T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPLARDA FİBONACCİ *p*-DİZİLERİ

Metin AVCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

MART-2015

KARS

Bu tez çalışması 2013-FEF-72 numaralı proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPLARDA FİBONACCİ *p*-DİZİLERİ

Metin AVCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

MART-2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Metin AVCI' nin Doç. Dr. Ömür DEVECİ' nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Gruplarda Fibonacci p-Dizileri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği...... ile kabul edilmiştir.

26/03/2015

	Adı ve Soyadı	imza
Başkan :	Doç. Dr. Ömür DEVECİ	......
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	...... A. Akdemir
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	......

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2015 gün ve ..../ ....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ' ye teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve güvenleriyle beni bugüne getiren, beni yalnız bırakmayan, her zaman arkamda bir dağ olarak bildiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Kars-2015 Metin AVCI

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Fibonacci *p*-dizileri gruplara taşındı ve bu dizilerin gruplardaki uygulamaları üzerinde duruldu.

Bu çalışmanın 2. Bölümünde sonraki aşamalarda kullanılacak temel kavramlar, 3. Bölümünde ise çalışmaya esas teşkil edecek metodlar verilidi.

Çalışmanın 4.1. bölümde, Fibonacci *p*-dizileri *m* modülüne göre incelendi ve faklı *m* değerleri için elde edilen periyotlar arasında çeşitli kurallar bulundu. Ayrıca bu bölümde Q_p Fibonaccisinin elemanlarının *m* modülüne göre indirgenmesi suretiyle bu matris üreteç olarak seçilerek devirli gruplar elde edildi ve bu grupların mertebeleri ile Fibonacci *p*-dizilerinin *m* modülüne göre periyotları arasında bağıntılara ulaşıldı.

4.2. bölümde, Fibonacci *p*-dizileri iki ve daha fazla üretece sahip gruplara taşındı ve bu anlamda *p* tane üretece sahip grupların Fibonacci *p*-orbitleri ve esas Fibonacci *p*-orbitleri tanımlandı. Tanımlanan bu kavramlar üzerinde geniş bir şekilde duruldu ve sonuçlar ispatlarıyla birlikte verildi. Son olarak Fibonacci *p*-dizilerinin gruplardaki karşılıklarının kullanılabilir olup olmadıklarının test edilmesi için $(2,2,2)$ ve $n \geq 3$ için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının esas Fibonacci *p*-orbitlerinin ve Fibonacci *p*-orbitlerinin periyodları hesaplandı.

2015, 68 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci *p*-dizisi, Fibonacci *p*-orbiti, Esas Fibonacci *p*-orbiti, Polyhedral grup, Periyot, Matris.

ABSTRACT

In this work, the Fibonacci *p*-Sequences have been extend to groups and then it has been focused on applications of these sequences.

In the section 2, we give the main concepts that will be used in further steps, and in the third section, the methods which are the fundamental for the work are being given.

In the section 4.1 of work, Fibonacci *p*-Sequences have been researched according to *m* module and various rules are found between the obtained periods for different values of *m*. Also, there, by reducing the terms of Q_p Fibonacci according to modulo *m*, the corresponding matrix is choosen as the generator and this enables us to find cyclic groups and then the relations between the degree of these groups and the periods of *p*-Fibonacci sequence according to modulo *m* are reached.

In the section 4.2, Fibonacci *p*-sequences moved to the group of two or more amount generators and in this sense Fibonacci *p*-orbits and basic Fibonacci *p*-orbits of groups with *p* amount generators have been defined. These defined concepts have been broadly focused and the results have been provided with their proofs. Finally, in order to test whether or not there is usability of the correspondance of Fibonacci *p*-sequences in the groups, the periods of the basic Fibonacci *p*-orbits and the Fibonacci *p*-orbits of the polyhedral groups $(2,2,2)$ and $(n,2,2)$, $(2,n,2)$ and $(2,2,n)$ for $n \geq 3$ have been calculated.

2015, 68 Page

Keywords: Fibonacci *p*- Sequences, Fibonacci *p*- orbital, main Fibonacci *p*- orbital, Polyhedral group, Periyot, Matrix

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
G	Grup
$\lvert G \rvert$	Grubun mertebesi
G/H	G ’ nin H ’a göre bölüm grubu
$G \cong H$	G grubu H grubuna izomorf
$G \leq H$	H , G ’ nin alt grubu
$H \lhd G$	H , G ’ nin normal alt grubu
$[G:N]$	G ’ de N ’ ın indeksi
$Aut(G)$	G grubunun bütün otomorfizmlerinin kümesi
θ	$Aut(G)$ ’nin bir elemanı
$I_a : G \to G$	G grubunun a ya eşlenik iç otomorfizması
$I(G)$	G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi
$Ser(A)$	A üzerindeki serbest grup
(l,m,n)	Polyhedral grup

$f_n^{(k)}$	$1 \le i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)}$ k-basamak Fibonacci dizisinin n. elemanı
$k(m)$	Standart Fibonacci dizisinin m modülüne göre Periyodu
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$' nin m'ye göre modülü
$h_k(m)$	$f(k,m)$' nin en küçük periyodu
$F_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile elde edilmiş k-nacci dizisi
$P_k(G; x_0, x_1 \cdots, x_{j-1})$	$F_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ k-nacci dizisinin periyodu
$\{F_p(n)\}$	Fibonacci *p*-dizisi
$\{F_p^{(m)}(n)\}$	m modülüne göre Fibonacci *p*-dizisi
$l_p(m)$	$\{F_p^{(m)}(n)\}$ dizinin en küçük periyodu
$F_p^{(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})}(G)$	$(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})$ geren *p*-lisi için G grubunun Fibonacci *p*-orbiti
$LF_p^{(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})}(G)$	$F_p^{(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})}(G)$ dizisinin periyodunun uzunluğu
$\overline{F}_p^{(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})}(G)$	$(x_0, x_1, \cdots x_{p-1})$ geren *p*-lisi için G grubunun esas Fibonacci *p*-orbiti

$L\overline{F}_p^{(x_0,x_1,\cdots x_{p-1})}(G)$	$\overline{F}_p^{(x_0,x_1,\cdots x_{p-1})}(G)$ dizisinin periyodunun uzunluğu
$l_p^{(a_0,a_1,\cdots a_p)}(m)$	m modülüne ve $(a_0,a_1,\cdots a_p)$ başlangıç değerine göre elde edilen Fibonacci p-dizisinin periyodunun uzunluğu
Q_p	Fibonacci p matrisi
$\langle Q_p \rangle_{k^u}$	k^u modülüne göre Q_p matrisi tarafından üretilen devirli grup
$\left\| \langle Q_p \rangle_{k^u} \right\|$	$\langle Q_p \rangle_{k^u}$ grubunun mertebesi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İndirgemeli diziler ve bu dizilerle alakalı kavramlar modern bilimin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Bu anlamda indirgemeli diziler disiplinler arası ilişki noktasında son derece öneme sahiptir. [2,3,17-21,25,27,28,33,37-39,43,45,46] deki bilimsel çıktılar, indirgemeli diziler konu alınarak farklı bilimsel disiplinlerde yapılan güncel çalışmalara örnek olarak verilebilir.

İndirgemeli diziler cebirsel yapılara ilk olarak Wall [47] çalışması ile taşınmıştır. Wall, bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini incelemiştir. Wilcox, [48] deki çalışmasıyla teoriyi abelyen gruplara genişletmiştir. Gruplarda indirgemeli diziler üzerine oluşturulan konsept, daha sonra yapılan çalışmalarla çeşitli indirgemeli dizilerin farklı grup ailelerinde incelenmesi şeklinde genişletilmiştir [1,4,5,8-12,14,15,29, 30,32, 34,35].

Deveci ve Avcı, [13] deki çalışmalarında indirgemeli diziler ailesinden olan Fibonacci *p*-dizilerini gruplara taşımış ve bu dizileri grup elemanları yardımıyla yeniden tanımlamışlardır. Bu çalışmada ilk olarak *m* modülüne göre Fibonacci *p*-dizilerinin periyotları elde edilmiştir öyle ki indirgemeli bir dizinin m modülüne göre periyodu bu dizinin *m*. mertebeden devirli bir gruptaki periyoduna karşılık gelmektedir. Daha sonra grup elemanları ve otomorfizm kavramı yardımıyla Fibonacci *p*-orbiti ve esas Fibonacci *p*-orbiti tanımlanmış ve bu kavramlar üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada ayrıca, grup elemanları yardımıyla tanımlanan bu dizilerin kullanışlı olup olmadıklarının test edilmesi amacıyla $(2,2,2)$ ve $n \geq 3$ için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci *p*-orbitleri ve esas Fibonacci *p*-orbitlerinin periyodları hesaplanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Grup Takdimleri

Tanım 2.1.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere $\ell \notin A \cup A^{-1} \left(A \neq \varnothing \right)$ ve $A \cup A^{-1} \cup \{\ell\}$ nin elemanları olan $\left(x_1, x_2 ..., x_k \right)$ dizisi verildiğinde, uygun bir $n \geq 1$ için kelime $x = \left(x_1, x_2 ..., x_n, \ell, \ell, ... \right)$ n . terimden sonraki terimler ℓ ise, bu diziye A üzerinde bir kelime denir. A üzerinde bir kelime $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n, l, l, \cdots \right)$ şeklinde bir dizidir. Özel olarak her terimi ℓ olan $1 = \left(\ell, \ell, ... \right)$ dizide bir kelime olup, bu kelime boş kelime denir[31].

Tanım 2.1.2: Eğer $x = \left(x_1, x_2 ..., x_n, \ell, \ell, ... \right)$ kelimesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa x'e bir kısaltılmış kelime denir [31].

i. $1 \leq i \leq n-1$ olan bir i için $x_i = a \in A$ ise $x_{i+1} \neq a^{-1}$'dir ve $x_i = a^{-1} \in A^{-1}$ ise $x_{i+1} \neq a$ dır.

ii. $k \in \mathbb{N}$ ve $x_k = \ell$ ise, her $i \geq k$ için $x_i = \ell$ dir.

Tanım 2.1.3: Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde bir $(a,b) \to ab$ ikili işlemi aşağıdaki kuralları sağlıyorsa, G ye bir grup denir.

1. $\forall a,b,c \in G$ için $a(bc) \to (ab)c$ asosyatif kural verilir.

2. $\forall a \in G$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. e elemanına G nin birim elemanı denir.

3. $\forall a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. $a^{-1} \in G$ elemanına a nın inversi (tersi) denir.

Tanım 2.1.4: $(G,*)$ bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G 'de tanımlanan ikili işleme göre bir grup teşkil ederse yani $(H,*)$ cebirsel yapısı bir grup ise o takdirde $(H,*)$ 'a $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir[44].

Tanım 2.1.5: $H=\{e\}$ ve $H=G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H=\{e\}$ alt grubuna aşikar alt grup ve G den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H , G nin bir öz alt grubu ise $H<G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A 'yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $<A>$ ile gösterelim. Bu takdirde $<A>$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A 'yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1}=H$ oluyorsa H , G nin bir normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8: Eğer G grubu normal alt grup içermiyorsa G ye basit grup denir.

Tanım 2.1.9: N , G nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh)$ = $N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G:N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 2.1.10: A üzerindeki bütün kısaltılmış kelimelerin kümesi $Ser(A)$, aşağıdaki gibi tanımlanmış ikili işleme göre bir gruptur. Bu gruba A kümesi üzerindeki serbest grup denir [31].

i. Her $x \in Ser(A)$ için $1.x = x.1 = x$ dir.

ii. Her $x, y \in Ser(A)/\{1\}$ için, $x = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} .....a_n^{\lambda_n}$, $y = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} ....b_r^{\alpha_r}$ ise xy çarpımını tanımlarken genelliği bozmadan $n \geq r$ kabul edebiliriz. Amacımız x ile y ' yi yan yana yazarak bir kısaltılmış kelime oluşturmaktır. Burada $a_n^{\lambda_n} = b_1^{-\alpha_1}$ ise x ile y yan yana yazılınca kısaltılmış kelime elde edilmez. Dolayısıyla için $0 \leq k \leq r$ olmak üzere her $i = 0,1,2,...,k-1$ için $a_{n-i}^{\lambda_{n-i}} = b_{i+1}^{-\alpha_{i+1}}$ bu koşulu sağlayan k var olsun. Eğer,

$$xy = \begin{cases} a_1^{\lambda_1} \cdots a_{n-k}^{\lambda_{n-k}} b_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \cdots b_r^{\lambda_r}, & k < r < n, \\ a_1^{\lambda_1} \cdots a_{n-r}^{\lambda_{n-r}}, & k = r < n, \\ 1, & k = r = n \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa xy bir kısaltılmış kelime olur ve böylece $Ser(A)$ üzerinde bir ikili işlem elde etmiş oluruz.

