T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SANAL KATSAYILI GRADYAN İÇEREN LİNEER OLMAYAN SCHRODİNGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Seval KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SANAL KATSAYILI GRADYAN İÇEREN LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Seval KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUB'un danışmanlığında Seval KESKİN'in Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "Sanal Katsayılı Gradyan İçeren Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oy...birliği............. ile kabul edilmiştir.

.12../.06../2015

	Adı Soyadı	**İmza**
Başkan :	Prof. Dr. Doğan KAYA.................	
Üye :	..Prof. Dr. Gabil ....YAGUB..............	
Üye :	...Yrd. Doç. Dr. Nigar Y. AKSOY.......	N. Yıldırım

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ....../...../20.... gün ve ....../........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Hidayet Metin ERDOĞAN

Enstitü Müdür V.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın başlangıcından bitimine kadar her aşamada çalışmayı yönlendiren, değerli bilgilerini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Doğan KAYA hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2015 Seval KESKİN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .... **iii**
ABSTRACT .... **vi**
SİMGELER DİZİNİ .... **vii**
1.GİRİŞ **1**
3.MATERYAL VE YÖNTEM **8**
3.1 Sanal Katsayılı Gradyan İçeren Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Oluşturulması 8
4. ARAŞTIRMA BULGULARI **10**
4.1 Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği 10
4.2 OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI 25
5. TARTIŞMA VE SONUÇ **31**
6. KAYNAKLAR **32**
ÖZGEÇMİŞ **34**

ÖZET

Bu tezde sanal Gradyan içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alındı. Amaç fonksiyoneli olarak final fonksiyoneli kullanıldı. Olası kontroller kümesi ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar sınıfından seçildi. Bu çalışmanın 4.1 bölümünde Galerkin yönteminden yararlanarak göz önüne alınan Schrödinger denklemi için I.çeşit sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliği ispat edildi. Sınır değer probleminin çözümünün varlığı kullanılarak 4.2 bölümünde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı gösterildi.

2015, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sanal Gradyan, Schrödinger Denklemi, Sınır Değer Problemi, Optimal Kontrol

ABSTRACT

In this thesis, an optimal control problem is considered for nonlinear Schrödinger equation with imaginary gradient. As an cost functional, final functional is used. The set of the probable controls is chosen from the class of the measurable and bounded functionals. In the 4.1 section of this work, the existence and uniqueness of the generalized solutions of the first type boundary value problem for considered Schrödinger equation are proved by using Galerkin's method. In the section 4.2, the existence of the solution of considered optimal control problem is shown by using the existence of the solution of the boundary value problem.

2015, 34 page

Keywords: Imaginary Coefficient Gradient, Schrodinger Equation, Boundary Value Problem, Optimal Control

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$l > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$x \in [0, l]$	Uzay değişkeni
$t \in [0, T]$	Zaman değişkeni
$\Omega_T = (0, l) x (0, T), \Omega = \Omega_T$	Verilen bölge

1.GİRİŞ

Schrödinger denklemiyle oluşturulan optimal kontrol problemleri bu çalışmadan önce farklı çalışmalarda da ele alınmıştır.[1-17]. Schrödinger denklemi ile oluşturulan kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri genellikle kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve mühendisliğin farklı alanlarında kullanılmıştır. [3,10,15]. Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, büyük bir öneme sahiptir. Özellikle, İskenderov A.D ve Yagubov G.Y'nin çalışmalarında hem lineer hem de lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisini oluşturmuş ve geliştirmişlerdir.

Bu tez çalışmasında sanal katsayılı Gradyan içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu çeşit problemler yüklü kütleciklerin dağılması sürecinin incelenmesi sonucu ortaya çıkan optimal kontrol problemlerinde ortaya çıkar [3]. Burada incelenen problem konulma açısından diğerlerinden farklıdır. Optimal kontrol problemleri Schrödinger denklemi için farklı konulma açısından İskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında incelenmiştir ve problemin iyi konulması ve çözümü için gereken şartlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir [5].

Bu tez çalışmasında ilk olarak ele alınan problemin iyi konulmasıyla ilgili sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla sanal katsayılı Schrödinger denklemi için I.çeşit sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğini içeren teorem ispatlanmıştır. Bu teorem kullanılarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı gösterilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ uzayı Hilbert uzayı olup elemanları (0,l) aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)\,dx \text{ ve } \|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}\,.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega=(0,l)x(0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\,dxdt \text{ ve } \|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}\,.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,l)$ uzayı Banach uzayı olup (0,l) aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu normuna sahip u=u(x) fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$ Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi(x,t)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in(0,l)\}$$

$$= \inf\left\{c\geq 0 : x\in(0,l)\, için \;\; |u(x)|\leq c\right\}$$

normuna sahip $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesi integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibidir:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in(0,T)}\|u(t)\|_B\,.$$

Burada $B \equiv R$ alınırsa $C[0,T] \equiv C^0([0,T];R)$ elde edilir.

Tanım 2.6: $L_2([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesi integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibidir:

$$\|u\|_{L_2([0,l],B)} = \left[\int_0^T \|u(.,T)\|_B^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Tanım 2.7: $W_2^1(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\phi(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.8: $W_2^2(0,l)$ uzayı Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\overline{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{d^2\overline{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0,l)}} \quad \text{ve} \quad \overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

Tanım 2.9: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların x değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$
$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

Tanım 2.10: $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup Ω 'nın sınırında sıfıra dönüşen her yerde yoğun olan düzgün fonksiyonlar uzayıdır.

Tanım 2.11: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$
$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.12: $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev Uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right) dxdt$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} dxdt,$$
$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}, \qquad \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega).$$

dır.

Tanım 2.13: V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u,\ v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa , V kümesine X de konveks küme denir.

Tanım 2.14: $\left(X,\|\ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de en az bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.15: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E de ise E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.16: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde; $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 2.17: X , Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.18: X normlu bir uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı E nin elemanlarının dizisinin bir limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 2.19: X bir vektör uzayı olmak üzere, $I : X \to R$ (veya□) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.20: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun.Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.21: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 2.22: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli(eş sürekli)dir denir.

Tanım 2.23: B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için:

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0,$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_{B^*} + o\langle h,u \rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir. Burada B^* uzayı B nin dual uzayıdır.

