T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Esra DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK–2015
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Esra DENİZ'in Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Analitik Fonksiyonların İntegral Operatörlerinin Geometrik Özellikleri'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy..birliği.. ile kabul edilmiştir.

30 / 01 / 2015

Adı ve Soyadı **İmza**

Başkan: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Güventürk UĞURLU ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../...... gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Bana bu tez konusunu veren, engin tecrübesiyle yol gösteren Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'ya, teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve sevgileriyle beni bugüne getiren, beni hiç yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan ve çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkür ederim. Tezin hazırlanması sürecinde hiçbir zaman yardımını esirgemeyen, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen, bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan ve daima yanımda olan en yakın arkadaşım, en büyük manevi destekçim olan sevgili eşim Erhan DENİZ'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Kars-2015 **Esra DENİZ**

İÇİNDEKİLER

ANALİTİK FONKSİYONLARIN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Esra DENİZ
Yüksek Lisans Tezi
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

ÖZET

Bu tezde, ilk olarak birim diskte *p*-valent analitik fonksiyonların sınıfını koruyan bir genelleştirilmiş türev operatörü kullanarak iki yeni *p*-valent integral operatör tanımlanmıştır. Sonra bu integral operatörlerin konveksliği ve yıldızıllığı gibi geometrik özellikleri incelenmiştir. Tezde bulunan sonuçlar konu ile ilgili birçok çalışmanın genelleşmesidir. Nitekim parametrelerin özel değerlerinde daha önceden bulunan sonuçlar elde edilir.

2015, 63 Sayfa

Anahtar kelimeler: Analitik fonksiyon, *p*-valent analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Yıldızıl ve konveks fonksiyon, Düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyon, Türev operatörü, İntegral operatör.

GEOMETRIC PROPERTIES OF INTEGRAL OPERATORS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Esra DENİZ
M. Sc. Thesis
The Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ABSTRACT

In this thesis, firstly we define two new *p*-valent integral operators by using a general derivative operator that preserves the normalized *p*-valent analytic functions class in unit disc. Then, we investigate geometric properties such as convexity and starlikeness of these integral operators. All results that obtained in thesis are generalization of many studies related with subject. Indeed, in the special case of the parameters, results in earlier studies are obtained.

2015, 63 pages

Keywords: Analytic function, *p*-valent analytic function, Univalent function, Starlike and convex function Uniformly starlike and convex function, Derivative operator, Integral operator.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{U}$	Birim disk
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{A}_p$	$p\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{U}$ birim diskinde $p-$valent analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize edilmiş yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	α mertebeden yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$	α mertebeden $p-$valent yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}_p^*(b,\alpha)$	b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}_p^*[b]$	b kompleks mertebeden $p-$valent yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_p(\alpha)$	α mertebeden $p-$valent konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_p(b,\alpha)$	b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_p[b]$	b kompleks mertebeden $p-$valent konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{UST}$	Düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UST}$	$k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UST}(\alpha)$	α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı

$k-\mathcal{UST}_p(\alpha)$	α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$	b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{UCV}$	Düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UCV}$	$k-$düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UCV}(\alpha)$	α mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UCV}_p(\alpha)$	α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$	b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyonların sınıfı
$D^m_{p,\lambda,\mu}$	Deniz ve Orhan türev operatörü
$\operatorname{Re} z$	z nin reel kısmı
$\operatorname{Im} z$	z nin sanal kısmı

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu kompleks değerli fonksiyonların görüntü bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitik özelliklerini incelemektir. Görüntü kümeleri önemli özellikler taşıyan fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılmıştır. Bu sınıflardan en çok üzerinde durulanları univalent, konveks, yıldızıl, düzgün yıldızıl, düzgün konveks... vb. fonksiyon sınıflarıdır. Bu konuda çalışan matematikçiler fonksiyonların bu sınıflara ait olmaları için birçok kriterler elde etmeye çalışmışlardır.

Analitik fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar yaklaşık olarak son yüzyılda yoğun bir şekilde yapılmıştır. Bu çalışmalar çok çeşitlilik göstermekle birlikte analitik fonksiyonların alt sınıfları ile ilgilenilmiştir. Genellikle bu alt sınıflara ait fonksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Geometrik fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden biri verilen bir analitik fonksiyonun konveks ve yıldızıl olup olmadığının araştırılmasıdır. Özellikle ters sınır değer problemlerinin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan konvekslik ve yıldızıllık kriteri bu alanda çalışmak isteyenler için bir ilham kaynağı olmuştur.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has altkümesini birim diske konform tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoreminden bilinmektedir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan univalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan univalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Bu yüzden bu alanda çalışma yapan birçok bilim adamı birim diskte tanımlanan analitik fonksiyonları kullanmıştır.

Univalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z \right| < 1 \right\}$$

birim diskinde univalent ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde ayrı bir yeri olan integral operatörleri ile ilgili çalışmalar 1915 yılında Alexander tarafından başlatılmış ilerleyen zamanlarda bu operatörler genelleştirilmiş ve bu yeni operatörlerin yıldızıllığı, konveksliği, ünivalentliği gibi özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışmalarda fonksiyonlar farklı sınıflardan seçilerek integral operatörler için çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Bizi bu çalışmayı yapmaya yönlendiren unsurların bazıları;

- $p-$valent fonksiyonları içeren genel integral operatörlerin konveksliği ve yıldızıllığı için yeter şartlara duyulan ihtiyacın ortaya çıkması,

- Mevcut konvekslik (yıldızıllık) kriterlerinin verilen bir $p-$valent fonksiyonun veya integral operatörün konveksliğini (yıldızıllığını) test etmede yetersiz kalması,

- Farklı fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonların konveksliği (yıldızıllığı) için konvekslik (yıldızıllık) kriterlerine ihtiyaç duyulması

şeklindedir.

Sunulan bu tezde, analitik, $p-$valent fonksiyonların genelleştirilmiş integral operatörleri için konvekslik ve yıldızıllık kriterleri detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Bu tez çalışması esas olarak üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım olan kuramsal temeller altında temel bilgiler, analitik fonsiyonların alt sınıfları, türev operatörleri ve genelleştirilmiş integral operatörleri ayrıntılı bir şekilde verildi. İkinci kısım olan materyal ve yöntemde bu zamana kadar yapılan çalışmalar sunuldu. Son olarak bulgular kısmında yeni tanımlanan iki p-valent integral operatör için yeni sonuçlar verildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda tezde kullanılacak temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 ($\varepsilon -$komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $B(z_0,\varepsilon)=\{z_0 \in \mathbb{C} : |z-z_0|<\varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının $\varepsilon -$komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in A$ noktası için $B(z_0,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık küme): Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer A kümesinin her noktası A nın bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı küme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık küme ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (çevre) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları adı verilir.

Tanım 2.1.6 (Kapalı eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.7 (Basit kapalı eğri): $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1,t_2\in[a,b]$ olsun. $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ basit bir eğri ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ ya diferensiyellenebilir eğri denir. Diferensiyellenebilir bir γ eğrisi ve $\forall t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ ise γ ya düzgün eğri denir.

Tanım 2.1.8 (Bağlantılı küme): Eğer $A\subset A_1\cup A_2$, $A\cap A_1\neq\varnothing$, $A\cap A_2\neq\varnothing$ ve $A\cap A_1\cap A_2\neq\varnothing$ olacak şekilde A_1 ve A_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme bulunamaz ise $A\subset\mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde A ya bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.9 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan bir kümeye $\mathbb{C}$ de bir bölge denir.

2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 2.2.1 (Analitik fonksiyon): $f(z)$ kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, sonlu

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilirdir (veya diferensiyellenebilirdir) denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [40].

Örneğin $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=\sin z$ ve $f_3(z)=\cos z$ fonksiyonlarının her biri kompleks düzlemdeki her noktada analitiktir.

Tanım 2.2.2 (Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı): $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartını sağlayan $\mathbb{U}$ birim diski üzerindeki herhangi bir f analitik fonksiyonuna normalize edilmiştir denir [19].

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad \left(a_n \in \mathbb{C}\right)$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Kısaca

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.3 (Ünivalent fonksiyon): Kompleks düzlemin bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine 1–1 oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde ünivalenttir denir. Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece ve sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent fonksiyon denir. Ünivalent fonksiyonlara bazı kaynaklarda tek katlı, yalınkat veya schlicht fonksiyonlar da denir [19].