Tanım 2.1.11: A boş olmayan bir küme, $B \subseteq Ser(A)$ ve B ' nin $Ser(A)$ içindeki normal kapanışı N olsun. Bu takdirde $G = Ser(A)/N$ grubuna $a \in A$ üreteçleri ve $W = e(W \in B)$ bağıntılarının belirlediği grup denir [31].

Tanım 2.1.12: X bir küme $F(x)$ X üzerinde serbest grup ve $R \leq F(x)$ olsun $G = \langle X : R \rangle$ ' a G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerinin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir. Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere, Eğer bir G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [24].

Tanım 2.1.13: $(G,*)$ ve (H,o) iki grup olmak üzere eğer $\varphi : G \to H$, dönüşümü her $x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

eşitliği sağlarsa φ 'ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir [44].

Tanım 2.1.14: $\varphi : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ 'ye bir epimorfizm denir [44].

Tanım 2.1.15: $\varphi : G \to H$, 1-1 bir grup homomorfızmi ise φ 'ye bir monomorfızm denir[44].

Tanım 2.1.16 $\varphi : G \to H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfızmi ise φ 'ye bir grup izomorfizmi denir ve $G = H$ şeklinde gösterilir [44].

Tanım 2.1.17: $\varphi : G \to G$, grup homomorfızmine, endomorfizm denir. Eğer φ , 1-1, örten bir grup homomorfizmi ise φ 'ye bir grup otomorfizmi denir.

Tanım 2.1.18: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere her $x \in G$ için $I_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan

$$I_a : G \to G$$

otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesini $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $AutG$ ile gösterilir [44].

Tanım 2.1.19: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G 'nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kapanışı denir [44].

Tanım 2.1.20: $P = \langle x; r \rangle$ bir grup sunuşu olsun. P sunuşundan bir takım işlemler ile aynı grubun başka bir sunuşu elde edilebilir. P üzerindeki bu işlemlerden biri Tietze dönüşümleridir ve aşağıdaki dört madde ile tanımlanır.

T1) x kümesi üzerinde kelimelerin sonlu bir kümesi s olsun. Eğer s kümesindeki her eleman, r kümesindeki elemanlardan elde edilebiliyorsa P sunuşunu $\langle x; r, s \rangle$ ile değiştiririz.

T2), T1) dönüşümünün tersidir.

T3) x kümesindeki sembollerden farklı olan sembollerin sonlu bir kümesi t olsun. x kümesi üzerinde bir kelime $U_t(t \in \mathrm{t})$ ise P sunuşunu $\langle x, \mathrm{t}; r, t^{-1}U_t(t \in \mathrm{t}) \rangle$ ile değiştiririz.

T4) , T3) dönüşümünü tersidir.

Önerme 2.1.1: Aynı grubun sonlu iki takdimi verilmiş olsun. Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden diğer takdim elde edilebilir [6].

Eğer G sonlu gerilmiş bir grup değil ise bu grup sonlu takdim edilemez. O halde örnek olarak rasyonel sayıların normal toplama işlemine göre bir grubu olan Q rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Fakat bazı gruplar vardır ki sonlu gerilmiştir ama sonlu takdim edilemezler. Bu sonuç aşağıdaki iki teoremden elde edilir [6].

Teorem 2.1.1: 2^{N_0} tane non-izomorfik 2-gerenli grup vardır [36].

Teorem 2.1.2: Sayılabilir çoklukta nonizomorfik sonlu takdim edilmiş grup vardır [6].

Lemma 2.1.1: $R \leq S \leq F(x)$ olmak üzere, $G = \langle X / R \rangle$ ve $H = \langle X / S \rangle$ ise her $x \in X$ elemanını sabitleyen ve $Ker\sigma = \overline{S/R}$ olacak şekilde bir $\sigma : G \to H$ epimorfızmi vardır. Tersine $G = \langle X / R \rangle$ nin her bölüm grubu, $R \leq S$ olmak üzere $\langle X / S \rangle$ şeklinde bir takdime sahiptir [24].

Tanım 2.1.21: G , $p = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. ρ nin bağıntı matrisi$m$ mxn tipinde bir matris olup, bu matrisin herhangi b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır.

Örneğin, G grubu, $p = \left\langle x, y, z : x^3 = y^3, zxz^{-1} = y, (zx)^3 = e, (zy)^2 = e \right\rangle$ şeklinde takdim edilsin. p bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir [6].

Tanım 2.1.22: (l, m, n) ve $l, m, n > 0$ için

$$\left\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = xyz = e \right\rangle$$

veya

$$\left\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e \right\rangle$$

şeklinde takdim edilen gruba polyhedral grup denir.

Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak $(l, m, n) \cong (m, n, l) \cong (n, l, m)$ olduğu görülebilir.

Eğer $t = lmn\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = mn + lm - lmn$ pozitif ise (l, m, n) polyhedral grubu sonludur.

Eğer $1 < l \leq m \leq n$ ise yalnızca aşağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l,m,n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

i. $l = m = 2$ ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı ise,

ii. $l = 2, m = 3$ ve $3 \leq n \leq 5$ olacak şekilde bir tamsayı ise.

(l,m,n) polyhedral grubu sonlu ise bu grubun mertebesi $2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right)^{-1} = \frac{2lmn}{t}$ dır [7].

2.2.Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.2.1: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R ' nin elemanlarının $a_1, a_2, \cdots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n \qquad (1.1)$$

şeklindeki homojen lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan dizisine, homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \cdots, c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k , R halkasının sıfır böleni olamaz [16].

Tanım 2.2.2: $$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} + \cdots + c_k$$

şeklindeki k .dereceden polinoma, (1.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir [16].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir indirgemeli bağıntıyı sağlar. . Minimal uzunluktaki bağıntının karakteristik polinomu $\{a_n\}$ dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir [16].

2.3. Fibonacci Dizileri

Tanım 2.3.1: $\{f_n\}$ Fibonacci dizisi $n \geq 0$ ve $f_0 = 0, f_1 = 1$ olmak üzere

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

şeklinde dir. [42] de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilmiştir.

[22] de Fibonacci sayılarının

$$Q=\begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^n=\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretilebileceği gösterilmiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q-matrisi denir.

Tanım 2.3.2: $\left\{ f_n^{(k)} \right\}$ k-basamak Fibonacci dizisi, $1 \le i \le k-1$ için $f_i^{(k)}=0$ ve $f_k^{(k)}=1$ sınır şartlarıyla, $n>k$ için

$$f_n^{(k)}=\sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f_n^{(k)}$, k-basamak Fibonacci dizisinin n. elemanıdır.

k-basamak Fibonacci dizisi, [26] da Kalman tarafından bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k}=c_0 a_n+c_1 a_{n+1}+\cdots+c_{k-1} a_{n+k-1} \tag{1.3}$$

dizisinin özel bir halidir . Burada $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ reel sabitlerdir. [26] da

$$A_k=\left[a_{ij}\right]_{kxk}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ldots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 \ldots c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (1.3) deki lineer indirgemeli diziler için

$$A_k^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik yardımıyla da

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1}^{(k)} \\ f_{n+2}^{(k)} \\ f_{n+3}^{(k)} \\ \vdots \\ f_{n+k-1}^{(k)} \\ f_{n+k}^{(k)} \end{bmatrix}$$

eşitliğine ulaşılmıştır.

2.4.Fibonacci *p*-Dizileri

Verilen bir p $(p=1,2,3,\cdots)$ için $\{F_p(n)\}$ Fibonacci p-dizisi $F_p(0)=0$, $F_p(1)=\cdots=F_p(p)=1$ olmak üzere $n>p$ için

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1)$$

şeklinde tanımlanır ([40,41])

[41] de Q_p Fibonacci p-matrisi

$$Q_p=\left[a_{ij}\right]_{(p+1)x(p+1)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış olup Q_p Fibonacci p-matrisi ile Fibonacci p-dizisinin terimleri arasında

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

şeklinde bağıntı elde edilmiştir.

Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra sadece sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde ise periyodiktir ve tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,b,c,d,e,b,c,d,e,\ldots$ dizisi periyodik olup başlangıç elemanı a ve periyodu 4 tür.

Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k-periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,f,a,b,c,d,e,f,a,b,c,d,e,f\ldots$ dizisi periyodu 6 olan basit periyodiktir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. m Modülüne Göre k-basamak Fibonacci Dizileri

$f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} \pmod m$ olmak üzere k -basamak Fibonacci dizisi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_n^{(k,m)}, \cdots \right)$$

dizisi elde edilir. O zaman $\left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_k^{(k,m)} \right) = (0, 0, \cdots, 1)$ olup bu dizi ile (1.2) deki indirgemeli dizi aynı bağıntılara sahiptir [32].

Teorem 3.1.1: $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir [32].

İspat:

$$S_k = \left\{ (a_1, a_2, \cdots, a_k) : 0 \le a_i \le m-1 \right\}$$

olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani,

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \cdots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \ge 0$ için $v \ge u$ sayısı vardır. Tanımdan,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olur. Yani

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan kolaylıkla,

$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \cdots f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$ ve $f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$ olduğu görülebilir. Böylece $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir.

$h_k(m)$ ile $f(k,m)$ nin en küçük periyodu gösterilir, $f(k,m)$ nin periyodu veya m modülüne göre k-basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır [32].

Örnek olarak,

$$s(4,3) = (0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\cdots)$$

dizisi ele alınırsa, bu dizi $k = 4$ basamak için her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar edip $h_4(3) = 26$ olur.

p_i ler farklı asal sayılar ve e_i ler pozitif tamsayılar olmak üzere, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $(t \geq 1)$ ise $h_k(m)$ sayısı $h_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katıdır [32].

Teorem 3.1.2: $h_k(p) = h_k\left(p^t\right)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Her $a \geq t$ için, $h_k\left(p^a\right) = p^{a-1} h_k(p)$ olur. Özellikle eğer $h_k(p) = h_k\left(p^2\right)$ ise her $a \geq 1$ için, $h_k\left(p^a\right) = p^{a-1} h_k(p)$ dir [32].

Varsayım 3.1.1: Eğer $p \geq k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) \| \left(p^k - p^i\right)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ aralığında bir i sayısı vardır [32].

Yukarıdaki varsayımı doğrulayan bazı örnekler aşağıdaki tablolar yardımıyla gösterilmiştir.

Çizelge 3.1.1: $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_3(p) \mid (p^3 - p^i)$'nin durumu

p	$h_3(p)$	Sonuç
5	31	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
13	168	$h_3(p) \mid p^3 - p^2$
23	553	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
67	1519	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
107	1272	$h_3(p) \mid p^3 - p$
179	32221	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
241	29040	$h_3(p) \mid p^3 - p$
317	100807	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
389	151711	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
557	103416	$h_3(p) \mid p^3 - p$
839	704761	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
881	777043	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
971	943813	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
1033	1067088	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1103	1217713	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
1301	1693903	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1447	2093808	$h_3(p) \mid p^3 - p$
1759	3094080	$h_3(p) \mid p^3 - p$
2851	8128200	$h_3(p) \mid p^3 - p$
3347	11205757	$h_3(p) \mid p^3 - 1$
4831	11669280	$h_3(p) \mid p^3 - p$
13367	7444862	$h_3(p) \mid p^3 - p$
15791	10389820	$h_3(p) \mid p^3 - p$
17207	17206	$h_3(p) \mid p^3 - p^2$
18047	1696324	$h_3(p) \mid p^3 - p$

Çizelge 3.1.2: $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_4(p) \mid (p^4 - p^i)$'nin durumu

p	$h_4(p)$	Sonuç
5	312	$h_4(p) \mid p^4 - 1$
11	120	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
13	84	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
19	6858	$h_4(p) \mid p^4 - p$
29	280	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
37	1368	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
41	240	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
67	100254	$h_4(p) \mid p^4 - p$
83	1157520	$h_4(p) \mid p^4 - 1$
151	533216	$h_4(p) \mid p^4 - 1$
211	9393930	$h_4(p) \mid p^4 - p$
433	23248760	$h_4(p) \mid p^4 - 1$
907	822648	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
1277	1630728	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
1579	623310	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
1973	1946364	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
2593	1680912	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
2749	7557000	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
3079	4740120	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
3331	369270	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
3581	3205890	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
3733	2322548	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
3823	3822	$h_4(p) \mid p^4 - p^3$
4019	8076180	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$
4253	6029336	$h_4(p) \mid p^4 - p^2$

Çizelge 3.1.3: $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_5(p) \mid (p^5 - p^i)$'nin durumu

p	$h_5(p)$	Sonuç
5	781	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
7	2801	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
11	16105	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
19	13032	$h_5(p) \mid p^5 - p$
31	190861	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
41	2896405	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
53	8042221	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
79	39449441	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
89	3690720	$h_5(p) \mid p^5 - p$
163	176477940	$h_5(p) \mid p^5 - p$
283	20022	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
419	35112	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
503	127263526	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
683	159305993	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
823	677328	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1259	317016	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1709	1460340	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2287	50292	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2549	6497400	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2957	8743848	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3163	3162	$h_5(p) \mid p^5 - p^4$
3541	12538680	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3929	15437040	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
4159	17297280	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$

[32]

3.2. Sonlu Gruplarda Fibonacci Dizileri

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ olmak üzere $G=\langle A\rangle$ olsun.

$$x_1=a_1,...,x_{n-1}=a_{n-1}$$

başlangıç değerleri ile $i\geq 0$ için

$$x_{i+n}=\prod_{j=1}^{n} x_{i+j-1}$$

şeklinde tanımlanan grup elemanlarının dizisine, A geren kümesine göre G nin Fibonacci orbiti denir ve $F_A(G)$ ile gösterilir [5].