Teorem 2.24: Diyelim ki, U, B Banach uzayının bir alt kümesi $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \left\{ u \in U : J(u) = J_* = \inf_u J(u) \right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u^* \in U_*$ için $\left\langle J'(u^*), u - u^* \right\rangle \ge 0$ şartı sağlanır.

Teorem 2.25 (Weierstrass Teoremi): U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_u J(u) > \infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \ne \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar .

Lemma 2.26 (T.H.Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

eşitsizliğini sağlarsa $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K \exp\left(L\left(t - t_0\right)\right).$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir.

Lemma 2.27 (Cauchy-Bunjakovski Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_{\Omega} u\bar{v}dxd\tau\right| \le \left(\int_{\Omega} |u|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Sanal Katsayılı Gradyan İçeren Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Oluşturulması

Bu bölümde sanal katsayılı gradyan içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemini oluşturacağız. Optimal kontrol problemimiz,

$$J_\alpha(v) = \left\|\psi(.,T) - y\right\|^2_{L_{2(0,l)}} + \alpha\left\|v - \omega\right\|^2_{L_{2(0,l)}} \tag{1}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : V \in L_{2(0,l)}, \left|v(x)\right| \le b_0, \overset{0}{\forall} x \in (0,l) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + v(x)\psi + a_2\left|\psi\right|^2\psi = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \tag{2}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l) \tag{3}$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0,\ t \in (0,T) \tag{4}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$, $\Omega = \Omega_t$, $l > 0$, $T > 0$, $b_0 > 0$, $\alpha \ge 0$ verilen reel sayılar, a_2 kompleks sayı olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$a_2 = \operatorname{Re} a_2 + \operatorname{Im} a_2,\ \operatorname{Im} a_2 > 0,\ \operatorname{Re} a_2 < 0,\ \operatorname{Im} a_2 \ge 2\operatorname{Re} a_2 \tag{5}$$

$a_1(x)$ verilen reel değerli, ölçülebilir, sınırlı fonksiyon olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$\left|a_1(x)\right| \le \mu_1,\quad \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right| \le \mu_2,\quad \overset{0}{\forall} x \in (0,l) \tag{6}$$

$\varphi(x)$, $f(x,t)$ ve $y(x)$ verilen kompleks değerli, ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{7}$$

$$y \in L_2(0,l) \tag{8}$$

şartlarını sağlar, $\omega(x)$ verilen reel değerli ölçülebilir fonksiyon olup aşağıdaki şartı sağlar:

$$\omega \in L_2(0,l) \tag{9}$$

Her bir $v \in V$ için (2)-(4) şartlarında $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi sanal katsayılı gradyan içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için I.çeşit sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1: Her bir $v \in V$ için (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan ve (2)-(4) şartlarını $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega$ için sağlayan $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk olarak [1,2,6,11,12,13,16,17] çalışmalarında geniş bir biçimde incelenmiştir. Ayrıca sanal gradyan içeren lineer schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri daha önce [9,12] çalışmasında ele alınmıştır.

Bu tezden önce yapılmış olan çalışmalardaki sonuçlardan yararlanarak yukarıdaki (1)-(4) optimal kontrol problemini incelemek mümkün değildir. Bu nedenle ilk olarak, (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili soruları incelememiz gerekir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak, Galerkin yöntemini kullanarak (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini göstereceğiz. Bu teoremi kullanarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını göstereceğiz.

4.1 Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Teorem 4.1.1: Kabul edelim ki, a_2 kompleks sayısı ve $a_1(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (5)-(7) şartlarını sağlasın. Bu takdirde her bir $v \in V$ için (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan çözümü vardır, çözüm tektir ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} + \|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \right), \tag{10}$$

ve burada c_0 >0 bilinen bir sayıdır.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$\begin{gathered} Lu_k(x) = -a_0 \frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) = \lambda_k u_k(x), \quad x \in (0,l) \\ u_k(0) = u_k(l) = 0, \quad k = 1,2,.. \end{gathered} \tag{11}$$

özdeğer probleminin λ_k özdeğerlerine karşılık gelen $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...,$ öz fonksiyonlarını alalım. Burada,

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x)$$

şeklindedir. $[8]$ çalışmasından bilindiği gibi $k = 1,2,......$ özdeğerleri reeldir ve pozitiftir. Bunun yanı sıra $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,......$ öz fonksiyonları da reeldir ve $L_2(0,l), W_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında ortogonallık şartlarını sağlar. Ayrıca, $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,......$ öz fonksiyonlarının $L_2(0,l)$'de ortonormal olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\left(u_{k},u_{m}\right)_{L_2(0,l)}=\int_0^l u_k\left(x\right)u_m\left(x\right)dx=\delta_k^m,\ \ k,m=1,2,... \tag{12}$$

formülünün geçerli olduğunu kabul edelim. Burada,

$$\delta_k^m=\begin{cases}1,\ k=m,\\ 0,\ k\neq m,\end{cases}\quad k=m=1,2,....$$

Kronecker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^1\left(0,l\right)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2\left(0,l\right)$‘de ortogonallık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left[u_k,u_m\right]=\left(u_k,u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}=\int_0^l\left[a_0\frac{du_k}{dx}\frac{du_m}{dx}\right]dx=\lambda_k\delta_k^m,\ k,m=1,2,.. \tag{13}$$

$$\left\{u_k,u_m\right\}=\left(u_k,u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}=\int_0^l Lu_kLu_mdx=\lambda_k^2\delta_k^m,\ \ k,m=1,2,... \tag{14}$$

Ayrıca $u_k\left(x\right)$ fonksiyonları için

$$\left\|u_k\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}\leq d_k,\ \text{k=1,2,..} \tag{15}$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Burada $d_k>0$, $k=1,2...$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde arayabiliriz:

$$\psi^N\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^N C_k^N\left(t\right)u_k\left(x\right). \tag{16}$$

Burada $C_k^N\left(t\right)=\left(\psi^N\left(.,t\right),\left(u_k\right)_{L_2(0,l)}\right),\ k=\overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned}i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}&=\left(L\psi^N\left(.,t\right),u_k\right)_{L_2(0,l)}-\left(v\left(.\right)\psi^N\left(.,t\right),u_k\right)_{L_2(0,l)}\\ -i\left(a_1\left(.\right)\frac{\partial\psi^N\left(.,t\right)}{\partial x},u_k\right)_{L_2(0,l)}&-\left(a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N,u_k\right)_{L_2(0,l)}+f_k\left(t\right),\ \ k=1,2\end{aligned} \tag{17}$$

$$C_k^N\left(0\right)=\left(\varphi,u_k\right)_{L_2(0,l)}=\varphi_k,\ k=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Burada $f_k\left(t\right)=\left(f\left(.,t\right),u_k\right)_{L_2(0,l)}$ dir.

