

**T.C.**  
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DURGUN KUAZİ – OPTİK DENKLEMİ İÇİN**  
**BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SONLU**  
**FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ VE YAKINSAKLIĞI**

**Mucahit BUYANKARA**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**  
**Prof.Dr.Gabil YAGUB**

**HAZİRAN – 2015**  
**KARS**

**T.C.**  
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DURGUN KUAZİ – OPTİK DENKLEMİ İÇİN**  
**BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SONLU**  
**FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ VE YAKINSAKLIĞI**


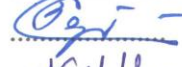

**Mucahit BUYANKARA**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**  
**Prof.Dr.Gabil YAGUB**

**HAZİRAN – 2015**  
**KARS**

T.C.Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Mucahit BUYANKARA**'ın **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “**Durgun Kuazi- Optik Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Probleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü ve Yakınsaklığı**” adlı bu çalışma, yapılan tez çalışması sınav sonunda Jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .....bireği..... ile kabul edilmiştir.

16/06/2015

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIZIM AKSOY	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ....../....../2015 gün ve ....../.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hidayet Metin ERDOĞAN  
Enstitü Müdürü V.

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu çalışmada Durgun Kuazi-Optik denklemi için I. ve II. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ele alınmıştır.

Tez çalışmam sırasında, yoğun çalışmalarından zaman ayırarak yardım ve desteklerini esirgemeyen öğrencisi olmaktan gurur duyduğum danışman hocam değerli bilim adamı Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU hocama teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin hazırlanma sürecinde manevi desteklerini her zaman hissettiğim Ailem'e teşekkür ederim.

Kars – 2015

Mucahit BUYANKARA

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖNSÖZ</b>	<b>iii</b>
<b>ÖZET</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>vi</b>
<b>SİMGELER DİZİNİ</b>	<b>vii</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER</b>	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b>	<b>6</b>
<b>3.1. Durgun Kuazi-optik Denklemi için 1.çesit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü</b>	<b>6</b>
3.1.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması	6
<b>3.2. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 2.çesit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü</b>	<b>8</b>
3.2.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması	8
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b>	<b>12</b>
<b>4.1. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 1.Çesit Başlangıç Sınır Değer Problemi İçin Sonlu Farklar Yönteminin Yakınsaklığı</b>	<b>12</b>
4.1.1 Fark Şemasının Çözümü İçin Kararlılık Kestirimi	12
4.1.2. Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim	15
<b>4.2. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 2.Çesit Başlangıç Sınır Değer Problemi İçin Sonlu Farklar Yönteminin Yakınsaklığı</b>	<b>26</b>
4.2.1. Fark Şemasının Kararlılık ve Hata Kestirimleri	26
<b>4.3. Nümerik Çözüm Algoritması</b>	<b>32</b>
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b>	<b>36</b>
<b>6. KAYNAKLAR</b>	<b>37</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>40</b>

## ÖZET

Bu tezde Durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ele alınır. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde 1.çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu problem için bir fark şeması oluşturulur. 4.1. bölümünde 1.çeşit başlangıç sınır değer problemi için kararlılık kestirimi elde edilir ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlanır.

Çalışmanın 3.2. bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanır ve bu probleme ait fark şeması oluşturulur. 4.2. bölümünde 2. Çeşit Başlangıç Sınır Değer Problemi için kararlılık kestirimi elde edilir ve kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlanır. Son olarak 1. ve 2. Çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için algoritma verilir.

**2015- 40 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Durgun Kuazi-Optik Denklemi, Sınır Değer Problemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Fark Şeması, Kararlılık, Yakınsama, Hata

## ABSTRACT

In this thesis, initial boundary value problems for a stationary quasi-optics equation are considered. In section 3.1 of this work, by describing the first-type initial boundary value problem, a difference scheme is contituted for this problem. In section 4.1, a stability estimation for first- type initial boundary value problem is obtained and by using this estimation, the error of difference scheme is proved.

In section 3.2 of the study, the second-type initial boundary value problem is defined and a difference scheme is contituted. In section 4.2, a stability estimation for the second-type initial boundary value problem is obtained. And by using this estimation, the error of difference scheme is proved. Finally, an algoritm is given for numerical solutions of the first-type and the second-type initial boundary value problems.

**2015 – 40 Pages**

**Keywords:** Stationary quasi-optics equation, boundary value problem, finite difference method, Difference Scheme, stability, convergence, error.

## SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$l > 0$	verilen sayı
$T > 0$	verilen sayı
$a(x)$	ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar
$x \in [0, l]$	bağımsız değişken
$t \in [0, T]$	bağımsız değişken
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	iç çarpım işareti
$\tau > 0$	t değişkenine göre adım
$h > 0$	x değişkenine göre adım
$\delta_{\bar{z}} \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau},$	t'ye göre sol fark
$\delta_x \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{j-1k}}{h},$	x'e göre sol fark
$\delta_x \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk}}{h},$	x'e göre sağ fark
$\delta_{\bar{x}} \Phi_{1k} = \delta_x \Phi_{0k} = \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h/2},$	x'e göre 2. Mertebeden fark



## 1. GİRİŞ

Durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri lineer olmayan optikte, çağdaş fiziğin ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Bu nedenle durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü hem teorik açıdan hemde uygulama açısından büyük önem taşır [1,2].

Durgun kuazi-optik denklemi için sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ilk önce [1-4, 5-7, 9, 10, 12-19] çalışmalarında incelenmiştir.

Durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce [11,15] çalışmalarında incelenmiş ve söz konusu problemlerin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremler ispatlanmıştır. Bu sonuçlar durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin incelenmesinde önemli rol oynamıştır. Durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü denklemin katsayıları karesel integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda çok az incelendiğinden tez konusu günceldir ve konunun incelenmesi hem teorik hemde uygulama anlamında önem taşımaktadır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1. bölümünde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmış bu probleme ait fark şeması oluşturulmuştur. Çalışmanın 3.2 bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmış bu probleme ait fark şeması elde edilmiştir. Bulgular bölümü 4.1, 4.2 olmak üzere iki alt bölümden oluşmaktadır. 4.1. bölümünde I. çeşit başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasının kararlılığı incelenmiş ve kararlılık kestirimi elde edilmiştir. Bu kestirimden yararlanarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. 4.2. Bölümünde ise II. çeşit başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şeması oluşturulmuş, fark şemasının kararlılığı elde edilmiştir. Ayrıca bu kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1:**  $L_2(0,l)$  Hilbert uzayı olup elemanları  $(0,l)$  aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0,l)}} < +\infty.$$

**Tanım 2.2:**  $L_2(\Omega)$  Hilbert Uzayı olup, elemanları  $\Omega$  bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x, z)\bar{\phi}(x, z)dxdz,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}} < +\infty.$$

**Tanım 2.3:**  $L_{\infty}(0,l)$  Banach uzayı olup, elemanları  $(0,l)$  aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_{\infty}(0,l)} = \text{vrai sup}_{x \in (0,l)} |u(x)| = \text{ess sup} \{|u(x)| : x \in (0,l)\}$$
$$= \inf \left\{ c \geq 0 : \overset{0}{\forall} x \in (0,l) \text{ için } |u(x)| \leq c \right\}$$

Normuna sahip  $u = u(x)$  fonksiyonları uzayıdır.