$\mathbb{U}$ bölgesinde analitik ve ünivalent olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{S}$ sınıfı olarak adlandırılır [23]. Kısaca

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \right\}$$

dır.

Tanım 2.2.4 (Yıldızıl (Starlike) bölge): $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $y \in B$ olsun. Eğer y noktasını B bölgesinin her x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B bölgesinin içinde kalıyorsa B bölgesine y noktasına göre yıldızıl (starlike) bölge denir [23].

Daha açık bir ifadeyle yıldızıl bir B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir. Biz daha çok orijine göre yıldızıllık ile ilgileneceğiz. Bundan sonra yıldızıl denildiğinde orijine göre olduğunu anlayacağız.

Tanım 2.2.5 (Yıldızıl fonksiyon): $f(z) \in \mathcal{A}$ olsun. $f(\mathbb{U})$ kümesi bir w_0 noktasına göre yıldızıl ise, $f(z)$ fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Eğer $w_0 = 0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna kısaca yıldızıl fonksiyon denir [23].

Teorem 2.2.1 (Yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır [23].

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir ve bu sınıf kısaca

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin; $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu [28] yıldızıl bir fonksiyondur [20].

Tanım 2.2.6 (α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı): $f(z) \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ kümesinde $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden yıldızıldır denir. α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir [30].

Özel durumda Tanım 2.2.6 $\alpha = 0$ alınırsa $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ bulunur.

Tanım 2.2.7 (Konveks bölge): B bir bölge olsun. B deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B ye konveks bölge denir Bir bölgenin konveks olması için gerek ve yeter şart her noktasına göre yıldızıl olmasıdır [23].

Tanım 2.2.8 (Konveks fonksiyon): B konveks bir bölge, $f(z)$ bu bölgede tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(B)$ konveks bir bölge ise, $f(z)$ ye B bölgesinde konveks fonksiyon denir [23]. Diğer bir değişle bir f fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Teorem 2.2.2 (Konveks fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır [23].

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir ve bu sınıf kısaca

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin, $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ ve $f(z) = \log\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|$ fonksiyonları $\mathcal{C}$ sınıfındandır.

Tanım 2.2.9 (α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı): $f(z) \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ kümesinde $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden konvekstir denir. α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir [30].

Özel durumda Tanım 2.2.9 $\alpha = 0$ alınırsa $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ bulunur.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.3 (Alexander Teoremi): $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $f(z) \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [19].

Bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 2.2.10 ($p-$valent fonksiyon): $\mathbb{U}$ bölgesinde $f(z) = w_0$ denkleminin her w_0 için bu bölgede en fazla p kökü ve bir w_1 içinde $f(z) = w_1$ in tam olarak p kökü varsa $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{U}$ da $p-$ valent fonksiyon denir [23].

Tanım 2.2.11 (Normalize edilmiş analitik $p-$valent fonksiyonların sınıfı): $f(0) = f'(0) = ... = f^{(p-1)}(0) = 0$ ve $f^{(p)}(0) = p!$ şartını sağlayan $\mathbb{U}$ birim diski üzerindeki herhangi bir f analitik fonksiyonuna normalize edilmiş $p-$valent fonksiyon denir [16, 29].

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n, \quad \left(a_n \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...,\}\right),$$

biçimindeki $p-$valent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}_p$ ile gösterilir. Kısaca

$$\mathcal{A}_p = \left\{ f : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır. Özel durumda $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ dır.

Şimdi $\mathcal{A}_p$ sınıfının bazı önemli alt sınıflarını tanımyalım.

Tanım 2.2.12 (α mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyon): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \quad (z \in \mathbb{U})$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\alpha\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyon denir [37].

$\mathbb{U}$ birim diskinde $\alpha\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent yıldızıl olan bütün fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ ile gösterilir. Özel durumda $\mathcal{S}_1^*(\alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır.

Tanım 2.2.13 (α mertebeden $p-$valent konveks fonksiyon): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \quad (z \in \mathbb{U})$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\alpha\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent konveks fonksiyon denir [37].

$\mathbb{U}$ birim diskinde $\alpha\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent konveks olan bütün fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}_p\left(\alpha\right)$ ile gösterilir. Özel durumda $\mathcal{C}_1(\alpha) = \mathcal{C}(\alpha)$ dır.

Tanım 2.2.14: $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right\} > \alpha, \quad \left(z \in \mathbb{U}\right)$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent konvekse yakın fonksiyon denir [37].

Bu fonksiyonların sınıfı $K_p(\alpha)$ ile gösterilir. Özel durumda $K_1(\alpha) = K(\alpha)$ dır.

Tanım 2.2.15 (b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyon): $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\operatorname{Re}\left\{p + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right)\right\} > \alpha, \quad \left(z \in \mathbb{U}\right)$$

şartını sağlayan fonksiyonlara $b\left(b \in \mathbb{C} - \{0\}\right)$ kompleks tipli α $\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyon denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde $\mathcal{A}_p$ sınıfına ait $b\left(b \in \mathbb{C} - \{0\}\right)$ kompleks tipli α $\left(0 \le \alpha < p\right)$ mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p^*(b,\alpha)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.2.16 (b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent konveks fonksiyon): $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right)\right\}>\alpha, \quad (z\in\mathbb{U})$$

şartını sağlayan fonksiyonlara $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks tipli α $\left(0\leq\alpha<p\right)$ mertebeden konveks fonksiyon denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde $\mathcal{A}_p$ sınıfına ait $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks tipli α $\left(0\leq\alpha<p\right)$ mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}_p(b,\alpha)$ ile gösterilir [17].

$\mathcal{S}_p^*(b,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_p(b,\alpha)$ sınıflarında $p=1$ ve $\alpha=0$ alınırsa sırasıyla Nasr and Aouf [35] tarafından tanımlanan $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}^*[b]$ sınıfı ve Wiatrowski [47] tarafından tanımlanan $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeden konveks fonksiyonların $\mathcal{C}[b]$ sınıfı elde edilir. Ayrıca $\mathcal{S}_p^*(b,0)=\mathcal{S}_p^*[b]$ ve $\mathcal{C}_p(b,0)=\mathcal{C}_p[b]$ dır. Diğer taraftan $\mathcal{S}_p^*(b,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_p(b,\alpha)$ sınıflarında $p=1$ alınırsa Frasin [24] tarafından tanımlanan sırasıyla $\mathcal{S}^*(b,\alpha)$ ve $\mathcal{C}(b,\alpha)$ sınıfları elde edilir. $p=b=1$ özel durumunda $\mathcal{S}_1^*(1,\alpha)=\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}_1(1,\alpha)=\mathcal{C}(\alpha)$ olur.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olarak görülen düzgün yıldızıl fonksiyonların tanımı ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.17: Eğer $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde kalan $\zeta\in\mathbb{U}$ merkezli her dairesel γ yayını , $f\left(\zeta\right)$ ye göre yıldızıl bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün yıldızıl fonksiyon denir [22].

$\mathbb{U}$ da düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UST}$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım analitik olarak ilk kez 1993 yılında Ronning tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2.18 (Düzgün yıldızıl fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna düzgün yıldızıl fonksiyon denir [41].

Düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan $k-$ düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 2000 yılında verilmiştir. Yazarlar k - düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.2.19: $0 \le k < \infty$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ da $|\zeta| \le k$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsü $f(\zeta)$ ye göre yıldızıl ise $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir [27].

2000 yılında Kanas ve Wisniowska $k-$ düzgün yıldızıl fonksiyonların tanımına denk ve daha kullanışlı olan aşağıdaki tanımı verdi.

Tanım 2.2.20 ($k-$ düzgün yıldızıl fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \le k < \infty$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir. Bütün k - düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UST}$ ile gösterilir [27].

$k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Shams, Kulkarni ve Jahangiri tarafından 2004 yılında verilmiştir. Yazarlar α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.2.21 ($\alpha-$ mertebeden $k-$ düzgün yıldızıl fonksiyonlar): $f\in\mathcal{A},\ 0\le k<\infty$ ve $0\le\alpha<1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|+\alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir. Bütün α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UST}(\alpha)$ ile gösterilir [46].