Gördüğümüz gibi (17) denklemler sistemi homojen olmayan sabit katsayılı lineer olmayan adi diferansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemin sağ tarafındaki $f_k(t)$

fonksiyonları için $f_k \in W_2^1(0,T)$, $k=1,2,..$ dir. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilinen teoreme göre (17)-(18) Cauchy probleminin $W_2^1(0,T)$ uzayında en az bir çözümü vardır$[6]$. Çözümün tekliğini göstermek için (17)-(18) Cauchy probleminin N e bağlı çözümlerinin yani $C_k^N(t)$ katsayılarının sınırlı olduğunu elde etmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.1.2: (17)-(18) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}$$
$$\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right). \tag{19}$$

İspat: (17) sisteminin k. denklemini $\overline{C}_k^N$ ile çarpıp k üzerinden $k=N$ e kadar toplayıp $[0,t]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_1}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - L\psi^N\overline{\psi}^N + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + a_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + a_2\left|\psi^N\right|^4\right)dx.d\tau$$
$$= \int_{\Omega_1} f\overline{\psi}^N dx.d\tau, \qquad \forall t\in[0,T].$$

Burada L operatörünün tanımını dikkate alalım ve sol tarafta ikinci terime kısmi integrasyon uygulayalım. Ayrıca $u_k(0)=u_k(l)=0,\ k=1,2,..0$ şartlarını kullanırsak;

$$\int_{\Omega_1}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi} - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + a_2\left|\psi^N\right|^4\right)dxd\tau$$
$$= \int_{\Omega_1} f\overline{\psi}^N dxd\tau,$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak;

$$i\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi} + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau + \int_{\Omega_1} ia_1(x)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right)dxd\tau$$
$$+2\operatorname{Im} a_2\int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau = \int_{\Omega_1}\left(f\overline{\psi}^N - \overline{f}\psi^N\right)dxd\tau, \quad \forall t\in[0,T].$$

eşitliği elde edilir. Buradan da kolaylıkla,

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_1}\left(a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \right) dxd\tau$$
$$= 2\int_{\Omega_1} \operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N \right) dxd\tau, \qquad \forall t\in[0,T].$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\int_{\Omega_1}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$ terimini ekleyelim. Bu takdirde son eşitlikten aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\psi^N\right|^2 \right) dxd\tau + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau$$
$$= \int_{\Omega_1}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_1}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N \right) dxd\tau,$$

Burada $u_k(0)=u_k(l)=0,$ k=1,2,... şartlarını kullanırsak sonuncu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terimin sıfıra eşit olduğunu söyleyebiliriz. Böylece sonuncu eşitlikten

$$\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx - \int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau$$
$$= \int_{\Omega_1}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_1}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N \right) dxd\tau,$$

yazılır. Burada $a_1(x)$ için olan (6) şartını kullanıp Cauchy - Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le$$
$$\le \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + (\mu_2+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \|f\|^2_{L_{2(\Omega)}}, \tag{20}$$

(17) formülünden aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^N C_k^N(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k u_k(x) = \varphi^N(x). \tag{21}$$

Buradan da Parseval özdeşliğini kullanarak;

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^N \left|\varphi_{1k}\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \left|\varphi_k\right|^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (20)'de $\forall t \in [0,T]$ için dikkate alırsak,

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1} \left|\psi^N\right|^4 dx.d\tau \le \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_{2(\Omega)}} + (\mu_2+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau.$$

eşitsizliğini yazarız. Burada Gronwall lemmasını kullanarak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_1} \left|\psi^N\right|^4 dx.d\tau \le c_1\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_{2(\Omega)}}\right), \ \forall t \in [0,T]. \tag{22}$$

Burada $c_1 > 0$ sayısı f ve φ den bağımsızdır. (17) sistemini,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k\right)_{L_2(0,l)} &= \left(a_0 \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, \frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)} - \left(v(.)\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} \\ -i\left(a_1(.)\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, u_k\right)_{L_2(0,l)} &- \left(a_2\left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k\right)_{L_2(0,l)} + f_k(t), \quad k = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{23}$$

şeklinde yazarız. Şimdi bu denklemin her iki tarafının t ye göre türevini bulalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2}, u_k\right)_{L_2(0,l)} &= \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x \partial t}, \frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)} - \left(\frac{v(.)\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k\right)_{L_2(0,l)} \\ -i\left(a_1(.)\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x}, u_k\right)_{L_2(0,l)} &- \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k\right)_{L_2(0,l)} + \frac{df_k(t)}{dt}, \ k = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{24}$$

ifadesini elde ederiz. Bu sistemin k. denklemini $\frac{\partial \overline{C_k}^N(t)}{\partial t}$ ile çarpıp k üzerinden $k=1$ den $k=N$ e kadar toplayıp $[0,t]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu takdirde,

$$\int_{\Omega_1} \left| i\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2} - a_0 \right| \left|\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}\right|^2 + i a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right)\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} + v(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 + dx d\tau$$

$$= \int_{\Omega_1} a_2 \left[2\left|\psi^N\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 + \left|\psi^N\right|^2 \left(\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right] dx d\tau \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına $\int_{\Omega_1} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau$ terimini eklersek aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau+4\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau$$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_1}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau-$$

$$-2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_1}\operatorname{Re}\left[\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right]dxd\tau=-2\operatorname{Re}a_2\int_{\Omega_1}\operatorname{Im}\left[\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right]dxd\tau. \quad (25)$$

$u_k(0)=u_k(l)=0\,, k=1,2,..$ sınır şartlarını ve (16) formülünü kullanırsak aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$\frac{\partial\psi^N(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial\psi^N(l,t)}{\partial t}=0,\ \forall t\in[0,T]. \quad (26)$$

Bu şartları kullanarak (25) in sol tarafındaki ikinci terimin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle (26) ve (6) şartlarını kullanarak (25) eşitliğinde