**Tanım 2.4:**  $W_2^1(0,l)$  Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların  $x$ 'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri  $L_2(0,l)$  Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[ u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{d\bar{v}(x)}{dx} \right] dx,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1(0,l)}} < +\infty.$$

Burada  $\bar{v}(x)$  fonksiyonu  $v(x)$ 'in kompleks eşleniğidir.  $W_2^1(0,l)$  uzayı  $W_2^1(0,l)$  uzayının alt uzayı olup, elemanları 0 ve  $l$  noktalarında 0'a eşit olur.

**Tanım 2.5:**  $W_2^2(0,l)$  Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve  $x$ 'e göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri  $L_2(0,l)$ 'den olan fonksiyonların uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left[ u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{d\bar{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2} \frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2} \right] dx,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^2(0,l)}} < +\infty.$$

$W_2^2(0,l)$  uzayı  $W_2^2(0,l)$ 'in alt uzayı olup elemanlarının kendisi 0 ve  $l$  noktalarında 0'a eşit olur.

**Tanım 2.6:**  $W_2^{0,1}(\Omega)$  uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların  $t$ 'ye göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri  $L_2(\Omega)$  Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, v \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[ \psi(x,t)\bar{v}(x,z) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}(x,z)}{\partial z} \right] dx dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}} < +\infty.$$

**Tanım 2.7:**  $W_2^{1,0}(\Omega)$  uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların  $x$ 'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri  $L_2(\Omega)$ 'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, v \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[ \psi(x, z) \bar{v}(x, z) + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}(x, z)}{\partial x} \right] dx dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}} < +\infty.$$

$W_2^{0,1,0}(\Omega)$  uzayı  $W_2^{1,0}(\Omega)$  uzayının alt uzayı olup, elemanları  $\Omega$  dikdörtgeninin yan tarafında sifıra eşittir.

**Tanım 2.8:**  $W_2^{2,1}(\Omega)$  Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları  $\Omega$  bölgesinde tanımlı  $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \psi}{\partial z}$   $L_2(\Omega)$  özelliklerini sağlayan  $\psi(x, z)$  fonksiyonlarıdır.

Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[ \psi(x, z) \bar{\phi}(x, z) + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \frac{\partial \bar{\phi}(x, z)}{\partial z} \right] dx dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}} < +\infty.$$

$W_2^{0,2,1}(\Omega)$  uzayı  $W_2^{2,1}(\Omega)$  uzayının alt uzayı olup, elemanları  $\Omega$  dikdörtgenin yan taraflarında sifıra eşittir.

**Tanım 2.9:** (Gronwall Lemması, [8,20] ).  $a \geq 0, b \geq 0$  olmak üzere  $\varphi_j, j = \overline{0, N}$  sayıları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b \sum_{m=0}^j \varphi_m, j = \overline{0, N-1}$$

şartlarını sağlıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j, j = \overline{0, N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b \sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m, j = \overline{0, N-1}, 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a,$$

şartları sağlanıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1}, j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Durgun Kuazi-optik Denklemi için 1.çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde durgun kuazi-optik denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer probleminin fark şeması oluşturulacaktır.

##### 3.1.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması

$\Omega = (0, l) \times (0, L)$  bölgesinde

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(z)\psi = f(x, z), (x, z) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l), \quad (2)$$

$$\psi(0, z) = \psi(l, z) = 0, z \in (0, L), \quad (3)$$

şartlarından  $\psi = \psi(x, z)$  fonksiyonunun bulunması problemini göz önüne alalım.

Burada,  $i = \sqrt{-1}$ ;  $l > 0$ ,  $T > 0$ ,  $a_0 > 0$  verilen sayılar  $a(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(z)$  reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar.

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \forall x \in (0, l), \mu_0 = \text{sabit} > 0, \quad (4)$$

$$\|v_0\|_{L_2(0, l)} \leq b_0, \|v_1\|_{W_2^1(0, L)} \leq b_1, v_1(z) \geq b_2 > 0, \forall z \in (0, L), \quad (5)$$

Burada  $b_m > 0$ ,  $m = 0, 1, 2$  verilen sayılar;  $\varphi(x)$ ,  $f(x, z)$  fonksiyonları ise kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi \in W_2^{0, 2}(0, l), f \in W_2^{0, 1}(\Omega), \quad (6)$$

şartlarını sağlar.

Belirttiğimiz gibi (1)-(3) problemi durgun kuazi-optik denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir ve [15] çalışmasında incelenmiştir.

Bu nedenle bu çalışmanın sonuçlarından yararlanarak, (1)-(3) problemi  $C^0\left((0, L), \overset{0}{W}_2(0, l)\right) \cap C^1\left((0, L), L_2(0, l)\right)$  uzayından olan tek çözüme sahiptir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi(\cdot, z)\|_{\overset{0}{W}_2(0, l)} + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(0, l)} \leq c_1 (\|\varphi\|_{\overset{0}{W}_2(0, l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}), \forall z \in [0, L] \quad (7)$$

Burada,  $c_1 > 0$  - sabiti  $\varphi, f$  'den bağımsızdır.

(1) - (3) probleminin diskritleştirilim. Bu amaçla ilk önce  $\bar{\Omega}$  bölgesini aşağıdaki gibi bir ağı dönüştürelim:

$$\left\{ (x_j, t_k) \right\}: j = \overline{0, M}, k = \overline{0, N}, x_j = jh - h/2, j = \overline{1, M-1}, \\ h = \frac{l}{M-1}, z_k = k\tau, \tau = \frac{L}{N}, x_0 = x_1 - h/2 = 0,$$

$x_M = x_{M-1} + h/2 = l$ , burada  $M, N$  verilen pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki gösterimleri yapalım:

$$\delta_z \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau}, \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{j-1k}}{h}, \\ \delta_x \Phi_{jk} = \frac{\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk}}{h}, \delta_{\bar{x}} \Phi_{1k} = \delta_x \Phi_{0k} = \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h/2}, \\ \delta_{\bar{x}} \Phi_{Mk} = \delta_x \Phi_{M-1k} = \frac{\Phi_{Mk} - \Phi_{M-1k}}{h/2}, \delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk} = \frac{\delta_x \Phi_{jk} - \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk}}{h},$$

Burada,  $\Phi_{jk}$  fonksiyonu  $\{(x_j, z_k)\}$  ' da tanımlanan ağ fonksiyonudur.

Böylece (1)-(3) problemi için yukarıda gösterdiğimiz nümerik türev formüllerini kullanarak  $\{(x_j, z_k)\}$  ağı üzerinde  $\{\Phi_{jk}\}$  ağ fonksiyonunun

$$i\delta_z \Phi_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk} - a_j \Phi_{jk} + v_{0j} \Phi_{jk} + iv_{1k} \Phi_{jk} = f_{jk},$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, j = \overline{0, M}, \quad (9)$$

$$\Phi_{0k} = \Phi_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}, k = \overline{1, N}, \quad (10)$$

şartlarından bulunması problemi elde edilir.

Burada,  $a_j, v_{0j}, v_{1k}, \varphi_j, f_{jk}$  ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) dx, j = \overline{1, M-1}, \quad (11)$$

$$v_{0j} = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) dx, j = \overline{1, M-1}, \quad (12)$$

$$v_{1k} = \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} v_1(z) dz, k = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi(x) dx, j = \overline{1, M-1}, \varphi_0 = \varphi_M = 0, \quad (14)$$

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x, z) dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (15)$$

### 3.2. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 2.çesit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü.

Bu bölümde durgun kuazi-optik denklemi için 2.çesit başlangıç sınır değer probleminin fark şeması oluşturulacaktır.

