T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDİNGER TİP DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ezgi DEVECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHRÖDİNGER TİP DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ezgi DEVECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN – 2015
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ezgi Deveci'nin Prof. Dr. Gabil Yagub'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Schrodinger Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Farklar Yöntemi İle Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy...birliği.... ile kabul edilmiştir.

16/06/2015

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	....
Üye	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../201.. gün ve ..../..................... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hidayet Metin ERDOĞAN

Enstitü Müdür V.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada Schrödinger denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümü ele alınmıştır. Ele alınan optimal kontrol probleminin ayrık biçiminin oluşturulması incelenmiş ve çözüm için fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır.

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi, yardım ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Ana Bilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım çalışmalarım esnasında yine değerli katkılarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyelerinden sayın Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan, maddi ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2015 Ezgi DEVECİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ii
ÖZET v
ABSTRACT vi
SİMGELER DİZİNİ vii
1.GİRİŞ 1
2.KURAMSAL TEMELLER 3
3. MATERYAL ve YÖNTEM 6
3.1. Optimal Kontrol Probleminin Oluşturulması 6
3.2. Optimal Kontrol Probleminin Ayrık Biçiminin Oluşturulması 8
4. Araştırma Bulguları 10
4.1. Fark Şemasının Kararlılık Kestirimi 10
4.2 Fark Şemasının Hatası için Kestirim 15
4.3.Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı 25
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 34
6. KAYNAKLAR 35
ÖZGEÇMİŞ 38

ÖZET

Bu tezde, Schrödinger denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümü ele alınmıştır. 3.1 bölümünde lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. 3.2 bölümünde ise 3.1 bölümünde tanımlanan optimal kontrol problemi sonlu farklar yöntemi kullanılarak diskritlendirilmiştir. 4.1 bölümünde sonlu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilerek 4.2 bölümünde fark şemasının hatası değerlendirilir. 4.3 bölümünde fark şemasının hatası için kestirimi kullanarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2015, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan Schrödinger denklemi, Optimal kontrol, Sonlu farklar, Fonksiyonele göre yakınsama

ABSTRACT

In this thesis, the solution by the finite difference method of an optimal control problem for schrödinger equation is considered. In section 3.1, an optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation is considered. Also, in section 3.2, the optimal control problem which is defined in section 3.1 has been discretized. By obtaining the stability estimation for solution of the finite difference scheme in the section 4.1, the error of the difference scheme has been evaluated in section 4.2. In section 4.3, by using the estimation for the error of difference scheme, the covergence of the finite difference approxination according to functionel is shown by using the prediction for the error of difference schemes. Also, in section 5, the difference of this thesis from the previous works has been emphasized.

2015, 44 page

Key Words: Nonlinear Schrödinger equation, Optimal control, Finite difference. According to the functional convergence

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$l > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$\delta_{\bar{t}}\phi_{jk} = \left(\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right)/\tau$	t ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = \left(\phi_{jk} - \phi_{j-1k}\right)/h$	x e göre sol fark
$\delta_{x}\phi_{jk} = \left(\phi_{j+1k} - \phi_{jk}\right)/h$	x e göre sağ fark

1.GİRİŞ

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar [1], [2], [3] bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse uygulama açısından önemlidir. Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Bu çalışmalardan A.G. Butkovskiy, A.D. İskenderov ve G.Y. Yagub un ve onların öğrencilerinin çalışmalarını önemle dikkate almak gerekir. A.D. İskenderov ve G.Y. Yagub un çalışmalarında hem lineer hem de lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi oluşturulmuş ve geliştirilmiştir.

Optimal kontrol problemleri için incelenen sorulardan biri onların nümerik çözümler sorusudur. Optimal kontrol problemlerini çözmek için şimdiye kadar farklı metotlar kullanılmıştır. Bu metotlardan birisi sonlu farklar metodudur. Sonlu farklar metodunun temelinde ünlü Rus matematikçi A.N. Tikhonov, A.A. Samarski ve diğerlerinin oluşturduğu ve geliştirdiği bulunmaktadır [13−14]. Optimal kontrol problemlerinin çözümüne sonlu farklar metodu uygulanırken önce kontrol olunan sistem ifade edilen diferansiyel denklem fark şemasına dönüştürülür ve elde edilen fark şeması için kararlılık ve şemanın hatası sorunları incelenir. Bu soruların incelenmesinde farklar şemasının teorisiyle ilgili bilgiler önemli rol oynar. Göz önüne alınan fark şeması için elde edilen sonuçlar optimal kontrol probleminin sonlu farklar metoduyla çözümünde kullanılır. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümünün kontroller, zaman değişkenine bağlı olduğunda nadiren incelenmesinden dolayı bu tez çalışması gerek teorik gerekse uygulama açısından önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında da Schrödinger tip denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin nümerik çözümü ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının materyal ve yöntem bölümünün birinci kısmı Schrödinger denklemi için kontrol problemi tanımlanmış ve onun sonlu fark yaklaşımı sonlu farklar metodunun yardımıyla oluşturulmuştur. Araştırma bulguları bölümünde önce fark şemasının hatası incelenmiştir. İnceleme sonucunda şemanın hatası için kestirim elde edilmiştir. Elde edilen iki kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı gösterilmiştir. Önce bunun için sürekli fonksiyonel ile diskrit fonksiyonelin değerleri arasındaki fark kestirilmiş ve bu değerlendirmede fark şeması için elde edilen kestirim önemli rol oynamıştır. Fonksiyoneller arasındaki farktan ve fark şemasının hatası olan kestirimden faydalanarak fonksiyonele göre yakınsaklık sonuç olarak elde edilmiştir. Schrödinger denklemi için optimal kontrol probleminin nümerik çözümüyle ilgili olan sorular ve sonlu farklar metodunun metodu nun yakınsaklığı önce $[4],[7],[8],[9-10],[11],[12]$ çalışmalarında incelenmiştir.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2\left(0,l\right)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\left(0,l\right)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle}_{L_2(0,l)}.$$

Tanım 2.2: $L_2\left(\Omega\right)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle}_{L_2(\Omega)}.$$

Tanım 2.3: $L_\infty\left(0,l\right)$ Banach uzayı olup elemanları $\left(0,l\right)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\max_{x\in(0,l)}\left|u\left(x\right)\right|$$

Tanım 2.4: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B$$

Tanım 2.5: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, $\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ \frac{\partial\psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle\psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int\Big[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} +$$
$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial t}\Big]dxdt,$$
$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}} = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle}.$$

Tanım 2.6: $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Lemma 2.1: (Gronwall Lemması, Vasilyev F.P., 1981). $a\geq 0, b\geq 0$ olmak üzere $\varphi_j,\ j=\overline{0,N}$ sayıları

$$0\leq\varphi_0\leq a, 0\leq\varphi_{j+1}\leq a+b\sum_{m=0}^{j}\varphi_m,\ j=\overline{0,N-1}$$

Şartlarını sağlıyor ise bu takdirde

$$0\leq\varphi_j\leq a(1+b)^j,\ j=\overline{0,N}$$

Eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \le \varphi_{j-1} \le a + b\sum_{m=j}^{N-1}\varphi_m \,,\; j = \overline{0, N-1}\,, 0 \le \varphi_{N-1} \le a \;\;,$$

Şartları sağlanıyor ise bu takdirde

$$0 \le \varphi_j \le a(1+b)^{N-j-1}\,,\; j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Optimal Kontrol Probleminin Oluşturulması

Bu alt bölümde lineer olmayan kısımda kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır.