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|dx.d\tau\le\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \quad (27)$$

$$+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+(1+\mu_2)\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T].$$

yazılır. İlk olarak bu eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. Bu amaçla (17) sisteminin k. denkleminde $t=0$ alıp elde edilen denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarpalım ve k üzerinden $k=1$ den $k=N$ e kadar toplayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^t i\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2 dx=\int_0^t\left[L\psi^N(x,0)-ia_1(x)\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}-v(x)\psi^N(x,0)\right.$$

$$\left.-a_2\left|\psi^N(x,0)\right|^2\psi^N(x,0)+f(x,0)\right]\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)dx}{\partial t}.$$

Bu eşitlikten Cauchy – Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 5\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\int_0^t\left|a_1(x)\right|\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right|$$

$$+5\int_0^l\left|v(x)\right|^2\left|\psi^N(x,0)\right|^2dx+5\int_0^l\left|f(x,0)\right|^2dx+5\left|a_2\right|^2\int_0^l\psi^N\left|(x,0)\right|^6dx.$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\psi^N\left(x,0\right)=\varphi^N\left(x\right)$ eşitliğini ve denkleminin katsayıları üzerine konulan şartları kullanarak,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\|L\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\mu_2^2\left\|\frac{\partial\varphi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}$$
$$+5b_0^2\left\|\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\left\|f(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\left|a_2\right|^2\left\|\varphi^N\right\|^6_{L_6(0,l)}.$$

eşitsizliğini yazarız. Bu eşitsizlikte aşağıdaki:

$$\left\|L\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}, \tag{28}$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_3\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}, \tag{29}$$

$$\left\|\varphi^N\right\|^6_{L_6(0,l)}\le c_4\left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}, \tag{30}$$

$$\left\|\varphi^N\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\le c_5\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}, \tag{31}$$

$$\left\|f(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_6\left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)},\ \forall t\in\left[0,T\right]. \tag{32}$$

eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz :

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_7\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right). \tag{33}$$

Burada $c_7>0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır. Bu kestirimi (27) eşitsizliğinde dikkate alırsak ve Gronwall lemmasını uygularsak herhangi $t\in\left[0,T\right]$ için,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_1}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau$$
$$\le c_8\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \tag{34}$$

kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_8>0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial x}$ i değerlendirelim. Bu amaçla (23) ün k. denklemini $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpıp k üzerinden $k=1$den $k=N$e kadar toplayalım ve $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallersek,

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(i\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 - a_0\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x}\right)+ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)$$

$$+\int\limits_{\Omega_t}\left(v(x)\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}+a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau = \int\limits_{\Omega_t} f\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau,\quad \forall t\in[0,T].$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği onun kompleks eşleniğiyle toplarsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int\limits_{\Omega_t} a_0\left[\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x}\right)+\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)\right]dxd\tau = \int\limits_{\Omega_t} ia_1(x)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}-\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x}\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

$$+\int\limits_{\Omega_t} v(x)\left|\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}+\overline{\psi}^N\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\int\limits_{\Omega_t}\left[a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}-\overline{a}_2\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right]dxd\tau$$

$$-\int\limits_{\Omega_t}\left(f\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}+\overline{f}\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right)dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Buradan,

$$\int\limits_{\Omega_t} a_0\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau = -2\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

$$+2\int\limits_{\Omega_t} v(x)\,\mathrm{Re}\left(\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau+2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\Omega_t}\left(f\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau+2\,\mathrm{Re}\,a_2\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\mathrm{Re}\left(\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

$$-2\,\mathrm{Im}\,a_2\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\mathrm{Im}\left(\psi^N\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau,$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğe (6) şartını uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_{2(0,l)}} \le \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_{2(0,l)}} + 2b_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau+2\mu_1\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau$$

$$+2\int\limits_{\Omega_t}|f|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\left(2\,\mathrm{Re}\,a_2+2\,\mathrm{Im}\,a_2\right)\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitsizliğe Cauchy - Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + b_0\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 3\left(b_0+\mu_1+1\right)\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau$$

$$+\left(\operatorname{Re}a_2+\operatorname{Im}a_2\right)\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau + \mu_1\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau$$

$$+\left(\operatorname{Re}a_2+\operatorname{Im}a_2\right)\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}|f|^2 dxd\tau,\quad \forall t\in[0,T].$$

eşitsizliği elde edilir. (22) ve (34) kestirimlerinden yararlanarak sonuncu eşitsizlikten,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + c_9\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right)$$

$$+c_{10}\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{35}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (21) eşitliğini (29) da kullanırsak sonuncu eşitsizlikten,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{11}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right) + c_{10}\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau.$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{12}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{36}$$

Şimdi $\dfrac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}$ türevini değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla ilk olarak $L\psi^N(x,t)$ terimini değerlendirelim. Bunun için (17) sisteminin $k.$denklemini $\lambda_k\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp k üzerinden $k=1$ den $k=N$ e kadar toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l\left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = \int_0^l\left[i\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t} + ia_1(x)\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x} + v(x)\psi^N(x,t)\right.$$

$$\left.+a_2\left|\psi^N(x,t)\right|^2\psi^N(x,t) - f(x,t)\right]L\overline{\psi}^N(x,t)dx,\ \forall t\in[0,T].$$

Burada Cauchy - Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} &\le 5\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\mu_2^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\left|a_2\right|^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} \\ &+5b_0^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\left\|f(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{37}$$

$\psi^N \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ olduğu için [8-9] çalışmasından yararlanarak,

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} \le \beta\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{3}}_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(0,l)}, \tag{38}$$

eşitsizliğini yazarız. Burada $\beta > 0$ bilinen sabittir. Bu eşitsizlikten, (36) ve (22) kestirimlerinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} \le c_{13}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^2(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{39}$$

(22), (34), (36) ve (39) kestirimlerinden yararlanarak (37)'den aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{14}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{40}$$

Böylece L operatörünün formülünden yararlanarak $\dfrac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}$ için,

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \tag{41}$$

kestirimini elde ederiz. $c_{15} > 0$ sabiti N den bağımsızdır. Böylece (22), (34), (36) ve (41) kestirimlerinden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{16}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \tag{42}$$

burada $c_{16} > 0$ sabiti N den bağımsızdır. Böylece,

$$\int_0^T\sum_{k=1}^N\left|C_k^N(t)\right|^2 + \int_0^T\sum_{k=1}^N\left(\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right)^2 = \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)},$$

eşitsizliğini kullanarak (42) kestiriminin yardımıyla lemmanın geçerli olduğunu gösterdik. Lemma 1 ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. Bu amaçla,

$$l_{N,k}(t)=\left(\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)},\ \text{k,N=1,2,..} \tag{43}$$

biçiminde fonksiyonlar ailesi tanımlayalım.Bu formülü, Cauchy - Bunjakovski eşitsizliğini ve $u_k=u_k(x)$ fonksiyonlarının ortonormallık şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|l_{N,k}(t)\right\|\le\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}=\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T].$$