#### 3.2.1. Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şemasının Oluşturulması

Bu alt bölümde ele alınan durgun kuazi-optik denklemi için 2.çesit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x) \psi + v_0(x) \psi + i v_1(z) \psi = f(x, z), (x, z) \in \Omega \quad (16)$$



$$\psi(x,0) = \varphi(x), x \in (0,l), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l,z)}{\partial x} = 0, z \in [0,L], \quad (18)$$

Burada,  $i = \sqrt{-1}, l > 0, T > 0, a_0 > 0$  verilen sayılar  $a(x), v_0(x), v_1(z)$ , reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$0 < \mu_1 \leq a(x) \leq \mu_3, \forall x \in (0,l), \mu_0, \mu_1 = \text{sabit} > 0, \quad (19)$$

$$\|v_0\|_{L_2(0,l)} \leq b_0, \|v_1\|_{W_2^1(0,L)} \leq b_1, v_1(z) \geq b_2 > 0, \forall z \in (0,L), \quad (20)$$

$b_m > 0, m = 0,1,2$  - verilen sayılar,  $\varphi(x), f(x,t)$  fonksiyonları ise kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0, f \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (21)$$

şartlarını sağlar.

Bildiğimiz gibi (16)-(18) problemi durgun kuazi-optik denklemi için ikinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir ve [15] çalışmasında incelenmiştir.

Bu nedenle bu çalışmanın sonuçlarından yararlanarak söyleyebiliriz ki, (1)-(3) problemi  $C^0((0,L), W_2^2(0,l)) \cap C^1((0,L), L_2(0,l))$  uzayından olan tek çözüme sahiptir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi(\cdot, z)\|_{W_2^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(0,l)} \leq c_2 (\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}), \forall z \in [0,L]. \quad (22)$$

Burada,  $c_2 > 0$ -sabiti  $\varphi, f$  'den bağımsızdır. (16)-(18) probleminin diskritleştirilim.

Bu amaçla ilk önce  $\bar{\Omega}$  bölgesini aşağıdaki gibi bir ağa dönüştürelim:

$$\left\{ (x_j, z_k) \right\} : j = \overline{0, M}, k = \overline{0, N}, x_j = jh - h/2, j = \overline{1, M-1}, \\ h = \frac{l}{M-1}, t_k = k\tau, \tau = \frac{L}{N}, x_0 = x_1 - h/2 = 0,$$

$x_M = x_{M-1} + h/2 = l$ , burada  $M, N$  verilen pozitif tam sayılardır.

Aşağıdaki gösterimleri yapalım:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{z}}\Phi_{jk} &= \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau}, \delta_{\bar{x}}\Phi_{jk} = \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{j-1k}}{h}, \\ \delta_x\Phi_{jk} &= \frac{\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk}}{h}, \delta_{\bar{x}}\Phi_{1k} = \delta_x\Phi_{0k} = \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h/2}, \\ \delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk} &= \delta_x\Phi_{M-1k} = \frac{\Phi_{Mk} - \Phi_{M-1k}}{h/2}, \delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk} = \frac{\delta_x\Phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}}{h},\end{aligned}$$

Burada,  $\Phi_{jk}$  fonksiyonu  $\{(x_j, z_k)\}$ ' da tanımlanan ağ fonksiyonudur.

(16) için yukarıda gösterdiğimiz nümerik türev formüllerini kullanarak  $\{(x_j, z_k)\}$  ağı üzerinde  $\{\Phi_{jk}\}$  ağ fonksiyonunun

$$i\delta_{\bar{z}}\Phi_{jk} + a_0\delta_{x\bar{x}}\Phi_{ik} - a_j\Phi_{jk} + v_{0j}\Phi_{jk} + iv_{1k}\Phi_{jk} = f_{jk},$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (23)$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, j = \overline{0, M}, \quad (24)$$

$$\delta_{\bar{x}}\Phi_{1k} = \delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}, \quad (25)$$

şartlarından bulunması problemi elde edilir.

Burada,  $a_j, v_{0j}, v_{1k}, \varphi_j, f_{jk}$  ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)dx, j = \overline{1, M-1}, \quad (26)$$

$$v_{0j} = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x)dx, j = \overline{1, M-1}, \quad (27)$$

$$v_{1k} = \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} v_1(z)dz, k = \overline{1, N}, \quad (28)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi(x)dx, j = \overline{1, M-1}, \varphi_1 = \varphi_0, \varphi_M = \varphi_{M-1}, \quad (29)$$

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x,t) dx dt, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (30)$$

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 1.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Problemi İçin Sonlu Farklar Yönteminin Yakınsaklığı

Bu bölümde durgun kuazi-optik denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemiyle yakınsaklığı ispatlanmıştır.

#### 4.1.1 Fark Şemasının Çözümü İçin Kararlılık Kestirimi

(8)-(10) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

**Teorem 4.1.1:** Farz edelim ki  $a(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(z)$ ,  $\varphi(x)$  fonksiyonları (4)-(6) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (8)-(10) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 \leq c_2 \left( h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (31)$$

Burada  $c_2 > 0$  sabit olup  $h$ ,  $\tau$  ve  $m$  'den bağımsızdır.

**İspat :**  $z = z_k$  katlarında

$$h \sum_{j=1}^{M-1} i \delta_{\bar{r}} \Phi_{jk} \bar{\eta}_{jk} - h \sum_{j=1}^M a_0 \delta_{\bar{x}} \Phi_{jk} \delta_{\bar{x}} \bar{\eta}_{jk} \chi_j - h \sum_{j=1}^{M-1} (a_j - v_{0,jk}) \Phi_{jk} \bar{\eta}_{jk} = h \sum_{j=1}^{M-1} f_{jk} \bar{\eta}_{jk},$$

$$k = \overline{1, N}. \quad (32)$$

toplam özdeşliği (8)-(10) fark şemasına denktir. Burada,  $\eta_{jk}$  fonksiyonu  $\{(x_j, z_k)\}$  ağında tanımlanmış olup  $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0$ ,  $k = \overline{1, N}$  şartlarını sağlar.  $\bar{\eta}_{jk}$  ise

$$\eta_{jk} \text{-nin kompleks eşleniğidir, } \chi_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{2, M-1} \\ \frac{1}{2}, & j = 1, M \end{cases} \text{ dir,}$$

Eğer (32) toplam özdeşliğinde  $\bar{\eta}_{jk}$  ağ fonksiyonunun yerine  $\tau \bar{\Phi}_{jk}$  alırsak elde edilen eşitsizlikten onun kompleks eşleniğini çıkartırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \tau (\delta_t \Phi_{jk} \bar{\Phi}_{jk} + \delta_t \bar{\Phi}_{jk} \Phi_{jk}) + 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} v_{1k} |\Phi_{jk}|^2 = 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \text{Im}(f_{jk} \bar{\Phi}_{jk}) \quad (33)$$

$\forall k = 1, 2, \dots, N$ . Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\tau (\delta_t \Phi_{jk} \bar{\Phi}_{jk} + \delta_t \bar{\Phi}_{jk} \Phi_{jk}) = |\Phi_{jk}|^2 - |\Phi_{jk-1}|^2 + |\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}|^2 \quad (34)$$

Bu formülü (33) de dikkate alıp,  $k$  üzerinden  $k=1$  den  $k=N$  'a kadar toplayıp (8) ve (9) şartlarını dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}|^2 + 2\tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} v_{1k} |\Phi_{jk}|^2 \leq \\ & \leq h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_j|^2 + 2\tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}| |\Phi_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

$v_1(z) \geq b_2 > 0, \forall z \in (0, L)$  şartını dikkate alıp bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci toplamın m-inci terimini ayırıp  $\varepsilon$ - Cauchy ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliklerini uygularsak eşitsizliğini buluruz:

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}|^2 \leq \\ & \leq h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + \varepsilon \tau h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + \frac{\tau h}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jm}|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}|^2 + \\ & + \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

$\varepsilon = \frac{1}{2\tau}$  seçerek bu eşitsizliklerden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}|^2 \leq \\ & \leq 2h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_j|^2 + 2\tau h \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}|^2 + \\ & + 2(T+1)\tau h \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Burada sol taraftaki ikinci terimin negatif olmadığını dikkate alarak

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 \leq h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + 2(T+1)\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2 + 2\tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk}|^2,$$

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 \leq c_3 \left( h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (36)$$

Bu kestirimi (35) da dikkate alırsak, aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}|^2 \leq,$$

$$\leq c_4 \left( h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (37)$$

Buradan da teoremin geçerli olduğu elde edilir. Teorem 4.1.1 ispatlandı.