$F_A(G)$ dizisi periyodik olup dizinin periyodunun uzunluğuna, A geren kümesine göre G nin Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ ile gösterilir [4].

G j-gerenli sonlu bir grup ve X de $(x_0,x_1,\cdots,x_{j-1})$ olacak şekilde $G\times G\times\cdots\times G$ nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda G grubu $x_0,x_1,\cdots,x_{j-1}$ tarafından üretilmektedir ve $(x_0,x_1,\cdots,x_{j-1})$ ifadesine de G grubu için bir geren j-tiplisi denir.

Tanım 3.2.1: $(x,y)\in X$ geren çifti için G 'nin elemanlarının $F_{x,y}$ orbiti,

$$a_0=x,\ a_1=y,\ a_{i+2}=a_i a_{i+1},\ i\geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\{a_i\}$ dizisidir.[6].

Bu dizinin periyodunun uzunluğuna, (x,y) geren çiftine G grubunun Fibonacci uzunluğu denir.

Tanım 3.2.2: $(x,y)\in X$ geren çifti için m esas uzunluğuna sahip $\overline{F}_{x,y}$ esas Fibonacci orbiti, G nin elemanlarının

$$b_0 = x,\ b_1 = y,\ b_{i+2} = b_i b_{i+1},\ i \geq 0$$

olacak şekilde $\{b_i\}$ dizisidir. Burada $m \geq 1$, herhangi bir $\theta \in AutG$ için

$$b_0 = b_m\theta,\ b_1 = b_{m+1}\theta$$

şartını sağlayan en küçük tamsayıdır.

b_m, b_{m+1}, G ' yi ürettiği için θ teklikle belirlenmektedir. Her bir $(x, y) \in X$ geren çifti, $AutG$ 'nin elemanlarının etkisi altında X 'in farklı $|AutG|$ elemanlarına dönüşür. Bundan dolayı

$$d_j(G) = |X| / |AutG|$$

dır [6].

$d_j(G)$ notasyonu hakkında daha fazla bilgi için [23] çalışmasına bakılmalıdır.

Tanım 3.2.3: Sonlu bir gruptaki bir k-nacci (k-basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots x_{n-1} & j \leq n < k, \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1} & n \geq k, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Böylece, bu k-nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0, \cdots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki bir k-nacci dizisi $F_k(G; x_0, \cdots, x_{j-1})$ ile gösterilir. Buna göre tamsayılardaki mod m ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2(Z_m; 0,1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır.

Bir $F_k(G; x_0, \cdots, x_{j-1})$ k- nacci dizisinin periyodu $P_k(G; x_0, \cdots, x_{j-1})$ şeklinde gösterilir. k-gerenli bir grubun Fibonacci orbiti bu gruptaki k-nacci dizisidir [30].

Tanım 3.2.4: j -tuple $(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) \in X$ m temel periyodunun esas k-nacci dizisi olan $\overline{F}_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$, $b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$ grubundandır. Başlangıç kümesini $b_0 = x_0, b_1 = x_1, \cdots, b_{j-1} = x_{j-1}$ şeklinde verelim herhangi bir elemanı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$b_n = \begin{cases} b_0 b_1 \cdots b_{n-1} & j \le n < k, \\ b_{n-k} b_{n-k+1} \cdots b_{n-1} & n \ge k, \end{cases}$$

En küçük tam sayı $m \ge 1$ olduğunda,

$$b_0 = b_m \theta, \ b_1 = b_{m+1}\theta, \ \cdots, \ b_{k-1} = b_{m+k-1}\theta$$

$(\theta \in AutG)$ bu durumda G , j sonlu bir j -üreteci ve $b_m, b_{m+1}, \cdots, b_{m+j-1}$ ve θ birleşik determinantıdır. Temel k -nacci dizisi $\overline{F}_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ sonlu m elemanını kapsar [10].

Tanım 3.2.5: G bir grup olsun. G nin her elemanının içinde bulunduğu bir k -nacci dizisi mevcut ise G ye k -nacci dizilenebilirdir denir [30].

Teorem 3.2.1: $n \ge 3$ olmak üzere $\langle x, y : x^n = y^2 = e, \ yx = x^{-1}y \rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubunda $P_k(D_n; x, y) = P_k(D_n; y, x) = 2k+2$ dir [30].

Teorem 3.2.2: G , 2-gerenli bir grup ve G nin birim elemanı $F_2(G; x, y)$ veya $F_2(G; y, x)$ Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G abelyendir [30].

İspat: Genelliği bozmaksızın G nin $F_2(G; x, y)$ Fibonacci dizisini düşünelim ve n doğal sayısı için G nin birim elemanın bu dizinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin n. elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x, y, \cdots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \cdots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2}=-u_{i-1}+u_i$ bağıntısı kullanılarak s nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif işaretli tamsayılardan bir Fibonacci dizisi oluşturulur. Böylece, grubun bir Fibonacci dizisi aşağıdaki iki forma sahip olur:

i. n tek ise, dizi,

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \cdots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_n}=x, s^{-u_{n-1}}=y$$

(bu da $s^{u_{n-1}}=y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{u_{n-2}}=xy$ dir.

$$s^{u_{n-1}}s^{u_{n-2}}=s^{u_{n-1}+u_{n-2}}=s^{u_n}$$

olduğundan $y^{-1}xy=x$ ve $xy=yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

ii. n çift ise, dizi,

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \cdots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{-u_n}=x, s^{u_{n-1}}=y$$

(bu da $s^{-u_{n-1}}=y^{-1}$ olmasını gerektirir.) $s^{-u_{n-2}}=xy$ dir.

$$s^{-u_{n-1}}s^{-u_{n-2}}=s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})}=s^{-u_n}$$

olduğu için $y^{-1}xy=x$ veya $xy=yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım,

$$A=\left\langle x, y : x^9=y^2=e,\ xy=yx \right\rangle$$

abelyen grubunu göz önüne alalım. Bu grubun Fibonacci dizileri,

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y$$
$$x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy, \cdots$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3, x^5y, x^8y, x^4, x^3y, x^7y, x, x^8y, y, x^8$$
$$x^8y, x^7y, x^6, x^4y, xy, x^5, x^6y, x^2y, x^8, xy, y, x, xy, \cdots$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 3.2.1: 2-nacci dizilenebilir bir grup devirlidir [30].

İspat: G, 2-nacci dizilenebilir bir grup olsun. Bu takdirde, G grubu ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. G, 2-gerenli bir grup ise e, G nin 2-nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi, G nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde bulunur ve bu yüzden, G nin bütün elemanları, sadece bir s elemanının terimleri ile takdim edilir(s nin üsleri ile). O halde, G grubu 1-gerenlidir ya da devirlidir.

Genel olarak $k \geq 3$ için k-nacci dizilenebilir gruplar abelyen değildir. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı, k-nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 3.2.3: G, 2-gerenli bir grup olsun. G nin birim elemanı bu grubun bir Fibonacci dizisinde görülürse, bu takdirde dizinin $x_i = e$ özelliğini sağlayan x_i elemanlarının indislerinin bir koleksiyonu aritmetik bir dizilişi sahip bir dizi ihtiva eder [30].

İspat: Teorem 3.2.2' den $G = \langle x, y \rangle$ abelyendir. Bu yüzden, dizinin $n.$ terimi $x^{u_{n-1}} y^{u_n}$ şeklindedir, Wall' ın [47] deki çalışmasında, $u_n \equiv 0 (\bmod m)$ olan terimlerin basit aritmetik dizilişte olan indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece, $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \cdots, y^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikisi de indisleri aritmetik dizilişte olan pozisyonda e yi ihtiva eder. Dolayısıyla e nin periyodu x ve y nin mertebelerine bağlıdır. $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots$ de e nin bu periyodu $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \cdots, y^{u_n}$ deki periyodlarının en küçük ortak katı olur. Böylece e nin $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliş ihtiva eden alt indisler olacaktır.

k-nacci dizilenebilir bir grubun bir homomorfik görüntüsü de k-nacci dizilenelebilirdir. k-nacci dizilenelebilir bir grubun, bir k-nacci dizilenelebilir grup tarafından genişlemesinin k-nacci dizilenelebilir olması gerekmez. k-nacci dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının k-nacci dizilenelebilir olması gerekmez bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e \text{ ve } yx = xy \rangle$$

abelyen grubunu ele alalım, bu grup $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ devirli gruplarının direk çarpımıdır. $\langle x \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$\begin{aligned} F_2(\langle x \rangle; e, x) = {} & e, x, x, x^2, x^3, x^5, x^8, x^4, x^3, x^7, x, x^8, \\ & e, x^8, x^8, x^7, x^6, x^2, x^8, x, e, x, x, \cdots \end{aligned}$$

ve $\langle y \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2(\langle y \rangle; e, y) = e, y, y, e, \cdots$$

şeklinde olup bu iki grup da 2-nacci dizilenelebilir olmasına rağmen bu grupların direkt çarpımı 2-nacci dizilenelebilir değildir [30].

3.3. Polyhedral Gruplarda *k*-nacci Dizileri

Teorem 3.3.1: $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$ şeklinde takdim edilen $G_2 = (2,2,2)$ polyhedral grubu için k -nacci dizisinin periyodu $k+1$ dir[29].

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumunu ele alalım. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = e \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2, |y| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, yxy = x, xyx = y, xy, \cdots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, xy, (xy)^2 = e, yxy = x, xyx = y, xy, e, \cdots.$$

Aynı şekilde bu dizinden de 3-nacci dizisinin periyodunun 4 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \cdots, x_{k-1} = (xy)^{2^{k-3}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = e, e, \cdots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xy)^{2^{k-2}} = e,$$
$$x_k = \prod_{i=1}^{k} x_i = x,$$
$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y,$$
$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy$$
$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e,$$
$$\vdots$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca, $x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e$ dir. $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $k+1$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \cdots$ olur. Böylece $P_k(G_2 : x, y) = k+1$ olduğu görülür.

Şimdi bu grubun üç gerenli durumu ele alalım. Bu grup üç gerenli olduğu durumda $\langle x, y : x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$ şeklinde takdim edilir ve burada $|x| = 2, |y| = 2, |z| = 2$ dir.

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz = x, zx = y, xy = z, \cdots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 3 tür.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz = e, yz = x, zx = y, z, e, x, y, z, \cdots.$$

Aynı şekilde bu diziden de 3-nacci dizisinin periyodunun 4 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = xyz, x_4 = (xyz)^2, \cdots, x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \le j \le k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \cdots, e$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
x_k &= \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e, \\
x_{k+1} &= \prod_{i=1}^{k} x_i = x, \\
x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = y, \\
x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z, \\
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = xyz = e, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \le j \le k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca, $x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = xyz = e$ dir. x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3} elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $(k+1)$. elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \cdots$ olur. Böylece $P_k(G_2; x, y, z) = k+1$ olduğu görülür.