ℓ ve T verilen pozitif sayılar olmak üzere $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\Omega_t = (0,l) \times (0,t)$, $\Omega = \Omega_T$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \int_\Omega |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|^2 \, dxdt \tag{1}$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(t) : v \in L_2(0,T), 0 < b_0 \leq v(t) \leq b_1, \left| \frac{dv(t)}{dt} \right| \leq b_2, \mathring{\forall} t \in (0,v) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - v(t)\psi_k + a_1 |\psi_k|^2 \psi_k = 0, k = 1,2, (x,t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x), k = 1,2, x \in (0,l), \tag{3}$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_1(l,t) = 0, t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T) \tag{5}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada ; $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $a_0 > 0$, $a_1 < 0$ verilen sayılar , φ_1, φ_2 fonksiyonları

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \varphi_2 \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(l)}{dx} = 0 \tag{6}$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

$\forall v \in V$ için $(2)-(4)$ şartlarından $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması Schrödinger denklemi için 1. tip sınır değer problemi, $(2)-(3)$ ve (5) şartlarından $\psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi ise 2. tip sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1: $\forall v \in V$ için $(2)-(4)$ sınır değer probleminin çözümü olarak $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olan ve $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega$ için $(2)-(5)$ şartlarını sağlayan $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v)$, $\psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonlar anlaşılır.

$[7]$ çalışmasındaki sonuçları kullanarak $\forall v \in V$ için $(2)-(5)$ sınır değer probleminin bir çözüme sahip olduğu ve bu çözüm için

$$\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_1 \left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|\varphi_1\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)} + \|\varphi_1\|^9_{L_2(0,l)} \right), \tag{7}$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_2 \left(\|\varphi_2\|_{W_2^{2}(0,l)} + \|\varphi_2\|^3_{W_2^{1}(0,l)} + \|\varphi_2\|^9_{L_2(0,l)} \right) \tag{8}$$

kestirimlerinin geçerli olduğu elde edilir. Burada $c_1 > 0, c_2 > 0$ sayılardır.

$[7,20]$ çalışmalarındaki sonuç ve yöntemleri kullanarak $(1)-(5)$ optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu söyleyebiliriz , yani ;

$$V_* = \left\{ v^* \in V; J\left(v^*\right) = J_* = \inf_{v \in V} J(v) \right\} \neq \varnothing \qquad \text{dır.}$$

3.2. Optimal kontrol probleminin ayrık biçiminin oluşturulması

Bu alt bölümde sonlu farklar yöntemi, 3.1 bölümünde tanımlanan lineer olmayan Schrödinger denklemi için kontrol probleminin çözümüne uygulanır. Schrödinger denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu farklar metoduyla çözümüne ait farklı konulmadan önce $[4],[7],[8],[9],[10],[11],[12]$ çalışmaları incelenmiştir.

Şimdi $(1)-(5)$ optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısını yazalım. Bu amaçla önce Ω bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim:

$$\left\{\left(x_j,t_k\right)_n\right\},\ n=1,2,...,\ x_j=jh-h/2,\ j=\overline{1,M_n-1},\ t_k=k\tau$$

$$k=\overline{1,N_n},\ h=h_n=l/\left(M_n-1\right),\ \tau=\tau_n=T/N_n$$

$$M=M_n,\ N=N_n,\ \delta_{\bar{t}}\phi_{jk}=\left(\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right)/\tau$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}=\left(\phi_{jk}-\phi_{j-1k}\right)/h,\ \delta_{x}\phi_{jk}=\left(\phi_{j+1k}-\phi_{jk}\right)/h,$$

$$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk}=\left(\phi_{j+1k}-2\phi_{jk}+\phi_{j-1k}\right)/h^2$$

Her bir n≥1 doğal sayısı için

$$I_n\left([v]_n\right)=\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk}^2\right|^2 \tag{9}$$

fonksiyonunun

$$V\equiv\left\{[v]_n:[v]_n=\left(v_1,v_2,...v_N\right),0<b_0\le v_k\le b_1,k=\overline{1,N},\left|\delta_{\bar{t}}v_k\right|\le b_2,k=\overline{2,N}\right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}^p+a_0\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk}^p-v_k\phi_{jk}^p+a_1\left|\phi_{jk}^p\right|^2\phi_{jk}^p=0,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{10}$$

$$\phi_{j0}^p=\varphi_j^p,\ j=\overline{0,M},\ p=1,2 \tag{11}$$

$$\phi_{0k}^1=\phi_{Mk}^1=0,\ k=\overline{1,N} \tag{12}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{1K}^{2} = \delta_{\bar{x}}\phi_{Mk}^{2} = 0,\ k = \overline{1, N} \tag{13}$$

şartları altında minimumu bulunması problemini göz önüne alalım. Burada φ_j^p, $p = 1, 2$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varphi_j^p = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \varphi_p(x)dx,\ p = 1, 2\ \ j = \overline{1, M-1}, \tag{14}$$

$$\varphi_0^1 = \varphi_M^1 = 0,\ \varphi_0^2 = \varphi_1^2,\ \varphi_M^2 = \varphi_{M-1}^2. \tag{15}$$

şeklinde tanımlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Fark Şemasının Kararlılık Kestirimi

Gözüktüğü gibi $(9)-(13)$ problemi de optimal kontrol problemi olup $(9)-(5)$ optimal kontrol probleminin diskrit aynısıdır. Her bir $[v]_n \in V_n$ için $(10)-(13)$ şartlarından $\phi_{jk}^p, p=1,2$ ağ fonksiyonlarının bulunması problemi $(2)-(5)$ sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimini elde edelim.

Teorem 4.1.1: Her bir $[v]_n \in V_n$ için $(13)-(15)$ fark şemasının çözümü

$$h\sum_{j=p}^{M-p+1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}^p\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^p\right|^2 \le c_3\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j^p\right|^2 + h\sum_{j=p}^{M-p+1}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j^p\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4\right)$$
$$m=\{1,2,...N\},\ p=1,2 \tag{16}$$

kestirimi sağlar. Burada $c_3>0$ sayısı τ, h ve m den bağımsızdır.

İspat: İlk önce ϕ_{jk}^1 ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bilindiği üzere $t=t_k$ katlarında ϕ_{jk}^1 için fark şeması

$$\zeta_{uk}=\zeta_{Mk}=0, k=\overline{1,N}$$

şartını sağlayan $\{(x_k,t_k)\}$ ağında tanımlanan ζ_{jk} ağ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}^1\bar{\zeta}_{jk} - a_0 h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^1\delta_{\bar{x}}\bar{\zeta}_{jk}X_j - \\ &-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_k - a_1\left|\phi_{jk}^1\right|^2\right)\phi_{jk}^1\bar{\zeta}_{jk} = 0, k=\overline{1,N} \end{aligned} \tag{17}$$

toplam özdeşliğine denktir.