Özel durumda $k-\mathcal{UST}(\alpha)$ sınıfında $k=1$ alınırsa $1-\mathcal{UST}(\alpha)=\mathcal{UST}(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Tanım 2.2.22 (α mertebeden $p-$valent $k-$ düzgün yıldızıl fonksiyonlar): $f\in\mathcal{A}_p$, $0\le k<\infty$ ve $0\le\alpha<p$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\ge k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right|+\alpha$$

şartını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $k-\mathcal{UST}_p(\alpha)$ ile gösterilir.

Düzgün konveks fonksiyonların tanımı ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 2.2.23: Eğer $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde kalan $\zeta\in\mathbb{U}$ merkezli her dairesel γ yayını, konveks bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün konveks fonksiyon denir [21].

$\mathbb{U}$ da düzgün konveks fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UCV}$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım analitik olarak ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.2.4: $f \in \mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart, her $z, \zeta \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+(z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0,$$

eşitlizliğinin sağlanmasıdır [21].

Teorem 2.2.4 ü tek değişkene bağlı olarak yazmak mümkündür. Bunu ilk defa 1993 yılında Ma ve Minda [31] ve 1993 yılında Ronning [41] aşağıdaki teoremle göstermiştir.

Teorem 2.2.5: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için, $f \in \mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [31, 41].

Düzgün konveks fonksiyonların geneli olan $k-$düzgün konveks fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 1999 yılında verilmiştir. Yazarlar $k-$ düzgün konveks fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.2.24: $0 \leq k < \infty$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da $|\zeta| \leq k$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsünü konveks bir bölgeye resmediyorsa $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $k-$düzgün konveks fonksiyon denir. Bütün $k-$düzgün konveks fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UCV}$ ile gösterilir [26].

Teorem 2.2.6: $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \leq k < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{U}$ ve $|\zeta| \leq k$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1+(z-\zeta)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0$$

olmasıdır [26].

Bu tanımdan görüldüğü üzere tanım iki değişkene bağlıdır. Bu tanımın tek değişkenli olduğu durum ilk defa 1999 yılında Kanas ve Wisniowska tarafından verilmiştir.

Teorem 2.2.7: $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \le k < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|$$

olmasıdır [26].

Tanım 2.2.25: $f \in \mathcal{A}$, $0 \le k < \infty$ ve $0 \le \alpha < 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna α mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyon denir [46].

Bütün α mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UCV}(\alpha)$ ile gösterilir. Özel durumda $k-\mathcal{UCV}(\alpha)$ sınıfında $k=1$ alınırsa $1-\mathcal{UCV}(\alpha)=\mathcal{UCV}(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Yukarıdaki iki tanım arasında Alexander teoremi gereğince

$$f(z) \in k-\mathcal{UST}(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{z}\int_0^z f(t)dt \in k-\mathcal{UCV}(\alpha)$$

veya

$$f(z) \in k-\mathcal{UCV}(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in k-\mathcal{UST}(\alpha)$$

ilişkisi vardır.

Not: $k-\mathcal{UST}(\alpha)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\alpha)$ sınıflarına ait ayrıntılı bilgi için Deniz, Orhan ve Sokol [16] ve Orhan, Deniz ve Raducanu [36] çalışmalarına bakılabilir.

$\mathcal{A}_p$ sınıfına ait fonksiyonlar için yukarıdaki tanım şu şekilde verilir.

Tanım 2.2.26 (α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $0 \le \alpha < p$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \ge k\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right|+\alpha \quad \left(k \ge 0,\ z \in \mathbb{U}\right)$$

şartını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $k-\mathcal{UCV}_p(\alpha)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.2.27 (b kompleks tipli $\alpha-$mertebeden $p-$valent $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}_p$, $0 \le k < \infty$ ve $0 \le \alpha < p, b \in \mathbb{C}-\{0\}$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right)\right) \ge k\left|\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right)\right|+\alpha$$

şartını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent $k-$ düzgün yıldızıl fonksiyon denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.2.28 (b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $0 \le \alpha < p, b \in \mathbb{C}-\{0\}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) \ge k\left|\frac{1}{b}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right)\right|+\alpha \quad \left(k \ge 0,\ z \in \mathbb{U}\right)$$

şartını sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna b kompleks tipli α mertebeden $p-$valent $k-$düzgün konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ ile gösterilir [17].

2.3 Analitik Fonksiyonların Türev Operatörleri

Bu başlık altında $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}_p$ sınıflarını koruyan bazı türev operatörlerini vereceğiz. Bunlar içinde temel teşkil eden Sălăgean türev operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.3.1 (Sălăgean Türev Operatörü): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için, $D^m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Sălăgean türev operatörü $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= Df(z) = zf'(z) \\ &\vdots \\ D^m f(z) &= D\left(D^{m-1} f(z)\right) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca D^m için rekürans formülü

$$D^{m+1} f(z) = z\left(D^m f(z)\right)'$$

biçimindedir [43].

Ayrıca $\mathcal{A}_p$ sınıfına ait fonksiyonlar için $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere bir D_p^m operatörü

$$\begin{aligned} D_p^0 f(z) &= f(z) \\ D_p^1 f(z) &= D_p f(z) = \frac{zf'(z)}{p} \\ &\vdots \\ D_p^m f(z) &= D_p\left(D_p^{m-1} f(z)\right) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

şeklinde tanımlanır [44].

Böylece $f \in \mathcal{A}_p$ için

$$D^m f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^m a_n z^n, \quad \left(p \in \mathbb{N} = \{1,2,...,\}\right), \ \left(z \in \mathbb{U}\right),$$

olur.

Sălăgean türev operatöründeki mantık ile yola çıkarak Deniz ve Orhan 2011 yılında birçok operatörü de kapsayan genel bir türev (diferensiyel) operatörünü aşağıdaki gibi tanımladılar.

Tanım 2.3.2 (Deniz ve Orhan Türev Operatörü): $f \in \mathcal{A}_p$ için Deniz ve Orhan türev operatörü $D^m_{p,\lambda,\mu} : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$ $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq \mu \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D^0_{p,\lambda,\mu} f(z) &= f(z) \\
D^1_{p,\lambda,\mu} f(z) &= D_{p,\lambda,\mu} f(z) = \frac{1}{p}\Big[\lambda\mu z^2 f''(z) + \left(\lambda - \mu + (1-p)\lambda\mu\right) z f'(z) \\
&\qquad + p(1-\lambda+\mu) f(z)\Big] \qquad (2.3.3) \\
&\ \vdots \\
D^m_{p,\lambda,\mu} f(z) &= D_{p,\lambda,\mu}\left(D^{m-1}_{p,\lambda,\mu} f(z)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [15].

Ayrıca $D^m_{p,\lambda,\mu}$ için rekürans formülü

$$\begin{aligned}
pD^m_{p,\lambda,\mu} f(z) &= \lambda\mu z^2 \left[D^{m-1}_{p,\lambda,\mu} f(z)\right]'' \\
&\quad + \left(\lambda - \mu + (1-p)\lambda\mu\right) z \left[D^{m-1}_{p,\lambda,\mu} f(z)\right]' \\
&\quad + \left(p(1-\lambda+\mu)\right) D^{m-1}_{p,\lambda,\mu} f(z)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan, $f \in \mathcal{A}_p$ için $D^m_{p,\lambda,\mu}$ operatörünün seri temsili

$$D^m_{p,\lambda,\mu} f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \phi^n_p(m,\lambda,\mu) a_n z^n$$

olur. Burada

$$\phi_p^n(m,\lambda,\mu)=\left[\frac{(n-p)(\lambda\mu k+\lambda-\mu)+p}{p}\right]^m$$

dır.

$D_{p,\lambda,\mu}^m$ operatörü birçok operatörün genelleştirilmiş halidir. $D_{p,\lambda,\mu}^m$ operatörünün özel durumları aşağıdaki gibidir:

1. $D_{1,1,0}^m f(z)\equiv D^m f(z),\ (m\in\mathbb{N}_0)$ Sălăgean türev operatörü [43]
2. $D_{1,\lambda,0}^m f(z)=D_\lambda^m f(z),\ (m\in\mathbb{N}_0)$ Al-Oboudi operatörü [2]
3. $D_{1,\lambda,\mu}^m f(z)=D_{\lambda,\mu}^m f(z)$ Deniz ve Orhan operatörü [14]. Bu operatör ilk olarak $0\le\mu\le\lambda\le 1$ değerleri için Raducanu ve Orhan [42] tarafından tanımlanmıştır.
4. $D_{1,\lambda,0}^m f(z)=D_\lambda^m f(z),\ \left(m\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\right)$ Acu ve Owa operatörü [1]
5. $D_{p,1,0}^m f(z)=D_p^m f(z),\ \ \left(m\in\mathbb{N}_0\right)$ Shenan, Salim ve Mousa operatörü [44]
6. $D_{p,\lambda,0}^m f(z)=D_{\lambda,p}^m f(z),\ \ \left(m\in\mathbb{N}_0\right)$ Kwon operatörü [29].