2. Yol: G_2 grubu $Z_2 \oplus Z_2$ olup $P_k(Z_2; 0,1) = k+1$ dir. Grupların direkt çarpımının bir Fibonacci dizisinin periyodu her bir çarpandaki periyodların en küçük ortak katı olduğundan $P_k(G_2; x, y) = k+1$ dir. Ayrıca $z = xy$ dersek 3-gerenli durumda $k+1$ periyodla tekrar ettiği için dizinin periyodu 2-gerenli durumdaki periyod ile aynıdır [23].

Teorem 3.3.2: $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (n, 2, 2)$ polyhedral gurubu için k-nacci dizisinin periyodu $2k+2$ dir [29].

İspat: Bu gurubun üç gerenli durumunu ele alalım, burada $|x| = n, |y| = 2, |z| = 2$ dir.

Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, \cdots$$

bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 6 dır.

Eğer $k=3$ ise, dizinin periyodu 8 dir.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = xyz,\ x_4 = (xyz)^2,\ \cdots,\ x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}.$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = e, e, \cdots, e$$

yazılır. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (xyz)^{2^{k-2}} = e,$$
$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = yz = x^{n-1},$$
$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz = xz,$$
$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$
$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e,$$
$$\vdots$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$x_{2k+1}=\prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$
$$x_{2k+2}=\prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x,$$
$$x_{2k+3}=\prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y,$$
$$x_{2k+4}=\prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = z,$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerine bağlı çıktığı için dizi $(2k+2)$. elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \cdots$ olur.

Böylece $P_k(G_n; x, y, z) = 2k+2$ olduğu görülür [29].

İki gerenli durumda, $n>2$ için $(n,2,2)\cong(2,n,2)\cong D_n$ olup aynı zamanda bu guruplar benzer takdimlere sahip oldukları için x, y ve y, x başlangıç elemanlarına göre $(n,2,2),(2,n,2)$ gurupları ile D_n dihedral gurubundaki k -nacci dizilerinin periyodları aynı olup $2k+2$ dir.

Teorem 3.3.3: $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e\rangle$, $n>2$ şeklinde taktim edilen G_n $=(2,n,2)$ polyhedral grubu için k - nacci dizisinin periyodu $2k+2$ dir[29].

İspat: Bu gurubun üç gerenli durumunu ele alalım, burada $|x|=2, |y|=n, |z|=2$ dir.

Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, x, zx, xzx, x, y, z, \cdots.$$

bu dizide görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 6 dır.

Eğer $k=3$ ise, dizinin periyodu 8 dir.

Eğer $k\geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir,

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = xyz,\ x_4 = (xyz)^2, \cdots,\ x_{k-1} = (xyz)^{2^{k-4}}.$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \cdots, e$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \prod_{i=1}^{k} x_i = yz = x, \\
x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zx, \\
x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xzx, \\
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$\begin{aligned}
x_{2k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e, \\
x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x, \\
x_{2k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y, \\
x_{2k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = z,
\end{aligned}$$

olur. $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ elemanları x, y ve z nin değerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{k+1}, x_1 = x_{k+2}, x_2 = x_{k+3}, \cdots$ olur. Böylece $P_k\left(G_n; x, y, z\right)$ $= 2k+2$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.4: $\langle x,y,z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle,\ n>2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (2,2,n)$ polyhedral gurubundaki k -nacci dizilerinin periyodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur[29].

İlk olarak bu gurubun $\langle x,y,z : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle,\ n>2$ şeklinde takdim edilen 2-gerenli durumunu ele alalım. 2 -gerenli durumda hem x,y hemde y,x başlangıç elemanına göre bu guruptaki k -nacci dizilerinin periyodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n;x,y)P_2(G_n;y,x)=6.$

ii.
$$P_{3,4}(G_n;x,y)=P_{3,4}(G_n;y,x)=\begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & n\equiv 0 \mod 4 \\ n(k+1), & n\equiv 2 \mod 4 \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

iii. $k\geq 5$ olsun.

1. Eğer n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3,k-2]$ aralığında değil ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n;x,y)=P_k(G_n;y,x)=\begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & n\equiv 0 \mod 4 \\ n(k+1), & n\equiv 2 \mod 4 \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

2. Eğer α,n ‘nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \alpha\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & (n \equiv 0 \bmod 4) \\ \alpha(n(k+1)), & (n \equiv 2 \bmod 4) \\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ii'. Eğer $\beta, [3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \beta\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & (n \equiv 0 \bmod 4) \\ \beta(n(k+1)), & (n \equiv 2 \bmod 4) \\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şimdiki gurubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 3- gerenli durumunu ele alalım. x, y, z başlangıç elemanları için bu guruptaki k-nacci dizisinin periyodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n; x, y, z) = 6.$

ii. $$P_{3,4}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & (n \equiv 0 \bmod 4) \\ n(k+1), & (n \equiv 2 \bmod 4) \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

iii. $k \geq 5$ olsun.

1. Eğer n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} n\left(\dfrac{k+1}{2}\right), & (n\equiv 0 \mod 4)\\ n(k+1), & (n\equiv 2 \mod 4)\\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

2. Eğer α, n'nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlardan olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j\in\mathbb{N}$ için $\alpha.3^j \notin [3,k-2]$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} \alpha\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & (n\equiv 0 \mod 4)\\ \alpha(n(k+1)), & (n\equiv 2 \mod 4)\\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ii'. Eğer β, $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in N$ için $\beta=\alpha 3^j$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n;x,y,z)=\begin{cases} \beta\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right), & (n\equiv 0 \mod 4)\\ \beta(n(k+1)), & (n\equiv 2 \mod 4)\\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

z,x,y başlangıç elemanları için ise bu guruptaki k-nacci dizisinin periyodu $2k+2$ dir.

İspat: İlk olarak bu gurubun 2-gerenli durumu için ispatı yapalım. Grubun 2-gerenli takdimine göre, $|x|=2, |y|=2, |(x,y)|=n$ dir.

i. Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_3=xyz, x_4=y, x_5=yx, x_6=x, x_7=y, \cdots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2-naccidizisinin periyodu 6 dır.

ii. Eğer $k=3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$
\begin{aligned}
& x, y, xy, xyxy=(xy)^2, yxy(xy)^2=y(xy)^3, \\
& xy(xy)^2 y(xy)^3=(xy)^3 y(xy)^3=y, \\
& (xy)^2 y(xy)^3 y=yxyy=yx, \\
& y(xy)^3 yyx=y(xy)^3 x=(yx)^4, \\
& yyx(yx)^4=x(yx)^4=(xy)^4 x, \\
& yx(yx)^4(xy)^4 x=yxx=y, \\
& (yx)^4(xy)^4 xy=xy, \cdots.
\end{aligned}
$$

şimdi yukarıda 3-nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots,(xy)^a x, y, xy, \cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$
\begin{aligned}
& (xy)^a x, \\
& y, \\
& xy, \\
& (xy)^a xyxy=(xy)^a (xy)^2=(xy)^{a+2}, \\
& yxy(xy)^{a+2}=y(xy)^{a+3}, \\
& xy(xy)^{a+2} y(xy)^{a+3}=xyyxy=xxy=y, \\
& (xy)^{a+2} y(xy)^{a+3} y=yxyy=yx, \\
& y(xy)^{a+3} yyx=y(xy)^{a+3} x=(yx)^{a+4}, \\
& yyx(yx)^{a+4}=x(yx)^{a+4}=(xy)^{a+4} x, \\
& yx(yx)^{a+4}(xy)^{a+4} x=yxx=y, \\
& (yx)^{a+4}(xy)^{a+4} xy=xy, \cdots.
\end{aligned}
$$

Buradan 3-nacci dizisinin her sekiz terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece 3-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, \cdots,$$
$$x_8 = (xy)^4 x, x_9 = y, x_{10} = xy, \cdots,$$
$$x_{16} = (xy)^8 x, x_{17} = y, x_{18} = xy, \cdots,$$
$$x_{8i} = (xy)^{4i} x, x_{8i+1} = y, x_{8i+2} = xy, \cdots.$$

Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $v \in \mathbb{N}$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının belirlenmesi gerekmektedir. 3-nacci dizisinin periyodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ise $i = \frac{n}{4}$ olup, $8i = 2n$ olur ki, buradan $P_3 = (G_n = x, y)$ $= n\left(\frac{k+1}{2}\right) = 2n$ elde edilir.

Eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ise $8i = 4n$ olur ki, buradan $P_3 = (G_n = x, y) = n(k+1) = 4n$ elde edilir.

Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n \equiv 3 \pmod 4$ ise $i = n$ olup, $8i = 8n$ olur ki, buradan $P_3 = (G_n = x, y) = 2n(k+1) = 8n$ elde edilir.

$k = 4$ için de benzer ifadeler kullanılarak ispat edilir.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elamanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \cdots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}$$

olur.

Şimdi k -nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots, (xy)^a x, y, xy, \cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = (xy)^a\, x,$$
$$x_{2k+2+1} = \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = y,$$
$$x_{2k+2+2} = \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = xy,$$
$$x_{2k+2+3} = \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = (xy)^b,$$
$$x_{2k+2+4} = \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = (xy)^{u_1},$$
$$x_{2k+2+5} = \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = (xy)^{u_2},$$
$$\vdots$$
$$x_{2k+2+k} = \prod_{i=2k+2}^{3k+6} x_i = (xy)^{u_{k-3}},$$
$$\ddots$$

buradan k-nacci dizisinin $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k-nacci dizisini aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = (xy)^2, x_4 = (xy)^4, \cdots, x_k = (xy)^{2^{k-2}}, \cdots,$$
$$x_{i(2k+2)} = (xy)^a\, x, x_{i(2k+2)+1} = y, x_{i(2k+2)+2} = xy, x_{i(2k+2)+3} = (xy)^{2+4i},$$
$$x_{i(2k+2)+4} = (xy)^{u_1}, x_{i(2k+2)+5} = (xy)^{u_2}, \cdots, x_{i(2k+2)+k} = (xy)^{u_{k-3}}, \cdots.$$

Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $v \in N$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ve $n|a,\ n|u_1, \cdots, n|u_{k-3}$ ise $i = \frac{n}{4}$ dür. Böylece $i(2k+2)$ $= n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ elde edilir. (burada $n|a$, n böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1(\bmod 4)$ ve $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = n$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n ' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in N$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha \frac{n}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = \alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1(\bmod 4)$ veya $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \alpha n$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = (2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β , $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: $n \equiv 0(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \beta \frac{n}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2)$ $= \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \beta \frac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2)$ $= \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = \beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: $n \equiv 1(\bmod 4)$ veya $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-3}$ ise $i = \beta n$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir.

y, x başlangıç elemanları için de, ispat benzer ifadeler kullanılarak yapılır.

Şimdi bu gurubun 3-gerenli durumu için ispatı yapalım, burada $|x| = 2, |y| = 2, |z| = n$ dir.

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = z, x_3 = xz, x_4 = x, x_5 = xy, x_6 = y, x_7 = x, x_8 = z, \cdots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 6 dır.

ii. Eğer $k = 3$ ise, dizinin periyodu aşağıdaki gibidir,

$$LEN_{(x,y,z)}((2,2,n)) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \mod 4 \\ 4n, & n \equiv 2 \mod 4 \\ 8n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
&x, y, z, xyz = e, xyzxyz = e, yz = x, \\
&zx = y, xzx = xy, xzxxzx = xzzx = xz^2x, \\
&xzxxzxxz^2x = z^4x, zxxzxxz^2xxz^4x = z^8x, \\
&xzxxz^2xxz^4xz^8x = xz^7xz^8 = zx, \\
&xz^2xxz^4xz^8xzx = xz^6xz^8xzx = xz^2xzx = xxzxx = z, \\
&xz^4xz^8xzxz = xxz^4xzxz = z^4xx = z^4, z^8xzxzz^4 = z^8xxz^4 = z^{12}, \\
&zxzz^4z^{12} = xz^4z^{12} = xz^{16}, \cdots.
\end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki 4-nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots z^a x, zx, z, \cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$
\begin{aligned}
&z^a x,\\
&zx = y,\\
&z,\\
&z^b,\\
&z^a xzxzz^b = z^a x^2 z^b = z^a z^b = za + b,\\
&zxzz^b z^{a+b} = xz^{b+a+b} = xz^{2b+a},\\
&zz^b z^{a+b} xz^{2b+a} = zx = y,\\
&z^b z^{a+b} xz^{2b+a} zx = xzx,\\
&z^{a+b} xz^{2b+a} zxxz = xz^{b+2} x,\\
&xz^{2b+a} zxxzxxz^{b+2} x = xz^{3b+a+4} x,\\
&zxxzxxz^{b+2} xxz^{3b+a+4} x = z^{4b+a+8} x,\\
&xzxxz^{b+2} xxz^{3b+a+4} xz^{4b+a+8} x = xz^{4b+a+7} xz^{4b+a+8} x = zx = y,\\
&xz^{b+2} xxz^{3b+a+4} xz^{4b+a+8} xzx = xz^{4b+a+6} xz^{4b+a+8} xzx = x^2 z^2 xzx = zx^2 = z, \cdots.
\end{aligned}
$$

buradan 4-nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \cdots,\\
&x_{10} = z^8 x, x_{11} = zx = y, x_{12} = z, x_{13} = z^4, \cdots,\\
&x_{20} = z^{32} x, x_{21} = zx = y, x_{22} = z, x_{23} = z^8, \cdots,\\
&x_{10i} = z^{8i^2} x, x_{10i+1} = zx = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = z^{4i}, \cdots.
\end{aligned}
$$

Buradan dizinin periyodunu belirlemek için $v_1, v_2 \in N$ için $8i^2 = nv_1$ ve $4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4-nacci dizisinin periyodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ise $i = \dfrac{n}{4}$ olup, $10i = \dfrac{5}{2}n$ olur ki, buradan $P_4 = (G_n = x, y, z)$ $= n\left(\dfrac{k+1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}n$ elde edilir.

Eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup, $10i = 5n$ olur ki, buradan $P_4 = (G_n = x, y, z)$ $= n(k+1) = 5n$ elde edilir.

Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n \equiv 3 \pmod 4$ ise $i = n$ olup, $10i = 10n$ olur ki, buradan $P_4 = (G_n = x, y, z) = 2n(k+1) = 10n$ elde edilir.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizisinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = z^{2n}, \cdots, x_k = z^{2^{k-3}n}$$

burada gerekli indirgemeler yapılacak olursa,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, e, \cdots, e$$

olduğu görülür, burada $3 \leq j \leq k$ için $x_j = e$ dir.

Şimdi k-nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots z^a x, zx, z, \cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^a x, \\
x_{2k+2+1} &= \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = zx, \\
x_{2k+2+2} &= \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z, \\
x_{2k+2+3} &= \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^b, \\
x_{2k+2+4} &= \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^c, \\
x_{2k+2+5} &= \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2+k} &= \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

buradan k-nacci dizisinin her $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarlarından ibaret olduğu görülür. Böylece k-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \cdots, x_k = x^{2^{k-3}n} = e, \cdots,$$
$$x_{i(2k+2)} = z^a x, x_{i(2k+2)+1} = zx, x, x_{i(2k+2)+2} = z, x_{i(2k+2)+3} = z^{4i}, x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i},$$
$$x_{i(2k+2)+5} = z^{u_1}, \cdots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \cdots.$$

Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ için $4i = nv_1$ ve $8i^2 + 4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değilse, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y, z) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ elde edilir. (burada $n|a$, n böler a anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ dir böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y, z) = n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n \equiv 3 \pmod 4$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = n$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y, z) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n' nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek sayıyı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise üç alt durum ortay çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \alpha\frac{n}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k = (G_n = x, y, z) = \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\alpha\dfrac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2)=\alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n=x,y,z)=\alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1(\bmod 4)$veya $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\alpha n$ dir. Böylece $i(2k+2)=\alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n=x,y,z)=\alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer $\beta,[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in\mathbb{N}$ için $\beta=\alpha.3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar.

1. **Durum:** $n \equiv 0(\bmod 4)$ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\beta\dfrac{n}{4}$ dir. Böylece $i(2k+2)$

$=\beta\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\beta\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. **Durum:** $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\beta\dfrac{n}{2}$ dir. Böylece $i(2k+2)$

$=\beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. **Durum:** $n \equiv 1(\bmod 4)$ veya $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|a,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\beta n$ dir, böylece

$i(2k+2)=\beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\beta(2n(k+1))$ elde edilir.

2. **Yol:** G_n yi $2n$ elemana sahip D_n dihedral grubu olarak düşünelim. D_n, n elemanlı düzgün çokgeninin(polygonun) simetrilerinden oluşup grup,

$$a=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n)\end{pmatrix} \text{ ve } b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

gerenleri ile takdim edilebilir. Bundan dolayı 3-gerenli durumda grubun geren elemanları matrisler yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edebilir,

$$z=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n)\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ve

$$x=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n)\end{pmatrix}.$$

i. Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0=y, x_1=x, x_2=z, x_3=\begin{pmatrix}\cos(4\pi/n) & -\sin(4\pi/n)\\ -\sin(4\pi/n) & -\cos(4\pi/n)\end{pmatrix}=xz, x_4=x,$$
$$x_5=\begin{pmatrix}\cos(4\pi/n) & \sin(4\pi/n)\\ -\sin(4\pi/n) & \cos(4\pi/n)\end{pmatrix}=xy, x_6=y, x_7=x, x_8=z,\cdots.$$

Bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dizisinin periyodu 6 dır.

ii. Eğer $k=4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x, y, z, xyz=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=e,\left(xyz\right)^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=e,\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n)\end{pmatrix}=x,$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=y,\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n)\\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n)\end{pmatrix}=xy,\begin{pmatrix}\cos(4\pi/n) & \sin(4\pi/n)\\ -\sin(4\pi/n) & \cos(4\pi/n)\end{pmatrix}=z^{-2},$$
$$\begin{pmatrix}\cos(6\pi/n) & \sin(6\pi/n)\\ \sin(6\pi/n) & -\cos(6\pi/n)\end{pmatrix}=z^4x,\begin{pmatrix}\cos(14\pi/n) & \sin(14\pi/n)\\ \sin(14\pi/n) & -\cos(14\pi/n)\end{pmatrix}=z^8x,$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=y,\begin{pmatrix}\cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n)\\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n)\end{pmatrix}=z,\begin{pmatrix}\cos(8\pi/n) & -\sin(8\pi/n)\\ \sin(8\pi/n) & \cos(8\pi/n)\end{pmatrix}=z^4,$$
$$\begin{pmatrix}\cos(24\pi/n) & -\sin(24\pi/n)\\ \sin(24\pi/n) & \cos(24\pi/n)\end{pmatrix}=z^{12},\begin{pmatrix}\cos(34\pi/n) & \sin(34\pi/n)\\ -\sin(34\pi/n) & \cos(34\pi/n)\end{pmatrix}=xz^{16},\cdots.$$

Şimdi yukarıdaki 4-nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots, z^{\tau}x, zx, z,\cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z^{\tau}x, zx=y, z, z^{\varepsilon}, z^{\tau+\varepsilon}, xz^{2\varepsilon+\tau}, y, xzx=xy, xz^{\varepsilon+2}x=z^{-(\varepsilon+2)}, xz^{3\varepsilon+\tau+4}x=z^{-(3\varepsilon+\tau+4)}, z^{4\varepsilon+\tau+8}x, zx=y, z,\cdots.$$

Buradan 4-nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece 4-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
&x_0=x, x_1=y, x_2=z, x_3=e,\cdots,\\
&x_{10}=z^8x, x_{11}=zx=y, x_{12}=z, x_{13}=z^4,\cdots,\\
&x_{20}=z^{32}x, x_{21}=zx=y, x_{22}=z, x_{23}=z^8,\cdots,\\
&x_{10i}=z^{8i^2}x, x_{10i+1}=zx=y, x_{10i+2}=z, x_{10i+3}=z^{4i},\cdots.
\end{aligned}$$

Burada,

$$z^{8i^2}=\begin{pmatrix}\cos 8i^2(2\pi/n) & -\sin 8i^2(2\pi/n)\\ \sin 8i^2(2\pi/n) & \cos 8i^2(2\pi/n)\end{pmatrix}$$

ve

$z^{4i}=\begin{pmatrix}\cos 4i(2\pi/n) & -\sin 4i(2\pi/n)\\ \sin 4i(2\pi/n) & \cos 4i(2\pi/n)\end{pmatrix}$ olup, dizinin periyodunu belirlemek için, $v_1, v_2\in\mathbb{N}$ için $8i^2=nv_1$ ve $4i=nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir. 4-nacci dizisinin periyodu için i doğal sayısının durumuna göre aşağıdaki üç durum söz konusudur:

Eğer $n\equiv 0(\bmod 4)$ ise $i=\dfrac{n}{4}$ için, $z^{8i^2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ olur. Böylece $10i=\dfrac{5}{2}n$ olduğu için $P_4=(G_n;x,y,z)=n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}n$ elde edilir.

Eğer $n\equiv 2(\bmod 4)$ ise $i=\dfrac{n}{2}$ için, $z^{8i^2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ olur. Böylece $10i=5n$ olduğu için $P_4=(G_n;x,y,z)=n(k+1)=5n$ elde edilir.

Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ ve $n \equiv 3 \pmod 4$ ise $i = n$ için, $z^{8i^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Böylece $10i = 10n$ olduğu için $P_4 = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 10n$ elde edilir.

$k = 3$ için de benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ tane elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = z^n,\ x_4 = z^{2n},\ \cdots,\ x_k = z^{2^{k-3}n}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa,

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = e, e, \cdots, e$$

olduğu görülür, burada $3 \leq j \leq k$ için $x_j = e$ dir.

Şimdi k-nacci dizisinin belli bir kesiti $\cdots, z^{\tau}x, zx, z, \cdots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir,

$$\begin{aligned}
x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^{\tau}x, \\
x_{2k+2+1} &= \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = zx = y, \\
x_{2k+2+2} &= \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z, \\
x_{2k+2+3} &= \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^{\varepsilon}, \\
x_{2k+2+4} &= \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^{c}, \\
x_{2k+2+5} &= \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2+k} &= \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}}, \\
&\ddots
\end{aligned}$$

Burada k-nacci dizinin her $2k+2$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğu görülür. Böylece k-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = e, \cdots, x_k = z^{2^{k-3}n} = e, \cdots,\\&x_{i(2k+2)} = z^{\tau}x, x_{i(2k+2)+1} = zx, x_{i(2k+2)+2} = z, x_{i(2k+2)+3} = z^{4i}, x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i},\\&x_{i(2k+2)+5} = z^{u_1}, \cdots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \cdots.\end{aligned}$$

Burada dizinin periyodunu belirmek için, $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ için $4i = nv_1$ ve $8i^2 + 4i = nv_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil

ise, üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{4}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

ve $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+1) = n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) =$

$n\left(\frac{k+1}{2}\right)$ elde edilir.(Burada $n|\tau$, n böler τ anlamına gelir.)

2. Durum: Eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \frac{n}{2}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

ve $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) =$

$n(k+1)$ elde edilir.

3. Durum: Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n \equiv 3 \pmod 4$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = n$

için $z^{4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için

$P_k = (G_n; x, y, z) = 2n(k+1)$ elde edilir.

2. Eğer α, n' nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j\in\mathbb{N}$ için $\alpha.3^j \notin [3,k-2]$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer $n\equiv 0(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\alpha\dfrac{n}{4}$ için $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2)=\alpha\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\alpha\left(n\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer Eğer $n\equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\alpha\dfrac{n}{2}$ için $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2)=\alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\alpha(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: Eğer Eğer $n\equiv 1(\bmod 4)$ veya $n\equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\alpha n$ için $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2)=\alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k=(G_n;x,y,z)=\alpha(2n(k+1))$ elde edilir.

ii'. Eğer β, $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in\mathbb{N}$ için $\beta=\alpha.3^j$ ise üç alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: $n\equiv 0(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i=\beta\dfrac{n}{4}$ için $z^{4i}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z)$ $= \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: $n \equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \beta\frac{n}{4}$ için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z)$ $= \beta(n(k+1))$ elde edilir.

3. Durum: $n \equiv 1(\bmod 4)$ veya $n \equiv 3(\bmod 4)$ ve $n|\tau,\ n|u_1,\ \cdots,\ n|u_{k-4}$ ise $i = \beta n$

için $z^{4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $z^{8i^2+4i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k = (G_n; x, y, z) = \beta(2n(k+1))$ elde edilir [29].

2-gerenli durum içinde benzer ifadeler kullanılarak ispat yapılır.

z, x, y başlangıç elemanları için ise bu gruptaki k -nacci dizisinin periyodunun $P_k = (G_n; z, x, y) = 2k+2$ olduğunu ispatlayalım [14].

Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, xy, yxy, y, yx = z, x, y, \cdots.$$

bu diziden görüldüğü gibi 2-nacci dişinin periyodu 6 dır.

Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$z, x, y, zxy = e, xy, yxy, y, e, yx = z, x, y, \cdots.$$

aynı şekilde bu diziden de 3-nacci dizisinin periyodunun 8 olduğu görülür.

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k tane elemanı aşağıdaki gibidir,

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = zxy, x_4 = (zxy)^2, \cdots, x_{k-1} = (zxy)^{2^{k-4}}$$

burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = e, e, \cdots, e$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
x_k &= \prod_{i=0}^{k-1} x_i = (zxy)^{2^{k-3}} = e, \\
x_{k+1} &= \prod_{i=1}^{k} x_i = xy, \\
x_{k+2} &= \prod_{i=2}^{k+1} x_i = yxy, \\
x_{k+3} &= \prod_{i=3}^{k+2} x_i = y, \\
x_{k+4} &= \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e,
\end{aligned}$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca,

$$\begin{aligned}
x_{2k+1} &= \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e, \\
x_{2k+2} &= \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = z, \\
x_{2k+3} &= \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = x, \\
x_{2k+4} &= \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = y,
\end{aligned}$$

olur. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları z, x ve y nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ inci elemanla başa döner yani, $x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3}, x_2 = x_{2k+4}, \cdots$ olur. Böylece $P_k = (G_n; z, x, y) = 2k+2$ olduğu görülür.

4. BULGULAR

4.1. *m* Modülüne Fibonacci *p*-Dizileri

[13] deki çalışmada, Fibonacci p-dizisi m modülüne göre indirgenerek

$$\left\{F_p^{(m)}(n)\right\}=\left\{F_p^{(m)}(0),F_p^{(m)}(1),F_p^{(m)}(2),\cdots,F_p^{(m)}(p),F_p^{(m)}(p+1),\cdots F_p^{(m)}(i),\cdots\right\}$$

şeklindeki dizi elde edilmiştir ki bu dizi Fibonacci p-dizisi ile aynı indirgeme bağıntısına sahiptir. Burada $F_p^{(m)}(i)\equiv F_p(i)(\operatorname{mod} m)$ dir.

Teorem 4.1.1: $\left\{F_p^{(m)}(n)\right\}$ dizisi basit periyodiktir [13].

İspat: $S=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_{p+1}\right):\ 0\leq x_i\leq m-1\right\}$ olsun. $|S|=m^{p+1}$ olduğundan herhangi bir $j\geq 0$ için $F_p^{(m)}(i+p)\equiv F_p^{(m)}(j+p)$ ve $F_p^{(m)}(i)\equiv F_p^{(m)}(J)$ olacak şekilde $i\geq j$ tamsayı vardır. Fibonacci p-dizisinin tanımdan $F_p(n-p-1)=F_p(n)-F_p(n-1)$ eşitliği elde edilebilir.

Bu durumda;

$$\begin{aligned}&F_p^{(m)}(i-1)\equiv F_p^{(n)}(j-1),F_p^{(m)}(i-2)\equiv F_p^{(n)}(j-2),\cdots,\\&F_p^{(m)}(i-j+1)\equiv F_p^{(n)}(1),F_p^{(m)}(i-j+1)\equiv F_p^{(m)}(0)\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülmektedir ki bu da bizi $\left\{F_p^{(m)}(n)\right\}$ dizisin basit periyodik bir dizi olduğu sonucuna ulaştırmaktadır.

Deveci ve Avcı bu çalışmada, $\left\{F_p^{(m)}(n)\right\}$ dizinin en küçük periyodunu $l_p(m)$ ile göstermişlerdir.

a_{ij} ’ ler tam sayı olmak üzere bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi verilmiş olsun. A nın elemanlarının m modülüne göre indirgenmesi $A(\bmod m)$ ile gösterilir. Yani $A(\bmod m)=\left(a_{ij}\left(\bmod m\right)\right)$ dir.

k bir asal sayı olmak üzere, $\det Q_p=(-1)^p$ olduğundan

$$\left\langle Q_p\right\rangle_{k^u}=\left\{Q_p^i\left(\bmod k^u\right):i\geq 0\right\}$$

kümesi bir devirli grup olup $\left|\left\langle Q_p\right\rangle_{k^u}\right|$ ile bu devirli grubun mertebesini gösterirsek (1.5) eşitliğinden $l_p\left(k^u\right)=\left|\left\langle Q_p\right\rangle_{k^u}\right|$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Örnek 4.1.1:

$\left\{F_2^{(5)}(n)\right\}=\{0,1,1,1,2,3,4,1,4,3,4,3,1,0,3,4,4,2,1,0,2,3,3,0,3,1,1,4,0,1,0,0,1,1,\cdots\}$ olup bu dizi 31’ terimde bir tekrar ettiğinden $l_p(5)=31$ dir [13].

Teorem 4.1.2: k bir asal sayı olmak üzere t, $l_p(k)=l_p\left(k^t\right)$ olacak şekilde en büyük tam sayı olsun. Bu durumda her $\alpha\geq t$ için $l_p\left(k^\alpha\right)=k^{\alpha-t}l_p(k)$ olur [13].

İspat: q bir pozitif tam sayı olsun.

$$Q_p^{l_p\left(k^{q+1}\right)}\equiv I\left(\bmod k^{q+1}\right)$$

olduğundan,

$$Q_p^{l_p\left(k^{q+1}\right)}\equiv I\left(\bmod k^{q}\right)$$

olup buradan $l_p\left(k^q\right)$ ’ nın $l_p\left(k^{q+1}\right)$ ’ yı böldüğü görülmektedir.

Diğer taftan

$$Q_p^{l_p(k^q)} = I + \left(a_{ij}^{(q)} k^q\right)$$

olarak yazılabildiği için,

$$Q_p^{l(k^q)k} = \left(I + \left(a_{ij}^{(q)} k^q\right)\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(a_{ij}^{(q)} k^q\right)^i \equiv I \left(\bmod k^{q+1}\right),$$

denkliği elde edilir ki buda bize $l_p\left(k^{q+1}\right)$ in $l\left(k^q\right)\cdot k$ ’ yı böldüğünü gösterir. Böylece ya $l_p\left(k^{q+1}\right) = l_p\left(k^q\right)$ yada $l_p\left(k^{q+1}\right) = l_p\left(k^q\right)\cdot k$ olmalıdır. $l_p\left(k^{q+1}\right) = l_p\left(k^q\right)\cdot k$ olması ancak $Q_p^{l(k^q)}$ matrisinin, k ile bölünmeyen bir $a_{ij}^{(q)}$ elamanına sahip olması ile mümkün olmaktadır. Bu da demektir ki $l_p\left(k^t\right) \neq l_p\left(k^{t+1}\right)$ olduğunda, $Q_p^{l(k^q)}$ matrisi k ile bölünmeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ elemanına sahiptir. Böylece $l_p\left(k^{t+1}\right) \neq l_p\left(k^{t+2}\right)$ sonucuna ulaşılıp, t üzerinde tüme varım metodu uygulanarak ispat tamamlanmaktadır.

Teorem 4.1.3: k_i ’ ler farklı asallar olmak üzere eğer $m = \prod_{i=1}^{t} k_i^{e_i}, (t \geq 1)$ ise $l_p(m) = \text{okek}\left[l_p\left(k_i^{e_i}\right)\right]$ dır [13].

İspat: $l_p\left(k_i^{e_i}\right)$, $\left\{F_p^{\left(k_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan $\left\{F_p^{\left(k_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisi, $\forall u \in N$ için $u.l_p\left(k_i^{e_i}\right)$ uzunluğundaki bloklarla tekrar eder. Ayrıca $l(m), \left\{F_p^{(m)}(n)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan her i . tamsayısı için $\left\{F_p^{\left(k_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisi $l(m)$ tane terimde bir tekrar etmelidir. Böylece her i tamsayı için $l_p(m)$ sayısının $u.l_p\left(k_i^{e_i}\right)$ formunda olduğu görülmektedir ki bu da bizi $l_p(m) = \text{okek}\left[l_p\left(k_i^{e_i}\right)\right]$ sonucuna ulaştırır.

Tanım 4.1.1: $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_p = a_p$ olmak üzere $n > p$ için $x_n = x_{n-1} + x_{n-p+1}$ indirgeme bağıntısıyla tanımlanan tam sayı dizisinin her bir elemanının m modülüne göre indirgenmesi sonucu elde edilen periyot $l_p^{(a_0,a_1,\cdots,a_p)}(m)$ ile gösterilsin [13].

Teorem 4.1.4: $\text{obeb}(a_1, a_2, \cdots, a_p, m) = 1$ ve $\text{obeb}(b_1, b_2, \cdots, b_p, m) = 1$ olacak şekilde $b_1, b_2, \cdots, b_p, a_1, a_2, \cdots, a_p, m \in \mathbb{Z}$ ise

$$l_p^{(a_0,a_1,\cdots,a_p)}(m) = l_p^{(b_0,b_1,\cdots,b_p)}(m)$$

olur [13].

İspat: $X_n = \begin{bmatrix} x_{n+p} \\ x_{n+p-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$ olsun (1.2) eşitsizliğinden $X_n = (Q_p)^n . X_0$ olduğu açıkça görülmektedir. Tam sayılarda m modülüne göre denklik sınıflarının sonlu bir kümesi formunda olduğundan

$$(Q_p)^r \equiv \begin{cases} (Q_p)^{n+r} \ (\text{mod}\, m), & p \text{ çift ise} \\ (Q_p)^{n+r+1} (\text{mod}\, m), & p \text{ ve } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olacak şekilde n ve r tam sayıları mevcuttur.

$$\det Q_p = \begin{cases} 1, & p \text{ çift ise} \\ -1, & p \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğundan ya $(Q_p)^n$ yada $(Q_p)^{n+1}$, $(p+1)x(p+1)$ boyutlu birim matris olmalıdır. Böylece ya,

$$X_n = X_0 (\text{mod}\, m)$$

ya da

$$X_{n+1} = X_0 \pmod m$$

olur ki bu da ispatımızı tamamlar.

4.2. Gruplarda Fibonacci *p*-Dizisi

Tanım 4.2.1: $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in X$ geren p -lisi için bir G grubunun $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)$ $= \{a_i\}$ Fibonacci p -orbiti

$$a_0 = x_0, a_1 = x_1, \cdots, a_{p-1} = x_{p-1}, a_p = x_{p-1}, a_{n+p} = a_{n-1}.a_{n+p-1}, \; n \geq 1.$$

şeklinde tanımlanır [13].

$C = \langle x \rangle$ devirli grubundaki klasik Fibonacci p -dizisi $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(C)$ şeklinde gösterilmektedir.

Teorem 4.2.1: Bir sonlu grubun Fibonacci p orbiti basit periyodiktir [13].

İspat: G grubunun mertebesi n olsun. Bu durumda n^p tane G ' nin elemanlarının farklı p-tiplisi var olduğundan bu p-tiplilerin en az bir tanesi G 'nin Fibonacci p -orbitinde iki defa karşımıza çıkmaktadır. Bu da bize Fibonacci p-orbitinin periyodik olduğunu göstermektedir. Bu periyodiklikten dolayı $u > v$ ve

$$a_{u+1} = a_{v+1}, a_{u+2} = a_{v+2}, \cdots, a_{u+p+1} = a_{v+p+1}$$

olacak şekilde dolayı u ve v doğal sayılarının mevcut olduğu açıktır. Ayrıca Fibonacci p-orbitinin tanımdan

$$a_u = (a_{u+p+1}).(a_{u+p})^{-1} \text{ ve } a_v = (a_{v+p+1}).(a_{v+p})^{-1}$$

olduğu bilinmektedir. Böylece $a_u = a_v$ elde edilir ki bu şekilde işlemlere devam ederek

$$a_{u-v} = a_{v-v} = a_0, a_{u-v+1} = a_{v-v+1} = a_1, \cdots, a_{u-v+p} = a_{v-v+p} = a_p$$

olduğu görülmektedir. Buda bizi Fibonacci p-orbitinin basit periyodik olduğu sonucuna götürmektedir.

$F_p^{(x_0,x_1,\cdots,x_{p-1})}(G)$ Fibonacci p-orbitinin periyodu $LF_p^{(x_0,x_1,\cdots,x_{p-1})}(G)$ ile gösterilmektedir ve bu ifade $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$ geren p-tiplisine göre Fibonacci p-uzunluğu diye adlandırılmaktadır.

Tanım 4.2.2: G sonlu bir grup olsun. G nin her elemanının içinde bulunduğu G nin elemanlarının bir Fibonacci p-dizisi mevcut ise G ye Fibonacci p-dizilenebilirdir denir [13].