Burada

$$X_j = \begin{cases} 1, \; j = 2, \ldots, M-1 \\ \frac{1}{2}, \; j = 1, M \end{cases}$$

Eğer $c_{1,}$ de $\bar{\zeta}_{jk}$ nın yerine $\tau\bar{\phi}^1_{jk}$ alıp elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkartırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1} \tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi^1_{jk}\bar{\phi}^1_{jk} + \delta_{\bar{t}}\bar{\phi}^1_{jk}\phi^1_{jk}\right) = 0, k = \overline{1, N} \tag{18}$$

Buradan da

$$\begin{aligned} &\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi^1_{jk}\bar{\phi}^1_{jk} + \delta_{\bar{t}}\bar{\phi}^1_{jk}\phi^1_{jk}\right) = \\ &= \left|\phi^1_{jk}\right|^2 - \left|\phi^1_{jk-1}\right|^2 + \left|\phi^1_{jk} - \phi^1_{jk-1}\right|^2 \end{aligned} \tag{19}$$

formülünden yararlanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 = 0, k = \overline{1, N}$$

eşitliğini elde ederiz . Bu eşitliği k üzerinden $k = 1,\ k = m \le M$ e kadar toplarsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 - h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j0}\right|^2 + h\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi^1_{jk} - \phi^1_{jk-1}\right|^2 = 0$$

buluruz. $\phi^1_{j0} = \varphi^1_j,\ j = \overline{0, M}$ şartını kullanırsak ve sol taraftaki üçüncül terimin negatif terimini göz önünde bulundurursak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi^1_{jm}\right|^2 + h\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi^1_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi^1_j\right|^2,\ \forall m \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{20}$$

kestirimini elde ederiz

Şimdi (17) toplam özdeşliğinde $\bar{\zeta}_{jk}\ \bar{\zeta}_{jk}$ nın yerine $\tau\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}^1_{jk}$ alalım ve elde edilen eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplayalım . Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
& a_0 h \sum_{j=1}^{M} \tau \left[\delta_{\bar{t}} \left(\delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right) \delta_{\bar{x}} \overline{\phi}_{jk}^1 + \delta_{\bar{t}} \left(\delta_{\bar{x}} \overline{\phi}_{jk}^1 \right) \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right] + \\
& -a_1 h \sum_{j=1}^{M-1} \tau \left[\left| \phi_{jk}^1 \right|^L \phi_{jk}^1 \delta_{\bar{t}} \overline{\phi}_j^1 + \left| \phi_{jk}^1 \right|^L \overline{\phi}_{jk}^1 \delta_{\bar{t}} \phi_{jk}^1 \right] + \\
& + h \sum_{j=1}^{M-1} v_k \tau \left(\phi_{jk}^1 \delta_{\bar{t}} \overline{\phi}_{jk}^1 + \overline{\phi}_{jk}^1 \delta_{\bar{t}} \phi_{jk}^1 \right) = 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada (19) eşitliğinden ve

$$
\begin{aligned}
& \tau \left(\delta_{\bar{t}} \left(\delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right) \delta_{\bar{x}} \overline{\phi}_{jk}^1 + \delta_{\bar{t}} \left(\delta_{\bar{x}} \overline{\phi}_{jk}^1 \right) \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right) = \\
& = \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right|^L - \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}^1 \right|^L + \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}^1 \right|^L
\end{aligned}
\tag{22}
$$

formülünden yararlanırsak

$$
\begin{aligned}
& a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left[\left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right|^2 - \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1} \right|^2 + \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1} \right|^2 \right] X_j + \\
& -a_1 h \sum_{j=1}^{M-1} \left| \phi_{jm}^1 \right|^2 \left(\left| \phi_{jk}^1 \right|^2 - \left| \phi_{jk-1}^1 \right|^2 + \left| \phi_{jk}^1 - \phi_{jk-1}^1 \right|^2 \right) = \\
& = -h \sum_{j=1}^{M-1} v_k \left(\left| \phi_{jk}^1 \right|^2 - \left| \phi_{jk-1}^1 \right|^2 + \left| \phi_{jk}^1 - \phi_{jk-1}^1 \right|^2 \right), \ \forall k \in \{1, 2, ..., N\}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten $\forall k \in \{1, 2, ..., N\}$ için

$$
\begin{aligned}
& a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left[\left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 \right|^2 - \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}^1 \right|^2 + \left| \delta_{\bar{x}} \phi_{jk}^1 - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1} \right|^2 \right] X_j + \\
& + a_1 \sum_{j=1}^{M-1} \left| \phi_{jk}^1 \right|^2 \left(\left| \phi_{jk}^1 \right|^L - \left| \phi_{jk-1}^1 \right|^2 + \left| \phi_{jk}^1 - \phi_{jk-1}^1 \right|^2 \right) = \\
& = h \sum_{j=1}^{M-1} \left(v_k \left| \phi_{jk}^1 \right|^2 - v_{k-1} \left| \phi_{jk-1}^1 \right|^2 + v_{jk} \left| \phi_{jk}^1 - \phi_{jk-1}^1 \right|^2 - \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \delta_{\bar{t}} v_k \left| \phi_{jk-1} \right|^2 \right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$v = 1$ olduğunda (23) den aşağıda ki eşitliği yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left(\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j1}^1\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j0}^1\right|^2+\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j1}^1-\delta_{\bar{x}}\phi_{j0}^1\right|^2\right)-\\
&-a_1 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j1}^1\right|^2\left(\left|\phi_{j1}^1\right|^2-\left|\phi_{j0}^1\right|^2+\left|\phi_{j1}^1-\phi_{j0}^1\right|^2\right)=\\
&=-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_1\left|\phi_{j1}^1\right|^2-v_1\left|\phi_{j0}^1\right|^2+v_1\left|\phi_{j1}^1-\phi_{j0}^1\right|^2\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(24) eşitliğinin her iki tarafın üzerine $k=2$ den $k=m\le N$ kadar toplarsak

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}^1\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j1}^1\right|^2\right)X_j+a_0 h\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^1-\delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}^1\right|^2 X_j-\\
&-\tilde{a}_1 h\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^1\right|^2\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^2-\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2+\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk-1}^1\right|^2\right)=\\
&=-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_m\left|\phi_{jk}^1\right|^2-v_1\left|\phi_{j1}^1\right|^2\right)-h\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_k\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk-1}^1\right|^2-\\
&-\tau h\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_k\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2,\ \forall m\in\{2,3,...,N\}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

eşitliğini elde ederiz.Bu eşitliği ısı eşitliği ile toplarsak

$$
\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left(\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}^1\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j0}^1\right|^2 X_j+a_0 h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^1-\delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}^1\right|^2 X_j+\right.\\
&\left.+a_1 h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^1\right|^2\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^2-\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2+\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk-1}^1\right|^2\right)\right)=\\
&=h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_m\left|\phi_{jm}^1\right|^2-v_1\left|\phi_{j0}^1\right|^2\right)-h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}v_k\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk-1}^1\right|^2-\\
&-\tau h\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}v_k\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2,\ \ \forall m\in\{2,3,...,N\}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$
\begin{aligned}
&\left|\phi_{jk}^1\right|^2\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^2-\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^4-\left|\phi_{jk-1}^1\right|^4\right)+\\
&+\frac{1}{2}\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^2-\left|\phi_{jk-1}^1\right|^2\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(\left|\phi_{jk}^1\right|^4-\left|\phi_{jk-1}\right|^4\right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
& a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+\frac{|a_1|}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le \\
& \le \tilde{c}_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4\right),\ \forall m\in\{2,3,...,N\}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

eşitsizliğini buluruz. Aynı şekilde (25) dan

$$
\begin{aligned}
& a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{j1}\right|^2+\frac{|a_1|}{L}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{j1}\right|^4 \le \\
& \le \tilde{c}_2\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4\right),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

kestirimi buluruz. Bu kestirimlerden ve (29) kestirimimizden kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
& a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+\frac{|a_1|}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le \\
& \le \tilde{c}_3\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4\right),\ \forall m\in\{1,2,...,N\}
\end{aligned}
$$

Buradan ve (20) den ϕ_{jk}^1 için teoremin ispatının geçerli olduğunu buluruz. Şimdi ϕ_{jk}^2 için kestirim elde etmeye çalışalım. Bilindiği üzere her $t=t_k$ katında ϕ_{jk}^2 için tork şeması $\zeta_{0k}=\zeta_{1k}$, $\zeta_{mk}=\zeta_{m-1k}$, $k=\overline{1,N}$ şartını sağlayan ζ_{jk} ağ fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
& h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}^L\bar{\zeta}_{jk}\right)-h\sum_{j=2}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^2\delta_{\bar{x}}\bar{\zeta}_{jk}- \\
& -h\sum_{j=1}^{M-1}v_k\phi_{jk}^L\bar{\zeta}_{jk}+a_1 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^L\right|^2\phi_{jk}^L\bar{\zeta}_{jk}=0\ ,\ \forall k\in\{1,2,...,N\}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Bu integral özdeşliğinden yararlanılarak üstteki denk işlemleri yaparak kolaylıkla ϕ_{jk}^2 ağ fonksiyonu için teoremin ispatının geçerli olduğunu elde ederiz.