Burada

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\le c_{17}\left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}, \tag{44}$$

eşitsizliğini ve (19) kestirimini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right|\le c_{18},\ \forall t\in[0,T],\ \text{k,N=1,2,..} \tag{45}$$

Bu bağıntı $l_{N,k}(t)$, k,N=1,2,.. fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Şimdi bu ailenin $[0,T]$ aralığında tespit edilmiş k ve $\forall N\ge k$ için eş sürekli (aynı dereceden sürekli) fonksiyonlar ailesi olduğunu gösterelim. Gerçekten (17) sisteminin k. denklemini $(t,t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integrallersek ve kısmi integrasyon uygularsak elde edilen eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\\ +\mu_2\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}+\mu_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\\ +b_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}+\left|a_2\right|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_6(0,l)}^3d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\\ +\int_t^{t+\Delta t}\left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T]\end{aligned} \tag{46}$$

$[8,9]$ çalışmalarından bilindiği gibi $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2\left((0,T);\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(0,l)\right)$ uzayına, $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına gömüldüğünden;

$$\left\|\psi^N\right\|_{L_2(0,T;L_2(0,l))}\le c_{19}\left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \tag{47}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği, (42) kestirimini ve u_k lar için kabullendiğimiz (15) şartını kullanırsak (46) dan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}\left(t,t+\Delta t\right)-l_{N,k}\left(t\right)\right|\leq c_{20}d_k\left|\Delta t\right|^{\frac{1}{2}},\ \forall t\in\left[0,T\right],\ \text{k,N=1,2,..} \tag{48}$$

burada $c_{20}>0$ sabiti k,N ve Δt'den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlikten k tespit edildiğinde $\forall N\geq k$ için $\left\{l_{N,k}\left(t\right)\right\}$ fonksiyonlar ailesinin $\left[0,T\right]$ aralığında eş sürekli olduğu görülür. Böylece $\left\{l_{N,k}\left(t\right)\right\}$ fonksiyonlar ailesinin $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün, sınırlı ve eş sürekli olduğu ispatlandı. Bu takdirde köşegen sürecin yardımıyla öyle N_m, m=1,2,.. sayısı seçebiliriz ki; $\left\{l_{N_{m,k}}\left(t\right)\right\}$ alt dizisi $\left[0,T\right]$ aralığında her bir $k=1,2,..$ için $l_k\left(t\right)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k\left(t\right)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki gibi $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}l_k\left(t\right)u_k\left(x\right). \tag{49}$$

Şimdi $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ alt dizisinin $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonuna $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün olarak $L_2\left(0,l\right)$'de zayıf yakınsak olduğunu gösterelim. Gerçekten $\forall g\in L_2\left(0,l\right)$ ve $\forall t\in\left[0,T\right]$ için $\left[9\right]$ çalışmasındaki yöntemi kullanarak $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde

$$\left|\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),g\right)_{L_{2(0,l)}}\right|<\varepsilon, \tag{50}$$

yazabiliriz. Buradan bizim için gerekli olan ifadeyi elde ederiz. (42) kestirimine dayanarak $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ alt dizisinden (49) formülüyle tanımlanan $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayından zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye $W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ ile gösterelim. Bu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:

$m\to\infty$ için,

$$\psi^{N_m}\overset{zayıf}{\to}\psi\quad L_2\left(\Omega\right)\text{ da} \tag{51}$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial x}\overset{zayıf}{\to}\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad L_2\left(\Omega\right)\text{ da} \tag{52}$$

$$\frac{\partial^2\psi^{N_m}}{\partial x^2} \xrightarrow{zayıf} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega) \text{ da} \tag{53}$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t} \xrightarrow{zayıf} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega) \text{ da} \tag{54}$$

Bunun yanı sıra $[8,9]$ çalışmasından bildiğimiz kompakt gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömülür. Bu takdirde (51)-(54) limit bağıntılarını sağlayan $\{\psi^{N_m}\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:

$$m \to \infty \text{ için } \left\| \psi^{N_m} \to \psi \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0. \tag{55}$$

$\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (2)-(4) probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. İlk olarak (2) denkleminin $\forall (x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim. Bu amaçla (17) sisteminin k. denklemini $[0,T]$ aralığında sürekli olan $\forall\overline{\eta_k}(t)$ fonksiyonuyla çarpıp k üzerinden $k=1$ den $k = N^1 \le N$ e kadar toplayıp $[0,T]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu takdirde aşağıdaki integral özdeşliğini yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Bigg[& i\frac{\partial\psi^N}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x} + v(x)\psi^N \\ & + \int_\Omega a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N - f(x,t)\Bigg]\overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{56}$$

$$\forall\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \eta_k(t)u_k(x). \tag{57}$$

(51)-(55) limit bağıntılarını kullanırsak ve (56) integral özdeşliğinde $N = N_m$ alıp $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki özdeşliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + v(x)\psi + a_2|\psi|^2\psi - f(x,t)\right]\overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dxdt = 0. \tag{58}$$

Bildiğimiz gibi (57) biçiminde olan fonksiyonlar $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bundan dolayı $N' \to \infty$ için (58) integral özdeşliğinde limite geçersek $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için:

$$\int \left[i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + v(x)\psi + a_2|\psi|^2\psi - f(x,t)\right]\overline{\eta}(x,t)\,dxdt = 0.$$

özdeşliğini elde ederiz. Buradan da $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (1) denklemini $\forall (x,t)\in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını söyleyebiliriz. $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2) başlangıç şartını sağladığını ispatlayalım. $[8,9]$ çalışmasına göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden ; $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0,\ \forall t\in[0,T].$$

limit bağıntısını yazabiliriz. Bu limit bağıntısında $t=0$ alırsak $m\to\infty$ için,

$$0\le\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|\psi(.,0)-\psi^{N_m}(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi_1\right\|_{L_2(0,l)}\le 0$$

eşitsizliğinde limite geçersek;

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0,$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall} x\in(0,l)$ için (3) başlangıç şartını sağladığını görebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (4) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(s,.)-\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\to 0,\ s\text{=0,1 olur.}$$

Bu limit bağıntılarını ve $\psi^{N_m}(s,t)=0,\ s\text{=0,1},\ t\in[0,T]$ eşitliğini dikkate alıp

$$\left\|\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\le\left\|\psi(s,.)-\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)},$$

eşitsizliğinde $m\to\infty$ için limite geçersek,

$$\psi(0,t)=\psi(1,t)=0,\ \forall t\in[0,T].$$

sınır şartlarını elde ederiz. Böylece $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ sınıfından çözümü olduğunu ispatladık. (21) kestiriminde $N=N_m$ alıp $m\to\infty$ için limite geçersek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının normunun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak (10) kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz.