Şimdi (8)-(10) fark şemasının hatasını değerlendirelim. Bu amaçla (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün aşağıdaki ortalamalarını göz önüne alalım:

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} \psi(x, t) dx dt, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \psi_{j0} = \varphi_j, \quad (38)$$

$$j = \overline{0, M}, \psi_{0k} = \psi_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}.$$

$w_{jk} = \Phi_{jk} - \psi_{jk}$  olsun.  $w_{jk}$  ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{z}} w_{jk} + a_0 \delta_{\bar{x}} w_{jk} - a_j w_{jk} + v_{0j} w_{jk} + iv_{1k} w_{jk} = F_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \quad (39)$$

$$w_{j0} = 0, j = \overline{0, M}, w_{0k} = w_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}, \quad (40)$$

Burada  $F_{jk}$  ağ fonksiyonu olup

$$F_{jk} = f_{jk} - \left( i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk} + a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk} - a_j\psi_{jk} + v_{0j}\psi_{jk} + iv_{1k}\psi_{jk} \right),$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N} \quad (41)$$

formülü ile tanımlanır.

#### 4.1.2. Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim

Bu alt bölümde fark şemasının hatasını değerlendireceğiz.

**Teorem 4.1.2.1**  $a(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(z)$ ,  $\varphi(x)$  ve  $f(x, z)$  fonksiyonları sırasıyla (4)-(6) şartlarını ve  $\tau$ ,  $h$  adımları  $c_{\min} \leq \frac{\tau}{h} \leq c_{\max}$  şartını sağlasın. Burada  $c_{\min} > 0, c_{\max} > 0$  sabitleri  $\tau$ ,  $h$ 'dan bağımsızdır. Bu taktirde (39)-(40) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq c_{10} \beta_{\tau h}, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (42)$$

Burada  $c_{10} > 0$  sabiti  $\tau$ ,  $h$  ve  $m$ ' den bağımsızlar  $\beta_{\tau h} > 0$ ;  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ . için  $\beta_{\tau h} \rightarrow 0$  dir.

**İspat:** (39)-(40) sistemlerinden görüldüğü üzere bu sistem  $z = z_k$ : katlarında herhangi  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  ve herhangi  $\eta_{jk}$ , ağ fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğe denktir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{z}} w_{jk} \bar{\eta}_{jk} - h \sum_{j=1}^M \delta_{\bar{x}} w_{jk} \delta_{\bar{x}} \bar{\eta}_{jk} \chi_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{M-1} (a_j - v_{0j} - iv_{1k}) w_{jk} \bar{\eta}_{jk} = h \sum_{j=1}^{M-1} F_{jk} \bar{\eta}_{jk}. \quad (43)$$

Burada  $\eta_{jk}$  fonksiyon  $\{(x_j, z_k)\}$  ağında tanımlanıp  $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}$  şartlarını sağlar.

Bu özdeşlikle  $\bar{\eta}_{jk}$  nın yerine  $\tau \bar{w}_{jk}$  alıp elde edilen eşitsizlikten onun kompleks eşleniğini çıkartalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left( |w_{jk}|^2 - |w_{jk-1}|^2 + |w_{jk} - w_{jk-1}|^2 \right) + 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} v_{1k} |w_{jk}|^2 = 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \text{Im}(F_{jk} \bar{w}_{jk}),$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

(34) biçiminde olan formülü  $w_{jk}$  için kullanırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left( |w_{jk}|^2 - |w_{jk-1}|^2 + |w_{jk} - w_{jk-1}|^2 \right) + 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} v_{1k} |w_{jk}|^2 = 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \text{Im}(F_{jk} \bar{w}_{jk}),$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Bu eşitliği  $k$  üzerinden  $k=1$ ' den  $k=m \leq N$ ' e kadar toplayıp ve  $w_{j0} = 0, j = \overline{0, M}$ ,

$v_{1k} \geq b_2 > 0, k = \overline{1, N}$  şartlarından yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jk}|^2 \leq 2\tau h \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}| |w_{jk}|.$$

Bu eşitsizlikten  $\varepsilon$ - Cauchy ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliklerinin yardımıyla buluruz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq 2\tau h \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jk}|^2 + 2(T+1)\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Burada Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq c_{11} \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (44)$$

Şimdi  $F_{jk}$  ağ fonksiyonunu değerlendirelim.  $F_{jk}$ -nın formülünde yer alan  $f_{jk}$  fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left( i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(z)\psi \right) dx dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (45)$$

Bu formülü dikkate alarak  $F_{jk}$  ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:



$$F_{jk} = F_{jk}^1 + F_{jk}^2 + F_{jk}^3 + F_{jk}^4 + F_{jk}^5, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (46)$$

Burada

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz - i \delta_{\bar{z}} \psi_{jk}, \quad (47)$$

$$F_{jk}^2 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dz - a_0 \delta_{\bar{x}\bar{x}} \psi_{jk}, \quad (48)$$

$$F_{jk}^3 = -\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) \psi dx dz + a_j \psi_{jk}, \quad (49)$$

$$F_{jk}^4 = +\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) \psi dx dz - v_{0j} \psi_{jk}, \quad (50)$$

$$F_{jk}^5 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-hk}^{x_j+hk} i v_1(z) \psi dx dz - i v_{1k} \psi_{jk}. \quad (51)$$

olarak tanımlanır. Şimdi bu terimlerin her birini ayrı ayrı inceleyelim.

$\psi_{jk}$  için (38),  $F_{jk}^1, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}$ . ağ fonksiyonu için (47) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned} F_{jk}^1 &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz - i \delta_{\bar{z}} \psi_{jk} = \frac{i}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \\ &- i \frac{1}{\tau^2 h} \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz - \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz \right] \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{z-\tau}^z \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} d\theta dx dz \\ &= \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left( \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z+\theta)}{\partial \theta} \right) d\theta dx dz \\ &j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğe Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak,

$$|F_{jk}^1|^2 \leq \frac{1}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z + \theta)}{\partial \theta} \right|^2 d\theta dx dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}.$$

(52)

$F_{j1}^1, j = \overline{1, M-1}$ , için buluruz:

$$\begin{aligned} F_{j1}^1 &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau} (\psi_{j1} - \psi_{j0}) \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau h} \left( \frac{1}{\tau} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz - \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z_0) dx \right) \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_0}^t \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} d\theta dx dz. \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu eşitlikten aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$|F_{j1}^1|^2 = \frac{4}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

(53)

$F_{jk}^2, j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}$ . için aynı biçimde yaparak,

$$\begin{aligned} F_{jk}^2 &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} dx dz - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} \\ &= \frac{1}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 \left( \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \eta + \xi, z)}{\partial x^2} \right) d\eta d\xi dx dz, \\ &j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz.