4.2 Fark Şemasının Hatası için Kestirim

Şimdi bu kısımda $(13)-(15)$ fark şemasının hatasını kestirelim. Bu amaçla önce $v\in V$ için $(2)-(5)$ sınır değer probleminin çözümünün ortalamasını aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$\left[\psi_p\left(x,t;v\right)\right]_n=\left\{\psi_{jk}^p\right\},$$

$$\psi_{jk}^p=\frac{1}{\tau h}\int_{t_k-1}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p\left(x,t\right)dxdt,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ \psi_{j0}^p=\varphi_j^p,\tag{32}$$

$$j=\overline{0,M},\ p=1,2,\psi_{0k}=\psi_{Mk}=0,\ \psi_{0k}^2=\psi_{1k}^2,\ \psi_{Mk}^2=\psi_{M-1k}^2,\ k=\overline{1,2}.$$

Bundan başka V kümesi üzerinde $\left[v\right]_n$ operatörünü tanımlayalım:

$$\left[v\right]_n:V\to V_n,\left[v\right]_n\left(v\right)=\left(w_1,w_2,...,w_{m-1}\right),$$
$$w_j=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v\left(x\right)dx,\ j=\overline{1,M-1}\tag{33}$$

$\left\lfloor z^p\right\rfloor_n=\left\{z_{jk}^p\right\}=\left\{\phi_{jk}^p\right\}-\left\{\psi_{jk}^p\right\}$ gibi gösterelim,

açıktır ki , $\left\{z_{jk}^p\right\},\ p=1,2$ ağ fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümüdür.

$$i\delta_{\bar t}z_{jk}^p+a_0\delta_{x\bar x}z_{jk}^p-v_kz_{jk}^p=F_{jk}^p+a_1\left|\psi_j^p\right|\psi_k^p-a_1\left|\phi_k^p\right|^2\phi_{jk}^p,$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}\tag{34}$$

$$z_{j0}^p=0,\ j=\overline{0,M},\ p=1,2,\tag{35}$$

$$z_{0k}^1=z_{Mk}^1=0,\ k=\overline{1,N},\tag{36}$$

$$\delta_{\bar x}z_k^2=\delta_{\bar x}z_{Mk}^2=0,\ k=\overline{1,N},\tag{37}$$

burada

$$F_{jk}^{p}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[i\frac{\partial\psi_p}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}-v(t)\psi_p+a_1\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)\right]dxdt-$$
$$-i\delta_{\bar{x}}\psi_{jk}^{p}-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p}+v_k\psi_{jk}^{p}-a_1\left|\psi_{jk}^{p}\right|^2\psi_{jk}^{p},\quad j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}. \tag{38}$$

Teorem 4.2.1: Farz edelim ki $c_4\le\tau/h\le c_5,\tau\le\left[8\left|a_1\right|\max\limits_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le k\le N}}\left(\left|\phi_{jk}^{p}\right|^2+\left|\varphi_{jk}^{p}\right|^2\right)\right]^{-1}$ şartları sağlanmış olsun, burada $c_4,c_5>0$ sayıları τ ve h dan bağımsızdır.

Bu taktirde $(34)-(37)$ sisteminin çözümü için, yani şemasının hatası için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}^{p}\right|^2\le c_6\left(\beta_{\tau h}+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j-w_j\right|^2\right),\ p=1,2,\ \forall m\in\{1,2,...,N\} \tag{39}$$

kestirim geçerlidir. Burada $c_6>0$, h,t ve m den bağımsızdır. $\beta_{\tau h}>0$, $\tau\to0$, $h\to0$ için $\beta_{\tau h}\to0$ dır.

İspat: $(34)-(37)$ sistemini, τ için teoremin şartlarını ve $(7),(8),(16)$ kestirimlerini kullanarak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}^{p}\right|^2\le c_7\left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^2\right),\ p=1,2 \tag{40}$$

kestirimini elde ederiz. $\forall m\in\{1,2,...N\}$ burada $c_7>0$ sayısı h,τ ve m den bağımsızdır.

Şimdi (40) ın sağ tarafını kestirelim. F_{jk}^{p}, $p=1,2$ ağ fonksiyonları için formülleri kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı kolaylıkla yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p}=F_{jk}^{p1}+F_{jk}^{p2}+F_{jk}^{p3}+F_{jk}^{p4},\ p=1,2 \tag{41}$$

burada

$$F_{jk}^{p1}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial \psi_p}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p}, \tag{42}$$

$$F_{jk}^{p2}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial \psi_p}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p}, \tag{43}$$

$$F_{jk}^{p3}=-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(t)\psi_p(x,t)dxdt+v_k\psi_{jk}^{p} \tag{44}$$

$$\begin{gathered}F_{jk}^{p4}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_1\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)dxdt-a_1\left|\psi_{jk}^{p}\right|^2\psi_{jk}^{p}, \\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2\end{gathered} \tag{45}$$

(32) formülüne göre (42) den $F_{jk}^{p},\ p=1,2,\ i=\overline{1,M-1},\ \ \overline{2,N}$ için aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\begin{aligned}F_{jk}^{p1}&=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial \psi_p}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt\right\}\\&=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial \psi_p}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial \psi_p(x,\theta)}{\partial \theta}d\theta dxdt\right.\\&=\frac{i}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{-\tau}^{0}\left[\frac{\partial \psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial \psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right]d\theta\right)dxdt\end{aligned}$$

Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygulamış olursak buradan

$$\begin{gathered}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2\le\frac{1}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial \psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial \psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right|d\theta dxdt\\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{2,N},\ p=1,2\end{gathered} \tag{46}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $F_{j1}^{p1}\ F_{j1}^{p1}$ için olan formülü kullanırsak onu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F_{j1}^{p1}=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{dt}dxdt-\frac{i}{\tau}\left(\psi_{j1}^p-\psi_{j0}^p\right)$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{dt}dxdt-\frac{i}{\tau h}\left[\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)\,dxdt-\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t_0)\,dx\right]$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi_p(x,\theta)}{\partial\theta}\partial\theta\right]dxdt.$$

Buradan da ;

$$\left|F_{j1}^{p1}\right|^2\le\frac{4}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\right|^2 dxdt,\ j=\overline{1,M-1},\ p=1,2 \tag{47}$$

F_{jk}^{p2} için olan formülü kullanırsak

$$F_{jk}^{p2}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_j+1+h/2}\psi_p(x,t)\,dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dx+\int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi_p(x,t)dx\right]dt\right\}$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi-h}^{\xi}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right]d\eta d\xi dxdt$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(\eta+\xi,t)}{\partial\xi^2}\right]d\eta d\xi dxdt$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,t)}{\partial x^2}\right]d\eta d\xi dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak sonuncu eşitlikten

