appear.

[12] O. Deveci, The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups, Util. Math., to appear.

[13] O. Deveci and E. Karaduman, E., Requrrence Sequence İn Groups, LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2013.

[14] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell sequences in finite groups, Util. Math., to appear.

[15] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell lengths of binary polyhedral groups. The International Conference of Turgion mathematical Society, Konya, Turkey, 2011.

[16] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell lengths and generalized Pell lengths of polyhedral groups. The International Applied Analysis and Algebra , İstanbul, Turkey, 2011.
[17] Deveci Ö. k-nacci sequences and generalized order-k Pell sequences in the semi-direct product of finite cyclic grups, Mai J. Sci. 2013; 40(1) : 89-98.
[18] Deveci. Ö., Karaduman E. and Camphell., ''The periods of k-nacci sequences in centro-polyhedral and related groups,''Ars Combinatoria 97 (2010), 193-210.
[19] Deveci. Ö., and Karaduman E., ''k-nacci sequnces in finite trianglel groups''. Discrete Dyn.Nat.Soc.453750-5-453710-10(2009).
[20] Deveci,Ö., Karaduman, E., and Saglam, G., ''The Jacobshtal sequences in the finite groups'', Bulletin iranian mathematical society, İn Press.
[21] Ö.Deveci and H.Öztürk ''The Generalized Order-k Jacobsthal Lengths of The Some Centro-Polyhedral Groups''. new trends ın mathematıcal scıences; 2014 p:59-63.
[22] Ö.Deveci and H.Öztürk '' Bazı Centro-Polyhedral Grupların Pell Uzunlukları''. Caucasian Journal of Science; Volume:1, 2014 p:81-88.
[23] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, Recurrence sequences, American Mathematical Soc., 2003.
[24] Horadam, A.F., ''Pell Identies'', Fibanocci Quart.,9(3)1971),245-252.
[25] Hosenberg R., The matrix *Q, Mathematical Gems* III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer. 106-107 (1985).
[26] Johnson, D.L., 1997. Presentation of Groups. 2nd edition (London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge).
[27] M.S. El Naschie, Deriving the essential fatuares of standard model from the general theory of relarivity, Chaos, Solitons & Fractals, 26 (2005), 1-6.
[28] D. Kalman, Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, The Fibonacci Quart., 20(1) (1982), 73-76.
[29] Karakaş ,H.İ.,2010. Cebir Dersleri. (Türkiye Bilimler Akademisi - Tüba,Ankara).
[30] Kiliç and Taşçi D., ''The generalized Binet formula, repsentation and sums of the generalized order - k Pell numbers'',Taiawanese J.Math.,10(6)(2006),1661-1670.
[31] B.K. Kirchoof, R. Rutishauser, the phyllotavy of costus (costaceae), Bot Gazette, 151(1) (1990), 88-105.

[32] S.W. Knox, Fibonacci sequences in finite groups, The Fibonacci Quart., 30(2) (1992), 116-120.

[33] Köken F. and Bozkurt,D., On the Jacobsthal numbers by matrix methods, Int.J.Contemp. Math. Sciences, 3(13)(2008),605-614.

[34] K. Lü and J. Wang, k-step Fibonacci sequence modulo m, Util. Math., 71 (2007), 169-178.

[35] Silvester J. R., Fibonacci proporties by matrix methods, *Mathematical Gazette*, **63** (1979), 188-191.

[36] V.W. Spinadel, The family of metallic means, Vis Math., 1(3) (1999).

[37] V.W. Spinadel, The metallic means family and forbidden symmetries, Int. Math. J., 2(3) (2002), 279-288.

[38] A.P. Stakhov, A generalization of the Fibonacci -matrix, Rep. Natl. Acad. Sci., Ukraine, 9(1999), 46-49.

[39] A.P. Stakhov and B. Rozin, Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**(2006), 1162-116.

[40] W. Syein, Modelling the evolution of Stelar archictecture in Vascular plants, *Int. J. Plant Sci*., **154(2)** (1993), 229-263.

[41] Taşcı, D., 2010. Soyut Cebir. (Alp Yayınevi, Ankara).

[42] D.D. Wall, Fibonacci series modulo m, *Amer*. *Math*. *Monthly*, **67** (1960), 525-532.

[43] F. Yilmaz and D. Bozkurt, The generalized order-k Jacobsthal numbers, *Int*. *J*. *Contemp*. *Math*. *Sciences*, **4(34)** (2009), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hasan ÖZTÜRK

Doğum Yeri: Nazilli

Doğum Tarihi: 1982

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Nazilli Atatürk Lisesi (1997-2001)

Lisans: Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2005-2010)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2012-2015)