Bu kestirimi kullanarak çözümün tek olduğunu ispatlayalım. $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonlarının (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin herhangi iki çözümü olduğunu varsayalım. Bu fonksiyonların farkını $\omega(x,t) \equiv \psi(x,t) - \phi(x,t)$ ile gösterelim. Bu takdirde $\omega(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki problemin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\omega}{\partial x} + v(x)\omega + a_2\left(|\psi|^2 + |\phi|^2\right)\omega_t + a_2\psi\phi\bar{\omega} = 0,\ (x,t)\in\Omega, \tag{59}$$

$$\omega(x,0) = 0,\ x\in(0,l),\ \omega(0,t) = \omega(l,t) = 0,\ t\in[0,T].$$

Bu problemin çözümünü değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (59) denkleminin her iki tarafını $\bar{\omega}(x,t)$ fonksiyonuna çarpalım ve elde edilen eşitliği $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu takdirde,

$$\int_{\Omega_1}\left(i\frac{\partial\omega}{\partial t}\bar{\omega} + a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\bar{\omega} + ia_1(x)\frac{\partial\omega}{\partial x}\bar{\omega} + v(x)|\omega|^2\right)dxd\tau$$

$$= \int_{\Omega_1} a_2\left(|\psi|^2 + |\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau + \int_{\Omega_1} a_2\left(\psi\phi\left(\bar{\omega}\right)^2\right)dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafında yer alan ikinci terime kısmi integrasyon uygulayalım ve (59) da yer alan başlangıç ve sınır değer şartlarını kullanalım, elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak,

$$\int_0^l |\omega(x,t)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2\int_{\Omega_1}\left(|\psi|^2 + |\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau$$

$$= \int_{\Omega_1}\frac{da_1}{dx}|\omega|^2\,dxd\tau - 2\int_{\Omega_1}\operatorname{Im}\left(a_2\left[\psi\phi\left(\bar{\omega}\right)^2\right]\right)dxd\tau, \forall t\in[0,T].$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da (6) şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\int_0^l |\omega(x,t)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2\int_{\Omega_1}\left(|\psi|^2 + |\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau \tag{60}$$

$$\le \mu_3\int_{\Omega_1}|\omega(x,\tau)|^2\,dxd\tau + 2a_2\int_{\Omega_1}|\psi||\phi||\omega|^2 dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

(5) şartından $|a_2| \le \frac{3}{2}\operatorname{Im} a_2$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği kullanarak (60) dan,

$$\left\|\omega(.,t)\right\|_{L_{2(0,l)}}^2+\frac{1}{2}\operatorname{Im}a_2\int\limits_{\Omega_2}\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau+\le\mu_3\int\limits_{\Omega_1}|\omega(x,\tau)|^2\,dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

eşitsizliğini yazarız. Bu eşitsizlikten yararlanıp Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\left\|\omega(.,t)\right\|_{L_{2(0,t)}}^2=0,\ \forall t\in[0,T],$$

$$\omega(x,t)=0,\quad \overset{0}{\forall} x\in(0,l),\ \forall t\in[0,T]$$

olup buradan da;

$$\psi(x,t)\equiv\phi(x,t),\ \overset{0}{\forall} x\in(0,l),\ \overset{0}{\forall} t\in[0,T]$$

ifadesi yazılır. Başlangıç sınır değer probleminin var olan çözümü tektir. Teorem ispatlandı.

4.2 OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu alt bölümde (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını göstereceğiz.

Teorem 4.2.1: Farz edelim ki, Teorem 4.1.1'in şartları sağlansın. $y(x)$ ve $\omega(x)$ verilen fonksiyonlar olup (8) , (9) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\alpha\ge 0$ olduğunda $\forall\omega\in L_2(0,l)$ için (1)-(4) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat: Herhangi $\{v^k\}\subset V$ minimalleştirici dizisini alalım. Yani;

$$\lim_{k\to\infty}J_\alpha\left(v^k\right)=J_{\alpha*}=\inf_{v\in V}J_\alpha(v).$$

olsun. Her bir $v^k\in V$ kontrolüne karşılık gelen (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünü $\psi_k=\psi_k(x,t)\equiv\psi\left(x,t;v^k\right)$, k=1,2,..,ile gösterelim. Teorem 4.1.1'e göre (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin her bir $v^k\in V$ için $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi_k\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}^2\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(0,l)}^2+\left\|f\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(0,l)}^2+\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(0,l)}^6\right),\ \text{k=1,2,..}\qquad(61)$$

Burada eşitsizliğin sağ tarafı k dan bağımsızdır. V kümesi $L_\infty(0,l)$ Banach uzayında sınırlı küme olduğu için $\{v^k\}$ dizisinden öyle bir $\{v^{k_m}\}$ alt dizisi seçebiliriz ki $v \in L_\infty(0,l)$ elemanına $(*)$ zayıf yakınsasın $[7]$. Genel olsun diye $(*)$ zayıf yakınsayan alt diziyi de $\{v^k\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $k \to \infty$ için aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$v^k \overset{(*)zayıf}{\rightarrow} v \quad L_\infty(0,l) \text{ de.} \tag{62}$$

V kümesi $L_\infty(0,l)$ de kapalı konveks kümedir. Bu nedenle V kümesi $L_\infty(0,l)$ de $(*)$ zayıf kapalı küme olacaktır. Yani $v \in V$ şartı sağlanacaktır. Bu durumu göz önünde bulundurarak aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^l v^k(x) q(x)\,dx = \int_0^l v(x) q(x)\,dx, \forall q \in L_2(0,l). \tag{63}$$