2.4 Analitik Fonksiyonların Bazı İntegral Operatörleri

Bu bölümde genelleştirilmiş integral operatörleri vereceğiz. Deniz, Deniz ve Mustafa [18] tezin ana unsuru olan aşağıdaki genelleştirilmiş integral operatörleri tanımladılar.

Tanım 2.4.1: Kabul edelim ki $n\in\mathbb{N}$ için $l=\left(l_1,l_2,...,l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n,\ \ \delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$ $i=1,2,...,n$ için $f_i,\ g_i,\ h_i\in\mathcal{A}_p$ olsun. (2.3.3) ile tanımlanan $D_{p,\lambda,\mu}^m$ operatörü ve $f_i,\ g_i,\ h_i\in\mathcal{A}_p\ \ \left(i=1,2,...,n\right)$ olmak üzere $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ ve $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörleri

$$\mathcal{I}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}\left(f_1,f_2,...,f_n\right):\mathcal{A}_p^n\to\mathcal{A}_p$$

$$\mathcal{I}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}\left(f_1,f_2,...,f_n\right)=\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^n\left(\frac{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt, \qquad (2.4.1)$$

ve

$$\mathcal{J}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}\left(g_1,g_2,...,g_n\right):\mathcal{A}_p^n\to\mathcal{A}_p$$

$$\mathcal{J}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}\left(g_1,g_2,...,g_n\right)=\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{\delta_i}dt, \qquad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlanır [18].

$\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ **ve** $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ **integral operatörlerinin özel durumları:**

1. $$\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,1,0}=\mathcal{F}_{p,n,l,\delta}=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_p^{l_i}f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt \qquad (2.4.3)$$

ve

$$\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,1,0}=\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D_p^{l_i}g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{\delta_i}dt \qquad (2.4.4)$$

operatörleri Saltık, Deniz ve Kadıoğlu tarafından çalışılmıştır [45].

2. $$\mathcal{F}_{n,1,l}^{\delta,\lambda,0}=\mathcal{I}(f_1,f_2,...,f_m)(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_\lambda^{l_i}f_i(t)}{t}\right)^{\delta_i}dt \qquad (2.4.5)$$

operatörü Bulut tarafından çalışılmıştır [13].

3. Eğer $i=1,2,...,n$ için $l_1=l_2=...=l_n=0$ alınırsa

$$\mathcal{F}_{n,p,0}^{\delta,1,0}=\mathcal{F}_p=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt \qquad (2.4.6)$$

ve

$$\mathcal{G}_{n,p,0}^{\delta,1,0}=\mathcal{G}_p=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{\delta_i}dt \qquad (2.4.7)$$

integral operatörleri Frasin tarafından çalışılmıştır [25].

4. Eğer $i=1,2,...,n$ için $l_1=l_2=...=l_n=0$ ve $p=1$ alınırsa

$$\mathcal{F}_{n,1,0}^{\delta,1,0}=\mathcal{F}_n=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\delta_i}dt \tag{2.4.8}$$

integral operatörü Breaz ve Breaz [4] ve

$$\mathcal{G}_{n,1,0}^{\delta,1,0}=\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left(\left(g_i(t)\right)'\right)^{\delta_i}dt \tag{2.4.9}$$

integral operatörü de Breaz, Owa ve Breaz [5] tarafından çalışılmıştır.

5.
$$\mathcal{F}_{n,1,l}^{\delta,1,0}=D^k\mathcal{F}=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i}f_i(t)}{t}\right)^{\delta_i}dt \tag{2.4.10}$$

integral operatörü Breaz, Güney and Salagean tarafından çalışılmıştır [9].

6. $p=n=1,\ l_1=0$ ve $\delta_1=\delta$ alınırsa;

$$\mathcal{F}_{1,1,0}^{\delta,1,0}=I_\delta(f)=\int_0^z\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\delta}dt \tag{2.4.11}$$

integral operatörü Pescar and Owa [38] tarafından ve

$$\mathcal{G}_{1,1,0}^{\delta,1,0}=\mathcal{G}=\int_0^z\left(g'(t)\right)^{\delta}dt \tag{2.4.12}$$

integral operatörü de Pfaltzgraff [39] tarafından çalışılmıştır.

7. $I_\delta(f)$ integral operatörü $\delta_1=\delta\in[0,1]$ özel durumu Miller, Mocanu ve Reade tarafından çalışılmıştır [33]. $I_\delta(f)$ integral operatöründe $\delta_1=\delta=1$ alınırsa Alexander [3] in $I(f)$ integral operatörü elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Bazı İntegral Operatörler İçin Konvekslik Şartları

Bu bölümde (2.4.3)-(2.4.12) de tanımlanan integral operatörlerin konveksliği için yapılan çalışmaları vereceğiz.

İlk olarak 2006 yılında Daniel Breaz ve eşi Nicoleta Breaz $\mathcal{F}_n$ integral operatörünün konveksliğini araştırdılar ve aşağıdaki sonuçları buldular.

Teorem 3.1.1: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $\delta_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le n+1$ olsun. Eğer her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{\delta_i}\right)$ ise bu durumda (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}$ dir [7].

Teorem 3.1.2: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $\delta_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le 1$ olsun. Eğer her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*$ ise bu durumda (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}\left(1-\sum_{i=1}^{n} \delta_i\right)$ dır [7].

2008 yılında Breaz, Owa ve Breaz $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörünün konveksliğini araştırdılar ve aşağıdaki sonuçları buldular.

Teorem 3.1.3: Kabul edelim ki $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,n\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}$ olduğunu varsayalım. Buradan (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörü konvekstir [5].

Teorem 3.1.4: Kabul edelim ki $\delta_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,...,n\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}(\alpha_i),\ 0 \le \alpha_i < 1$ olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörü $0 \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\alpha_i - 1) + 1 < 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\alpha_i - 1) + 1$ mertebeden konvekstir [5].

Teorem 3.1.5: Kabul edelim ki $\delta_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,...,n\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{UCV}$ olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörü $1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ge 0$ olmak üzere $1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ mertebeden konvekstir [5].

2008 yılında Breaz ve Güney $\mathcal{S}^*(b,\alpha)$ ve $\mathcal{C}(b,\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için $\mathcal{F}_n$ ve $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörleri için aşağıdaki sonuçları bulmuştur.

Teorem 3.1.6: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*(b,\alpha),\ \delta_i > 0,\ 0 \le \alpha < 1,$ $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve

$$0 \le 1 + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \delta_i < 1$$

olsun. Bu durumda

$$\gamma = 1 + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

olmak üzere (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}(b,\gamma)$ olur [6].

Teorem 3.1.7: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}(b,\alpha)$, $\delta_i > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve

$$0 \le 1 + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \delta_i < 1$$

olsun. Bu durumda

$$\gamma = 1 + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

olmak üzere (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ operatörü için $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n} \in \mathcal{C}(b,\gamma)$ olur [6].

2008 yılında Bulut, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 de α yerine her $i \in \{1,...,n\}$ için α_i alarak Breaz ve Güney (2008) in makalesindeki Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 ü genelleştirmiştir. Bu teoremler aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.8: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*(b,\alpha_i)$, $0 \le \alpha_i < 1$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \le 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i (\alpha_i - 1) < 1$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i (\alpha_i - 1)$ olmak üzere (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}(b,\gamma)$ olur [12].

Teorem 3.1.9: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}(b,\alpha_i)$, $0 \le \alpha_i < 1$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \le 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1\right) < 1$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1\right)$ olmak üzere (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ operatörü için $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n} \in \mathcal{C}(b,\gamma)$ olur [12].

2008 yılında Breaz $\mathcal{UST}(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{F}_n$ integral operatörünün konvekslik mertebesini araştırdı ve aşağıdaki sonucu elde etti.