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|^2\le\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,t)}{\partial x^2}\right]d\eta d\xi dxdt \tag{48}$$
$$j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N},\ \ p=1,2.$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde edebiliriz. Şimdi $F_{jk}^{p2},\ k=\overline{1,N},\ \ p=1,2$ terimini kestirelim. Bu ağ fonksiyonunun $p=1$ için formülünü kullanırsak

$$F_{1k}^{12}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^2}\left[\psi_{2k}^1-2\psi_{1k}^1+\psi_{0k}^1\right]$$
$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{\partial\psi_1(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right)dt-$$
$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi_1(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial\psi_1(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dx\right]dt\right\}$$
$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_1(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt-$$
$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi_1(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt$$

eşitliği yazabiliriz. Buradan da Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left|F_{1k}^{12}\right|^2\le\frac{9a_0^{\ 2}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}\right|^2dxdt,\ k=\overline{1,N} \tag{49}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $p=2$ için F_{1k}^{p2} olan formülden

$$F_{1k}^{22}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^2}\left[\psi_{2k}^2-2\psi_{1k}^2+\psi_{0k}^2\right]$$
$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial\psi_2(x_1+h/2,t)}{\partial x^2}dt-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi_2(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dxdt\right]$$
$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_2(\eta,t)}{\partial\eta}d\eta d\xi dxdt.$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\left|F_{1k}^{22}\right|^2\le\frac{4a_0^{\ 2}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right|^2dxdt,\ k=\overline{1,N} \tag{50}$$

elde ederiz.

(49) ve (50) eşitsizliklerini aynı şekilde $\left(F_{M-1k}^{12}\right)$ ve $\left(F_{M-1k}^{22}\right)$ için kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{M-1k}^{12}\right|^2 \leq \frac{9a_0^{\,2}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}\right|dxdt \tag{51}$$

$$\left|F_{M-1k}^{22}\right|^2 \leq \frac{4a_0^{\,2}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt. \tag{52}$$

Şimdi $F_{jk}^{p3},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2$ terimlerini kestirelim.

(44) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned} F_{jk}^{p3} &= v_j\psi_{jk}^{p} - \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x)\psi_p(x,t)\,dxdt \\ &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_{jk}^{p}\left(v_i - v(x)\right)dxdt + \\ &+ \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x)\left(\psi_{jk}^{p} - \psi_p(x,t)\right)dxdt \end{aligned} \tag{53}$$

eşitliği yazabiliriz. ψ_{jk}^{p} için formüle göre

$$\begin{aligned} \left|\psi_{jk}^{p}\right| &= \left|\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)\,dxdt\right| \leq vrai\max_{(x,t)\in\Omega}\left|\psi_p(x,t)\right| \\ &= \left\|\psi_p\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \left\|\psi_p\right\|_{L_\infty\left(0,T;W_2^1(0,\ell)\right)},\ p=1,2. \end{aligned} \tag{54}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Kolaylıkla $\psi_p(x,t),\ p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left\|\psi_1(.,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} \leq c_7\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} + \left\|f\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\right), \tag{55}$$

$$\left\|\psi_2(.,t)\right\|_{W_2^1(0,\ell)} \leq c_8\left(\left\|\varphi_1\right\|_{W_2^1(0,\ell)} + \left\|f\right\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \tag{56}$$

$\forall t \in [0,T]$. Burada $c_7, c_8 > 0$ belirli sayılardır ve t den bağımsızdır. Bu kestirimleri ve (54) eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\psi_{jk}^{1}\right| \le c_9 \tag{57}$$

$$\left|\psi_{jk}^{2}\right| \le c_9 \tag{58}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. $\forall j \in \{1,2,...M-1\}$, $\forall k \in \{1,2,...\}$ burada $c_9 > 0$ sayısı j ve k dan bağımsızdır. (53) den

$$\begin{aligned} &\left|F_{jk}^{p3}\right| \le \frac{b_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}^{p}-\psi_p(x,t)\right|dxdt + c_{12}\left|v_k - w_k\right|, \\ &j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ P=1,2. \end{aligned} \tag{59}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $\psi_{jk}^{p} - \psi_p(x,t)$ farkını ele alalım. ψ_{jk}^{p} için olan formülü kullanırsak bu farkı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \psi_{jk}^{p}-\psi_p(x,t) &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\psi_p(\xi,\theta)-\psi_p(x,t)\right)d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_x^{\xi}\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}d\eta + \int_t^{\theta}\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right]d\sigma d\theta \end{aligned} \tag{60}$$

bu ifadeyi (59) de kullanırsak

$$\begin{aligned} &\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \frac{2b_1^2 h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|^2 dxdt + \frac{3b_1^2\tau}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\right|^2 dxdt + 3c_{12}^2\left|v_k-w_k\right|, \\ &j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \end{aligned} \tag{61}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi F_{jk}^{p4}, $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$, $p=1,2$ terimlerini kestirelim. F_{jk}^{p4}, için olan formülü kullanırsak

$$F_{jk}^{p4}=\frac{a_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)-\left|\psi_{jk}^p\right|^2\psi_{jk}^p\right]dxdt,$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \tag{62}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)-\left|\psi_{jk}^p\right|^2\psi_{jk}^p=$$
$$=\left(\left|\psi_{jk}^p\right|^2+\left|\psi_p(x,t)\right|^2\right)\left(\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right)+\psi_{jk}^p\psi_p(x,t)\left(\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right)$$

eşitliğin geçerli olduğu açıktır. Bu eşitliği kullanırsak F_{jk}^{p4} için

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|\le\frac{3a_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi_{jk}^p\right|^2+\left|\psi_p(x,t)\right|^2\right)\left|\psi_{jk}^p-\psi_p(x,t)\right|dxdt,$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada (57), (58) eşitsizliklerini kullanırsak

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|\le\frac{c_{10}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j-h/2}\left|\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right|dxdt$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \tag{63}$$

eşitsizliğini, (60) ı kullanırsak

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|^2\le\frac{2c_{10}h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|dxdt+\frac{2c_{13}h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|dxdt,$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \tag{64}$$

eşitsizliği elde ederiz. Fubini teoremini [15] kullanırsak, (46) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\tau\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)d\theta,\ p=1,2. \tag{65}$$

Herhangi $\varepsilon>0$ alalım. $L_2(\Omega)$ uzayında tanımlanmış fonksiyonunun sürekliliği teoremine göre $|\theta|<\tau<\delta$ iken

$$\left\|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır. Buna göre böyle τ lar için (65) den

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le w_\tau^0 \tag{66}$$

eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $w_\tau^0>0,\ \tau\to 0$ için $w_\tau^0\to 0.$ (47) eşitsizliğine göre

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \int_0^{\tau}\left\|\frac{\partial\psi_p(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 dt$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. İntegral mutlak sürekliliğine göre sonuncu eşitsizlikten

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le w_\tau^1,\ p=1,2. \tag{67}$$

Burada $w_\tau^1>0,\ \tau\to 0$ için $w_\tau^1\to 0.$ Böylece $(66)-(67)$ eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le w_\tau^0+w_\tau^1=\tilde{w}_\tau^0,\ p=1,2 \tag{68}$$

(66) eşitsizliğinin elde edilmesiyle aynı olarak (48) aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ediyoruz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le w_h^2,\ p=1,2 \tag{69}$$

burada $w_h^2 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^2 \to 0.$ $(49)-(52)$ eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le 9a_0^{\ 2}\int_0^h \left\|\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx \tag{70}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le 9a_0^{\ 2}\int_{\ell-h}^{\ell} \left\|\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2 dx \tag{71}$$

eşitsizliği elde ederiz. Buradan ve integralin mutlak sürekliliğinden bu eşitsizliklerinin sağ taraflarının $h \to 0$ için sıfıra yaklaştığını elde ederiz. Yani;

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le +\tau h\sum_{k=1}^{M-1}\left|F_{M-1k}^{p1}\right|^2 \le w_h^3,\ p=1,2 \tag{72}$$

buradan $w_h^3 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^3 \to 0$ dır. Bu taktirde (69) den ve (72) den

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \tilde{w}_h^0,\ p=1,2 \tag{73}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\tilde{w}_h^0 = w_h^2 + w_h^3.$ $(6\ )1$ eşitsizliğinden $(8)-(9)$ kestirimlerinin yardımıyla bir sonraki eşitsizliği elde ederiz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le c_{11}\left(\tau^2 + h^2 + \left\|Q_n(v) - [v]_4\right\|\right),\ p=1,2. \tag{74}$$

burada $c_{11} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır.