Önemle belirtmek gerekir ki, Fibonacci p-dizilenebilir gruplarının direkt çarpımlarının Fibonacci p-dizilenebilir olması gerekmez. Bu duruma örnek olarak,

$$G = \langle x, y : x^3 = y^3 = e,\ xy = yx \rangle$$

şeklinde taktim edilen abelyen grubu düşünelim. $G = C_3 \times C_3$ olduğu açıktır.

G ' nin Fibonacci 2-orbitleri

$$F_2^{(x,y)}(G) = x, y, y, xy, xy^2, x, x^2y, e, x, y, y, \cdots,$$
$$F_2^{(y,x)}(G) = y, x, x, xy, x^2y, y, xy^2, e, y, x, x, \cdots$$

şeklinde olup, x^2 elemanı her iki dizide de olmadığı için, G grubu Fibonacci 2-dizilenebilir değildir. Fakat $F_2^{(x,x)}(\langle x \rangle)$ dizisi,

$$x, x, x, x^2, e, x, e, e, x, x, x, \cdots,$$

olduğundan $C = \langle x \rangle$ 3. mertebeden devirli grubu Fibonacci 2-dizilenebilir. Benzer şekilde $F_2^{(y,y)}(\langle y \rangle)$ dizisi,

$$y, y, y, y^2, e, y, e, e, y, y, y, \cdots,$$

olup $C = \langle y \rangle$ 3. mertebeden devirli grubunun da Fibonacci 2-dizilenebilir olduğu görülmektedir.

Konsepti daha ayrıntılı ele alma adına G nin $AutG$ grubunun $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)$ Fibonacci p-orbiti üzerindeki etkisi üzerinde duracağız.

$AutG$, $\theta : G \to G$ olacak şekilde bütün izomorfizmlerin kümesi olduğundan $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in X$ olduğunda $(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta) \in X$ olduğu açıktır.

$A \subseteq G$ ve $\theta \in AutG$ için A nın θ altındaki görüntüsü

$$A\theta = \{a\theta : a \in A\}$$

şeklindedir.

Lemma 4.2.1: $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in X$ ve $\theta \in AutG$ olsun. Bu durumda

$$F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)\theta = F_p^{(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta)}(G)$$

dir[13].

İspat: $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)\theta = \{a_i\}$ olsun. $\{a_i\}\theta = \{a_i\theta\}$ ve

$$a_{i+p}\theta = (a_i a_{i+p-1})\theta = a_i\theta a_{i+p-1}\theta$$

olduğundan sonuç açık olarak görülmektedir.

Varsayalım ki $AutG$ ' nin ω elemanı $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)$ orbitini kendi üzerine götürsün. Bu durumda $\theta \in AutG$ için $|AutG| / \omega$ tane farklı $F_p^{(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta)}(G)$ Fibonacci p- orbiti mevcuttur.

Tanım 4.3.3: $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in X$ p -tiplisi için m esas periyodlu $\overline{F}_p^{(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta)}(G)$ esas Fibonacci p-orbiti , verilen $b_0 = x_0, b_1 = x_1, \cdots, b_{p-1} = x_{p-1},\ b_p = x_{p-1}$ başlangıç değerleri ile $n \geq 1$ için

$$b_{n+p} = b_{n-1} b_{n+p-1}$$

şeklinde tanımlanan $b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$ grup elemanlarının bir dizisidir. Buradan m , herhangi bir $\theta \in \mathrm{Aut}G$ için

$$b_0 = b_m\theta,\ b_1 = b_{m+1}\theta,\ \cdots,\ b_{p-1} = b_{m+p-1}\theta,\ b_p = b_{m+p}\theta$$

olacak şekilde en küçük doğal sayıdır [13].

Teorem 4.2.2: G sonlu bir grup ve $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}) \in X$ olsun. Eğer $LF_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G) = n$ ve $L\overline{F}_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G) = m$ ise m , n yi böler ve Aut$G$ kümesinin, $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)$ Fibonacci p -orbitini kendi üzerine götüren m/n tane elemanı vardır [10].

İspat: $\theta \in AutG$ otomofizminin mertebesi λ olsun Bu durumda

$$F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G) = \overline{F}_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G) \cup \overline{F}_p^{(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta)} \cup \overline{F}_p^{(x_0\theta^2, x_1\theta^2, \cdots, x_{p-1}\theta^2)} \cup \cdots$$

ve

$$L\overline{F}_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G) = L\overline{F}_p^{(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{p-1}\theta)}(G)$$

olduğundan $n = m\lambda$ dir. Bu da bizi $I, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{\lambda-1}$ dönüşümlerinin $F_p^{(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})}(G)$ dizisini kendi üzerine götürdüğü sonucuna ulaştırır ki bu dönüşümlerin sayısı $\lambda = m/n$ dır.

4.3.Uygulamalar

Bu bölümde, $(2,2,2)$ ve $n \geq 3$ için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$, $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci p-orbitleri ve esas Fibonacci p-orbitleri üzerinde durulacak ve bu dizilerin periyodları belirlenecektir.

Teorem 4.3.1:

i. $LF_2^{(x,y)}((2,2,2)) = L\overline{F}_2^{(x,y)}((2,2,2)) = 7$

ii. $LF_3^{(x,y,z)}((2,2,2)) = L\overline{F}_3^{(x,y,z)}((2,2,2)) = 15$ [13].

İspat: i. $F_2^{(x,y)}((2,2,2))$ orbiti

$$x, y, y, xy, x, xy, e, x, y, y, \cdots$$

şeklindedir. Bu dizinin terimleri arasında ancak $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}((2,2,2)) = L\overline{F}_2^{(x,y)}((2,2,2)) = 7$ dır.

ii. $F_3^{(x,y,z)}((2,2,2))$ orbiti

$$x, y, z, z, y, e, z, e, y, y, x, x, z, z, e, x, y, z, z, \cdots$$

şeklindedir. Bu dizinin terimleri arasında ancak $x\theta = x$, $y\theta = y$ ve $z\theta = z$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}((2,2,2)) = L\overline{F}_3^{(x,y,z)}((2,2,2)) = 15$ dir.

Teorem 4.3.2: $n \geq 3$ için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$, $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının Fibonacci p-orbitlerinin ve esas Fibonacci p-orbitlerinin periyodlarının uzunlukları aşağıdaki gibidir[13]:

i. 2-gerenli durumda Fibonacci 2-uzunlukları ve esas Fibonacci 2-uzunlukları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i'. $LF_2^{(y,x)}\left(\left(n,2,2\right)\right)=7$ ve $L\overline{F}_2^{(y,x)}\left(\left(n,2,2\right)\right)=14$.

ii'. $$LF_2^{(x,y)}\left(\left(2,n,2\right)\right)=LF_2^{(x,y)}\left(\left(2,2,n\right)\right)=\begin{cases}\dfrac{7n}{2}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ 7n, & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 14n, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$L\overline{F}_2^{(x,y)}\left(\left(2,n,2\right)\right)=L\overline{F}_2^{(x,y)}\left(\left(2,2,n\right)\right)=\begin{cases}\dfrac{7n}{2}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{7n}{2}, & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 7n, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ii. 3-gerenli durumda Fibonacci 3-uzunlukları ve esas Fibonacci 3-uzunlukları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

$$LF_3^{(x,y,z)}\left(\left(G_n\right)\right)==\begin{cases}\dfrac{15n}{2}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ 15n, & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 30n, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ve

$$L\overline{F}_3^{(x,y,z)}\left(\left(G_n\right)\right)==\begin{cases}\dfrac{15n}{2}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\ \dfrac{15n}{2}, & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 15n, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

Burada $G_n,\ (n\geq 3)$, 3-gerenli durumda $(n,2,2),\ (2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının herhangi bir tanesidir.

İspat: i.i'. $F_2^{(x,y)}\left((n,2,2)\right)$ orbiti

$$x, y, y, xy, x^{-1}, xy, e, x^{-1}, x^2y, x^2y, xy, x, xy, e, x, y, y, \cdots.$$

şeklindedir. Bu dizinin terimleri arasında $x\theta = x^{-1}$ ve $y\theta = x^2y$ olacak şekilde xy elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_2^{(y,x)}\left((n,2,2)\right)=7$ ve $\overline{LF}_2^{(y,x)}\left((n,2,2)\right)=14$ olarak elde edilir.

i.ii'. İlk olarak $(2,n,2)$ polyhedral grubunu ele alalım. $F_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right)$ orbiti

$$x, y, y, xy, x, yx, y^{-2}, y^2x, y^{-1}, y^{-3}, y^5x, y^4x, yx, x, y, y^5,$$
$$xy^5, xy^4, yx, y^{-6}, y^2x, y^{-1}, y^{-7}, \cdots.$$

şeklinde olup $i\geq 0$ için, dizinin terimleri aşağıdaki formda yazılabilir,

$$a_0 = x, a_1 = x_1, a_2 = x_2, \cdots,$$
$$a_{7+14i} = y^2x, a_{8+14i} = y^{-1}, a_{9+14i} = y^{-(3+4i)}, \cdots,$$
$$a_{14+14i} = x, a_{15+14i} = y, a_{16+14i} = y^{5+4i}, \cdots.$$

Bu son ifadeden kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunun elde edilmesi için $u_1\in\mathbb{N}$ için $4i = nu_1$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i=\dfrac{n}{4}$ olup dizinin terimleri arasında ancak $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right)=14.\dfrac{n}{4}=\dfrac{7n}{2}$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right)=\dfrac{7n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 2(\bmod 4)$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y^{-1}$ olacak şekilde x elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right) = 14.\frac{n}{2} = 7n$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right) = \frac{7n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 1(\bmod 4)$ ya da ise $n \equiv 3(\bmod 4)$ ise $i = n$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y^{-1}$ olacak şekilde x elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right) = 14n$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,n,2)\right) = 7n$ olur.

Şimdi de $(2,2,n)$ polyhedral grubunu ele alalım. $i \geq 0$ için $F_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right)$ orbiti

$$
\begin{aligned}
&a_0 = x, a_1 = y, a_2 = y, \cdots, \\
&a_{7+14i} = y(xy)^{4i+3}, a_{8+14i} = y(xy)^{4i+2}, a_{9+14i} = y, \cdots, \\
&a_{14+14i} = (xy)^{4i} x, a_{15+14i} = (xy)^{4i-1} x, a_{16+14i} = y, \cdots
\end{aligned}
$$

formundadır. Kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunun elde edilmesi için $u_2 \in \mathbb{N}$ için $4i = nu_2$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $n \equiv 0(\bmod 4)$ ise $i = \frac{n}{4}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = 14.\frac{n}{4} = \frac{7n}{2}$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = \frac{7n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 2(\bmod 4)$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = yxy$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde y elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = 14.\frac{n}{2} = 7n$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = \frac{7n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ yada ise $n \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i = n$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde y elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = 14n$ ve $\overline{LF}_2^{(x,y)}\left((2,2,n)\right) = 7n$ olur.

ii. İlk olarak , $(n,2,2)$ polyhedral grubunu ele alalım. $F_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right)$ orbiti

$$x, y, z, z, xz, x^{-2}, x^2z, x^{-2}, x^3z, xz, x, x^{-1}x^4z, x^{-3}, x^{-2}, x^{-3}, x^7z, x^4z, x^2z, zx, x^8, zx^4,$$
$$x^6, zx^7, xz, x^{-5}, x, zx^8, x^9, x^4, x, zx^{13}, zx^4, z, x^5z, x^{-18}, x^{14}z, x^{-14}, x^{19}z, xz, x^{13}, x^{-1}, x^{20}z,$$
$$x^{-19}, x^{-6}, x^{-7}, x^{27}z, x^8z, x^2z, zx^5, x^{32}, zx^{24}, x^{26}, zx^{31}, xz, x^{-25}, x, zx^{32}, x^{33}, x^8, x^9, zx^{41}, zx^8, z, \cdots.$$

şeklinde olup $i \geq 0$ için, dizinin terimleri aşağıdaki formda yazılabilir,

$$a_0 = x, a_1 = y, a_2 = z, a_3 = z\cdots,$$
$$a_{15+30i} = x^{-3+4i}, a_{16+30i} = x^{8(i+1)^2-4(i+1)+3}z, a_{17+30i} = x^{4i+4}z, a_{18+30i} = x^2z, \cdots,$$
$$a_{30+30i} = x^{5+4i}, a_{31+30i} = zx^{8(i+1)^2+4(i+1)+3}z, a_{32+30i} = zx^{4i+4}, a_{33+30i} = z, \cdots,$$

bu son ifadeden kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunun elde edilmesi için $u_3 \in \mathbb{N}$ için $4i = nu_3$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $y\theta = y$ ve $y\theta = y$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = 30.\frac{n}{4} = \frac{15n}{2}$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = \frac{15n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $y\theta = x^3z$ ve $z\theta = x^2z$ olacak şekilde xz elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = 30.\frac{n}{2} = 15n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = \frac{15n}{2}$ olur.