Teorem 3.1.10: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{UST}(\alpha_i)$, $-1 < \alpha_i < 1$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(1 - \alpha_i\right) < 1$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1\right)$ olmak üzere (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}(b,\gamma)$ olur [8].

2009 yılında Breaz, Aouf ve Breaz $\mathcal{S}^*[b]$ ve $\mathcal{C}[b]$ sınıflarına ait fonksiyonların $\mathcal{F}_n$ ve $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ integral operatörlerinin konvekslik mertebesini araştırdılar ve aşağıdaki sonuçları elde ettiler.

Teorem 3.1.11: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*[b]$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i < 1$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ olmak üzere (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}(b, \gamma)$ olur [10].

Teorem 3.1.12: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}[b]$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i < 1$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ olmak üzere (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n}$ operatörü için $\mathcal{G}_{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n} \in \mathcal{C}(b, \gamma)$ olur [10].

2010 yılında Breaz, Breaz ve Darus $k - \mathcal{UST}(\alpha)$ ve $k - \mathcal{UCV}(\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonların $\mathcal{F}_n$ ve $\mathcal{G}_{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n}$ integral operatörlerinin konvekslik mertebelerini araştırdılar ve aşağıdaki sonuçları buldular.

Teorem 3.1.13: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in k_i - \mathcal{UST}(\alpha_i)$, $-1 \leq \alpha_i < 1$, $k_i \geq 0$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer her $i \in \{1,...,n\}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leq \frac{1}{2}$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1 \right)$ olmak üzere (2.4.8) ile tanımlanan $\mathcal{F}_n$ operatörü için $\mathcal{F}_n \in \mathcal{C}(\gamma)$ olur [11].

Teorem 3.1.14: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in k_i - \mathcal{UCV}(\alpha_i)$, $-1 \le \alpha_i < 1, k_i \ge 0$ ve $\delta_i > 0$ olsun. Eğer her $i \in \{1,...,n\}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le \frac{1}{2}$$

olursa bu durumda $\gamma = 1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1 \right)$ olmak üzere (2.4.9) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}$ operatörü için $\mathcal{G}_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n} \in \mathcal{C}(\gamma)$ olur [11].

2010 yılında Frasin $p-$valent fonksiyonların (2.4.6) ve (2.4.7) şeklindeki yeni genel integral operatörlerini tanımlayarak onların konvekslik mertebelerini elde etmiştir. Frasin'in bu çalışması aynı zamanda yukarıdaki Teorem 3.1.13 ve Teorem 3.1.14 ün genelleştirilmişidir.

Teorem 3.1.15: Kabul edelim ki $i \in \{1,...,n\}$ için $\delta_i > 0$, $-1 \le \alpha_i < p$, $k_i > 0$ ve $f_i \in k_i - \mathcal{UST}_p(\alpha_i)$ olsun. Eğer $0 \le p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - p \right) < p$ olursa bu durumda (2.4.6) ile tanımlanan $\mathcal{F}_p$ integral operatörü $p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - p \right)$ mertebeden $p-$valent konvekstir [25].

Teorem 3.1.16: Kabul edelim ki $i \in \{1,...,n\}$ için $\delta_i > 0$, $-1 \le \alpha_i < p$, $k_i > 0$ ve $f_i \in k_i - \mathcal{UCV}_p(\alpha_i)$ olsun. Eğer $0 \le p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - p \right) < p$ olursa bu durumda (2.4.7) ile tanımlanan $\mathcal{G}_p$ integral operatörü $p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$ mertebeden $p-$valent konvekstir [25].

Bunlardan farklı olarak 2008 yılında Bulut $D_\lambda^m f(z)$ Al-Oboudi operatörünün $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfından olması durumunda (2.4.5) de tanımlanan $\mathcal{I}(f_1, f_2,..., f_m)(z)$ integral operatörünün konvekslik mertebesini araştırdı.

Teorem 3.1.17: Kabul edelim ki $i\in\{1,...,n\}$ için $\delta_i>0,\quad 0\le\alpha_i<1$ ve $f_i\in k_i-\mathcal{UCV}_p(\alpha_i)$ olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1-\alpha_i\right)\le 1$ olursa bu durumda (2.4.5) ile tanımlanan $\mathcal{I}(f_1, f_2,..., f_m)(z)$ integral operatörü $1+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-1\right)$ mertebeden konvekstir [13].

2011 yılında Deniz, Çağlar ve Orhan çalışmalarının özel durumunda $k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ ve $k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonların integral operatörlerinin $\mathcal{C}_p(b,\alpha)$ sınıfına ait olması için α nın değerini araştırdılar.

Teorem 3.1.18: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p,\ b\in\mathbb{C}-\{0\}, k_i\ge 0$ ve $f_i(z)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0\le p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)<p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$ olmak üzere (2.4.6) ile tanımlanan $\mathcal{F}_p$ integral operatörü için $\mathcal{F}_p\in\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ dır [17].

Teorem 3.1.19: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\leq\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\left\{0\right\}$, $k_i\geq 0$ ve $f_i(z)\in k_i-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0\leq p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)<p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$$

olmak üzere (2.4.7) ile tanımlanan $\mathcal{G}_p$ integral operatörü için $\mathcal{G}_p\in\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ dır [17].

3.2. Bazı İntegral Operatörler İçin Yıldızıllık Şartları

Bu bölümde (2.4.6) ve (2.4.7) de tanımlanan $\mathcal{F}_p$ ve $\mathcal{G}_p$ integral operatörlerin yıldızıllığı için yapılan çalışmaları vereceğiz.

Bununla ilgili olarak 2013 yılında Mohammed, Darus ve Breaz meşhur Miller and Mocanu [34] lemmasını kullanarak $\mathcal{F}_p$ ve $\mathcal{G}_p$ integral operatörünün yıldızıllığını gösterdiler. Bununla ilgili teoremler aşağıdadır.

Teorem 3.2.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$ ve $f_i\in\mathcal{A}_p$ olsun. Eğer her $i=1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\operatorname{Re}\frac{zf_i'(z)}{f_i(z)}-p\right)>1-p$$

ise bu durumda (2.4.6) ile tanımlanan $\mathcal{F}_p$ integral operatörü $p-$valent yıldızıldır [32].

Teorem 3.2.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$ ve $f_i\in\mathcal{A}_p$ olsun. Eğer her $i=1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\mathrm{Re}\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}-p\right)>\left(p-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i-1\right)$$

ise bu durumda (2.4.7) ile tanımlanan $\mathcal{G}_p$ integral operatörü $p-$valent yıldızıldır [32].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak $k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ sınıfı için $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörünün kompleks tipli ve verilen bir mertebeden konveksliği için yeter şartlar verilecektir.

4.1. $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ Operatörünün Konveksliği İçin Yeter Şartlar

Teorem 4.1.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\{0\}$, $k_i\ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0\le p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)<p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$$

olmak üzere (2.4.1) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ sınıfındadır [18].

İspat: (2.4.1) tanımından $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{A}_p$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'=pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}{z^p}\right)^{\delta_i} \tag{4.1.1}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.1.1) in her iki tarafının logaritmik türevini alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right) \tag{4.1.2}$$

olur. Buradan (4.1.2) nin her iki tarafını $\frac{1}{b}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

elde edilir. Aynı zamanda her iki tarafa p ilave edersek

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{4.1.3}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak (4.1.3) eşitliğinin her iki tarafının reel kısmı alınırsa

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}\\&=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

bulunur. (4.1.4) ten $i=1,2,...,n$ için $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(t)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}$$
$$> p+\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right|+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right) \tag{4.1.5}$$

yazılır. Her $i=1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right|>0$$

olduğundan (4.1.5) eşitizliğinden

$$\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}>p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$$

elde edilir. Buna göre $\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$ olmak üzere $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.1.1 de $n=1,\ l_1=0,\ \delta_1=\delta$ ve $f_1=f$ alırsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1: Kabul edelim ki $\delta>0,\quad 0\le\alpha<p,\quad k\ge 0,\quad b\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $f\in k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ olsun. Eğer $\delta\in\left(0,\frac{p}{p-\alpha}\right]$ ise bu durumda $\int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{f(t)}{t^p}\right)^{\delta}\in\mathcal{C}_p\left(b,\delta\left(\alpha-p\right)+p\right)$ dır [18].

(4.1.5) ve aşağıdaki (4.1.6) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\{0\}$, $k_i\ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\left|\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right|>-\frac{p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}} \tag{4.1.6}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{C}_p(b)$ dır [18].