(64) eşitsizliğinden $(8)-(9)$ kestirimlerinin ve $Q_n(v)$ operatörü için olan formülü yardımıyla

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le c_{12}\left(\tau^2 + h^2\right),\ p=1,2,\ \forall m \in \{1,2,...N\} \tag{75}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{12} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır. Böylece (68) ve $(73)-(75)$ eşitsizliklerinin yardımıyla (40) ve (41) dan

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}^{p}\right|^2 \le c_{13}\left(\tilde{w}_\tau^0+\tilde{w}_h^0+\tau^2+h^2+\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right), \quad p=1,2,\ \forall m\in\{1,2,\dots N\} \tag{76}$$

eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_6 > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır. Bu eşitsizlikten

$$\beta_{\tau h}=\tilde{w}_\tau^0+\tilde{w}_h^0+\tau^2+h^2 \quad \text{ve} \quad \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|=\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|w_j-v_j\right|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde kabul edersek teoremin geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem ispatlandı.

4.3.Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Bu kısımda fark şemasının hatası olan kestirimi kullanarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 4.3.1: Farz edelim ki teorem 4.2.1 in şartları sağlanmış olsun. Bu taktirde $\forall v\in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$\left|J(v)-I_n\left([v]_n\right)\right|\le c_{14}\left(\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau,h}}+\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|\right) \tag{77}$$

burada $c_{14} > 0$ olup τ ve h dan bağımsızdır ve $\tilde{\beta}_{\tau h} > 0,\quad \tau\to 0,\quad h\to 0$ için $\tilde{\beta}_{\tau h}\to 0$ dır.

$$\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|=\left(\tau\sum_{k=1}^{N}\left|w_k-v_k\right|^2\right)^{1/2}$$

İspat: $J(v)-I_n\left([v]_n\right)$ farkını göz önüne alalım. (32) ve (21) formüllerini kullanırsak

$$J(v)-I_n([v]_n)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right|+\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk}^2\right|\right)+$$
$$+\left(\left|\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right|-\left|\phi_{jk}^1-\phi_{jk}^2\right|\right)dxdt,$$

eşitliği elde ederiz. Cauchy-Bunyakovski eşitliğini ve (8), (9), (16) kestirimlerini kullanırsak

$$\left|J(v)-I_n([v]_n)\right|\le c_{15}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t)-\phi_{jk}^1\right|^2 dxdt\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_2(x,t)-\phi_{jk}^1\right|^2 dxdt\right)\right]=c_{15}\left[J_1+J_2\right] \tag{78}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. J_1 için olan formülü kullanırsak,

$$(J_1)^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t)-\psi_{jk}^1+\psi_{jk}^1-\phi_{jk}^1\right|\le$$
$$\le 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t)-\psi_{jk}^1\right|^2 dxdt+ \tag{79}$$
$$+2\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\psi_1(x,t)-\phi_{jk}^1\right|^2=J_{11}+J_{12}.$$

eşitsizliğini elde ederiz. Önce J_{11} i kestirelim. (60) formülünü kullanırsak,

$$J_{11}\le 4\tau^2\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+4h^2\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{80}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (39) kestirimini $p=1$ için kullanırsak

$$J_{12}\le 2c_5\left(\beta_{\tau h}+\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right) \tag{81}$$

eşitsizliği ispatlanır. Böylece (80) ve (81) kestirimlerinin yardımıyla

$$\left(J_{11}\right)^2 \le c_{16}\left(\beta_{\tau h} + \left\|Q_n\left(v\right) - \left[v\right]_n\right\|^2\right) \tag{82}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{16} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır. Aynı şekilde $\left(J_2\right)^2$ için

$$\left(J_2\right)^2 \le c_{17}\left(\beta_{\tau h} + \left\|Q_n\left(v\right) - \left[v\right]_n\right\|^2\right). \tag{83}$$

eşitsizlik ispatlanır. Böylece (82) ve (83) eşitsizliklerini kullanırsak (78) den teorem ispatlanmış olur.

Şimdi fonksiyonele yakınsaklık teoremini ispatlamadan önce yardımcı Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.3.2: Farz edelim ki 4.3.1 in şartları sağlanmış olsun. Bunun yanı sıra diyelim ki Q_n operatörü (33) formülüyle tanımlanmış olsun. Bu taktirde

$Q_n\left(v\right) \in V_n$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left|J\left(v\right) - I_n\left(Q_n\left(v\right)\right)\right| \le c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}.$$

İspat: Farz edelim ki $v \in V$ herhangi bir mümkün kontroldür. Q_n operatörünün tanımına göre

$$Q_n\left(v\right) = \left(w_1, w_2, ..., w_N\right)$$
$$w_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_k - 1}^{t_k} v\left(t\right)dt,\ k = \overline{1, N}$$

dir. Bu formülü kullanırsak, aşağıdakileri yazabiliriz.

$$w_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v\left(t\right)dt \ge \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} b_0 = b_0,\ k = \overline{1, N}$$
$$w_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v\left(t\right)dt \le \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} b_1 = b_1,\ k = \overline{1, N}$$

Bu eşitsizliklerden , $b_0 \le w_k \le b_1, \quad k=\overline{1,N}$ elde edilir.

$$\delta_{\bar{t}} w_k = \frac{w_k - w_{k-1}}{\tau} = \frac{1}{\tau} = \left[\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(t)\,dt - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} v(t)\,dt \right]$$
$$= \frac{1}{\tau^2} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} v(t)\,dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(t-\tau)\,d\tau \right] = \frac{1}{\tau^2} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[v(t) - v(t-\tau) \right] d\tau \right]$$
$$= \frac{1}{\tau^2} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t-\tau}^{t} \frac{dv(\xi)}{d\xi} d\xi \right) dt \right], \ k = \overline{2,N}$$

Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\left| \delta_{\bar{t}} v_k \right| \le \frac{1}{\tau^2} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t-\tau}^{t} \left| \frac{dv(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \right) dt \right) \le$$
$$\le \frac{1}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t-\tau}^{t} b_2 d\xi \right) d\tau \le \frac{\tau^2}{\tau^n} b_2 = b_2, \quad k = \overline{2,N}$$
$$\left| \delta_{\bar{t}} w_k \right| \le b_2, \quad k = \overline{2,N}$$

eşitsizliği yazabiliriz. Buradan V_n kümesinin tanımına göre $Q_n(v) \in V_n$ elde edilir. Bu taktirde $[v]_n \in V_n$ diskrit kontrolünü alıp teorem 4.3.1 i ispatlamış olursak lemmanın geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma ispatlandı.

Farz edelim ki, P_n operatörü aşağıdaki formül ile tanımlıdır.

$$P_n\left([v]_n\right) = \tilde{v}(t). \tag{84}$$

Burada

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v_k + \delta_{\bar{t}} v_k (t - t_k) \\ v_1, 0 = t_0 \le t \le t_1 \end{cases}, \ t_{k-1} \le t \le t_{k+1}, \ k = \overline{2,N}, \tag{85}$$

dir.