Eğer $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ya da ise $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = n$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$, $y\theta = x^3 z$ ve $z\theta = x^2 z$ olacak şekilde xz elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = 30n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((n,2,2)\right) = 15n$ olur.

Şimdi de $(2,n,2)$ polyhedral grubunu ele alalım. İspat için yukarıdakine benzer bir yöntem kullanılmıştır ve $F_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right)$ orbiti aşağıdaki formda elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
&a_0 = x, a_1 = y, a_2 = z, a_3 = z \cdots, \\
&a_{15+30i} = y^{16i^2+20i+4} x, a_{16+30i} = y^{-(16i^2+20i+7)}, a_{17+30i} = y^{16i^2+28i+9} z, a_{18+30i} = xy, \cdots, \\
&a_{30+30i} = xy^{16i^2+36i+20}, a_{31+30i} = y^{16i^2+36i+21}, a_{32+30i} = y^{16i^2+48i+29}, a_{33+30i} = xy, \cdots,
\end{aligned}$$

burada $i \geq 0$ dir. Bu son ifadeden kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunun elde edilmesi için $u_4 \in \mathbb{N}$ için $16i + 36i = nu_4$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının belirlenmesi gerekmektedir.

Eğer $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \frac{n}{4}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ ve $z\theta = z$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğunda $LF_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = 30.\frac{n}{4} = \frac{15n}{2}$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = \frac{15n}{2}$ olarak elde edilir.

Eğer $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = y^{-2} x$ ve $y\theta = y^{-1}$ ve $z\theta = z$ olacak şekilde z elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = 30.\frac{n}{2} = 15n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = \frac{15n}{2}$ olarak elde edilir.

Eğer $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ya da ise $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = n$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = y^{-2} x$, $y\theta = y^{-1}$ ve $z\theta = z$ olacak şekilde z elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = 30n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}\left((2,n,2)\right) = 15n$ olarak elde edilir.

Son olarak $(2,2,n)$ polyhedral grubunu düşünelim. $i \geq 0$ için $F_3^{(x,y,z)}((2,2,n))$ orbiti

$$a_0 = x, a_1 = y, a_2 = z, a_3 = z \cdots,$$
$$a_{15+30i} = z^{8i^2+20i+10}x, a_{16+30i} = y, a_{17+30i} = z^{8i^2+16i+5}, a_{18+30i} = z^{-1}, \cdots,$$
$$a_{30+30i} = xz^{8i^2+12i}, a_{31+30i} = y, a_{32+30i} = z^{-8i^2-8i+1}, a_{33+30i} = z, \cdots,$$

formunda olup bu dizinin periyodunun belirlenmesi için $u_5 \in \mathbb{N}$ için $4i^2 + 4i = nu_5$ olacak şekilde en küçük i doğal sayının elde edilmesi gerekmektedir.

Eğer $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \dfrac{n}{4}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = x$ ve $y\theta = y$ ve $z\theta = z$ olacak şekilde θ birim dönüşümü tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = 30.\dfrac{n}{4} = \dfrac{15n}{2}$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = \dfrac{15n}{2}$ dir.

Eğer $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = z^2 x$ ve $y\theta = y$ ve $z\theta = z^{-1}$ olacak şekilde y elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = 30.\dfrac{n}{2} = 15n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = \dfrac{15n}{2}$ dir.

Eğer $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ya da ise $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise $i = n$ olup dizinin terimleri arasında $x\theta = z^2 x$, $y\theta = y$ ve $z\theta = z^{-1}$ olacak şekilde y elemanıyla eşlenik olan θ iç otomorfizmi tanımlı olduğundan $LF_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = 30n$ ve $\overline{LF}_3^{(x,y,z)}((2,2,n)) = 15n$ dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilindiği gibi indirgemeli diziler kavramı; matematik, fizik ve kriptografiden bilgisayar bilimleri ve güzel sanatlara kadar modern bilimin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. İndirgemeli dizilerin gruplarda incelenmesi ise gerek grup ailelerinin yapılarının daha iyi anlaşılması gerekse dizilerin uygulama alanlarının genişletilmesi ve bu anlamda disiplinler arası ilişkilerin desteklenmesi açısından son derece güncel bir çalışma alanıdır. Bu tez çalışmasında, indirgemeli diziler konusunda son derece önemli bir yere sahip olan Fibonacci *p*-dizileri ele alınmıştır. Bu anlamda, Fibonacci *p*-dizileri iki ve daha fazla üretece sahip gruplara taşınmış ve *p* tane üretece sahip grupların Fibonacci *p*-orbitleri ve esas Fibonacci *p*-orbitleri tanımlanmıştır. Tanımlanan bu diziler üzerinde geniş bir şekilde durulmuş ve $(2,2,2)$ ve $n \geq 3$ için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$ ve $(2,2,n)$ polyhedral gruplarının esas Fibonacci *p*-orbitlerinin ve Fibonacci *p*-orbitlerinin periyotları hesaplanmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1]. Aydın H. and Dikici R., 1998, “General Fibonacci sequences in finite groups”, The Fibonacci Quart., 36(3), 216-221.

[2]. Bosma W. and Kraaikamp C., 1990, “Metrical theory for optimal continued fractions”, J. Number Theory, 34(3), 251-270.

[3]. Becker P. G., 1994, “*k*-regular power series and Mahler-type functional equations”, J. Number Theory, 49(3), 269-286.

[4]. Campbell C. M., Campbell P. P. , 2005, “The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups”, J. Appl. Math. Comput., 19, 231-240.

[5]. Campbell C. M., Doostie H. and Robertson E. F., 1990, “Fibonacci length of generating pairs in groups in Applications of Fibonacci Numbers”, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, 27-35.

[6]. Campbell, P.P., 2003. Fibonacci Length and Efficiency in Groups Presentations. Ph. Thesis, Universty of St Andrews.

[7]. Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., 1972, “Generator and relations for discrete groups”, 3 rd edition, Springer, Berlin.

[8]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2012, “The generalized order-*k* Lucas sequences in Finite groups”, J. Appl. Math., 464580-1-464580-15.

[9]. Deveci Ö., 2013, “The *k*-nacci sequences and the generalized order-k Pell sequences in the semi-direct product of finite cyclic groups”, Chiang Mai J. Sci., 40(1), 89-98.

[10]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2011, “On the basic *k*-nacci sequences in finite groups”, Discrete Dyn. Nat. Soc., 639476-1-639476-13.

[11]. Deveci Ö. and Karaduman E., “The Pell sequences in finite groups”, Util. Math., to appear.

[12]. Deveci O., "The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups", Util. Math., to appear.

[13]. Deveci Ö. and Avcı M, " Fibonacci *p*-Seqvence in Groups", is submitted.

[14]. Deveci, Ö., 2010, " Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Gruplardaki *k*-nacci dizileri", Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı

[15]. Doostie H. and Hashemi M., 2006, "Fibonacci lengths involving the Wall number $k(n)$ ", J. Appl. Math. Comput., 20, 171-180.

[16]. Everest, G., Poorten, A. Vander., Shparlinski, I.,T.Word, 2003, Recurrence Sequences, American Math. Soc.

[17]. El Naschie M.S., 2005, "Deriving the essential fatuares of standard model from the general theory of relarivity", Chaos, Solitons & Fractals, 26, 1-6.

[18]. El Naschie M.S., 2005, "Stability analysis of two-slit experiment", Chaos, Solitons and Fractals, 24, 941-946.

[19]. Falcon S. and Plaza A., 2009, "*k*-Fibonacci sequences modulo *m*", Chaos, Solitons and Fractals, 41, 497-504.

[20]. Fraenkel A.S. and Klein S. T., 1996. "Robutst universal complete codes for transmission and compression", Discrete Appl. Math., 64, 31-55.

[21]. Gogin N.D. and Myllari A.A., 2007, "The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices", Programing and Computer Software, published in Programmirovanie, 33(2), 74-79.

[22]. Hosenberg R., 1985, The matrix Q, mathematrical Gems III. Washington DC: Math. Assoc. Amer., 106-107

[23]. Hall P., 1936, "The Eulerian Functions of a Group", Quart. J. Math., 7, 134-151.

[24]. Johnson, D.L.,1997. Presentations of Groups, and edition, London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge.

[25]. Kirchoof B.K., R. , 1990, “Rutishauser, the phyllotavy of costus (costaceae)”, Bot Gazette, 151(1), 88-105.

[26]. Kalman D., 1982, “Generalized Fibonacci numbers by matrix methods”, The Fibonacci Quart., 20(1), 73-76.

[27]. Kılıç E. and Stakhov A.P., 2009, “On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents”, Chaos, Solitons and Fractals, 40, 2210-2221.

[28]. Kaluge G. R., 2010/2011, “Penggunaan Fibonacci dan Josephus problem dalam algoritma enkripsi transposisi+substitusi”, Makalah IF 3058 Kriptografi-Sem. II Tahun.

[29]. Karaduman E. and Deveci Ö., 2009, “*k*-nacci sequences in finite triangle groups”, Discret Dynamics in Nature Society, 453750-453750-10.

[30]. Knox S.W., 1992, “Fibonacci sequences in finite groups”, The Fibonacci Quart., 30(2), 116-120.

[31]. Karakaş, H.İ., 2010. (ikinci baskı) Cebir Dersleri. (Tüba Yayınları, Ankara).

[32]. Lü K. and Wang J., 2007, “*k*-step Fibonacci sequence modulo *m*”, Util. Math., 71, 169-178.

[33]. Mandelbaum D. M., 1972, “Synchronization of codes by means of Kautz’s Fibonacci encoding”, IEEE Transactions on Information Theory, 281-285.

[34]. Özkan E., Aydın H. and Dikici R., 2003, “3-step Fibonacci series modulo m”, Appl. Math. and Compt., 143, 165-172.

[35]. Pinch R.E.G., 1991, “Recurrent sequences modulo prime Powers, In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III”, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester December.

[36]. Robinson, D.J.S., 1982. A Course in the Theory Groups (Springer-Verlag, New York).

[37]. Spinadel V.W., 1999, “The family of metallic means”, Vis Math., 1(3).

[38]. Spinadel V.W., 2002, “The metallic means family and forbidden symmetries”, Int. Math. J., 2(3), 279-288.

[39]. Syein W., 1993,“Modelling the evolution of Stelar archictecture in Vascular plants”, Int. J. Plant Sci., 154(2), 229-263.

[40]. Stakhov A.P. and Rozin B., 2006. “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas pnumbers”, Chaos, Solitons and Fractals, 27, 1162-1167.

[41]. Stakhov A.P. , 1999, “A generalization of the Fibonacci Q-matrix”, Rep. Natl. Acad. Sci., Ukraine, 9, 46-49.

[42]. Silvester J.R., 1979, “ Fibonacci properties by matrix methods”, Mathematical Gozette, 63 188-191.

[43]. Tuğlu N., Kocer E.G. and Stakhov A.P., 2004, “Bivarite Fibonacci like *p*-polinomials”, Appl. Math. and Compt., 155, 637-641.

[44]. Taşçı, D., 2007. Soyut Cebir . (Alp Yayınevi ,Ankara).

[45]. Taşçı D. and Kılıç E., 2006, “On the order-*k* generalized Lucas numbers”, Appl. Math. Comput., 20, 171-180.

[46]. Yilmaz F. and Bozkurt D., 2009, “The generalized order-k Jacobsthal numbers”, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4(34), 1685-1694.

[47]. Wall D.D., 1960, “Fibonacci series modulo m”, Amer. Math. Monthly, 67, 525-532.

[48]. Wilcox, H.J., 1986. Fibonacci Sequences of Period n in Groups. The Fibonacci Quarterly, 24, 356-365.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Metin AVCI

Doğum Yeri **:** ARPAÇAY

Doğum Tarihi **:** 10/05/1975

Medeni Hali **:** Evli

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise **:** Susuz K.K. Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans **:** Atatürk Üniversitesi / Eğitim Fakültesi

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Milli Eğitim Bakanlığı 1998-2015

Yayınları: Deveci Ö. and Avcı M, " Fibonacci *p*-Seqvence in Groups", is submitted.(Revizyon aşamasındadır)