Teorem 4.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $k_i\ge 0$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\sigma=p-\frac{p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}},\ 0\le\sigma<p$$

olmak üzere eğer $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(t)\in\mathcal{S}_p^*(\sigma)$ ise bu durumda $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{C}_p(b)$ dır [18].

4.2. $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ Operatörünün Konveksliği İçin Yeter Şartlar

Bu bölümde $k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörünün kompleks tipli ve verilen bir mertebeden konveksliği için yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.2.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\left\{0\right\}$, $k_i\ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i(z)\in k_i-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0\le p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)<p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$$

olmak üzere (2.4.2) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ sınıfındadır [18].

İspat: (2.4.2) den $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{A}_p$ olur. Diğer taraftan

$$\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}\right)'(z)=pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i(z)\right)'}{pz^{p-1}}\right)^{\delta_i} \tag{4.2.1}$$

olur. (4.2.1) in her iki tarafının logaritmik türevini alıp Teorem 4.1.1 in ispatındaki işlemlerin benzerleri yapılırsa

$$1+\frac{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1+\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)$$

olur. Yukarıdaki son eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{b}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}&p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\\&=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının reel kısmı alınırsa

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}\\&=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

bulunur. $i=1,2,...,n$ olmak üzere $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i(z)\in k_i-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha_i)$ ve (4.2.3) den

$$\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}$$

$$= p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{k_i\left|\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)\right|+\alpha_i\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{4.2.4}$$

$$= p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right|$$

olur. Burada

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right|>0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\right\}>p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$$

bulunur. Böylece $\gamma=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)$ olmak üzere $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1 de $n=1,\ l_i=0,\ \delta_1=\delta$ ve $g_1=g$ alırsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1: Kabul edelim ki $\delta > 0,\quad 0 \le \alpha < p, k \ge 0,\quad b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $g \in k - \mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ olsun. Eğer $\delta \in \left(0, \dfrac{p}{p-\alpha}\right]$ ise bu durumda $\int_0^z pt^{p-1}\left(\dfrac{g'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\delta} \in \mathcal{C}_p\left(b, \delta\left(\alpha - p\right) + p\right)$ dır [18].

(4.2.4) de aşağıdaki (4.2.5) eşitsizliği yerine yazıldığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.2: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $l = \left(l_1, l_2, ...l_n\right) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \in \mathbb{R}_+^n,\ 0 \le \alpha_i < p,\ b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $k_i \ge 0$ olsun. Ayrıca $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\left|1 + \frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i\right)'(z)} - p\right| > -\frac{p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i\left(\alpha_i - p\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i k_i}{|b|}} \tag{4.2.5}$$

olsun. Eğer $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i(z) \in k_i - \mathcal{UCV}_p(b, \alpha_i)$ ise bu durumda $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{C}_p[b]$ dır [18].

Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $l = \left(l_1, l_2, ...l_n\right) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \in \mathbb{R}_+^n,\ 0 \le \alpha_i < p,\ b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $k_i \ge 0$ olsun. Ayrıca $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\sigma = p - \frac{p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i\left(\alpha_i - p\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i k_i}{|b|}},\ 0 \le \sigma < p$$

olmak üzere eğer $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i(t) \in \mathcal{C}_p(\sigma)$ ise bu durumda $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{C}_p[b]$ dır [18].

4.3. $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ Operatörünün Yıldızıllığı İçin Yeter Şartlar

Bu bölümde $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörünün kompleks tipli ve verilen bir mertebeden yıldızıllığı için yeter şartlar vereceğiz.

Aşağıda verilen Lemma 4.3.1 ana teoremlerin ispatında kullanacağımız önemli bir araç olacaktır.
Ayrıca,

$$H(\mathbb{U}) = \{ f : \mathbb{U} \to \mathbb{C} : f \text{ analitik} \}$$

$$H[a,n] = \{ f \in H(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + ..., \ z \in \mathbb{U}, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0 \}$$

dır.

Lemma 4.3.1: $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ fonksiyonu $\rho, \sigma \in \mathbb{R}, n \geq 1, \sigma \leq -\frac{n}{2}(1+\rho^2)$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \psi(\mathrm{i}\,\rho, \sigma; z) \leq 0$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $P \in H[1,n]$ ve

$$\operatorname{Re} \psi(P(z), zP'(z); z) > 0, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise bu durumda her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} P(z) > 0$$

dır [34].

Lemma 4.3.2: $n \in \mathbb{N}, \ \beta \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} v \leq 0, \operatorname{Re}(u - \beta v) \geq 0$ olsun. $P \in H[P(0), n]$, $P(0) \in \mathbb{R}$ ve $P(0) > \beta$ olmak üzere eğer

$$\operatorname{Re}\left\{ P(z) + \frac{zP'(z)}{u - vP(z)} \right\} > \beta, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise bu durumda

$$\operatorname{Re} P(z) > \beta, \quad z \in \mathbb{U}$$

dır [18].

İspat: Öncelikle

$$R(z)=\frac{P(z)-\beta}{P(0)-\beta}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $R(z)\in H[1,1]$ dır. Ayrıca $P(0)-\beta>0$ ve

$$\operatorname{Re}\left\{P(z)+\frac{zP'(z)}{u-vP(z)}\right\}>\beta,\quad z\in\mathbb{U}$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{R(z)+\frac{zR'(z)}{u-v\beta-v\left(P(0)-\beta\right)R(z)}\right\}>0,\quad z\in\mathbb{U}$$

olur. Şimdi ψ fonksiyonunu

$$\psi(R(z),zR'(z);z)=R(z)+\frac{zR'(z)}{u-v\beta-v\left(P(0)-\beta\right)R(z)}$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$\operatorname{Re}\psi(R(z),zR'(z);z)>0$$

olduğu açıktır.

Şimdi Lemma 4.3.1 i uygulamak için $\rho\le 0,\sigma\le -\frac{1+\rho^2}{2}$ olmak üzere her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}\,\rho,\sigma;z)\le 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}\,\rho,\sigma;z)&=\operatorname{Re}\frac{\sigma}{u-v\beta-v\left(P(0)-\beta\right)\rho i}\\&=\operatorname{Re}\frac{\sigma}{u_1+iu_2-\left(v_1+iv_2\right)\beta-\left(v_1+iv_2\right)\left(P(0)-\beta\right)\rho i}\\&=\frac{\sigma\left[u_1-v_1\beta+v_2\rho\left(P(0)-\beta\right)\right]}{\left[u_1-v_1\beta+v_2\rho\left(P(0)-\beta\right)\right]^2+\left[u_2-v_2\beta+v_1\rho\left(P(0)-\beta\right)\right]^2}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\rho\le 0,\sigma\le -\frac{1+\rho^2}{2}$ ve

$$\begin{cases}\beta\in\mathbb{R},u=u_1+iu_2,v=v_1+iv_2\in\mathbb{C},\\ v_2=\operatorname{Im}v\le 0,u_1-\beta v_1=\operatorname{Re}\left(u-\beta v\right)\ge 0\end{cases}$$

için

$$\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}\,\rho,\sigma;z)\le 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.3.1 den $\operatorname{Re} R(z) > 0$ bulunur. Yukarıda $R(z)$ nin tanımından

$$\operatorname{Re} P(z) > \beta, \quad z \in \mathbb{U}$$

olduğu görülür.

Şimdi Lemma 4.3.2 yi kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.3.1: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $l = (l_1, l_2, ... l_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $0 \le \alpha_i < p$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\operatorname{Im} b \ge 0$, $\operatorname{Re} b \le \dfrac{p}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i)}$, $k_i \ge 0$

ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i(z) \in k_i - \mathcal{UST}_p(b, \alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0 \le p - \sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i) < p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma = p - \sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i)$$

olmak üzere (2.4.1) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}_p^*(b, \gamma)$ sınıfındadır [18].