Lemma 4.3.3: Farz edelim ki, teorem 4.3.1 in şartları sağlanmış olsun. Bunun yanı sıra P_n operatörü (84) formülü ile tanımlansın. Bu taktirde $P_n\left([v]_n\right) \in V$ ve

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right)-I_n[v]_n\right|\le c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}. \tag{86}$$

kestirim geçerlidir.

İspat: Farz edelim ki, $[v]_n\in V_n$ herhangi eleman olsun. Önce gösterelim ki P_n operatörü

$$P_n:V_n\to V$$

Gerçekten herhangi $[v]_n\in V_n$ için $P_n=P_n\left([v]_n\right)$ operatörü $(84)-(85)$ formülleri ile tanımlanır. V_n kümesinin yapısına göre

$$b_0\le v_k\le b_1,\ k=\overline{1,N} \tag{87}$$

Bunu kullanarak (85) den

$$\tilde{v}(t)=v_1,t_0\le t\le t_1$$

elde ederiz. B u durumda

$$b_0\le \tilde{v}(t)\le b,0=t_0\le t\le t, \tag{88}$$

Şimdi $t_{k-1}\le t\le t_1,\ k=\overline{2,N}$ için (85) dan buluruz:

$$\begin{gathered}\tilde{v}(t)=v_k+\delta_{\bar{t}}v_k\left(t-t_k\right)=\left(1-\frac{t_k-t}{\tau}\right)v_k+\frac{t_k-t}{\tau}v_{k-1},\\ t_{k-1}\le t\le t_k,\quad k=\overline{2,N}\end{gathered} \tag{89}$$

Eğer $\alpha_k=\alpha_k(t)=\dfrac{t_k-t}{\tau}$ eşitlersek $\forall t\in\left[t_{k-1},t_k\right]$ için $\alpha_k=\alpha_k(t)\in[0,1]$ olur.

(87) şartından yararlanırsak (89) den buluruz.

$$\begin{gathered}\tilde{v}(t)=\left(1-\alpha_k(t)\right)v_k+\alpha_k(t)v_{k-1}\le\\ \le\left(1-\alpha_k(t)\right)b_1+\alpha_k(t)b_1\le b_1,t_{k-1}\le t\le t_k,k=\overline{2,N}\end{gathered} \tag{90}$$

$$\tilde{v}(t)=\left(1-\alpha_k(t)\right)v_k+\alpha_k(t)v_{k-1}\geq$$
$$\geq\left(1-\alpha_k(t)\right)b_0+\alpha_k(t)\geq b_0=b_0,\quad t_{k-1}\leq t\leq t_k, k=\overline{2,N} \tag{91}$$

Böylelikle (90), (91) ve (88) i birleştirirsek

$$b\leq\tilde{v}(t)\leq b, t\in(0,T) \tag{92}$$

eşitsizliğini buluruz.

$\tilde{v}(t)$ fonksiyonu için gerçekleştirilmiş türevin tanımını kullanırsak

$$\frac{d\tilde{v}(t)}{dt}=\begin{cases}\delta_{\bar{t}}v_k, t_{k-1}\leq t\leq t_k, k=\overline{2,N}\\ 0, 0=t_0\leq t\leq t_1\end{cases} \tag{93}$$

formülünü buluruz. Gerçekten $\forall g\in[0,T]$ $g(0)=g(T)=0$ için

$$\int_0^T\tilde{v}(t)\frac{dg(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\tilde{v}(t)\frac{dg(t)}{dt}dt$$
$$=\sum_{k=2}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(v_k+\delta_{\bar{t}}v_k\left(t-t_k\right)\right)\frac{dg(t)}{dt}dt+\int_{t_0}^{t_1}v_1\frac{dg(t)}{dt}dt$$
$$=-\sum_{k=2}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\delta_{\bar{t}}v_k g(t)dt+\sum_{k=2}^{N}\left(v_k+\delta_{\bar{t}}v_k\left(t-t_k\right)g(t)\right)\Big|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k}$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}0g(t)dt+v_1 g(t)\Big|_{t=t_0=0}^{t=t_1}=-\sum_{k=2}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\delta_{\bar{t}}v_k g(t)dt$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}0g(t)dt+\sum_{k=2}^{N}\left[v_k g(t_k)-v_{k-1}g(t_{k-1})\right]+v_1 g(t_1)$$
$$=-\sum_{k=2}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\delta_{\bar{t}}v_k g(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}0g(t)dt+v_N g(t_N)-v_1 g(t_0)$$

$g(t_N)=g(T)=0,\quad g(t_0)=g(0)=0$ olduğundan

$$\int_0^T \tilde{v}(t)\frac{dg(t)}{dt}dt = -\sum_{k=2}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\delta_{\bar{t}}v_k g(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} 0g(t)dt$$

formülünden (93) formülünü elde ederiz.

$$\frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = 0, t_0 \le t \le t_1$$

olduğunu

$$|d\tilde{v}(t)| \le b_2, t \in [t_0, t_1] \tag{94}$$

Diğer taraftan

$$\frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \delta_{\bar{t}}v_k, t_{k-1} \le t \le t_k, k = \overline{2,N}$$

olduğundan

$$\left|\frac{d\tilde{v}(t)}{dt}\right| = |\delta_{\bar{t}}v_k| \le b_2, t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{2,N} \tag{95}$$

(94) ve (95) birleştirelim

$$\left|\frac{d\tilde{v}(t)}{dt}\right| \le b_2, t \in [0,T] \tag{96}$$

buluruz. Böylelikle (92) ve (96) den yararlanırsak V nin yapısına göre $\tilde{v} \in V$ olur, yani

$$\tilde{v}(t) = P_n([v]_n) \in V, \forall [v]_n \in V_n \tag{97}$$

Buna göre $v \in V$ kontrolünün yerine $\tilde{v}(t) = P_n([v]_n) \in V$ kontrolünü alıp 4.3.1 teoremini ispatlamış olursak

$$\left|J\left(P_n([v]_n)\right) - I_n([v]_n)\right| \le c_{16}\left(\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} + \left\|Q_n\left(P_n([v]_n)\right) - [v]_n\right\|\right) \tag{98}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz.

Şimdi $\left\| Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right)-[v]_n \right\|$ normunu kestirelim.

$$\left\| Q_k\left(P_k[v]_k\right)-[v]_k \right\|^2 = \left\| Q_k(\tilde{v})-[v]_k \right\|^2$$
$$=\tau\sum_{k=1}^{N}\left|\tilde{v}_k - v_k\right|^2 = \tau\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\tilde{v}(t)\,dt - v_k\right|^2 =$$
$$\tau\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(v_k+\delta_{\bar{t}}v_k\left(t-t_k\right)\right)dt - v_k\right|^2 + \tau\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_1}v_1\,dt - v_1\right| =$$
$$\tau\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\delta_{\bar{t}}v_k\left(t-t_k\right)dt\right|^2 = \tau\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{\delta_{\bar{t}}v_k}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(t-t_k\right)dt\right|^2 =$$
$$\tau\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{\delta_{\bar{t}}v_k}{\tau}\left(\frac{\left(t-t_k\right)^2}{2}\right)\Bigg|_{t=t_{k-1}}^{t=t_k}\right|^2 = \tau\sum_{k=2}^{N}\left|\delta_{\bar{t}}v_k\tau\right|^2 \le \tau\sum_{k=2}^{N}b_2^{\,2}\frac{\tau^2}{4} = \frac{Tb_2^{\,2}\tau^2}{4}$$

Buradan ve (98) dan Lemma ispatlandı.