Bu eşitliğe Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak buradan aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left| F_{jk}^2 \right|^2 \leq \frac{a_0^2}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \eta + \xi, z)}{\partial x^2} \right| d\eta d\xi dx dz,$$

$$j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}. \quad (54)$$

$F_{1k}^2$ ,  $k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F_{1k}^2 &= \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} dx dz - \frac{a_0}{h} (\delta_{\bar{x}} \psi_{2k} - \delta_{\bar{x}} \psi_{1k}) \\ &= \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \frac{\partial^2 \psi(x_1 + h/2, z)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi(x_1 - h/2, z)}{\partial x} \right) dz - \\ &\quad - \frac{a_0}{\tau h^3} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial \psi(\xi, z)}{\partial \xi} d\xi dx - 2 \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \frac{\partial \psi(\xi, z)}{\partial \xi} d\xi dx \right] dz \right\} \\ &= \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial^2 \psi(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz - \\ &\quad - \frac{2a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_{x_1-h/2}^x \int_{x_1-h/2}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left| F_{1k}^2 \right|^2 \leq \frac{16a_0^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz, k = \overline{1, N}. \quad (55)$$

eşitsizliğini buluruz.

Bu eşitsizliğin elde edilmesine benzer olarak  $F_{M-1k}^2, k = \overline{1, N}$ , için aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left| F_{M-1k}^2 \right|^2 \leq \frac{16a_0^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz, k = \overline{1, N}. \quad (56)$$

Şimdi  $F_{jk}^3, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}$ . ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (49) formülünün yardımıyla

$$\begin{aligned}
F_{jk}^3 &= a_j \psi_{jk} - \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) \psi(x, z) dx dz \\
&= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_j \psi_{jk} - a(x) \psi(x, z)) dx dz \\
&= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (a_j - a(x)) \psi_{jk} dx dz + \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz \\
& \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

buluruz.

$a_j, j = \overline{1, M-1}$  ağ fonksiyonları  $a(x)$  fonksiyonunu  $(x_j - h/2, x_j + h/2)$ , üzerinden ortalaması olduğundan bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim sıfıra eşit olur. Bu nedenle  $F_{jk}^3$  için

$$F_{jk}^3 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (57)$$

eşitliğini buluruz. Bu formülün sağ tarafını değerlendirmek için  $\psi_{jk} - \psi(x, z)$  farkını önce değerlendirelim. Bu farkı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\psi_{jk} - \psi(x, z) &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (\psi(\xi, \theta) - \psi(x, z)) d\xi d\theta \\
&= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left[ \int_x^\xi \frac{\partial \psi(\eta, \theta)}{\partial \eta} d\eta + \int_z^\theta \frac{\partial \psi(x, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma \right] d\xi d\theta, \quad (58)
\end{aligned}$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.$$

Bu eşitliği (57) formülünde dikkate alırsak, oradan

$$\left| F_{jk}^3 \right|^2 \leq \frac{2\mu_0^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz +$$

$$+ \frac{2\mu_0^2\tau}{h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (59)$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi  $F_{jk}^4$ ,  $j = \overline{1, M-1}$ ,  $k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (50) formülünden yararlanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{jk}^4 &= v_{0j} \psi_{jk} - \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) \psi(x, z) dx dz \\ &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (v_{0j} \psi_{jk} - v_0(x) \psi(x, z)) dx dz \\ &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} (v_{0j} - v_0(x)) \psi_{jk} dx dz + \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz \\ & \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

$v_{0j}$ ,  $j = \overline{1, M-1}$  ağ fonksiyonları  $v_0(x)$  fonksiyonunu  $(x_j - h/2, x_j + h/2)$ , üzerinden ortalaması olduğundan bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim sıfıra eşit olur. Bu nedenle aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{jk}^4 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.$$

Şimdi bu formülden yararlanarak  $F_{jk}^4$ ,  $j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonunu değerlendirelim.  $v_0 \in L_2(0, l)$  olduğundan Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| F_{jk}^4 \right| \leq \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \left( \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |v_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\psi(x, z) - \psi_{jk}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.$$

Burada  $\|v_0\|_{L_2(0, l)} \leq b_0$  olduğunu dikkate alırsak

$$\left| F_{jk}^4 \right| \leq \frac{b_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \psi(x, z) - \psi_{jk} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlikte (58) formülünü dikkate aldığımızda aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu söyleye biliriz:

$$\begin{aligned} \left| F_{jk}^4 \right|^2 &\leq \frac{2b_0^2}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz + \\ &+ \frac{2b_0^2 \tau}{h^2} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (60)$$

Şimdi  $F_{jk}^5, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}$ . ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (51) formülünün yardımıyla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{jk}^5 &= -iv_{1k} \psi_{jk} + \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} iv_1(z) \psi(x, z) dx dz \\ &= -\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} (iv_{1k} \psi_{jk} - iv_1(z) \psi(x, z)) dx dz \\ &= -\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} (v_{1k} - v_1(z)) \psi_{jk} dx dz - \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v_1(z) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz \\ & \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağ tarafında yer alan birinci terim için (13) formülünü kullanırsak onun sifıra eşit olduğunu görür ve  $F_{jk}^5, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonu için aşağıdaki formülü buluruz:

$$F_{jk}^5 = -\frac{i}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v_1(z) (\psi_{jk} - \psi(x, z)) dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (61)$$

(5) şartından ve

$$|v_1(z)| \leq c_{12} \|v_1\|_{W_2^1(0,L)}, \forall z \in [0, L]$$

eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$|v_1(z)| \leq c_{13}, \forall z \in [0, L] \quad (62)$$

elde edilir. Burada  $c_{13} = c_{12}b_1$  dir. Bu eşitsizliği ve (58) formülünü kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} |F_{jk}^5|^2 &\leq \frac{2c_{13}^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz + \\ &+ \frac{2c_{13}^2 \tau}{h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz. \end{aligned} \quad (63)$$

[ 20., sayfa 61-62] den bildiğimiz Fubini teoremine göre (52) dan

$$h\tau \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^1|^2 \leq \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z+\theta)}{\partial z} \right|^2 dx dz \right) d\theta \quad (64)$$

buluruz.

Orta süreklilik teoremine göre herhangi  $\varepsilon > 0$  için  $|\theta| \leq \tau < \delta$  olduğunda;

$$\left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z+\theta)}{\partial z} \right|^2 dx dz \right)^{1/2} < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı vardır. Bu nedenle böyle  $\tau$  lar için (64) den

$$\tau h \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^1|^2 \leq \omega_{\tau}^0, \quad (65)$$

elde ederiz. Burada,  $\omega_{\tau}^0 > 0$ ;  $\tau \rightarrow 0$  için  $\omega_{\tau}^0 \rightarrow 0$  olur. (53) eşitliğinde (7) kestirimini kullanarak

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} |F_{j1}^1|^2 \leq 4 \int_0^\tau \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, z)}{\partial z} \right\|_{L_2(0, \ell)} dz \leq c_{14} \tau, \quad (66)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu taktirde (65) ve (66) kestirimlerinin yardımıyla

$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^1|^2 \leq \omega_\tau^0 + c_{14} \tau. \quad (67)$$

buluruz. (64) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak (54) den

$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=2}^{M-2} |F_{jk}^2|^2 \leq \omega_h^1, \quad (68)$$

buluruz. Burada  $\omega_h^1 > 0$ ,  $h \rightarrow 0$  için  $\omega_h^1 \rightarrow 0$  olur. (55) ve (56) ten

$$\tau h \sum_{k=1}^N |F_{1k}^2|^2 \leq 16a_0^2 \int_0^h \left\| \frac{\partial^2 \psi(x, \cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, L)}^2 dx, \quad (69)$$

$$\tau h \sum_{k=1}^N |F_{M-1k}^2|^2 \leq 16a_0^2 \int_{l-h}^l \left\| \frac{\partial^2 \psi(x, \cdot)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, L)}^2 dx. \quad (70)$$

buluruz. Buradan integralin mutlak sürekliliğine göre  $h \rightarrow 0$  için (69) ve (70) in sağ tarafı sifıra yaklaşır. Yani:

$$\tau h \sum_{k=1}^N |F_{1k}^2|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N |F_{M-1k}^2|^2 \leq \omega_h^2, \quad (71)$$

yazılır.

burada  $\omega_h^2 > 0$ ,  $h \rightarrow 0$  için  $\omega_h^2 \rightarrow 0$  olur. Bu taktirde (68),(71) eşitsizliklerinin yardımıyla

$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^2|^2 \leq \omega_h^0, \quad (72)$$

buluruz. Burada  $\omega_h^0 = \omega_h^1 + \omega_h^2$ .

Son olarak (7) kestiriminin ve adımlar arasındaki uyum şartının yardımıyla (59), (60), (63) den



$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^3|^2 \leq c_{15} (\tau^2 + h^2), \quad (73)$$

$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^4|^2 \leq c_{16} (\tau + h), \quad (74)$$

$$\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}^5|^2 \leq c_{17} (\tau^2 + h^2) . \quad (75)$$

elde ederiz.

Böylelikle (67), (72) - (75) eşitsizliklerini ve (46) formüllerini kullanarak (44) den aşağıdaki kestirimi buluruz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq c_{18} (\omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_h^0 + \tau + h + \tau^2 + h^2). \quad (76)$$

Burada  $\beta_{\tau h} = \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_h^0 + \tau + \tau^2 + h^2$  gösterirsek  $c_{10} = c_{18}$  için teoremin geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem ispatlandı.

## 4.2. Durgun Kuazi-Optik Denklemi İçin 2.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Problemi İçin Sonlu Farklar Yönteminin Yakınsaklığı

Bu bölümde durgun kuazi-optik denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemiyle yakınsaklığı ispatlanmıştır.

### 4.2.1. Fark Şemasının Kararlılık ve Hata Kestirimleri

Bu alt bölümde (23) – (25) fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edeceğiz ve bu kestirimi kullanarak fark şemasının hatasını değerlendireceğiz. Bu amaçla ilk önce fark şemasının kararlılık kestirimini gösteren teoremi verelim.

**Teorem 4.2.1.1.:** Farz edelim ki  $a(x), v_0(x), v_1(z), \varphi(x), f(x, z)$  fonksiyonları (19)-(21) şartlarını sağlansın. Bu taktirde (23)-(25) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 \leq c_{19} \left( h \sum_{j=1}^M |\varphi_j|^2 + \tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |f_{jk}|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (77)$$

Burada  $c_{19} > 0$  sabit olup  $h, \tau$  ve  $m$  den bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı teorem 4.1.2.1'in ispatı ile aynıdır.

(23) - (25) fark şemasının hatası için kestirim elde edeceğimizden dolayı (16) - (18) probleminin aşağıdaki gibi ortalamalarına bakalım:

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} \psi(x, z) dx dz, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (78)$$

$$\psi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \quad \psi_{0k} = \psi_{1k}, \quad \psi_{Mk} = \psi_{M-1k}, \quad k = \overline{1, N}.$$

$w_{jk} = \Phi_{jk} - \psi_{jk}$  olsun.  $w_{jk}$  ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{z}} w_{jk} + a_0 \delta_{\bar{x}\bar{x}} w_{jk} - a_j w_{jk} + v_{0j} w_{jk} + i v_{1k} w_{jk} = F_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (79)$$

$$w_{j0} = 0, \quad j = \overline{0, M}, \quad \delta_{\bar{x}} w_{1k} = \delta_{\bar{x}} w_{Mk} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (80)$$

Burada  $F_{jk}$  ağ fonksiyonu olup aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$F_{jk} = f_{jk} - \left( i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk} + a_0\delta_{\bar{x}}\psi_{jk} - a_j\psi_{jk} + v_0\psi_{jk} + iv_1\psi_{jk} \right),$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (81)$$

**Teorem 4.2.2.1**  $a(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $v_1(z)$ ,  $\varphi(x)$  ve  $f(x, z)$  fonksiyonları sırasıyla (19)-(21)

şartlarını ve  $\tau$ ,  $h$  adımları  $c_{\min} \leq \frac{\tau}{h} \leq c_{\max}$  şartını sağlasın. Burada  $c_{\min} > 0, c_{\max} > 0$  sabitleri  $\tau$ ,  $h$ 'dan bağımsızdır. Bu taktirde (79) - (80) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq c_{20}\beta_{\tau h}, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (82)$$

Burada  $c_{20} > 0$  sabiti  $\tau$ ,  $h$  ve  $m$ 'den bağımsızlar  $\beta_{\tau h} > 0$ ;  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ . için  $\beta_{\tau h} \rightarrow 0$  dir.

**İspat.** Teorem 4.1.2.1'in ispatında olduğu gibi benzer işlemleri yaparak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |w_{jm}|^2 \leq c_{21}\tau h \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} |F_{jk}|^2, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (83)$$

Şimdi  $F_{jk}$  ağ fonksiyonunu değerlendirelim.  $F_{jk}$ -nın formülünde yer alan  $f_{jk}$  fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left( i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(z)\psi \right) dx dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (84)$$

Bu formülü dikkate alarak  $F_{jk}$  ağ fonksiyonunu ;

$$F_{jk} = F_{jk}^1 + F_{jk}^2 + F_{jk}^3 + F_{jk}^4 + F_{jk}^5, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (85)$$

gibi yazabiliriz. Burada

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz - i \delta_{\bar{z}} \psi_{jk}, \quad (86)$$

$$F_{jk}^2 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dz - a_0 \delta_{\bar{x}\bar{x}} \psi_{jk}, \quad (87)$$

$$F_{jk}^3 = -\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) \psi dx dz + a_j \psi_{jk}, \quad (88)$$

$$F_{jk}^4 = +\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x) \psi dx dz - v_{0j} \psi_{jk}, \quad (89)$$

$$F_{jk}^5 = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-hk}^{x_j+hk} i v_1(z) \psi dx dz - i v_{1k} \psi_{jk}. \quad (90)$$

olarak tanımlanır. Şimdi bu terimlerin her birini ayrı ayrı inceleyelim.

$\psi_{jk}$  için (78),  $F_{jk}^1$ ,  $j = \overline{1, M-1}$ ,  $k = \overline{2, N}$  ağ fonksiyonu için ise (86) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned} F_{jk}^1 &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz - i \delta_{\bar{z}} \psi_{jk} = \frac{i}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \\ &- i \frac{1}{\tau^2 h} \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz - \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz \right] \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{z-\tau}^z \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} d\theta dx dz \\ &= \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2-\tau}^{x_j+h/2} \int_{z-\tau}^0 \left( \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z+\theta)}{\partial \theta} \right) d\theta dx dz \\ &j = \overline{1, M-1}, k = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak sonuncu eşitlikten

$$\left| F_{jk}^1 \right|^2 \leq \frac{1}{\tau^2 h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^0 \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x, z + \theta)}{\partial \theta} \right|^2 d\theta dx dz,$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{2, N}.$$

(91)

elde ederiz.

$F_{j1}^1$ ,  $j = \overline{1, M-1}$  için

$$\begin{aligned} F_{j1}^1 &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau} (\psi_{j1} - \psi_{j0}) \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau h} \left( \frac{1}{\tau} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z) dx dz - \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x, z_0) dx \right) \\ &= \frac{i}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} dx dz - \frac{i}{\tau^2 h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t_0}^t \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} d\theta dx dz \end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitlikten

$$\left| F_{j1}^1 \right|^2 = \frac{4}{\tau h} \int_{z_0}^{z_1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, \quad j = \overline{1, M-1},$$

(92)

eşitliğini buluruz.

$F_{jk}^2$ ,  $j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}$ . için de benzer işlemleri yaparak

$$\begin{aligned} F_{jk}^2 &= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} dx dz - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} \\ &= \frac{1}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_0^h \int_{-h}^0 \left( \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \eta + \xi, z)}{\partial x^2} \right) d\eta d\xi dx dz \\ & \quad j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak

$$|F_{jk}^2|^2 \leq \frac{a_0^2}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{j-h/2}}^{x_j+h/2} \int_0^h \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \eta + \xi, z)}{\partial x^2} \right| d\eta d\xi dx dz,$$

$$j = \overline{2, M-2}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (93)$$

eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz.

$F_{1k}^2$ ,  $k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F_{1k}^2 &= \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} dx dz - \frac{a_0}{h} (\delta_{\bar{x}} \psi_{2k} - \delta_{\bar{x}} \psi_{1k}) \\ &= \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \frac{\partial \psi(x_1 + h/2, z)}{\partial x} \right) dz - \\ &\quad - \frac{a_0}{\tau h^3} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial \psi(\xi, z)}{\partial \xi} d\xi dx \right] dz \right\} \\ &= \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \int_x^{x+h} \int_{\xi}^{x_1+h/2} \frac{\partial^2 \psi(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla

$$|F_{1k}^2|^2 \leq \frac{4a_0^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz, \quad k = \overline{1, N} \quad (94)$$

eşitsizliğini buluruz.

Bu eşitsizliğin elde edilmesine benzer olarak  $F_{M-1k}^2$ ,  $k = \overline{1, N}$ . için

$$|F_{M-1k}^2|^2 \leq \frac{4a_0^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz, \quad k = \overline{1, N}. \quad (95)$$

eşitsizliğini buluruz

$F_{jk}^3, F_{jk}^4, F_{jk}^5$ ,  $j = \overline{1, M-1}$ ,  $k = \overline{1, N}$  ağ fonksiyonlarını teorem 4.1.2.1' de olduğu gibi değerlendirerek

$$\begin{aligned}
|F_{jk}^3|^2 &\leq \frac{2\mu_0^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz + \\
&+ \frac{2\mu_0^2 \tau}{h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
|F_{jk}^4|^2 &\leq \frac{2b_0^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz + \\
&+ \frac{2b_0^2 \tau}{h^2} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
|F_{jk}^5|^2 &\leq \frac{2c_{22}^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} \right|^2 dx dz + \\
&+ \frac{2c_{22}^2 \tau}{h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} \right|^2 dx dz, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N},
\end{aligned} \tag{98}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Daha sonra (91)-(98) eşitsizliklerinden yararlanarak teorem 4.1.2.1'de olduğu gibi benzer işlemler yapılarak teoremi ispatlamış oluruz. Teorem ispatlandı.

### 4.3. Nümerik Çözüm Algoritması

Bir önceki alt bölümde incelediğimiz 1. ve 2. çeşit sınır değer problemlerinin nümerik çözüm algoritmasını elde etmek için incelediğimiz her iki problemi de içeren aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(z)\psi = f(x, z), (x, z) \in \Omega \quad (99)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, \ell) \quad (100)$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \psi(0, z)}{\partial x} + \beta_0 \psi(0, z) = y_0(z), \quad z \in (0, L), \quad (101)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi(l, z)}{\partial x} + \beta_1 \psi(l, z) = y_1(z), \quad z \in (0, L). \quad (102)$$

Burada  $l > 0, L > 0, a_0 > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_0, \beta_1 \geq 0$  verilen sayılar;

$a(x), v_0(x), v_1(z), \varphi_0(x), f(x, z), y_0(z), y_1(z)$  verilen fonksiyonlardır.

Şimdi bu problemin nümerik çözümünü yapmak için çözüm algoritması oluşturmamız gerekir. Bu amaçla aşağıdaki gibi fark şeması oluşturalım:

Fark şeması için  $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, L]$  bölgelerini aşağıdaki gibi ağa dönüştürelim:

$$\{(x_j, z_k) : x_j = jh, \quad j = \overline{0, M}, \quad z_k = k\tau, \quad k = \overline{0, N}\}$$

Burada  $M > 0, N > 0$ , verilen tamsayılar,  $h$  adımı  $x$ 'e,  $\tau$  adımı  $z$ 'ye göre seçilen adımlardır.  $\psi(x_j, z_k)$  değerlerine karşılık gelen ağ fonksiyonunu  $\Phi_{jk}$  ile gösterelim.

Bu durumda

$$i \delta_z \Phi_{jk} + a_0 \delta_{xx} \Phi_{jk} - a_j \Phi_{jk} + v_{0j} \Phi_{jk} + iv_{1k} \Phi_{jk} = f_{jk}, \quad (103)$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N},$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \quad (104)$$



$$\alpha_0 \delta_{\bar{x}} \Phi_{1k} + \beta_0 \Phi_{1k} = y_{0k}, k = \overline{1, N}. \quad (105)$$

$$\alpha_1 \delta_{\bar{x}} \Phi_{Mk} + \beta_1 \Phi_{Mk} = y_{1k}, k = \overline{1, N}. \quad (106)$$

sistemi elde edilir.

Bu cebirsel denklemler sisteminin çözümünü bulmak için kovma yöntemi uygulayacağız. Bu amaçla (103) – (106) şartlarını açık biçimde yazıp sistemi üç köşegenli sisteme dönüştürmeye çalışalım. Bu durumda  $j = \overline{1, M-1}$ ,  $k = \overline{1, N}$  için

$$i \frac{\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1}}{\tau} + a_0 \frac{\Phi_{j+1k} - 2\Phi_{jk} + \Phi_{j-1k}}{h^2} +$$

$$-a_j \Phi_{jk} + v_{0j} \Phi_{jk} + iv_{1k} \Phi_{jk} = f_{jk}$$

bu eşitliğin her iki tarafını  $\tau$  ile çarparsak,

$$i\Phi_{jk} - i\Phi_{jk-1} + a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j+1k} - 2a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{jk} + a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j-1k} -$$

$$-\tau a_j \Phi_{jk} + \tau v_{0j} \Phi_{jk} + \tau i v_{1k} \Phi_{jk} = \tau f_{jk}$$

elde edilir. Burada uygun terimleri bir araya getirirsek

$$a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j-1k} + \left[ i + 2a_0 \frac{\tau}{h^2} - \tau a_j + v_{0j} + i v_{1k} \right] \Phi_{jk} +$$

$$+ a_0 \frac{\tau}{h^2} \Phi_{j+1k} = \tau f_{jk} + i\Phi_{jk-1}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki gibi gösterimleri yaparsak

$$A_{jk} = a_1 \frac{\tau}{h^2}, B_{jk} = a_1 \frac{\tau}{h^2}, C_{jk} = -i + 2a_0 \frac{\tau}{h^2} + \tau a_j - v_{0j} - i v_{1k}.$$

$$F_{jk} = -\tau f_{jk} - i\Phi_{jk-1}$$

bu taktirde sonuncu eşitlikten  $j = \overline{1, M-1}$ ,  $k = \overline{1, N}$  için

$$A_{jk} \Phi_{j-1k} - C_{jk} \Phi_{jk} + B_{jk} \Phi_{j+1k} = -F_{jk}, \quad (107)$$

üç köşegenli cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

Bu sistemin çözümü için kovma algoritmasını uygulayalım. Bu amaçla ilk önce bu sistem için sınır değer şartlarını belirleyelim. (101) ve (102) sınır değer şartlarına karşılık gelen sınır değer şartını elde etmek için aşağıdaki işlemleri yapalım:

$$\begin{aligned}\alpha_0 \frac{\Phi_{1k} - \Phi_{0k}}{h} + \beta_0 \Phi_{1k} &= y_{0k}, \\ \alpha_0 \Phi_{1k} - \alpha_0 \Phi_{0k} + \beta_0 h \Phi_{1k} &= h y_{0k} \\ \alpha_0 \Phi_{0k} &= \alpha_0 \Phi_{1k} + \beta_0 h \Phi_{1k} - h y_{0k} \\ \Phi_{0k} &= \left( \frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0} \right) \Phi_{1k} - \frac{h y_{0k}}{\alpha_0} \\ \chi_{1k} &= \frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0}, \mu_{1k} = -\frac{h y_{0k}}{\alpha_0} \\ \alpha_1 &= \frac{\Phi_{Mk} - \Phi_{M-1k}}{h} + \beta_1 \Phi_{Mk} = y_{1k}, \\ \Phi_{Mk} (\alpha_1 + \beta_1 h) &= \alpha_1 \Phi_{M-1k} + h y_{1k} \\ \Phi_{Mk} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1 h} \Phi_{M-1k} + \frac{h y_{1k}}{\alpha_1 - \beta_1 h} \\ \chi_{2k} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1 h}, \mu_{2k} = \frac{h y_{1k}}{\alpha_1 + \beta_1 h}\end{aligned}$$

Böylece (107) için aşağıdaki sınır değer şartlarını elde ederiz.

$$\Phi_{0k} = \chi_{1k} \Phi_{1k} + \mu_{1k} \quad (108)$$

$$\Phi_{Mk} = \chi_{2k} \Phi_{M-1k} + \mu_{2k} \quad (109)$$

Böylece (108)–(109) sistemi için kovma yöntemini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\Phi_{jk} = \alpha_{j+1k} \Phi_{j+1k} + \beta_{j+1k}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (110)$$

Burada  $\alpha_{j+1k}$  ve  $\beta_{j+1k}$  kovma katsayıları olup aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür.

$$\alpha_{j+1k} = \frac{B_{jk}}{C_{jk} - \alpha_{jk} A_{jk}}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (111)$$

$$\beta_{j+1k} = \frac{\alpha_{jk} B_{jk} + F_{jk}}{C_{jk} - \alpha_{jk} A_{jk}}, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}. \quad (112)$$

$$\alpha_{1k} = \chi_{1k}, \beta_{jk} = \mu_{1k}, \quad (113)$$

(110) formülü ile sistemin çözümünü bulmak için,

$$\Phi_{Mk} = \frac{\chi_{2k} \beta_{Mk} + \mu_{2k}}{1 - \chi_{2k} \alpha_{Mk}}$$

şartını kullanarak sağdan sola doğru tüm  $\Phi_{jk}$  'leri bulabiliriz. Böylece (99) – (102) probleminin nümerik çözümünü bulmak için kovma yönteminin algoritmasını açıkladık.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan başlangıç sınır değeri problemleri konulma açısından önceki [11,15] çalışmalarından önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması hem teorik, hemde uygulama açısından önem taşır.

Bu tezde ilk kez durgun kuazi-optik denklemi için başlangıç sınır değeri problemlerinin çözüm algoritması inşa edilmiş ve bu amaçla kovma yöntemi uygulanmıştır. Bu tezde elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, daha önceki [1-4,5-7,9,10,12-19] çalışmalardaki elde edilen sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] İskenderov A.D., Yagubov G.Y., Musayeva M.A., “ Kuantum potansiyellerinin İdentifikasyonu”, Çaşioğlu Yayınevi, 552 s. Bakü, 2012, (Rusça).
- [2] Vorontsov M.A., Şmalqauzen V.I. “Adaptiv Optiğin Prensipleri”, Moskova, Nauka, 1985, (Rusça).
- [3] Iskenderov A.D., Yagubov G.Y., Ibrahimov N.S., “About an estimate of convergence of difference approximations by the functional in the identification problem for the non stationary equation of quasi optics”, Abstracts of the XIX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2012), pp.118-120. Mukachevo, Ukraine, April 23-27 2012.
- [4] Yıldırım Aksoy, N., “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı”, Doktora Tezi, Erzurum, 150 s, 2009.
- [5] Mahmudov, N.M., “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. 1997, (Rusça).
- [6] Potapov M.M., Razgulin A.V., Şameeva T.Y., “ Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülerizasyonu”, Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri “Nümerik Analiz ve Siberetik”, 15(1), 8-13. 1987, (Rusça).
- [7] Razgulin A.V., “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları”, Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri “Nümerik Analiz ve Siberetik” , 15(2), 28-33. 1998, (Rusça).
- [8] Samarskiy, A.A., Andreev, V.B., "Eliptik Denklem için Fark Metotları ", Moskova, Nauka, 1976, (Rusça).

[9] Senger, O., “Lineer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, 53 s. Kars, 2006.

[10] Silla, N., “ Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü”, Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, s. 165, Bakü, 1991, (Rusça).

[11] Ibrahimov N.S., “The convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics”, Scientific Proceedings of the Azerbaijan SSR. tehn. Univ. Ser. Basic Sciences, № 4, p.54-60. 2010, (Rusça).

[12] Yagub G., Ibrahimov N.S., Yildirim Aksoy, N., Deveci O., “The solution with difference method of on optimal control problem for nonstationary quasi-optics equation”, Abstracts of the XXI International Conference Problems of Decision Making under, Uncertainties (PDMU-2013), Skhidnytsia, Ukraine, pp.68-71. May 13-17 , 2013.

[13] Yagubov, G.Ya., "Kuazi Lineer Schrodinger Denklemi'nin Katsayısı ile Optimal Kontrol", Bilimler Doktoru Tezi, 318 s., Kiev, 1994,(Rusça).

[14] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., “ Finite-Difference method solution of variation formulation of an Inverse problem for nonlinear Schrodinger equation” Izv. AN Azerb.-Ser.Physic.tech.matem.nauk, vol.16, No 1-2, pp. 46-51, 1995, (Rusça).

[15] Yetiskin, H., “Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Farklar Yaklaşımı”, Doktora Tezi, ,Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 92 s. 2005. 43

[16] Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., ”On an optimal control problem”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 88, pp. 275–287. 1997.

[17] Vargün, M., "Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümü" Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 40 s. 2013.

[18] Demirci, Z., "Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü" Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 44 s. 2013.

[19] Çelik, D., "Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü" Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 32 s. 2014.

[20]"Vasilyev F.P.,1981 "Ekstremal Problemlerinin Çözüm Yöntemleri" Nauka, 400s. Moskova.

[21] Mikhailov,V.P 1983. "Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler" Nauka,424 s. Moskova.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mucahit BUYANKARA

Doğum Yeri : BİNGÖL

Doğum Tarihi : 06.10.1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dil : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise : Atatürk Lisesi Bingöl (2003-2006)

Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik (2009-2013)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (2013-2015)