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatındaki (4.1.3) ile verilen aşağıdaki

$$p + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'} - p\right) = p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(p + \frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i(z)} - p\right)\right) - p\sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

eşitliğini göz önüne alalım. Diğer taraftan $q : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $q(0) = p$ analitik fonksiyonunu

$$q(z)=p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}-p\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$p+b\big(q(z)-p\big)=\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{bzq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}$$

$$\Rightarrow p+b\big(q(z)-p\big)+\frac{bzq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=1+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}$$

$$\Rightarrow q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=p+\frac{1}{b}\left[1-p+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}\right]$$

bulunur. Yukarıdaki son eşitlik ve (4.1.3) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}&=p+\frac{1}{b}\left[1-p+\frac{z\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}\right]\\ &=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $i=1,2,...,n$ için $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(t)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}\right\}=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i \operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

$$>p+\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|\frac{z\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i(z)}-p\right|-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

elde edilir. Her $i=1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|\frac{z\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}f_i(z)}-p\right|>0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}\right\}>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Burada $q(0)=p>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$ olup q fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitiktir. Ayrıca $i=1,2,...,n$ için $\beta=p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$, $u=p(1-b)$ ve $v=-b$ alınırsa $\operatorname{Im}v\leq 0$ ve $\operatorname{Re}\left(u-\beta v\right)\geq 0$ olur. Böylece Lemma 4.3.1 in bütün şartları sağlanmış olup

$$\operatorname{Re}q(z)=\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(\mathcal{F}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}(z)\right)'}{\left(\mathcal{F}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}(z)\right)}-p\right)\right\}>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

elde edilir. Buna göre $\gamma=p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$ olmak üzere $\mathcal{F}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}(z)\in\mathcal{S}^*_p(b,\gamma)$ dır.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.3.1: Kabul edelim ki $\delta>0,\ \ 0\le\alpha<p,\ \ \ k\ge 0,\ \ b\in\mathbb{C}-\{0\},\ \ \operatorname{Im}b\ge 0,$ $\operatorname{Re}b\le\dfrac{p}{\delta\left(p-\alpha\right)}$ ve $f\in k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ olsun. Eğer $\delta\in\left(0,\dfrac{p}{p-\alpha}\right]$ ise bu durumda $\int\limits_0^z pt^{p-1}\left(\dfrac{f(t)}{t^p}\right)^{\delta}dt\in\mathcal{S}_p^*\left(b,\delta\left(\alpha-p\right)+p\right)$ dır [18].

(4.1.5) ve (4.1.6) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n,\ \ 0\le\alpha_i<p,\ \ b\in\mathbb{C}-\{0\},\ \ \operatorname{Im}b\ge 0,\ \ \operatorname{Re}b\le\dfrac{p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)},\ k_i\ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)\in k_i-\mathcal{UST}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\left|\frac{z\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i\right)'(z)}{D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}f_i(z)}-p\right|>-\frac{p-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i k_i}{|b|}}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{S}_p^*[b]$ dır [18].

Teorem 4.3.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n,\ \ 0\le\alpha_i<p,\ \ b\in\mathbb{C}-\{0\},\ \ \operatorname{Im}b\ge 0,\ \ \operatorname{Re}b\le\dfrac{p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)}$ ve $k_i\ge 0$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\sigma = p - \frac{p + \sum_{i=1}^{n} \delta_i (\alpha_i - p)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i k_i}{|b|}}, \quad 0 \le \sigma < p$$

olmak üzere eğer $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i(t) \in \mathcal{S}_p^*(\sigma)$ ise bu durumda $\mathcal{F}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{S}_p^*[b]$ dır [18].

4.4. $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ Operatörünün Yıldızıllığı için Yeter Şartlar

Bu bölümde $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörünün yıldızıllığı için yeter şartlar vereceğiz.

Teorem 4.4.1: Kabul edelim ki her $i = 1,2,...,n$ için $l = (l_1, l_2, ...l_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $0 \le \alpha_i < p$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\operatorname{Im} b \ge 0$, $\operatorname{Re} b \le \frac{p}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i)}$, $k_i \ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i(z) \in k_i - \mathcal{UCV}_p(b, \alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0 \le p - \sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i) < p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma = p - \sum_{i=1}^{n} \delta_i (p - \alpha_i)$$

olmak üzere (2.4.2) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}_p^*(b, \gamma)$ sınıfındadır [18].

İspat: Teorem 4.2.1 in ispatındaki (4.2.2) ile verilen aşağıdaki

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

eşitliğini göz önüne alalım. Diğer taraftan $q:\mathbb{U}\to\mathbb{C},\ q(0)=p$ analitik fonksiyonunu

$$q(z)=p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}-p\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$p+b\left(q(z)-p\right)=\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{bzq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)}$$

$$\Rightarrow p+b\left(q(z)-p\right)+\frac{bzq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}$$

$$\Rightarrow q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}=p+\frac{1}{b}\left[1-p+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}\right]$$

bulunur. Yukarıdaki son eşitlik ve (4.2.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}&=p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\right)'}-p\right)\\&=p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i\right)'(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $i=1,2,...,n$ için $D^{l_i}_{p,\lambda,\mu} f_i(t) \in k_i - \mathcal{UCV}_p(b,\alpha_i)$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}\right\} = p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i \operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)'(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

$$> p+\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|1+\frac{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)'(z)}-p\right|-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

elde edilir. Her $i=1,2,...,n$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}\left|1+\frac{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}_{p,\lambda,\mu}g_i\right)'(z)}-p\right|>0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{q(z)+\frac{zq'(z)}{p(1-b)+bq(z)}\right\} > p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Burada $q(0)=p>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$ olup q fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitiktir. Ayrıca $i=1,2,...,n$ için $\beta=p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$, $u=p(1-b)$ ve $v=-b$ alınırsa $\operatorname{Im} v \le 0$ ve $\operatorname{Re}\left(u-\beta v\right)\ge 0$ olur. Böylece Lemma 4.3.1 in bütün şartları sağlanmış olup

$$\operatorname{Re} q(z)=\operatorname{Re}\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(\mathcal{G}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}(z)\right)'}{\left(\mathcal{G}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}(z)\right)}-p\right)\right\}>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)$$

elde edilir. Buna göre $\gamma = p - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(p - \alpha_i \right)$ olmak üzere $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{S}_p^*(b,\gamma)$ dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.4.1 de $n=1,\ l_i=0,\ \delta_1=\delta$ ve $g_1=g$ alırsak aşağıdaki Sonuç 4.4.1 elde edilir. Buna göre;

Sonuç 4.4.1: Kabul edelim ki $\delta>0,\quad 0\le\alpha<p, k\ge 0,\quad b\in\mathbb{C}-\{0\},\quad \operatorname{Im} b\ge 0,$ $\operatorname{Re} b \le \dfrac{p}{\delta\left(p-\alpha\right)}$ ve $g\in k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ olsun. Eğer $\delta\in\left(0,\dfrac{p}{p-\alpha}\right]$ ise bu durumda $\int_0^z pt^{p-1}\left(\dfrac{g'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\delta}\in\mathcal{S}_p^*(b,\delta\left(\alpha-p\right)+p)$ dır [18].

Teorem 4.4.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n,\ 0\le\alpha_i<p,\ b\in\mathbb{C}-\{0\},\ \operatorname{Im} b\ge 0,\ \operatorname{Re} b\le \dfrac{p}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)},\ k_i\ge 0$ ve $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} f_i(z)\in k_i-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\left|1+\frac{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i\right)''(z)}{\left(D_{p,\lambda,\mu}^{l_i} g_i\right)'(z)}-p\right|>-\frac{p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\delta_i k_i}{|b|}}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{S}_p^*[b]$ dır [18].

Teorem 4.4.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\{0\}$, $\operatorname{Im}b\ge 0$, $\operatorname{Re}b\le\dfrac{p}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)}$ ve $k_i\ge 0$ olsun. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için

$$\sigma=p-\frac{p+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\alpha_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i}{|b|}},\ 0\le\sigma<p$$

olmak üzere eğer $D_{p,\lambda,\mu}^{l_i}g_i(t)\in\mathcal{S}_p^*(\sigma)$ ise bu durumda $\mathcal{G}_{n,p,l}^{\delta,\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{S}_p^*[b]$ dır [18].

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında $D^{l}_{p,\lambda,\mu} f(z)$ operatörünün $k-\mathcal{UST}_p(b,\alpha)$ ve $k-\mathcal{UCV}_p(b,\alpha)$ sınıflarına ait olması durumda $\mathcal{F}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}$ ve $\mathcal{G}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}$ integral operatörlerinin $\mathcal{S}^{*}_{p}(b,\gamma)$ ve $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ sınıflara ait olması için mertebe olan γ nın değerleri elde edildi. Ana teoremlerde Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 in ispatında analizden bilinen elementer işlemler kullanıldı. Diğer taraftan Lemma 4.3.1 den faydalanarak integral operatörlerin yıldızıllığını ispatlamada kullanılacak olan Lemma 4.3.2 ispatlandı. Son olarak Lemma 4.3.2 kullanılarak Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.4.1 in ispatları yapıldı.