Şimdi sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyoneline göre yakınsaklığı için teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.3.4: Farz edelim ki lemma 4.3.2 ve lemma 4.3.3 ün şartları sağlanmış olsun. Bunun yanı sıra farz edelim ki $v^* \in V$, $[v]_n^* \in V_n$ sırasıyla $(1)-(5)$ ve $(9)-(13)$ problemlerinin çözümleri olsun. Yani,

$$J_* = \inf_{v\in V} J(v) = J\left(v^*\right), \quad I_{n^*} = \inf_{[v]_n\in V} I_n\left([v]_n\right) = I_n\left([v]_n^*\right)$$

bu taktirde $(9)-(13)$ fark problemleri dizisi $(1)-(5)$ problemin yaklaşımıdır. Yani $\lim_{n\to\infty} I_{n^*} = J_*$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\left|I_{n^*} - J_*\right| \le c_{13}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} \qquad (99)$$

İspat : İspat için $[9,23,26]$ çalışmalarındaki yöntemi kullanalım. Teoremin şartına göre $v^* \in V$, kontrolü $(1)-(5)$ probleminin çözümüdür. Lemma 4.3.2 in şartı sağlandığında $Q_n(v^*) \in V_n$ ve $\left| I_n\left(Q_n(v^*)\right) - J(v^*) \right| \le c_{16}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}, n = 1,2,...$ dir. Bu taktirde bu eşitsizlikten

$$I_{n^*} \le I_n\left(Q_n(v^*)\right) \le J(v^*) + c_{16}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} = J_* + c_{16}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}, n = 1,2,...$$

Eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$I_{n^*} - J_* \le c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}},\ n = 1,2,... \tag{100}$$

Teoremin şartına göre $[v]_n^* \in V_n$ $(9)-(13)$ probleminin çözümüdür.

.Lemma 4.3.3 e göre $P_n\left([v]_n^*\right) \in V$ olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| J\left(P_n\left([v]_n^*\right)\right) - I_n\left([v]_n^*\right) \right| \le c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}},\ n = 1,2,...$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$J_* \le J\left(P_N\left([v]_n^*\right)\right) \le I_n + c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} = I_{n^*} + c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}, n = 1,2,...$$

Buna göre sonuncu eşitsizlikten

$$I_{n^*} - J_* \ge -c_{14}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}},\ n = 1,2,... \tag{101}$$

Eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. (100) ve (101) den (99) un geçerli olduğunu elde ederiz. $\tau = \tau_n, h = h_n$ işaretlerine göre $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0.$

$\tilde{\beta}_{\tau h}$ formülü göz önüne alınarak (99) da $n \to \infty$ için limite geçerek teorem ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde incelenen Schrödinger tip denklem için optimal kontrol probleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümü problemin oluşturulması açısından $[8]-[9]-[10]-[11]-[12]$ çalışmalarından farklıdır. Lineer Schrödinger Denklemi için bu türlü optimal kontrol problemi, kontroller uzay değişkenine bağlı olduğunda, İskenderov A.D. ve Mahmudov N.M. yazarları tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında ise Lineer olmayan Schrodinger denklemi için kontroller zamana bağlı olduğunda, optimal kontrol probleminin sonlu farklar matoduyla çözümü incelenmiştir.Bu farklılıklar problemin incelenmesinde değişiklikler oluşturmaktadır. Bu açıdan çalışma $[8]-[9]-[10]-[11]-[12]$ çalışmalarının sonuçlarından farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Butkovskiy, A.G., Samoilenko Y.I., ‘‘ Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü’’, M.Nauka-1984-S. 256, Moscow. (Rusça)

[2] Landau, L.D., Lifşhitz, E.M., ‘‘Kuantum Mekaniği’’, Cilt 3-m-1963-s. 702 (Rusça).

[3] Vorontsov, M.A., Shmalgauzen, V.I., ‘‘ Adaptiv optiğin prensipleri’’, Nauka-1984, 336 s, Moskova. (Rusça).

[4] Aksoy, N.Y., Yagubov, G., and Yıldız, B. (2012) ‘‘The finite difference approximations of the optimal control problem for non-linear Schrodinger equation ’’, Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol, No. 3, pp. 158-183

[5] Toyoğlu, F., Yagubov, G., ‘‘Numerical solution of an optimal control problem governed by two dimensional Schrödinger equation’’. Applied and Computation Mathematics. Vol.4, No. 2, pp. 30-38. doi:10.11648/j. acm. 20150402.11

[6] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., ‘‘Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi’’, DAN SSSR-1988-c.303-No:5-s.1044-1048 (Rusça)

[7] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Museyeva, M.A.,‘‘Kuantum Potansiyellerinin İdentifikasyonu’’, Bakü, Çaşıoğlu Yayıncılık, 2012, 552 s (Rusça).

[8] Mahmudov, N.M., ‘‘Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü’’, Azerbaycan Bilimleri Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri -1997-c. 7. s. 392 (Rusça).

[9] Patapov, M.M., Razgulin, A.V., Şameeva, T.Y., ‘‘Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyon’’, Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernatik)1987. No:1-s. 8-13 (Rusça).

[10] Silla, N.,‘‘Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü’’, Doktora tezi, Bakü. 1991.

[11] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Bir İnvers Probleminin Varyasyon Kullanılmasının Farklar Metoduyla Çözümü’’, Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri:Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt:16, No:1-2, S.46-51 (Rusça).

[12] Yagubov, G.Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

[13] Samarskiy, A.A., Andreev V.B., ‘‘Eliptik Denklem İçin Fark Metodları’’, M.Nauka. 1976 (Rusça).

[14] Tikonov A.N., Arsenin V.Ya., ‘‘ III-Posed Problemlerin Çözüm Metodları’’, Moskova-Nauka. 1979, s.288 (Rusça).

[15] Mikhailov, V.P., 1983. Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka, 424 s, Moskova. (Rusça)

[16] İskenderov, A.D., ‘‘Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerinin Varyasyon Konumları Hakkında’’, DAN SSR-1984-c.274-No:3-s.531-533, ‘‘ Durgun Olmayan Schrödinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması //Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün’’, Bakü,2001-s.6-36 (Rusça).

[17] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., ‘‘Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü’’, Otomatik ve Telemekanik. 1989, no:12-s. 27-38 (Rusça).

[18] İskenderov, A.D., ‘‘Durgun Olmayan Schrödinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması’’, Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri, Bakü, 2001-s. 6-36 (Rusça).

[19] İskenderov, A.D., Mahmudov, N.M., ‘‘Kuantum Mekanik Sistemler İçin Lions Kriterli Optimal Kontrol’’, *AMEA* nın Hberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-1995, c.16, No:5-6-30-35 (Rusça).

[20] Lions, J.L., 1971.‘‘ Optimal control for systems governed by partial differantial equations’’, Springer-Verlag, New York, 1971.

[21] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural’ceva, N.N., 1968. ‘‘Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type’’, American Math. Soc., 646 s, ABD. (İng.)

[22] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural’ceva, N.N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow. (Rusça)

[23] Razguin, A.V., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları’’, Moskova Devlet Üniversitesi nin Haberleri. Seri:15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1998 No:2 s.28-33 (Rusça)

[24] Samarskiy, A.A., Lazarov, R.D., Makarov V.L., ‘‘Genelleştirilmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler İçin Fark Şemaları’’, *M. Vısşaya Şkola* 1987, s. 296 (Rusça)

[25] Vasilyev, F.P., ‘‘ Extremal Problemlerin Çözüm Metodları’’, M.Nauka 1981-s.400 (Rusça)

[26] Yagubov, G.YA., Museyeva, M.A., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin İdendifikasyon Problemi Hakkında // Diferansiyel Denklemler’’, 1997, c.33, No:12 s.1691-1698 (Rusça)

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Kars ilinde doğdu.İlk ve orta öğrenimini Kars ' ta tamamladı. 2008 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2012 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.