$k \to \infty$ için

$$\psi_k \overset{zayıf}{\rightarrow} \psi \quad L_2(\Omega) \text{ da.} \tag{64}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \overset{zayıf}{\rightarrow} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad L_2(\Omega) \text{ da.} \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \overset{zayıf}{\rightarrow} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega) \text{ da.} \tag{66}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \overset{zayıf}{\rightarrow} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega) \text{ da.} \tag{67}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0((0,T), L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $k \to \infty$ için $\forall t \in [0,T]$ için,

$$\|\psi_k(.,t) - \psi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{68}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Bildiğimiz gibi her bir k için $\psi_k(x,t)$ fonksiyonları $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_k}{\partial x}+v(x)\psi_k\right)$$
$$+\int_{\Omega}\left(a_2|\psi_k|^2\psi_k-f(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxd\tau=0,\ k=1,2,... \tag{69}$$

integral özdeşliğini

$$\psi_k(x,0)=\varphi(x),\ \forall x\in\overset{0}{(0,l)},\ \text{k=1,2,..} \tag{70}$$

başlangıç şartını ve

$$\psi_k(0,t)=\psi_k(l,t)=0,\ \forall t\in\overset{0}{[0,T]},\ \text{k=1,2,..} \tag{71}$$

sınır şartlarını sağlar. (64)-(68) limit bağıntılarından yararlanarak $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ için aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu gösterelim:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}v^k(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=\int_{\Omega}v(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt, \tag{72}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}|\psi_k(x,t)|^2\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=\int_{\Omega}|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt. \tag{73}$$

İlk olarak (72) limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. Bu amaçla

$$\int_{\Omega}v^k(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=\int_{\Omega}v^k(x)\left(\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt+$$
$$+\int_{\Omega}\left(v^k(x)-v(x)\right)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt+\int_{\Omega}v(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt,\ \text{k=1,2,..} \tag{74}$$

eşitliğini kullanalım. Bu eşitliğin sağ tarafındaki 1. terimi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\left|\int_{\Omega}v^k(x)\left(\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt\right|\le\int_{\Omega}\left|v^k(x)\right|\left|\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right|\left|\overline{\eta}(x,t)\right|dxdt$$
$$\le\int_{\Omega}\left|v^k(x)\right|\left|\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right|\left|\overline{\eta}(x,t)\right|dxdt\le b_0\|\eta\|_{L_2(\Omega)}\|\psi_k-\psi\|_{L_2(\Omega)},\ \text{k=1,2,..}$$

(68) limit bağıntısını dikkate alıp $k\to\infty$ için bu eşitliğin her iki tarafında limite geçersek aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}v^k(x)\left(\psi_k(x,t)-\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=0. \tag{75}$$

$\psi.\overline{\eta}\in L_1(\Omega)$ olduğundan $q(x)=\int_0^T\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dt\in L_1(0,l)$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle (74) eşitliğinin sağ tarafındaki 2.terimin limitini $k\to\infty$ için (63)'ten yararlanarak aşağıdaki biçimde buluruz:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}\left(v^k(x)-v(x)\right)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=0. \tag{76}$$

Böylece (75)-(76) limit bağıntılarından yararlanark (74) ün her iki tarafında $k\to\infty$ için limite geçersek (72) limit bağıntısının geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi (73) limit bağıntısını ispatlamaya çalışalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\{\psi_k(x,t)\}$ dizisi $L_2(\Omega)$ da $\psi(x,t)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsar. Yani $k\to\infty$ için,

$$\|\psi_k-\psi\|_{L_2(\Omega)}\to 0, \tag{77}$$

limit bağıntısı geçerlidir. Bu takdirde $\{\psi_k(x,t)\}$ dizisinden $\psi(x,t)$ fonksiyonuna Ω bölgesinde hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz ki bu alt diziyi de $\{\psi_k(x,t)\}$ ile gösterelim. Böyle olduğu takdirde aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz.

$k\to\infty$ için,

$$\psi_k(x,t)\to\psi(x,t),\ \ \Omega \text{ da hemen hemen} \tag{78}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_\infty\left(0,T;W_2^1(0,l)\right)$ uzayına ve $W_2^1(0,l)$ uzayı $L_6(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $|\psi_k|^2\psi_k\in L_2(\Omega)$ olduğunu söyleyebiliriz. Yani;

$$\left(\int_{\Omega}\left|\left|\psi_k(x,t)\right|^2\psi_k(x)\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_{\Omega}\left|\psi_k(x,t)\right|^6dxdt\right)^{\frac{1}{2}}=\|\psi_k\|_{L_6(\Omega)}^3<+\infty \tag{79}$$

(78) limit bağıntısını ve (79) eşitsizliğini dikkate alırsak ve [8] çalışmasındaki Lemma'yı kullanırsak $\left\{\left|\psi_k(x,t)\right|^2\psi_k(x)\right\}$ dizisinin $L_2(\Omega)$'da $\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığını söyleyebiliriz. Böylece (73) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz. Her bir $k=1,2,..$için $\{\psi_k(x,t)\}$ dizisinin elemanlarının (69) integral özdeşliğini sağladığını biliyoruz. Bu nedenle (64)-(67) ve (72) ve (73) limit bağıntılarından yararlanarak (69) un her iki tarafında $k\to\infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1\left(x\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\left(x\right)\psi+a_2\left|\psi\right|^2\psi-f\left(x,t\right)\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt=0.$$

Buradan $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonu (2) denklemini $\overset{0}{\forall}\left(x,t\right)\in\Omega$ için sağladığı görülür.. $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonunun (3) başlangıç şartını sağladığını gösterelim. (68) limit bağıntısından yararlanarak $t=0$ için aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$\left\|\psi_k\left(.,0\right)-\psi\left(.,0\right)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0,\ \mathrm{k}\to\infty, \tag{80}$$

Diğer taraftan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi\left(.,0\right)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|\psi\left(.,0\right)-\psi_k\left(.,0\right)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\psi_k\left(.,0\right)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)},\ \mathrm{k}=1,2,.. \tag{81}$$

Bu eşitsizlikte (70) başlangıç sınır değer şartını ve (80) limit bağıntısını dikkate alırsak,
$k\to\infty$ için,

$$\left\|\psi\left(.,0\right)-\varphi\right\|_{L_2(0,\mathrm{l})}=0,$$

Buradan da,

$$\psi\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \overset{0}{\forall}x\in\left(0,l\right).$$

sınır şartlarını elde ederiz. Yani $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonunun (2) denkleminin yanı sıra (3) başlangıç şartını da sağladığını göstermiş olduk.