Bu alanda çalışacak biri için ilk defa bu tezde tanımlanan $\mathcal{F}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}$ ve $\mathcal{G}^{\delta,\lambda,\mu}_{n,p,l}$ integral operatörlerinden yola çıkarak farklı genelleştirilmiş integral operatörler tanımlanabilir. Tanımlanan integral operatörler için farklı sınıflardaki geometrik özellikleri incelenebilir. Ayrıca ilk defa bu tezde ispatlanan Lemma 4.3.2 yardımıyla tanımlanan yeni integral operatörlerin yıldızıllığı araştırılabilir. Kısaca bu tezde kullanılan hem integral operatörler hemde ispatlardaki metodlar yeni araştırmacıların ufkunu açarak bu alanda yeni çalışmaların yapılmasına zemin oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Acu, M. and Owa S., 2006. "Note on a class of starlike functions", RIMS, Kyoto.

[2] Al-Oboudi, F.M. 2004. "On univalent functions defined by a generalized Salagean operator", Int. J. Math. Math. Sci. 27 (1), 429-1436.

[3] Alexander, J. W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. Annals of Mathematics, 17 (1), 12-22.ii

[4] Breaz, D. and Breaz N., 2002. "Two integral operators", Studia Universitatis Babes-Bolyai. Mathematica, 47 (3), 13-19.

[5] Breaz, D., *et al,* 2008. "A new integral univalent operator", Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 16, 11-16.

[6] Breaz, D. and Güney, H. Ö., 2008. "The integral operator on the classes $\mathcal{S}_{\alpha}^{*}(b)$ and $\mathcal{C}_{\alpha}(b)$", J. Math. Ineq., 2 (1), 97-100.

[7] Breaz, D., and Breaz N., 2006. "Some convexity properties for a general integral operator", J. Ineq. Pure Apply. Math., 7 (5), Art. 177.

[8] Breaz, D., 2008. "A Convexity property for an integral operator on the class $\mathcal{S}_{P}(\beta)$", J. Ineq. Appl. Article ID 143869, 4 pages.

[9] Breaz, D., *et al,* 2009. "A new general integral operator", Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25 (4), 407-414.

[10] Breaz, D., *et al,* 2009. "Some properties for integral operators on some analytic functions with complex order", Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 25, 39-43.

[11] Breaz, D., *et al,* 2010. "Convexity properties for some general integral operators on uniformly analytic functions classes", Comput. Math. Appl., 60 (12), 3105–3107.

[12] Bulut, S., 2008. "A note on the paper of Breaz and Güney", J. Math. Ineq., 2 (4), 549-553.

[13] Bulut, S., 2008. "Some properties for an integral operators defined by Al-Oboudi differential operator", J. Ineq. Pure Appl. Math., 9 (4), Art. 115, pp 5.

[14] Deniz, E. and Orhan, H., 2010. " The Fekete-Szegö problem for a generalized subclass of analytic functions", Kyungpook Math. J. 50, 37-47.

[15] Deniz, E. and Orhan, H., 2011. "Certain subclasses of multivalent defined by new multiplier transformations", Arab. J. Sci. Eng. 36, 1091-1112.

[16] Deniz, E., *et al,* 2015. "Classes of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains", submitted.

[17] Deniz, E., *et al,* 2011. "Some convexity properties for two new *p*-valent integral", Hacet. J. Math. Stat. 40 (6), 829 – 837.

[18] Deniz, E., *et al,* "Some starlikeness and convexity properties for two new *p*-valent integral operators defined by Deniz and Orhan differential operator", submitted.

[19] Duren, P.L. Univalent Functions. Springer-Verlag, New York 1983.

[20] Duren, P. L. and McLaughlin R., 1972. "Two-slit mappings and the Marx conjecture". Michigan Math. J., 19, 267-273.

[21] Goodman, A. W., 1991. "On uniformly convex functions", Ann. Polon. Math., 56(1), 87-92.

[22] Goodman, A. W., 1991. "On uniformly starlike functions", J. Math.Anal. Appl.,155, 364-370.

[23] Goodman, A.W., "Univalent Functions-I,II". Mariner Publishing Company, 245 p, 311 p, Tapma, Florida 1983.

[24] Frasin, B. A., 2006. "Family of analytic functions of complex order". Acta. Math. Acad. Paedagog. Nyhazi, (N.S.), 22 (2), 179-191.

[25] Frasin, B. A., 2010. "Convexity of integral operators of $p-$valent functions". Math. Comput. Model., 51, 601-605.

[26] Kanas, S., and Wisniowska, A., 1999. "Conic regions and *k*-uniform convexity", J.Comput. Appl. Math., 105(1-2), 327-336, "Continued fractions and geometric function theory", (CON-FUN), (Trondheim, 1997).

[27] Kanas, S., and Wisniowska, A., 2001, 2000. "Conic domains and starlike functions", Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45(4), 647-657.

[28] Koebe, P., 1907. "Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven". Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.

[29] Kwon, O. S., 2008. "Subordination properties of $p-$valent functions defined by generalized Salagean operator", Proc. Int. Symp. On development of geometric function theory and its applications, in Malaysia, pp.180-187.

[30] Lahenkani, J., "Coefficients of power of some subclasses of univalent functions and convolutions of some classes of polynomials and analytic functions". Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London 1985.

[31] Ma, W. C., and Minda, D., 1993. "Uniformly convex functions II", Ann.Polon. Math., 58(3), 275-285.

[32] Mohammed, A., *et al,* 2013. "New criterion for starlike integral operators", Analysis in Theory and Applications, 29 (1), 21-26.

[33] Miller, S. S., *et al,* 1978. "Starlike integral operators", Pacific Journal of Mathematics, 79 (1), 157-168.

[34] Miller, S.S. and Mocanu, P., "Differential subordinations: theory and applications", 225. CRC, 459 p, New York, USA 2000.

[35] Nasr, M. A. and Aouf, M. K., 1985. Starlike function of complex order. J. Natur. Sci. Math., 25 (1), 1-12.

[36] Orhan, H., *et al,* 2010. "The Fekete–Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains", Comput. Math. Appl. 59 (1), 283–295.

[37] Owa, S., 1991. "Some properties of certain multivalent functions". Applied Mathematics Letters, 4 (5), 79-83.

[38] Pescar, V. and Owa, S., 2000. "Sufficient conditions for univalence of certain integral operators". Indian Journal of Mathematics, 42 (3), 347-351.

[39] Pfaltzgraff, J. A., 1975. "Univalence of the integral of $\left(f'(z)\right)^{\lambda}$". Bull. London Math. Soc., 7 (3), 254-256.

[40] Ponnusamy, S. and Silverman, H., "Complex variables with Applications", Birkhäuser. Boston 2006.

[41] Rønning, F., 1993. "A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions", Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska Sect. A, 47, 123-134.

[42] Raducanu, D. and Orhan, H., 2010. "Subclasses of analytic functions defined by a generalized differential operator". Int. J. Math. Anal. 4(1), 1–15.

[43] Salagean, G. St., 1983. "Subclasses of univalent functions". Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 362-372.

[44] Shenan, G. *et al,* 2004. A certain class of multivalent prestarlike functions involving the Srivastava-Saigo-Owa fractional integral operator. Kyungpook Math., J. 44, 353-362.

[45] Saltık, G., *et al,* 2010. "Two new general $p-$valent integral operators". Mathematical and Computer Modelling, 52, 1605-1609.

[46] Shams, S., *et al,* 2004. "Classes of uniformly starlike and convex functions". Internat. J. Math. Sci., 55, 2959-2961.

[47] Wiatrowski, P., 1971. "The coefficients of a certain family of holomorphic functions". Zeszyty Nauk. Uniw. Lodz. Nauki Mat. Pryrod. Ser., (39 Mat.), 75-85.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra DENİZ

Doğum Yeri : Sivas

Doğum Tarihi : 07. 01. 1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ilıca Lisesi 2003

Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü 2008

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2015

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Kars Belediyesi'nde iş güvenliği uzmanı 2014

Yayınları (SCI ve diğer)

Diğer konular