Şimdi $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonunun (65) sınır şartını sağladığını gösterelim. Gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayı her bir $x\in\left(0,l\right)$ için $L_2\left(0,l\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $x=0$ ve $x=l$ için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:
$k\to\infty$ için,

$$\left\|\psi_k\left(0,.\right)-\psi\left(0,.\right)\right\|_{L_{2(0,T)}}\to 0, \tag{82}$$

$$\left\|\psi_k\left(l,.\right)-\psi\left(l,.\right)\right\|_{L_{2(0,T)}}\to 0, \tag{83}$$

Bu limit bağıntılarını ve (71) sınır şartlarını dikkate alırsak;

$$\left\|\psi\left(s,.\right)\right\|_{L_{2(0,T)}}\le\left\|\psi\left(s,.\right)-\psi_k\left(s,.\right)\right\|_{L_{2(0,T)}}+\left\|\psi_k\left(s,.\right)\right\|_{L_{2(0,T)}},\ s=0,l \tag{84}$$

eşitsizliklerinde limite geçersek;

$$\left\|\psi(0,.)\right\|_{L_2(0,T)}=0 \text{ ve } \left\|\psi(l,.)\right\|_{L_2(0,T)}=0,$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerden $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu için,

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad \overset{0}{\forall} t\in(0,T). \tag{85}$$

sınır şartlarını elde ederiz. Yani limit fonksiyonu (4) sınır şartlarını sağlar. Böylelikle $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ limit fonksiyonuna karşılık gelen $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait çözümü olduğunu gösterdik. Yani $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$dir. Teorem 4.1.1 in hükmüne göre bu çözüm tektir ve çözüm için (10) kestirimi geçerlidir. Bu kestirimi kullanarak $\{\psi_k(x,t)\}$ dizisinin yakınsama özelliğini dikkate alarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu kullanarak (10) kestirimini elde edebiliriz.

Şimdi elde ettiğimiz bu bilgilerden yararlanarak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin alttan zayıf yarı sürekli olduğunu gösterelim. (68) limit bağıntısından yararlanarak $t=T$ için $k\to\infty$ için,

$$\left\|\psi_k(.,T)-\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0. \tag{86}$$

bağıntısını elde ederiz. $\alpha\geq 0$ olduğunu ve $L_2(0,l)$ uzayında normların alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak ve (80) den yararlanırsak herhangi $\omega\in L_2(0,l)$ için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{\alpha*}\leq J_\alpha(v)\leq \lim_{k\to\infty} J_\alpha(v^k)=\inf_{w\in V} J_\alpha(w)=J_{\alpha*}$$

Buradan $J_\alpha(v)=J_{\alpha*}$ buluruz. Yani $v\in V$ optimal kontrol probleminin çözümüdür. Teorem ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri [1-18] çalışmalarında incelenmiştir. Bu tezde incelenen Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi konulma açısından diğer çalışmalardan farklıdır. Çünkü bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemiyle oluşturulan optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu yüzden, bu çalışmanın sonuçları önceki çalışmaların sonuçlarından farklıdır. Daha önceki çalışmalardan daha günceldir ve hem teorik anlamda hem de uygulama anlamında öneme sahiptir.

6. KAYNAKLAR

[1] Akbaba, G.D., "Sanal Katsayılı Gradiyent İçeren Schrödinger Denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi", Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011.

[2] Aksoy, Y.N., "Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri Onların Sonlu Fark Yaklaşımı", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.

[3] Butkovskiy, A.G., Samoilenko Y.I. "Kuantum Mekanik Süreçlerin Kontrolü", M.Nauka-1984-S.256 (Rusça).

[4] Hao, D.N., "Kuantum Objektlerin Optimal Kontrolü/ Otomatik ve Telemekanik", 1986, No 2,S.1420 (Rusça).

[5] İskenderov, A.D., "Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerinin Varyasyon Konumları Hakkında", DAN SSR-1984-c.274-No:3-s.531-533, "Durgun Olmayan Schrödinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması //Matematik Modellenmenin ve Optimal Kontrolün", Bakü, 2001-s.6-36 (Rusça).

[6] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A.,"Kuantum Potansiyellerinin İdentfikasyon", Bakü, Çaşıoğlu Yayıncılık, 2012, 552 s.

[7] Kolmogorov, A.N., Fomin S.V., "Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanlar", M. Nauka. 1989-s. 624 (Rusça).

[8] Ladijenskaya, O.A., "Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri", M:Nauka, 1973 (Rusça).

[9] Ladijenskaya, O.A.,"Parabolik Tip Lineer ve Kuazilineer Denklemler", Moskova, Nauka, 1976.

[10] Landau, L.D., Lifşhitz, E. M., "Kuantum Mekaniği", Cilt 3-m-1963-s. 702 (Rusça).

[11] Potapov, M. M., Razgulin, A.V., Şameeva, T.Y., "Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyon", Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik)1987. No:1-s. 8-13 (Rusça).

[12] Razgulin, A.V., “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımlar”, Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri :1 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1988. No:2-s.28-33 (Rusça).

[13] Toyoğlu, F. “ İki Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemleri Ve Onların Nümerik Çözümü”, Doktora Tezi, 2012.

[14] Vasilyev, F.P., “Extremal Problemlerin Çözüm Metodlar”, M:Nauka. 1981-s.400 (Rusça).

[15] Vorontsov, M.A., Şhmalquazen,V.I.,“Optiğin Prensipleri”, Moskova, Nauka, 1984.

[16] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri:Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt:16,No:1-2,s.46-51, M.A. “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin İdentfikasyon Problemi Hakkında/Diferansiyel Denklemler”, 1997, c. 33, No:12, s. 1691-1698 (Rusça).

[17] Yagubov, G.Ya., “Kuazi Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayı ile Optimal Kontrol”, Bilimler Doktora Tezi, 1994.

[18] Yetişkin H. “Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşım”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seval KESKİN

Doğum Yeri : Çaycuma

Doğum Tarihi : 20.07.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çaycuma Lisesi

Lisans : Kafkas Üniversitesi

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi