T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOTOPİK KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İmge Ece KARADAŞ

Danışman
Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN-2015
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOTOPİK KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İmge Ece KARADAŞ

Danışman
Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN-2015
KARS

Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' un danışmanlığında İmge Ece KARADAŞ' ın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı " Soft Topolojik Uzaylar Kategorisinde Homotopik Kümeler" adlı bu çalışmada, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oy. birliği....ile kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 16/06/2015

Adı ve Soyadı

Başkan: Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS) ....

Üye: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 16/06/2015 gün ve ....../...... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hidayet Metin ERDOĞAN

Enstitü Müdürü Vekili

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Beni bu konuya yönlendiren ve çalışmalarımda büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, değerli hocam Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' a ve bölümümün değerli hocalarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca her türlü maddi manevi katkılarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İmge Ece KARADAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOTOPİK KÜMELER

İmge Ece KARADAŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

Sosyal bilimler, iktisadi, mühendislik ve tıpta bazı problemlerin araştırılmasında klasik matematik yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Bu tür problemler birçok belirsizlik taşır ve kesin çözümü yoktur. Böyle problemlerin çözülmesi için son yıllarda klasik olmayan birçok teori inşa edilmiştir. Bu yöntemlerle ilgili bulanık (fuzzy) kümeler, intuitionistic fuzzy kümeler, kaba (rough) kümeler, esnek (soft) kümeler teorileri inşa edilmiştir. Bu teoriler matematiğin farklı alanlarında uygulanmıştır. Homotopya, cebirsel topoloji yöntemlerinin en önemli kavramlarından biridir. Homotopya bağıntısı Fuzzy topolojik uzaylar kategorisindeki birkaç çalışmada verilmiştir.

Bu tezde soft topolojik uzaylarda tanımlanan soft homotopya bağıntısının özellikleri incelenmiştir. Bu bağıntıdan yararlanarak soft homotopik kümeler ve soft homotopik kümelerin tam dizisi oluşturuldu.

2015, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Soft küme, Soft topolojik uzay, Soft sürekli dönüşüm, Soft birim aralık, Soft topoljik uzaylar kategorisinde homotopik kümeler.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

HOMOTOPIC SETS IN SOFT TOPOLOGICAL SPACES CATEGORIES

İmge Ece KARADAŞ

Kafkas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sadi BAYRAMOV

Classic mathematics methods are insufficient in solution of some problems occur in liberal arts, economic, engineer and medicine sciensces. These problems in itself carries many uncertainties and there is no definitive solution. For the solution of such problems there have been constructed non classical theories in recent years.About these methods have been constructed these fuzzy sets, intionistic fuzzy sets, rough sets and soft sets theories. These theories have been applied in different areas of mathematics. The homotopy is one of the most important concepts of the algebraic topological methods. The homotopy correlation have been provided in a few studies in the fuzzy topological spaces category.

In this thesis; properties of homotopy correlation defined in soft to topological spaces have been examined. Soft homotopic sets and soft homotopic sets full series was created by using this correlation.

2015, 70 pages

Keywords: Soft set, Soft topological spaces, Soft continuous mapping, Soft unit interval, Homotopic sets in soft topological spaces categories.

SİMGELER DİZİNİ

$[X, Y]$: Dönüşümlerin homotopik sınıfı

$Hom(X, Y)$: X nesnesinden Y nesnesine giden morfizmalar kümesi

U : Herhangi bir evrensel küme

$P(U)$: U' nun kuvvet kümesi

E : Parametreler kümesi

A : E parametreler kümesinin boş olmayan alt kümesi

(F, A) : U üzerinde bir soft küme

$\left({}^{Y}F, E\right)$: Y üzerinde (F, E)' nin soft alt kümesi

(X, τ, E) : X üzerinde bir soft topolojik uzay

$\overline{(F, E)}$: (F, E) soft kümesinin soft kapanışı

$(F, E)^{\circ}$: (F, E) soft kümesinin soft içi

(x_e, E) : Soft nokta

$SS(U)_A$: Soft kümelerin ailesi

$Stop$: Soft topolojik uzaylar kategorisi

$\left(X\big|_{\sim_1}, \widetilde{\tau}, E\big|_{\sim_2}\right)$: (X, τ, E) soft uzayının soft bölüm uzayı

$(X, \tau. E. x_e^0)$: belirli noktalı soft topolojik uzaydır.

1.GİRİŞ

Sosyal bilimler, iktisadi, mühendislik ve tıpta bazı problemlerin araştırılmasında klasik matematik yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Bu tür problemler birçok belirsizlik taşır ve kesin çözümü yoktur. Böyle problemlerin çözülmesi için son yıllarda klasik olmayan birçok teori inşa edilmiştir. Bu yöntemlerle ilgili bulanık (fuzzy) kümeler, intuitionistic fuzzy kümeler, kaba (rough) kümeler ve esnek (soft) kümeler teorileri inşa edilmiştir. Bu teoriler matematiğin farklı alanlarında uygulanmıştır.

İlk klasik olmayan teori -fuzzy kümeler teorisi- 1965 yılında L. Zadeh tarafından ortaya konulmuştur [44]. Fuzzy kümeler teorisi matematiğin farklı alanlarında uygulanmıştır. Örneğin; topolojide, cebirde, geometride ve fonksiyonel analizde fuzzy kümeler teorisi uygulanmıştır.

1999 yılında Molodtsov tarafından soft küme kavramı ortaya konulmuştur ve bu kümelerin bazı özellikleri araştırılmıştır [37]. Soft kümeler teorisi, matematiğin farklı alanlarında ve pratik problem çözümlerinde büyük önem kazanmıştır. Soft kümelerin araştırılmasında Maji ve Roy'un büyük katkısı olmuştur [32, 33, 34].

Soft kümelerin cebirde uygulaması 2007 yılında başlamıştır [4] daha sonra soft halka, soft modül kavramları ortaya konularak bu yapıların bazı özellikleri araştırılmıştır [1, 15, 27, 28, 41]. Topolojide soft yapılar 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından ortaya konulmuş ve soft topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları incelenmiştir [41].

Soft topolojik uzaylarla ilgili daha sonra bir kaç çalışma yayınlanmıştır [7, 8, 9,11, 12, 13, 25, 36, 39, 45]. Bu çalışmalarda temel kavram olan soft nokta kavramı farklı yöntemlerle ortaya konulmuş ancak bu kavramların hepsinde yetersizlik bulunmuştur. Örneğin; soft noktanın soft alt kümesi mevcut olabilir ancak soft topolojik uzayda soft noktalar soft açık olmalarına rağmen soft topolojik uzay diskret değildir. Diğer bir örnek olarak soft kompakt Hausdorff uzayı normal uzay değildir.

S. Bayramov ve Ç. Gündüz (Aras) $[8]$ çalışmalarında soft noktanın yeni tanımını ortaya koyarak bu yetersizlikleri ortadan kaldırmışlardır.

Cebirsel topolojinin yöntemlerinin uygulaması hem fuzzy topolojik hem de soft topolojik uzaylarda çok az araştırılmıştır. Bu konu ile ilgili fuzzy topolojik uzaylarda $[5, 6, 10, 18, 19, 20, 30]$ şu çalışmaları gösterebiliriz. Soft topolojik uzaylar kategorisinde ise tek bir çalışma $[11]$ yayımlanmıştır.

Homotopya, cebirsel topoloji yöntemlerinin en önemli kavramlarından biridir. Homotopya bağıntısı Fuzzy topolojik uzaylar kategorisindeki birkaç çalışmada $[5, 6, 18, 19, 20, 30]$ ortaya konulmuştur ancak bu homotopya kavramının denklik bağıntısı olmadığı görülmüştür. S. Bayramov ve Ç. Gündüz (Aras) tarafından bir fuzzy topolojik uzay için homotopya kavramı ortaya konularak fuzzy homotopik kümeler ve onların tam dizileri oluşturulmuştur $[19]$. Daha sonra Ç. Gündüz (Aras) böyle fuzzy topolojik uzayların homotopik teorisini inşa etmiştir $[18]$.

Soft topolojik uzaylar kategorisinde soft homotopya bağıntısı ortaya konulmuştur. Homotopya bağıntısının oluşturulmasında birim aralığının önemi kaçınılmazdır. Bundan dolayı soft topolojik uzaylarda homotopyanın ortaya konulabilmesi için soft birim aralığının oluşturulması gerekmektedir. Soft birim aralığın tanımlandığı $[11, 17]$ çalışmadan yararlanılarak soft topolojik uzaylarda yol bağlantılılık kavramı ortaya konularak bu uzayların bazı özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezde soft topolojik uzaylarda tanımlanan soft homotopya bağıntısının özellikleri incelenmiştir. Bu bağıntıdan yararlanılarak soft homotopik kümeler oluşturulmuştur ve soft homotopik kümelerin tam dizisi inşa edilmiştir.

Tez 4 bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde; kategori, alt kategori, funktor, kovariant ve kontravariant funktor, kovariant ve kontravariant funktorların morfizmalarının tanımları ve gerekli teoremleri verilmiştir.

Tezin materyal ve yöntem bölümünde; soft küme, soft topoloji, soft topolojik uzaylar, soft ayırma aksiyomları, soft kompakt uzaylar, soft yerel kompakt uzaylar, soft parakompakt uzaylar, soft sürekli dönüşümler ve soft bağlantılılık ile ilgili gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin araştırma bulguları yönteminde; soft topolojik uzaylar kategorisinde birim aralık tanımlanarak homotopyanın oluşumu ve soft homotopik kümelerin tam dizisi araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, araştırmamızda ihtiyaç duyduğumuz temel tanım ve teoremler verilecektir [13].

2.1. Kategori ve Funktor

X, Y, Z herhangi nesneler olsun. Bu nesneler küme, grup vs. olabilir. Herhangi X, Y nesneleri için $Hom(X, Y)$ kümesi verilsin. Bu kümeye X nesnesinden Y nesnesine giden morfizmalar kümesi denir.
$\forall\ X, Y, Z$ nesneleri için;

$$\mu: Hom(X, Y) \times\ Hom\ (Y, Z)\ \ \rightarrow\ Hom\ (X, Z)$$

dönüşümü verilsin.

$$\forall f\ \epsilon\ Hom\ (X, Y)\ \text{ve}\ \forall g\ \epsilon Hom\ (Y, Z)$$

morfizmaları için μ fonksiyonunun görüntüsü $\mu(f, g) = g \circ f$ olsun.

Farz edelim ki μ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlansın.

1) $\forall\ X, Y, Z, K$ nesneleri ve $\forall f\epsilon\ Hom\ (X, Y), \forall g\ \epsilon\ Hom\ (Y, Z), \forall h\ \epsilon\ Hom\ (Z, K)$ için;

$$\mu(\mu(f, g), h) = \mu(f, \mu(g, h))$$
$$\mu((g \circ f), h) = \mu(f, (h \circ g))$$
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2) $\forall\ X, Y$ nesneleri için öyle $1_X\ \epsilon\ Hom\ (X, X)$ ve $1_Y\ \ \epsilon\ Hom\ (Y, Y)$ morfizmaları var ki;

$$\forall f \in Hom(X,Y) \text{ için } \mu(1_X, f) = f$$
$$\forall g \in Hom(Y,Z) \text{ için } \mu(1_Y, g) = g$$

sağlanır. Yani $f \circ 1_x = f$ ve $g \circ 1_y = g$ dir. 1_xve 1_y morfizmalarına birim morfizma denir.

3) $X \neq X_1$ veya $Y \neq Y_1$ ise $Hom\ (X,Y) \cap Hom\ (X_1,Y_1) = \emptyset$ dir.

Tanım 2.1.1.[**13**] Nesneler ailesi ve bu nesnelerin morfizmalar kümesine yukarıdaki 1), 2), 3) koşullarını sağlayan μ dönüşümü ile birlikte bir kategori denir.

Örnek 2.1.2.[**13**] Örnek olarak bazı kategori çeşitlerini tanımlayalım;

Set Kategorisi: Nesneleri kümelerden oluşan kategoriye *Set* Kategorisi denir. $Hom(X,Y)$, her X,Y kümesi için X*'* den Y*'* ye giden sürekli dönüşümlerin kümesidir. μ ise kümelerin dönüşümlerinin bileşkesidir.

Top Kategorisi: Nesneleri topolojik uzaylardan oluşan kategoriye *Top* Kategorisi denir. *Top* (X,τ) nesnelerin topolojik uzayıdır. Morfizması, $Hom(X,Y) \rightarrow C(X,Y)$, X*'* ten Y*'* ye giden sürekli dönüşümlerdir.

Group Kategorisi: Bu kategorinin nesneleri gruplar, morfizmaları ise herhangi G,H grupları için $Hom(H,G)$ şeklinde G den H*'* a giden grupların morfizmasıdır.

Abel Kategorisi: Bu kategorinin nesneleri Abel grupları, morfizmaları ise grupların homomorfizmasıdır.

Tanım 2.1.3.[**13**] C' ve C iki kategori, bu kategorinin nesnelerini ise ObC' ve ObC olarak gösterelim. Eğer;

1) $\forall\ X \in C'$ için $X \in C$

2) $\forall\ X,Y \in ObC'$ için $Hom_{C'}(X,Y) \subset Hom_c(X,Y)$

ise o zaman C'kategorisine C kategorisinin alt kategorisi denir.

C' kategorisi, C kategorisinin alt kategori olsun. Eğer $\forall\ X, Y \epsilon\ ObC'$ için;

$$Hom_{C'}(X, Y) = Hom_c(X, Y)$$

ise C'kategorisine C kategorisinin tam alt kategorisi denir.

Tanım 2.1.4.[13] C_1 ve C_2 iki kategori ve F dönüşümü;

$$\forall\ X\ \epsilon\ ObC_1 \rightarrow\ F(X)\ \epsilon\ ObC_2$$

$$\forall\ f\ \epsilon\ Hom_{C_1}(X, Y) \rightarrow F(f)\ \epsilon\ Hom_{C_2}(F(X), F(Y))$$

Olsun. Eğer

1) $\forall f\ : X\ \rightarrow\ Y\ , g\ : Y\ \rightarrow\ Z$ dönüşümleri için $F(g \circ f) =\ F(g) \circ F(f)$
2) $1_X : X\ \rightarrow\ X$ dönüşümü için $F(1_X) = 1_{F(X)}$

şartları sağlanırsa o zaman $F\ : C_1\ \rightarrow\ C_2$ dönüşümüne kovariant funktor denir.

Örnek 2.1.5[**13**]**.** Topolojik uzaylar kategorisini ele alalım. Topolojik uzaylar kategorisinden kümeler kategorisine giden dönüşüm tanımlayacağız.

X_0 bir topoloji olsun ve her $Y\ \epsilon\ Top$ uzayına karşı $C\ (X_0, Y)$ sürekli dönüşümler uzayı gelsin ve $C(X_0, Y) = Hom(X_0, Y)$ olsun. $F: Y_1\ \rightarrow Y_2$ herhangi bir sürekli dönüşümdür. F sürekli dönüşümüne karşı $f_*: Hom(X_0, Y_1)\ \rightarrow\ Hom(X_0, Y_2)$ dönüşümü gelsin ve bu dönüşümü şöyle tanımlayalım;

$$\forall\ \varphi\ \epsilon\ Hom(X_0, Y_1)\ , \varphi\ : X_0 \rightarrow Y_1, f_*(\varphi) =\ f \circ\ \varphi$$

koşulların sağlandığına bakalım;

1) $f: Y_1 \to Y_2, g: Y_2 \to Y_3$ için $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ olduğunu gösterelim;
$\forall \varphi \epsilon Hom(X_0, Y_1)$ için $(g \circ f)_*(\varphi) = (g \circ f) \circ (\varphi)$
$(g_* \circ f_*)(\varphi) = g_*(f \circ \varphi) = g \circ (f \circ \varphi)$ sağlanır.
2) $1_Y : Y \to Y, \forall \varphi \epsilon Hom(X_0, Y)$,
$(1_Y)_*(\varphi) = 1_* \circ \varphi = \varphi \circ (1_Y)_X = 1_{Hom(X_0,Y)}$

Yönü değişmediği için bu bir kovariant funktordur.

Tanım 2.1.6.[13] C_1 ve C_2 iki kategori olsun. F dönüşümü;

$$\forall X \in ObC_1 \to F(X) \in ObC_2$$

$$\forall f \epsilon Hom_{C_1}(X, Y) \to F(f) \epsilon Hom_{C_2}(F(Y), F(X))$$

olsun ve

1) $\forall f : X \to Y, g : Y \to Z$ dönüşümleri için $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
2) $1_X: X \to X$ dönüşümü için $F(1_X) = 1_{F(X)}$

şartları sağlanırsa o zaman $F : C_1 \to C_2$ dönüşümüne kontravariant funktor denir.

Örnek 2.1.7.[13] $Hom(X_0, -): Top \to Set,\ X \to Hom(X, Y_0)$ olsun. $F : X_1 \to X_2,\ f^*: Hom(X_2, Y_0) \to Hom(X_1, Y_0)$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$\forall \varphi \epsilon Hom(X_2, Y_0)$ alırsak $\varphi: X_2 \to Y_0$ olur. $f^*(\varphi) = \varphi \circ f, X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{\varphi} Y_0$ olur. Koşulların sağlandığına bakalım;

1) $f: X_1 \to X_2,\ g: X_2 \to X_3$ için $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$ olduğunu gösterelim;
$\forall \varphi \epsilon Hom(X_1, Y_0)$ için $(g \circ f)^*(\varphi) = (\varphi) \circ (g \circ f)$

$(f^* \circ g^*)(\varphi) = f^* (\varphi \circ g) = (\varphi \circ g) \circ f$ sağlanır.

2) $1_X : X \to X$, $\forall \varphi \in Hom(X, Y_0)$,

$(1_X)^*(\varphi) = \varphi \circ 1^* = \varphi \circ (1_X)_Y = 1_{Hom(X,Y_0)}$

Böylece $Hom(-, Y): Top \to Ens$ homotopyası topolojiler kategorisinde kontravariant funktordur.

Tanım 2.1.8.[13] $F : C \to C'$, $G : C \to C'$ iki kovariant funktor olsun. $\forall f : X \to Y \in C$ için;

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad [2.1.1]$$

[2.1.1] diyagramını komutatif yapan C' kategorisinin $\eta = \{ \eta_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in ObC}$ şeklindeki morfizmalar ailesine F, G kovariant funktorlarının morfizması denir.

Tanım 2.1.9.[13] $F : C \to C'$, $G : C \to C'$ iki kontravariant funktor olsun. $f : X \to Y \in C$ dönüşümü için;

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "\eta_x"'] & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(X) & G(Y) \arrow[l, "G(f)"] \end{tikzcd} \qquad [2.1.2]$$

[2.1.2] diyagramını komutatif yapan C' kategorisinin $\eta \{ \eta_x : F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \epsilon ObC}$ morfizmalar ailesine F, G kontravariant funktorların morfizması denir.

2.2. Homotopik Kümeler ve Gruplar

Tanım 2.2.1.$[\mathbf{23, 35, 42}]$ $I = [0,1]$ aralığı R'nin alt uzayı olsun ve $f, g: X \rightarrow Y$ giden dönüşümler olsun. Eğer;

$$F\big|_{X\times\{0\}} = f \ , \qquad F\big|_{X\times\{1\}} = g$$

koşullarını sağlayan $F: X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa bu dönüşüme homotopya, f ve g dönüşümlerine homotop dönüşümler denir.

$[X, Y]$ sınıfı, dönüşümlerin homotopik sınıfıdır. $[X, Y]$ sınıfını ele alalım. X ve Y uzayları nasıl olmalı ki $[X, Y]$ kümesi gruba dönüşsün?

Bu problemi çözmek için Top kategorisini değil Top_0 kategorisini ele alacağız.
Top_0 kategorisinin nesneleri; (X, x_0) topolojik uzayı ve bu uzayda verilen $x_0 \epsilon X$ belirli noktasıdır.

Tanım 2.2.2.$[\mathbf{23, 35, 42}]$ Eğer $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü $f(x_0) = y_0$ koşullarını sağlıyorsa f'e (X, x_0)'dan (Y, y_0)'a giden dönüşüm denir.

Topolojik uzaylar kategorisinde tamlık kavramı veremiyoruz çünkü çekirdek kavramı yoktur. Ancak uzaylar (kümeler) belirli noktalı ise tamlık kavramı verilir.

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

Y uzayında tamlık, $j_m f = kerg = \{y\epsilon Y: g(y) = z_0\}$ şeklindedir.

Tanım 2.2.3.$[\mathbf{23}, \mathbf{35}, \mathbf{42}]$ $[X, Y]$ sınıfı, X uzayından Y uzayına giden homotop dönüşümlerin sınıfı ve $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ belirli noktalı dönüşümlerin homotopik sınıfıdır diyeceğiz.

$(X, x_0), (Y, y_0)$ belirli noktalı topolojik uzaylar nasıl olmalıdır ki $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ sınıfı guruba dönüşsün? Bundan dolayı bu kavramları anlamak için gruba farklı bir açıdan bakacağız.

Tanım 2.2.4.$[\mathbf{23}, \mathbf{35}, \mathbf{42}]$ G kümesinde çapma işlemi verilsin bunu $(G, .)$ şeklinde gösterelim. Eğer;

1) Her $x, y \in G$ ise $x.y \in G$ dir. (kapalılık koşulu)
2) $x.(y.z) = (x.y).z$ (değişme özelliği)
3) $x.e = e.x = x$ (birim eleman özelliği)
4) $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$ (ters eleman özelliği)
5) $x.y = y.x$ (bir abel gurubu olur)
1) – 4) koşulları sağlanırsa $(G, .)$'ye grup denir.

Şimdi grubun tanımını başka bir açıdan verelim; G bir küme, $e \in G$ belirli nokta ve (G, e) belirli noktalı bir küme olsun.

$$\mu : G\, x\, G \to G\,,$$
$$\nu : G \to G$$

iki dönüşüm olsun. (G, e) belirli noktalı kümesinde; μ ve ν dönüşümleri için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times \mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

[2.2.1]

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e, 1_G)"] \arrow[dr, "e"'] & G \times G \arrow[r, "(1_G, e)"] \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[dl, "e"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

[2.2.2]

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(1_G, \nu)"] \arrow[dr, "e"'] & G \times G \arrow[r, "(\nu, 1_G)"] \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[dl, "e"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

[2.2.3]

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

[2.2.4]

$[2.2.1] - [2.2.4]$ diyagramları komutatif ise (G, e) bir grup olmaktadır.

[2.2.1] diyagramının komutatifliği

$$\mu \circ (\mu \times 1_G) = \mu \circ (1_G \times \mu)$$

olmasıdır. Herhangi $x, y, z \in G \times G \times G$ elemanını alalım;

$$\mu \circ (\mu \times 1_G)(x,y,z) = \mu(\mu(x,y),z) = \mu(x.y,z) = (x.y).z$$
$$\mu \circ (1_G \times \mu)(x,y,z) = \mu(x,\mu(y,z)) = \mu(x,y.z) = x.(y.z)$$
$$(x.y).z = x.(y.z)$$

olup 1. aksiyom sağlanır.

[2.2.2] diyagramı komutatif ise;

$$\left.\begin{matrix} e: G \to G \\ e(x) = e \end{matrix}\right\} \textit{dönüşümü için,}$$
$$(e, 1_G)(x) = (e(x), 1_{G(x)}) = (e, x)$$
$$(1_G, e)(x) = (1_{G(x)}, e(x)) = (x, e)$$

Bu iki denkleme μ dönüşümü uygularsak;

$$\mu\,(e,x) = e.x$$
$$\mu\,(x,e) = x.e$$
$$\mu \circ (1_G, e)(x) = x.e = x$$
$$1_{G(x)} = x$$
$$x.e = e.x = x$$

olur ve 2. Aksiyom sağlanır.

[2.2.3] diyagram komutatif ise; e : sabit dönüşüm

$$\mu \circ (1_G, \nu) = e, \qquad e(x) = e$$

$x \epsilon G$ için ;

$$\mu(1_G, \nu)(x) = \mu(x, \nu(x)) = \mu(x, x^{-1}) = x.x^{-1} = e(x) = e$$
$$\mu(\nu, 1_G)(x) = \mu(\nu(x), x) = \mu(x^{-1}, x) = x^{-1}.x = e(x) = e$$
$$x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$$

olduğundan 3. Aksiyom sağlanır.

[2.2.4] diyagramı komutatif ise Abel değişmeli grup olup

$$T(x, y) = (y, x)$$

dir.

(G, e) kümesi ve $\mu : G \times G \to G$, $\nu : G \longrightarrow G$, $e: G \longrightarrow G$ dönüşümleri (1),(2),(3) koşullarını sağlamalıdır.

Grup kavramının dönüşümlerle verilmesinden yola çıkarak $H - grup$ ve $co - H\ grup$ gibi kavramları verebiliriz.

2.3. $\mathbf{H - Uzay}$ ve $\mathbf{Co - H\ Uzay}$

Tanım 2.3.1.[42] $H - \ uzay$ belirli noktalı topolojik uzaydır. (K, k_0) belirli noktalı bir topolojik uzay ve

$$\mu : K \times K \longrightarrow K,$$
$$\nu : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0)$$

sürekli dönüşümleri verilsin, öyle ki aşağıdaki koşullar sağlansın;

$$\begin{tikzcd}
K \times K \times K \arrow[r, "\mu \times 1_K"] \arrow[d, "1_K \times \mu"'] & K \times K \arrow[d, "\mu"] \\
K \times K \arrow[r, "\mu"'] & K
\end{tikzcd} \qquad [2.3.1]$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "(k_0, 1_K)"] \arrow[dr, "1_K"'] & K \times K \arrow[d, "\mu"] & K \arrow[l, "(1_K, k_0)"'] \arrow[dl, "1_K"] \\
& K &
\end{tikzcd} \qquad [2.3.2]$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "(\nu, 1_K)"] \arrow[dr, "k_0"'] & K \times K \arrow[d, "\mu"] & K \arrow[l, "(1_K, \nu)"'] \arrow[dl, "k_0"] \\
& K &
\end{tikzcd} \qquad [2.3.3]$$

$$\begin{tikzcd}
K \times K \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & K \times K \arrow[dl, "\mu"] \\
& K &
\end{tikzcd} \qquad [2.3.4]$$

$[2.3.1] - [2.3.4]$ diyagramları homotopik komutatif ise o zaman (K, k_0) belirli noktalı uzayına μ, ν dönüşümleri ile $H - grup$ veya $H - uzay$ denir.

$k_0 : K \to K$, $k_0(x) \ = \ k_0$ sabit dönüşüm olarak gösterelim.

[2.3.1] diyagramı homotopik komutatif ise;

$$\mu \circ (\mu \ \times \ 1_K) \sim \mu \ \circ \ (1_K \, , \mu)$$

denkliği sağlanır.

[2.3.2] diyagramı homotopik komutatif ise;

$$\mu \ \circ \ (\nu_0, 1_K) \ \sim 1_K \sim \mu \ \circ \ (1_K, \nu_0)$$

denkliği sağlanır.

[2.3.3] diyagramı homotopik komutatif ise;

$$\mu \ \circ \ (\nu, 1_K) \sim k_0 \sim \mu \ \circ \ (1_K, \nu)$$

denkliği sağlanır.

[2.3.3] diyagramı (Abel olma koşulu) homotopik komutatif ise;

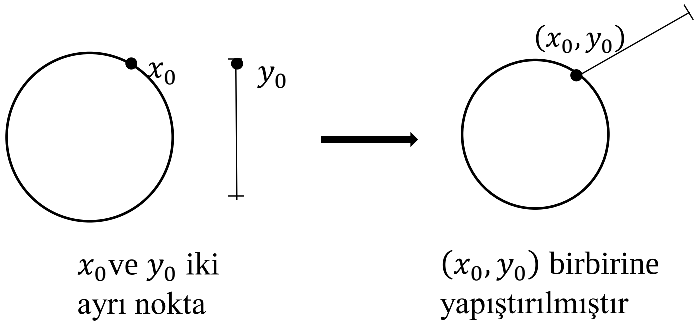
$$\mu \text{ o } T \sim T \text{ o } \mu$$

denkliği sağlanır.

Tanım 2.3.2.[42] $C(X,Y)$ topolojik uzaylarda $X \to Y$ giden tüm sürekli dönüşümlerin kümesidir. $C(X,Y)$ sürekli dönüşümler kümesinde bir denklik bağıntısı verilir ise buna homotopik sınıflar denir.

$(X, x_0) \ \times \ (Y, y_0) \ = \ (X \ \times \ Y, (x_0, y_0))$ iki belirli noktalı uzayın çarpımı da yine belirli noktalı uzay olur.

$(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ işlemine bakalım



[2.3.1]

Şekil [2.3.1]; iki ayrı belirli noktanın bir birine yapıştırılmasını gösterir.

Tanım 2.3.4.[42] $H - co\ uzay$ $(H - co\ grup)$ belirli noktalı bir topolojik uzaydır. (K, k_0) belirli noktalı topolojik uzay olsun;

$$\mu' : (K, k_0) \rightarrow (K, k_0) \vee (K, k_0)$$
$$\nu' : (K, k_0) \rightarrow (K, k_0)$$

dönüşümleri verilsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın;

$$\begin{tikzcd}
K \vee K \vee K & K \vee K \arrow[l, "\mu' \vee 1"'] \\
K \vee K \arrow[u, "1_K \vee \mu'"] & K \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "\mu'"']
\end{tikzcd}$$

[2.3.5]

$$\begin{tikzcd}
K & K \vee K \arrow[l, "(k_0, 1)"'] \arrow[r, "(1, k_0)"] & K \\
& K \arrow[ul, "k_0"] \arrow[u, "\mu'"] \arrow[ur, "k_0"'] &
\end{tikzcd}$$

[2.3.6]

$$
\begin{tikzcd}
K & K \vee K \arrow[l, "(\nu',1)"'] \arrow[r, "(1,\nu')"] & K \\
 & K \arrow[ul, "k_0"] \arrow[u, "\mu'"] \arrow[ur, "k_0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad [2.3.7]
$$

$$
\begin{tikzcd}
K \vee K \arrow[rr, "T"] & & K \vee K \\
 & K \arrow[ul, "\mu'"] \arrow[ur, "\mu'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad [2.3.8]
$$

(Abel olma koşulu)

$[2.3.5] - [2.3.8]$ diyagramları homotopik komutatif ise o zaman (K, k_0) belirli noktalı uzayına μ' ve ν' dönüşümleri ile $H - co\ grup$ veya $H - co\ uzay$ denir.

Sonuç 2.3.5.$[\mathbf{42}]$ (K, k_0) belirli noktalı topolojik uzayı $H - grup$ ise her $(X, x_0) \epsilon\ Top_0$ uzayı için $[(X, x_0); (K, k_0)]$ dönüşümlerin homotopik sınıfları bir grup oluşturur.

Sonuç 2.3.6.$[\mathbf{42}]$ (K, k_0) belirli noktalı topolojik uzayı $H - co\ grup$ ise her $(Y, y_0)\ \epsilon Top_0$ uzayı için $[(K, k_0); (Y, y_0)]$ dönüşümlerin homotopik sınıfları bir grup oluşturur.

Amacımıza 1. Uzay $H - grup$, 2. Uzay $co - H\ grup$ olduğundan ulaşmış olduk.

Tanım 2.3.7.[42] (K, k_0) belirli noktalı topolojik uzayı bir $H - grup$ ise herhangi bir (X, x_0) topolojik uzayı için

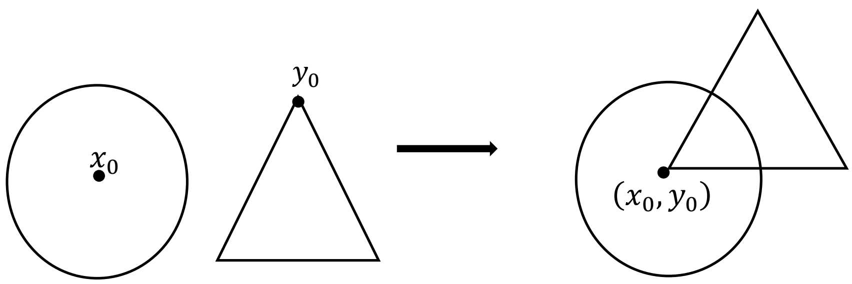
$$[(X, x_0); (K, k_0)] = [(K, k_0); (X, x_0)]$$

denkliği bir grup oluşturur denir.

$[(X, x_0); (K, k_0)]$ kümesine X' den K' ya giden dönüşümlerin homotopik sınıfıdır denir.

Teorem 2.3.8.[42] $[K, k_0]$ belirli noktalı topolojik uzayı $H - co\ grup$ olduğunda $[(K, k_0); (X, x_0)]$ homotopik sınıfları grup olmaktadır.

$(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ bu işlem X ile Y' nin bileşkesidir ancak x_0 , y_0 birbirine yapıştırılıyor.



[2.3.2]

Şekil [2.3.2]'de x_0 ve y_0 birbirine yapıştırılır, kalan kısım aynen kalır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Soft Kümeler

Tanım 3.1.1.[37] U bir evrensel küme, E parametreler kümesi, $P(U)$ U kümesinin kuvvet kümesi ve A kümesi de E parametreler kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. F dönüşümü $F : A \rightarrow P(U)$ giden bir dönüşüm olmak üzere (F, A) çiftine U üzerinde bir soft küme denir.
Başka bir ifadeyle, U kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş ailesine U kümesi üzerinde bir soft küme denir.

$\varepsilon \in A$ noktası için $F(\varepsilon)$ kümesi (F, A) soft kümesinin ε elemanlarının kümesi ya da ε yaklaşımlarının kümesidir.

Örnek 3.1.2.[37] Bir (F, E) soft kümesi X şahsının almayı düşündüğü evlerin özelliklerinin tasviri olsun. Farz edelim ki ;

$$U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

evlerin kümesi ve

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

parametreler kümesi olsun.

e_i $(i = 1,2,3,4,5)$ sırasıyla $“pahalı”, “güzel”, “ahşap”, “ucuz”, “bahçeli”$ parametrelerine karşılık gelsin. $(.)$, $e_i \in E$ parametrelerinin birini işaret etmek üzere F dönüşümü $“ev(.)”$ şeklinde verildiği düşünülsün. Örneğin; $F(e_1)$, $“ev(pahalı)”$ anlamındadır ve onun fonksiyon değeri $\{h \in U: h\ pahalı\ evdir\}$ kümesidir.

Farz edelim ki ;

$F(e_1) = \{h_1, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$ dir.

O halde (F, E) soft kümesini, yaklaşımların aşağıdaki gösterimini içeren bir küme olarak görebiliriz.

$(F, E) = \{(pahalı\ ev, \{h_2, h_4\})$, $(güzel\ ev, \{h_1, h_3\})$, $(ahşap\ ev, \emptyset)$, $(ucuz\ ev, \{h_1, h_3, h_5\})$, $(bahçeli\ ev, \{h_1\})$

Tanım 3.1.3.[37] U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri verilsin. Eğer
1) $A \subset B$
2) $\forall e \epsilon A$ için $F(e) \subset G(e)$ ise

(F, A) soft kümesine (G, B) soft kümesinin soft alt kümesi denir ve $(F, A) \subset (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Eğer; (G, B) soft kümesi (F, A) soft kümesinin soft alt kümesi ise (F, A) soft kümesine (G, B) soft kümesinin soft üst kümesi denir ve $(F, A) \supset (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.4.[37] U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft küme olsun. Eğer; (F, A) soft kümesi (G, B) soft kümesinin bir soft alt kümesi ve (G, B) soft kümesi de (F, A) soft kümesinin bir soft alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) soft kümelerine soft eşit kümeler denir.

Tanım 3.1.5.[37] $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametreler kümesi olsun. E kümesinin değili $\Gamma E = \{\Gamma e_1, \Gamma e_2, \dots, \Gamma e_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada Γei, $\forall i$ için ei elemanının değili anlamındadır.

Tanım 3.1.6.[37] (F, A) çifti U evrensel kümesi üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ noktası için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise (F, A) soft kümesine boş soft küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 3.1.7.[37] $(F, A), U$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise (F, A) soft kümesine mutlak soft küme denir ve $\widetilde{U}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8.[37] (F, A) ve (G, B) , U üzerinde iki soft küme ise $(F, A) \wedge (G, B)$ şeklinde gösterilen "$(F, A)\ VE\ (G, B)$" işlemi, $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ dir. Burada

$$\forall (\alpha, \beta) \epsilon\ A \times B \text{ için } H((\alpha, \beta)) = F(\alpha) \cap G(\beta)$$

dir.

Tanım 3.1.9.[37] (F, A) ve (G, B) ikilileri U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme ise $(F, A) \vee (G, B)$ şeklinde gösterilen "$(F, A)\ VEYA\ (G, B)$" işlemi, $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ dir. Burada,

$$\forall (\alpha, \beta) \epsilon\ AxB \text{ için } O((\alpha, \beta)) = F(\alpha) \cup G(\beta)$$

dir.

Tanım 3.1.10.[37] (F, E), U üzerinde soft küme olsun $(F, E)^C : E \to P(U), (F, E)^C(e) = U - F(e)$ formülü ile verilen soft kümeye (F, E)'nin tümleyeni denir.

Önerme 3.1.11.[37]

1) $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c$

2) $((F, A) \wedge (G, B))^c = (F, A)^c \vee (G, B)^c$

Tanım 3.1.12.[37] U evrensel kümesi üzerindeki (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin birleşimini (H, C) soft kümesi olarak gösterelim. Burada $C = A \cup B$'dir ve $\forall e \epsilon C$ noktası için;

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & eğer\ e\epsilon A - B\ ise \\ G(e), & eğer\ e\epsilon B - A\ ise \\ F(e) \cap G(e), & eğer\ e\epsilon A \cap B\ ise \end{cases}$$

ise (H, C)'ye (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin birleşimi denir. Bu işlem $(F, A) \cup (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.13.[**37**] U evrensel kümesi üzerindeki (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kesişimlerini (H, C) soft kümesi olarak gösterelim. Burada $C = A \cap B$'dir ve $\forall e\epsilon C$ noktası için;

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

ise (H, C)'ye (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin kesişimi denir ve $(F, A) \cap (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.14.[**37**] Farz edelim ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$, $A = \{pahalı, orta, ucuz\}$ ve $B = \{güzel, modern, ucuz\}$ dır. $F(pahalı) = \{h_1, h_4\}$, $F(orta) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(ucuz) = \{h_6, h_7\}$, $G(güzel) = \{h_2, h_3, h_4\}$, $G(modern) = \{h_1, h_5, h_6\}$, $G(ucuz) = \{h_6, h_7\}$
olsun o halde;
$(F, A) \cap (G, B) = (H, C), C = A \cap B$ olmak üzere $H(ucuz) = \{h_6, h_7\}$
$(F, A) \cup (G, B) = (H, C), C = A \cup B$ olmak üzere $H(pahalı) = \{h_1$
$H(orta) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $H(ucuz) = \{h_6, h_7\}$, $H(güzel) = \{h_2, h_3, h_4\}$, $H(modern) = \{h_1, h_5, h_6\}$ olur.

3.2. Soft Topoloji ve Soft Topolojik Uzaylar

X bir evrensel küme ve E boş olmayan parametreler kümesi olsun.

Tanım 3.2.1.[40] (F,E) ve (G,E) kümeleri X üzerinde iki soft küme olsun. (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin farkı $\forall e \epsilon E$ noktası için $H(e) = F(e) - G(e)$ ise (H,E)'ye (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin farkı denir ve $(H,E) = (F,E) - (G,E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2.[40] Y kümesi X kümesinin boş olmayan alt kümesi olsun. X kümesi üzerinde (Y,E) soft kümesi $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için $Y(\alpha) = Y$ dir denir ve $\tilde{Y}$ ile gösterilir. (X,E) soft kümesi ise $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3.[40] (F,E) ikilisi X üzerinde bir soft küme ve Y kümesi X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y kümesi üzerinde (F,E) soft kümesinin soft alt kümesi $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için ${}^{Y}F(\alpha) = Y \cap F(\alpha)$ şeklindedir ve bu işlem $({}^{Y}F,E)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle; $({}^{Y}F,E) = \tilde{Y} \cap F(\alpha)$ dir.

Tanım 3.2.4.[40] U evrensel kümesi üzerinde (F,A) soft kümesinin tümleyeni $(F,A)'$ ile gösterilir ve $(F,A)' = (F',A)$ şeklindedir.

Burada $F': A \rightarrow P(U)$ fonksiyonu $\forall \alpha \epsilon A$ noktası için $F'(\alpha) = U - F(\alpha)$ ile verilen dönüşümdür.

Tanım 3.2.5.[40] τ, X üzerinde soft kümelerin ailesi olsun

1) $\Phi, \tilde{X} \epsilon \tau$

2) τ sınıfındaki soft kümelerin herhangi sayıda birleşimi τ'ya aittir.

3) τ sınıfındaki sonlu sayıda soft kümenin kesişimi τ'ya aittir.

τ ailesi için yukarıdaki koşullar sağlanırsa τ'ya X üzerinde soft topoloji denir. (X,τ,E) üçlüsüne ise X üzerinde soft topolojik uzay denir.

Tanım 3.2.6.[**40**] (X, τ, E) uzayı X kümesi üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. τ'nun elemanlarına X kümesinde soft açık kümeler denir.

Tanım 3.2.7.[**40**] (X, τ, E) uzayı X kümesi üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F, E), X$ kümesi üzerinde bir soft küme olsun.

Eğer (F, E) soft kümesinin tümleyeni τ'ya ait ise (F, E) soft kümesine X kümesi üzerinde soft kapalı küme denir.

Önerme 3.2.8.[**40**] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\Phi, \tilde{X}$ kümeleri X üzerinde soft kapalı kümelerdir.

2) Soft kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi X üzerinde bir soft kapalı kümedir.

3) Sonlu sayıda soft kapalı kümelerin birleşimi X üzerinde bir soft kapalı kümedir.

Tanım 3.2.9.[**40**] X evrensel küme, E parametreler kümesi ve $\tau = \{\Phi, X\}$ ise τ'ya X kümesi üzerinde soft indiskret topoloji ve (X, τ, E) uzayına ise X kümesi üzerinde soft indiskret uzay denir.

Tanım 3.2.10.[**40**] X evrensel küme, E parametreler kümesi ve τ, X üzerinde tanımlanabilecek tüm soft kümelerin ailesi ise o zaman τ, X kümesi üzerinde soft diskret topoloji ve (X, τ, E) uzayına ise X kümesi üzerinde soft diskret uzay denir.

Örnek 3.2.11.[**40**] $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ olsun.

Burada , $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$, X üzerindeki soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$F_1(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{h_1\}$

$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$

$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = X$

$F_4(e_1) = \{h_1, h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$

O zaman τ, X kümesi üzerinde bir soft topoloji tanımlar.

$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}\}$ X' de topolojidirler.

Örnek 3.2.12.[40] $X = \{h_1, h_2, h_3,\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ olsun.

Burada , $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$, X üzerindeki soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$F_1(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F1(e_2) = \{h_1\}$
$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$
$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$
$F_4(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2) = \{h_1, h_3\}$

O zaman τ, X üzerinde bir soft topoloji değildir. Çünkü $(F_2, E) \cup (F_3, E) = (G, E)$ dir. Burada $G(e_1) = X$ ve $G(e_2) = \{h_1, h_2\}$ ve (G, E), τ'nun elemanı değildir. Fakat $\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}\}$, X üzerinde topolojilerdir.

Tanım 3.2.13.[40] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F, E) kümesi X üzerinde bir soft küme olsun. (F, E) soft kümesinin soft kapanışı (F, E)'yi içeren soft kapalı alt kümelerinin kesişimidir ve $\overline{(F, E)}$ile gösterilir.

Açıktır ki $\overline{(F, E)}$, (F, E) soft kümesini kapsayan X üzerinde en küçük soft kapalı kümedir.

Teorem 3.2.14.[40] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F, E) ve $(G, E), X$ üzerinde soft kümeler olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$

2) $(F,E) \subset \overline{(F,E)}$

3) (F,E) kapalı kümedir ancak ve ancak $(F,E) = \overline{(F,E)}$

4) $\overline{\overline{(F,E)}} = \overline{(F,E)}$

5) $(F,E) \subset (G,E) \Rightarrow \overline{(F,E)} \subset \overline{(G,E)}$

6) $\overline{(F,E) \cup (G,E)} = \overline{(F,E)} \cup \overline{(G,E)}$

7) $\overline{(F,E) \cap (G,E)} \subset \overline{(F,E)} \cap \overline{(G,E)}$

Tanım 3.2.15.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F,E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. $(\bar{F},E)$ soft kümesi $\forall \alpha \epsilon E$ için $\bar{F}(\alpha) = \overline{F(\alpha)}$ ile gösterilir. Burada $\overline{F(\alpha)}$ dönüşümü $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için τ_α'da $F(\alpha)$ dönüşümünün kapanışıdır.

Önerme 3.2.16.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F,E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. $(\bar{F},E) \subset \overline{(F,E)}$ dir.

Sonuç 3.2.17.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F,E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. O zaman

$$(\bar{F},E) = \overline{(F,E)} \Leftrightarrow (\bar{F},E)' \epsilon \, \tau$$

dur.

Örnek 3.2.18.[40] $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), \ldots, (F_7,E)\}$ olsun.

Burada ;

$F_1(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{h_1,h_2\}$

$F_2(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{h_1,h_3\}$

$F_3(e_1) = \{h_2,h_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{h_1\}$

$F_4(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2) = \{h_1\}$

$F_5(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2) = X$

$F_6(e_1) = X$ $\quad\quad$ $F_6(e_2) = \{h_1, h_2\}$

$F_7(e_1) = \{h_2, h_3\}$ $\quad\quad$ $F_7(e_2) = \{h_1, h_3\}$

O zaman $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzaydır.

(F, E) ve (G, E) aşağıdaki gibi tanımlansın;

$F(e_1) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_2) = \emptyset$, ve $G(e_1) = \{h_2, h_3\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_2\}$.

O zaman

$(F \cap G)(e_1) = \{h_3\}, (F \cap G)(e_2) = \emptyset$ ile $(F, E) \cap (G, E) = ((F \cap G), E)$

verilir.

$\overline{(F, E)} = \tilde{X} \cap (F_2, E)' \cap (F_4, E)' = (F_2, E)'$ ve $\overline{(G, E)} = \tilde{X}$

olsun. Buradan;

$$\overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)} = \overline{(F, E)}$$

şeklindedir. Ayrıca;

$\overline{(F, E) \cap (G, E)} = \{\tilde{X}, (F_1, E)', (F_2, E)', (F_4, E)', (F_5, E)'\} = (F_5, E)'$

dir. Bu yüzden;

$$\overline{(F, E) \cap (G, E)} \subset \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}$$

dir fakat

$$\overline{(F, E) \cap (G, E)} \neq \overline{(F, E)} \cap \overline{(G, E)}$$

dir. Aynı zamanda,

$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}\}$ olduğu görülür. Burada $(\bar{F}, E)$, $\bar{F}(e_1) = \{h_1, h_2\}$ ve $\bar{F}(e_2) = \emptyset$ verilir. Açıktır ki $\overline{(F,E)} \subset (F,E)$ dir fakat $\overline{(F,E)} \neq (F,E)$ dir.

Tanım 3.2.19.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F,E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer; $(G,E) \in U(x_e, E)$ bir soft açık küme olacak şekilde $(x_e, E) \in (G,E) \subset (F,E)$ varsa o zaman $(x_e, E) \in (F,E)$ soft noktasına (F,E) soft kümesinin bir soft iç noktası denir.

(F,E) kümesinin soft içi $(F,E)^o$ şeklinde gösterilir ve (F,E) kümesinin içi tüm soft açık kümelerin birleşimidir.

Genellikle $(F,E)^o \subset (F,E)$ olduğundan $(F,E)^o$, X üzerinde en büyük soft açık kümedir.

Teorem 3.2.20.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. (F,E) ve $(G,E), X$ üzerinde iki soft küme olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\Phi^o = \Phi$ ve $\widetilde{X^o} = \tilde{X}$

2) $(F,E)^o \subset (F,E)$

3) $((F,E)^o)^o = (F,E)$

4) (F,E) bir soft açık kümedir $\Leftrightarrow (F,E) = (F,E)^o$

5) $(F,E) \subset (G,E) \Rightarrow (F,E)^o \subset (G,E)^o$

6) $(F,E) \cap (G,E) = ((F,E) \cap (G,E))^o$

7) $(F,E)^o \cup (G,E)^o \subset ((F,E) \cup (G,E))^o$

Tanım 3.2.21.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve Y kümesi X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\tau_Y = \{(\,^{Y}F, E) : (F,E) \in \tau\,\}$ sınıfına Y üzerinde soft göreli *(relative)* topoloji denir ve (Y, τ_Y, E) uzayı (X,τ,E) soft uzayının bir soft alt uzayıdır.

Önerme 3.2.22.[40] $(X,\tau,E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. $\forall \alpha \in E$ noktası için (X, τ_α) bir topolojik uzaydır.

Önerme 3.2.23.[40] (Y,τ_Y,E) soft topolojik uzayı (X,τ,E) soft topolojik uzayının bir alt uzayı ve (F,E) soft kümesi Y üzerinde bir soft açık küme olsun. Eğer; $\tilde{Y}\,\epsilon\,\tau$ ise $(F,E)\,\epsilon\,\tau$ olur.

Teorem 3.2.24.[40] $(Y,\tau_Y\,,E)$ soft topolojik uzayı (X,τ,E) soft topolojik uzayının bir alt uzayı ve $(F,E),X$ üzerinde bir soft küme olsun. O zaman;

1) (F,E) soft kümesi Y' de soft açıktır $\Leftrightarrow$ herhangi bir $(G,E)\,\epsilon\,\tau$ kümesi için $(F,E)\;=\;\tilde{Y}\;\cap\;(G,E)$ dir.

2) (F,E) soft kümesi Y' de soft kapalıdır $\Leftrightarrow$ X' de herhangi bir (G,E) soft kapalı kümesi için $(F,E)\;=\;\tilde{Y}\;\cap\;(G,E)$ dir.

Tanım 3.2.25. [7] $(F,E),X$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $e\,\epsilon\,E$ elemanı için $F(e)\;=\;\{x\}$ ve her $e'\,\epsilon\,E-\{e\}$ elemanı için $F(e')\;=\;\emptyset$ ise (F,E) soft kümesine bir soft nokta denir ve (x_e,E) ile gösterilir.

Tanım 3.2.26. [7] X evrensel kümesi üzerinde (x_e,E) ve $(y_{e'},E)$ iki soft nokta olsun. Eğer $x\;\neq\;y$ veya $e\;\neq\;e'$ ise bu noktalara farklı noktalar denir.

Önerme 3.2.27. [7] $(F,E),X$ üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (F,E), kendi soft noktalarının birleşimidir. Yani

$$(F,E)=\bigcup_{e\epsilon E}\;\bigcup_{x\epsilon F(e)}(x_e,E)$$

dir.

Önerme 3.2.28. [7] $(X,\tau,E),X$ üzerinde bir soft topolojik uzay, $(F,E),X$ üzerinde bir soft küme ve $x\,\epsilon\,X$ bir nokta olsun. Eğer (x_e,E) soft noktası (F,E) soft kümesinin bir soft iç noktası ise o zaman x noktası (X, τ_e) uzayında $F(e)$ dönüşümünün bir soft iç noktasıdır.

Tanım 3.2.29. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F, E), (X, \tau, E)$ üzerinde bir soft küme olsun. $(x_e, E) \ \epsilon \ (G, E) \ \subset \ (F, E)$ sağlanacak şekilde (G, E) soft açık kümesi bulunabiliyorsa (F, E) soft kümesine (x_e, E) soft noktasının bir soft komşuluğu denir ve (x_e, E) soft noktasının komşuluk sistemini $U(x_e, E)$ ile gösterelim.

Teorem 3.2.30. [7] (X, τ, E) soft topolojik uzayında (x_e, E) soft noktasının $U(x_e, E)$ soft komşuluk sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) Eğer $(F, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ ise $(x_e, E) \ \epsilon \ (F, E)$ dir.

2) Eğer $(F, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ ve $(F, E) \ \subset \ (G, E)$ ise $(G, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ dir.

3) Eğer $(F_1, E), (F_2, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ ise $(F_1, E) \ \cap \ (F_2, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ dir.

4) Eğer $(F, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ ve $(G, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ olsun. Öyle ki; $\forall \ (y_{e'}, E) \ \epsilon \ (G, E)$ için $(F, E) \ \epsilon U(y_{e'}, E)$ olur.

Önerme 3.2.31. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F, E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F, E) soft kümesi, kendisine ait soft noktaların soft komşuluğu ise o zaman (F, E) bir soft açık kümedir.

Tanım 3.2.32. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay, $(F, E), X$ üzerinde bir soft küme ve (x_e, E) bir soft nokta olsun. Eğer keyfi $(G, E) \ \epsilon \ U(x_e, E)$ için $(F, E) \ \cap \ (G, E) \neq \Phi$ ise o zaman (x_e, E) soft noktasına (F, E) soft kümesinin bir soft değme noktası denir.

Teorem 3.2.33. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(F, E), X$ üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (F, E) soft kümesi X üzerinde bir soft kapalı kümedir ancak ve ancak (F, E) ' nin her soft değme noktası kendisine aittir.

Önerme 3.2.34. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay, $(F, E), X$ üzerinde bir soft küme ve $x \ \epsilon \ X$ bir nokta olsun. Eğer x noktası (X, τ_e) uzayında $F(e)$

kümesinin bir soft değme noktası ise o zaman (x_e, E) soft noktası (F, E) soft kümesinin bir soft değme noktasıdır.

3.3. Soft Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.3.1.[7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ olsun. Eğer;

$(x_e, E) \in (F, E)$, $(y_{e'}, E) \notin (F, E)$ veya $(y_{e'}, E) \in (G, E)$, $(x_e, E) \notin (G, E)$

olacak şekilde (F, E) ve (G, E) soft açık kümeleri varsa (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft T_0 uzayı denir.

Tanım 3.3.2. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ olsun. Eğer;

$(x_e, E) \in (F, E)$, $(y_{e'}, E) \notin (F, E)$ ve $(y_{e'}, E) \in (G, E)$, $(x_e, E) \notin (G, E)$

olacak şekilde (F, E) ve (G, E) soft açık kümeleri varsa (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft T_1 uzayı denir.

Teorem 3.3.3. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. (X, τ, E) bir soft T_1 uzayıdır ancak ve ancak her soft nokta bir soft kapalı kümedir.

Önerme 3.3.4. [7] $(X, \tau, E), X$ üzerinde bir soft topolojik uzay olsun.

a) Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_0 uzayı ise o halde (X, τ_e) uzayı $\forall e \epsilon E$ noktası için bir T_0 uzayıdır.

b) Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_1 uzayı ise o halde (X, τ_e) uzayı $\forall e \epsilon E$ için bir T_1 uzayıdır.

Tanım 3.3.5. [7] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ olsun. Eğer;

$(x_e, E) \in (F, E)$, $(y_{e'}, E) \in (G, E)$ ve $(F, E) \cap (G, E) = \Phi$

olacak şekilde (F, E) ve (G, E) soft açık kümeleri varsa o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft T_2 uzay denir.

Önerme 3.3.6. [7] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_2 uzayı ise o zaman (X, τ_e) uzayı $\forall e \epsilon E$ noktası için bir T_2 uzayıdır.

Sonuç 3.3.7. [7] **a)** Her soft T_1 uzayı bir soft T_0 uzayıdır.
b) Her soft T_2 uzayı bir soft T_1 uzayıdır.

Örnek 3.3.8. [7] $X = \{x_1, x_2\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F, E)\}$ olsun. O zaman $F(e_1) = \{x_1\}, F(e_2) = X$ dir. Burada (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzaydır. (X, τ, E) bir soft T_1 uzayı olduğunda X üzerinde bir soft T_0 uzayı olur. Böylece her soft nokta T_2 uzayında bir soft kapalı kümedir. Fakat bu durum Shabir ve Naz'ın kastettiği anlamda gerçek soft nokta için geçerli değildir.

Teorem 3.3.9. [7] X sonlu küme olsun. (X, τ, E) soft topolojik uzayı X üzerinde bir soft T_2 uzayıdır ancak ve ancak (X, τ, E) soft topolojik uzayında her soft nokta bir soft açık kümedir.

Teorem 3.3.10. [7] (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_1 uzayı olsun. her $(x_e, E) \epsilon (G, E)$ ve $(G, E) \epsilon \tau$ soft noktaları için eğer;

$$(x_e, E) \epsilon (F, E) \subset \overline{(F, E)} \subset (G, E)$$

olacak şekilde bir (F, E) soft açık kümesi varsa o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_2 uzayıdır.

Tanım 3.3.11. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. $(F, E), X$ üzerinde bir soft kapalı küme ve $(x_e, E) \notin (F, E)$ olsun. Eğer;

$(x_e, E) \in (G_1, E), (F, E) \subset (G_2, E)$ ve $(G_1, E) \cap (G_2, E) = \Phi$

olacak şekilde (G_1, E) ve (G_2, E) soft açık kümeleri varsa o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft regüler uzay denir.

Tanım 3.3.12. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer; (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft regüler ve soft T_1 uzayı ise (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft T_3 uzayı denir.

Sonuç 3.3.13. [7] Her soft T_3uzayı bir soft T_2 uzayıdır.

Teorem 3.3.14. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer;

$$(x_e, E) \in (G, E) \subset \overline{(G, E)} \subset (F, E)$$

olacak şekilde her $(x_e, E) \in (F, E) \in \tau$ için $(G, E) \in \tau$ açık kümesi varsa (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_3 uzayıdır.

Teorem 3.3.15. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir soft T_3 uzayı ise o zaman (X, τ_e) uzayı $\forall e \epsilon E$ noktası için bir T_3 uzayıdır.

Tanım 3.3.16. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. $(F_1, E) \cap (F_2, E) = \Phi$ olacak şekilde X üzerinde (F_1, E) ve (F_2, E) kümeleri iki soft kapalı kümedir.

Eğer;

$$(F_1, E) \subset (G_1, E), (F_2, E) \subset (G_2, E) \text{ ve } (G_1, E) \cap (G_2, E) = \Phi$$

olacak şekilde (G_1, E) ve (G_2, E) soft açık kümeleri varsa o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına soft normal uzay denir.

Tanım 3.3.17. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft normal ve soft T_1 uzayı ise o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft T_4 uzay denir.

Sonuç 3.3.18. [7] Her soft T_4 uzayı bir soft T_3 uzayıdır.

Teorem 3.3.19. [7] (X, τ, E) soft topolojik uzayı X üzerinde bir soft T_4uzayıdır ancak ve ancak her (F, E) soft kapalı kümesi ve $(F, E) \subset (G, E)$ kümesi için

$$(F, E) \subset (D, E) \subset \overline{(D, E)} \subset (G, E)$$

olacak şekilde (D, E) soft açık kümesi vardır.

3.4. Soft Kompakt, Soft Yerel Kompakt ve Soft Parakompakt Uzaylar

Tanım 3.4.1. [7] (X, τ, E) soft topolojik uzayında (F, E) bir soft küme ve $\{(F, E)\}_{i\epsilon I}$ soft kümeler ailesi olsun. Eğer;

$$(F, E) \subset \bigcup_{i \in I} (F_i, E)$$

ise bu aileye (F, E) soft kümesinin soft örtümü denir.

Eğer $\{(F, E)\}_{i\epsilon I}$ ailesin her elemanı soft açık ise bu aileye soft açık örtüm denir.

Tanım 3.4.2. [7] (X, τ, E) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer X' in her soft açık örtümü sonlu soft açık örtüme sahip ise o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına bir soft kompakt uzay denir.

Tanım 3.4.3. [7] (X, τ, E) bir soft topolojik uzay ve (F, E) bir soft küme olsun. Eğer (F, E) soft kümesinin her soft açık örtümü için bir sonlu soft örtümü varsa o zaman (F, E) soft kümesine bir soft kompakt küme denir.

Teorem 3.4.4. [7] Bir soft kompakt uzayın herhangi soft kapalı alt kümesi soft kompakt kümedir.

Teorem 3.4.5. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft kompakt T_2 uzayı ise o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_4 uzayıdır.

Teorem 3.4.6. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_2 uzayı ve (F, E) bir soft kompakt küme ise o zaman (F, E) bir soft kapalı kümedir.

Teorem 3.4.7. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft kompakt T_2uzayı ise o zaman;

$$(x_e, E) \in (F, E) \ \subset \ \overline{(F, E)} \ \subset \ (G, E)$$

olacak şekilde (F, E) soft açık kümesi varsa her $(x_e, E) \subset (G, E)$ soft noktası için $(G, E) \in \tau$ dur.

Teorem 3.4.8. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_i uzayı ise o zaman (Y, τ_Y, E) soft topolojik alt uzayı her $i = 0, 1, 2$ için bir soft T_i uzayıdır.

Teorem 3.4.9. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_3 uzayı ise o zaman (Y, τ_Y, E) soft topolojik alt uzayı bir soft T_3 uzayıdır.

Teorem 3.4.10. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir soft T_4 uzayı ve Y kümesi X üzerinde soft kapalı küme ise o zaman (Y, τ_Y, E) soft topolojik alt uzayı bir soft T_4 uzayıdır.

Tanım 3.4.11. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eger X' in her (x_e, E) soft noktası için; $\overline{(G, E)}$ kümesi X üzerinde soft kompakt alt uzay olacak şekilde bir (G, E) soft komşuluğu varsa o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayına soft yerel kompakt uzay denir.

Teorem 3.4.12. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft yerel kompakt T_2 uzayı ise o zaman (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft T_3 uzayıdır.

Teorem 3.4.13. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft yerel kompakt ve soft T_2 uzayı, (H, E) bir soft kompakt küme ve $(H, E) \subset (F, E) \epsilon\, \tau$ ise $(H, E) \subset (G, E) \subset \overline{(G, E)} \subset (F, E)$ ve $\overline{(G, E)}$ soft kapalı kümesi soft kompakt küme olacak şekilde (G, E) soft açık kümesi vardır.

Teorem 3.4.14. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun.

a) Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft yerel kompakt, soft T_2 uzayı ve (H, E) soft kümesi bir soft kapalı küme ise o zaman (H, E) soft kümesi bir soft yerel kompakttır.

b) Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft yerel kompakt, soft T_2 uzayı ve (H, E) soft kümesi bir soft açık küme ise o zaman (H, E) soft kümesi bir soft yerel kompakttır.

Tanım 3.4.15. [7] (X, τ, E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F, E) bir soft kapalı küme olsun. Eğer $\overline{(F, E)} = (X, \tau, E)$ ise o zaman (F, E) soft kapalı kümesine X üzerinde soft yoğundur denir.

Tanım 3.4.16. [7] (X,τ,E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay, (X^*,τ^*,E) bir soft kompakt T_2 uzayı ve $h: X \to X^*$ bir soft gömme dönüşümü olsun. Eğer $(h(X),\tau^*_{h(X)},E)$ soft alt uzayı (X^*,τ^*,E) uzayında soft yoğun ise o zaman (X^*,τ^*,E) soft topolojik uzayına (X,τ,E) soft topolojik uzayının soft kompaktlaştırılması denir.

Teorem 3.4.17. [7] (X,τ,E) bir soft yerel kompakt, soft T_2 uzayı ve $w \notin X$ bir nokta olsun. X^* kümesi $X^* = X \cup \{w\}$ şeklinde tanımlansın. Burada X^* kümesi bir soft τ^* topolojisidir öyle ki; (X^*,τ^*,E) soft topolojik uzayı (X,τ,E) soft topolojik uzayının bir soft kompaktlaştırılmasıdır.

Tanım 3.4.18. [7] (X,τ,E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun ve $U\{(F_\alpha,E)\}_{\alpha\epsilon A}$ örtümü X kümesinin bir soft örtümü olsun. Eğer X kümesinin her soft noktasının U örtümünün sadece sonlu elemanlarıyla kesişen bir soft komşuluğu varsa U örtümüne soft yerel sonlu denir.

Tanım 3.4.19. [7] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $U = \{(F_\alpha,E)\}_{\alpha\epsilon A}$ ve $V = \{(G_\beta,E)\}_{\beta\epsilon B}$ X' in iki soft örtümü olsun. Eğer her $(F_\alpha,E) \epsilon U$ soft kümesi için $(F_\alpha,E) \subset (G_\beta,E)$ olacak şekilde $(G_\beta,E) \epsilon V$ elemanı varsa U örtümüne V örtümünün bir soft inceltilmesi denir.

Tanım 3.4.20. [7] Eğer X kümesinin her soft açık örtümünün bir soft açık yerel sonlu inceltilmesi varsa (X,τ,E) soft topolojik uzayına soft parakompakt uzay denir.

Örnek 3.4.21. [7] $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$, $E = \{e_1,e_2,\dots,e_n,\dots\}$ ve $\tau = \{\Phi, X, (F_1,E), (F_2,E),\dots,(F_n,E),\dots\}$ olsun. O zaman

$F_1(e_1) = \{x_1\}, F_1(e_2) = \{x_2\},\dots,F_1(e_n) = \{x_n\},\dots$
$F_2(e_1) = \{x_1,x_2\}, F_2(e_2) = \{x_2\},\dots,F_2(e_n) = \{x_n\},\dots$
… …
$F_k(e_1) = \{x_1,x_2,\dots,x_k\}, F_k(e_2) = \{x_2\},\dots,F_k(e_n) = \{x_n\},\dots$
… …

O zaman (X,τ,E) soft topolojik uzayı bir soft kompakt uzaydır ve hem de soft parakompakt uzaydır. Fakat (X,τ_{e_1}) topolojisi parakompakt uzay değildir. Soft parakompakt uzayının bazı özellikleri soft kompakt T_2 uzayına benzer. Örneğin bir soft parakompakt uzayın soft alt uzayı soft parakompakt uzay olmak zorunda değildir fakat bir soft kapalı alt uzay, soft parakompakt uzaydır.

Teorem 3.4.22. [7] Bir soft parakompakt uzayın her soft kapalı alt uzayı soft parakompakttır.

Teorem 3.4.23. [7] Eğer (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $\{(F_\alpha,E)\}_{\alpha\epsilon A}$ ailesi bir soft yerel sonlu ise

$$\overline{\left(\bigcup_{\alpha\epsilon A}(F\alpha,E)\right)}=\bigcup_{\alpha\epsilon A}\overline{(F_\alpha,E)}$$

dir.

Lemma 3.4.24. [7] (X,τ,E) bir soft parakompakt uzay ve (F,E) bir soft kapalı küme olsun. (H,E) herhangi bir soft küme ve $(F,E)\ \cap\ (H,E)\ =\ \Phi$ olsun. Eğer burada

$$\overline{(G,E)}\cap(H,E)=\Phi$$

olacak şekilde X kümesinde (F,E) soft kümesinin $\{(G_\alpha,E)\}_{\alpha\epsilon A}$ şeklinde bir açık soft örtümü varsa o zaman (F,E) ve (H,E) soft kümelerinin soft açık ayrık komşulukları vardır.

Teorem 3.4.25. [7] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ,E) soft topolojik uzayı bir soft parakompakt soft T_2 uzayı ise o zaman (X,τ,E) soft topolojik uzayı soft T_4 uzayıdır.

Teorem 3.4.24. [7] Eğer (X, τ, E) soft topolojik uzayı bir soft parakompakt ve (Y, τ^*, E) soft topolojik uzayı soft kompakt uzay ise o zaman $X \times Y$ soft çarpım topolojisi ile soft parakompakt uzaydır.

3.5. Soft Sürekli Dönüşümler

Tanım 3.5.1. [9] $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve (F, E) kümesi X üzerinde bir soft küme olsun. Burada (F, E) soft kümesinin görüntüsü f dönüşümü altındadır ve

$$f((F, E)) = (f(F), E)$$

şeklindedir. Y üzerinde bir soft küme ise $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için

$$f(F)(\alpha) = f(F(\alpha))$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.5.2. [9] $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve (G, E) kümesi Y üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (G, E) soft kümesinin ters görüntüsü f dönüşümünün altındadır ve

$$f^{-1}(G, E) = (f^{-1}(G), E)$$

şeklindedir. X üzerinde bir soft küme ise $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için

$$(f^{-1}(G))(\alpha) = f^{-1}(G(\alpha))$$

şeklindedir.

Önerme 3.5.3. [9] (F, E) ve (G, E) sırası ile X ve Y üzerinde iki soft küme olsun ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Burada;
1) $(F, E) \subset f^{-1}(f(F, E))$
2) $f(f^{-1}(G, E)) \subset (G, E)$

Önerme 3.5.4. [9] $\{(G_i, E)\}_{i\epsilon I}$ ailesi Y üzerinde soft kümelerin bir ailesi olsun ve $\{(F_i, E)\}_{i\epsilon I}$ ailesi ise X üzerinde soft kümelerin bir ailesi olsun. O zaman;

1) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\epsilon I}(G_i, E)\right) = \bigcup_{i\epsilon I} f^{-1}(G_i, E)$

2) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\epsilon I}(G_i, E)\right) = \bigcap_{i\epsilon I} f^{-1}(G_i, E)$

3) $f\left(\bigcap_{i\epsilon I}(F_i, E)\right) \subset \bigcap_{i\epsilon I} f(F_i, E)$

4) $f\left(\bigcup_{i\epsilon I}(F_i, E)\right) = \bigcup_{i\epsilon I} f(F_i, E)$

Önerme 3.5.5. [9] (D, E) ve (G, E) soft kümeleri Y üzerinde iki soft küme olsun. (H, E) soft kümesi Z üzerinde bir soft kümedir ve $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ iki dönüşümdür. O zaman;

1) $f^{-1}((G, E)') = (f^{-1}(G, E))'$

2) Eğer $(D, E) \subset (G, E)$ ise o zaman $f^{-1}(D, E) \subset f^{-1}(D, E)$ dir.

3) $(g \circ f)^{-1}(D, E) = f^{-1}(g^{-1}(D, E))$.

Tanım 3.5.6. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm, $x\epsilon X$ bir nokta ve $f(x) = y$ olsun. y noktasının her (G, E) soft komşuluğu için eğer;

$$f((F, E)) \subset (G, E)$$

olacak şekilde x noktasının bir (F, E) soft komşuluğu varsa o zaman f dönüşümüne, x soft noktasında soft sürekli dönüşümdür denir.

Tanım 3.5.7. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. Y üzerinde her (G, E) soft açık kümesi için $f^{-1}(G, E)$ ters dönüşümü X üzerinde soft açık küme ise böylece f dönüşümüne soft sürekli dönüşüm denir.

Teorem 3.5.8. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki durumlar denktir.

1) $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ bir soft sürekli dönüşümdür.

2) Y üzerinde her (H, E) soft kapalı kümesi için $f^{-1}((H, E))$ ters dönüşümü X üzerinde soft kapalı bir kümedir.

3) X üzerinde her (F, E) soft kümesi için $f(\overline{(F, E)}) \subset \overline{(f(F, E))}$ dir.

4) X üzerinde her (G, E) soft kümesi için $\overline{(f^{-1}(G, E))} \subset f^{-1}(\overline{(G, E)})$ dir.

5) Y üzerinde her (H, E) soft kümesi için $f^{-1}((G, E)^{\circ}) \subset (f^{-1}(G, E))^{\circ}$ dir.

Örnek 3.5.9. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. Eğer τ' topolojisi Y üzerinde soft indiskret topoloji ise o zaman $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ dönüşümü bir soft sürekli dönüşümdür.

Örnek 3.5.10. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. Eğer τ topolojisi X üzerinde soft diskret topoloji ise o zaman $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ dönüşümü bir soft sürekli dönüşümdür.

Örnek 3.5.11. [9] $X = \{h_1, h_2, h_3,\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve
$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$,
$\tau' = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$,
X üzerinde iki soft topoloji olsun o zaman $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E),$ ve (G_4, E) soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır;

$F_1(e_1) = \{h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_1\},$
$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, \quad F_2(e_2) = \{h_1, h_2\},$
$F_3(e_1) = \{h_1, h_3\}, \quad F_3(e_2) = \{h_1, h_2\},$
$F_4(e_1) = \emptyset, \quad F_4(e_2) = \{h_1\},$
$F_5(e_1) = X, \quad F_5(e_2) = \{h_1, h_2\},$
ve
$G_1(e_1) = \{h_2\}, \quad G_1(e_2) = \{h_1\},$

$G_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, \qquad G_2(e_2) = \{h_1, h_2\},$

$G_3(e_1) = \{h_1, h_2\}, \qquad G_3(e_2) = X,$

$G_4(e_1) = \{h_2\}, \qquad G_4(e_2) = \{h_1, h_2\}.$

o zaman $(X, \tau, E), (X, \tau', E)$ iki soft topolojik uzay ve $f = 1_X : X \to X$ dönüşümü soft sürekli dönüşüm değildir.

Önerme 3.5.12. [9] Eğer $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir soft sürekli dönüşüm ise o zaman $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için $f: (X, \tau_\alpha) \to (Y, \tau'_\alpha)$ dönüşümü bir sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.5.13. [9] Eğer $(\bar{F}, E)'$ bir soft açık küme ise her (F, E) soft kümesi için $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ dönüşümü soft sürekli dönüşümdür $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için $f: (X, \tau_\alpha) \to (Y, \tau'_\alpha)$ dönüşümü bir sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.5.14. [9] $(X, \tau, E), (Y, \tau', E)$ ve (Z, τ'', E) üç soft topolojik uzay olsun. Eğer $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ ve $g : (Y, \tau', E) \to (Z, \tau'', E)$ iki soft sürekli dönüşüm ise o zaman

$$g \circ f : (X, \tau, E) \to (Z, \tau'', E)$$

bileşke dönüşümü soft sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.5.15. [9] X bir küme olsun (Y, τ', E) bir soft topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. O zaman X üzerinde öyle bir topoloji tanımlayabiliriz ki; f dönüşümü bu topolojiye göre bir soft sürekli dönüşüm olur.

Tanım 3.5.16. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun.

a) Eğer X üzerinde her (F, E) soft açık kümesinin $f((F, E))$ görüntüsü Y üzerinde soft açık küme ise o zaman f dönüşümü bir soft açık dönüşümdür.

b) Eğer X üzerinde her (H, E) soft kapalı kümesinin $f((H, E))$ görüntüsü Y üzerinde soft kapalı ise o zaman f dönüşümü bir soft kapalı dönüşümdür.

Önerme 3.5.17. [9] Eğer $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ dönüşümü soft açık (kapalı) ise o zaman $\forall \alpha \epsilon E$ noktası için $f: (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$ dönüşümü açık (kapalı) dönüşümdür.

Örnek 3.5.18. [9] (X, τ, E) soft diskret topolojik uzay ve (X, τ', E) soft indiskret topolojik uzay olsun. O zaman $1_X : (X, \tau, E) \rightarrow (X, \tau', E)$ dönüşümü bir soft açık ve soft kapalı dönüşümdür fakat bu dönüşüm soft sürekli değildir.

Örnek 3.5.19. [9] $X = \{h_1, h_2, h_3,\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve
$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), \dots, (F_{10}, E)\}$,
$\tau' = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$,
X üzerinde iki soft topoloji olsun o zaman $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), \dots, (F_{10}, E)$, $(G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)$ ve (G_4, E) soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır;

$F_1(e_1) = \{h_2\}$, $F_1(e_2) = \{h_1\}$,
$F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}$, $F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$F_3(e_1) = \{h_1, h_2\}$, $F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$F_4(e_1) = X$, $F_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$F_5(e_1) = \{h_2\}$, $F_5(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$F_6(e_1) = \emptyset$, $F_6(e_2) = \{h_1\}$,
$F_7(e_1) = \{h_2\}$, $F_7(e_2) = X$,
$F_8(e_1) = \emptyset$, $F_8(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$F_{10}(e1) = \{h_1, h_2\}$, $F_{10}(e_2) = X$.
ve
$G_1(e_1) = \{h_2\}$, $G_1(e_2) = \{h_1\}$,
$G_2(e_1) = \{h_2, h_3\}$, $G_2(e_2) = \{h_1, h_2\}$,
$G_3(e_1) = \{h_1, h_2\}$, $G_3(e_2) = X$,
$G_4(e_1) = \{h_2\}$, $G_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$.

Eğer $f : X \to X$ giden dönüşümü $f\ (h_i) = h_1$olarak tanımlanırsa açıktır ki;

$f^{-1}(G_1)(e_1) = f^{-1}(G_2)(e_1) = f^{-1}(G_4)(e_1) = \emptyset,$
$f^{-1}(G_1)(e_2) = f^{-1}(G_2)(e_2) = f^{-1}(G_4)(e_2) = X,$
$f^{-1}(G_3)(e_1) = X, f^{-1}(G_3)(e_2) = X,$

o zaman f dönüşümü soft sürekli dönüşümdür. Aynı zamanda;

$f(F_1)(e_1) = f(F_1(e_1)) = \{h_1\}, f(F_1)(e_2) = f(F_1(e_2)) = \{h_1\},$ [3.7.1]
$f(F'_1)(e_1) = f(F'_1(e_1)) = \{h_1\}, f(F'_1)(e_2) = f(F'_1(e_2)) = \{h_1\}.$ [3.7.2]

[3.7.1] ve [3.7.2] denklemleri soft açık ve soft kapalı kümelerdir.

Örnek 3.5.20. [9] $X = \{h_1, h_2, h_3, \}, Y = \{a, b\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E)\}, \tau' = \{\Phi, \tilde{Y}, (G_1, E), (G_2, E)\}$ sırasıyla X ve Y üzerinde iki soft topoloji olarak tanımlasın. O zaman $(F_1, E), (F_2, E), (G_1, E), (G_2, E)$ sırasıyla X ve Y üzerinde soft kümelerdir. Bu soft kümeler aşağıdaki gibi tanımlanır;

$F_1(e_1) = \{h_1, h_2\}, \quad F_1(e_2) = \{h_3\},$
$F_2(e_1) = X, \qquad F_2(e_2) = \{h_3\},$
ve
$G_1(e_1) = Y, \quad G_1(e_2) = \{b\},$
$G_2(e_1) = \{a\}, \ G_2(e_2) = \{b\},$

Eğer $f: X \to Y$ giden dönüşümü $f(h_1) = \{a\}, f(h_2) = f(h_3) = \{b\}$ olarak tanımlanırsa açıktır ki;

$f(F_1)(e_1) = f(F_1(e_1)) = Y, f(F_1)(e_2) = f(F_1(e_2)) = \{b\},$
$f(F_2)(e_1) = f(F_2(e_1)) = Y, f(F_2)(e_2) = f(F_2(e_2)) = \{b\}.$

O halde $f: X \to Y$ dönüşümü bir soft açık dönüşümdür. Aynı zamanda;

$f(F'_1)(e_1) = \{b\}, f(F'_1)(e_2) = Y$ dir. O zaman bu soft kapalı dönüşüm değildir $f(G_1)(e_1) = X,\ f(G_1)(e_2) = \{h_2, h_3\}$ olup bu soft sürekli dönüşüm değildir.

Teorem 3.5.21. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

a) f dönüşümü bir soft açık dönüşümdür ancak ve ancak X üzerinde her (F, E) soft kümesi için

$$f((F,E)^\circ) \subset (f(F,E))^\circ$$

yeterlidir.

b) f dönüşümü bir soft kapalı dönüşümdür ancak ve ancak X üzerinde her (F, E) soft kümesi için

$$\overline{(f(F,E))} \subset f(\overline{(F,E)})$$

yeterlidir.

Tanım 3.5.22. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü birebir ve örten soft sürekli dönüşüm ve f^{-1} dönüşümü de bir soft sürekli dönüşüm ise o zaman f dönüşümüne, X' den Y' ye giden soft homeomorfizma denir.

Teorem 3.5.23. [9] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: X \to Y$ birebir örten dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f dönüşümü bir soft homeomorfizmdir.

2) f dönüşümü bir soft sürekli ve soft kapalı dönüşümdür.

3) f dönüşümü bir soft sürekli ve soft açık dönüşümdür.

3.6. Soft Bağlantılılık

Tanım 3.6.1.[17] (X,τ,E) ve (Y,τ',E) iki soft topolojik uzay, $f:(X,\tau,E) \rightarrow (Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x)_e,E)$ soft noktasının her (H,E) soft komşuluğu için,

$$f((F,E)) \subset (H,E)$$

olacak şekilde (x_e,E) soft noktasının bir (F,E) soft komşuluğu varsa o zaman f dönüşümüne (x_e,E) soft noktasında bir soft sürekli dönüşüm denir.

Eğer bir f fonksiyonu her soft noktada sürekli ise bu f fonksiyonuna soft sürekli fonksiyon denir.

Tanım 3.6.2.[17] (X,τ,E) uzayı X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun.

$$\tilde{X} = (F,E) \cup (G,E); (F,E) \cap (G,E) = \Phi$$

olacak şekilde X üzerinde boş olmayan soft açık kümelerin (F,E) ve (G,E) çiftine $\tilde{X}$ kümesinin bir soft ayrışımı denir.

Tanım 3.6.3.[17] Eğer $\tilde{X}$ kümesinin soft ayrılığı yoksa, (X,τ,E) soft topolojik uzayına soft bağlantılı denir.

Tanım 3.6.4.[17] $\{(X_s,\tau_s,E_s)\}_{s\epsilon S}$, soft topolojik uzayların bir ailesi olsun ve

$$B = \left\{\prod_{s\epsilon S}(F_s,E_s)\epsilon\tau_s\right\}$$

olsun τ topolojisi B ailesinin elemanlarının tüm keyfi birleşimleri olsun. O zaman τ,

$$\prod_{s \epsilon S}(X_s)$$

üzerinde bir topolojidir ve

$$\prod_{s \epsilon S}(X_s, \tau_s, E_s)$$

uzayına $\{(X_s, \tau_s, E_s)\}_{s \epsilon S}$ soft topolojik uzaylar ailesinin çarpımı denir.

Aksi belirtilmedikçe $E = \mathbb{N}$ kümesini parametreler kümesi olarak kabul ederiz ve $\forall \varepsilon > 0$ için $I = [0,1]$ kapalı aralığında rasyonel sayıların kümesini $\{0,1, r_3, r_4, r_5, \dots\}$ bir dizi olarak görteririz.

Eğer $e \epsilon E$, $r_e \ \epsilon \ \mathbb{Q} \cap I$ ve $\forall \varepsilon > 0$ noktası için $F_\varepsilon : E \to P(I)$ soft kümesi

$$F_\varepsilon(e) = (r_e - \varepsilon, r_e + \varepsilon)$$

olarak tanımlanırsa o zaman $B = \{(F_\varepsilon, E)\}_{\varepsilon > 0}$ ailesi I aralığı üzerinde soft topolojinin bir soft tabanıdır ve τ_I topolojisi B ailesinden üretilen soft topoloji olsun.

Tanım 3.6.5.[17] (I, τ_I, E) soft topolojik uzayına soft birim aralık denir.

Tanım 3.6.6.[17] (I, τ_I, E) soft topolojik uzayı bir soft birim aralığı olsun ve (X, τ, E') bir soft topolojik uzay olsun. Soft yol, bir $(f, \varphi): (I, \tau_I, E) \to (X, \tau, E')$ soft sürekli dönüşümüdür.

$$\left\{f(0)_{\varphi(e)}\right\}_{e \epsilon E} \text{ ve } \left\{f(1)_{\varphi(e)}\right\}_{e \epsilon E}$$

soft kümelerine (f, φ) soft bağlantılılığın ilk ve sonu denir. Burada

$$f: I \to X, \varphi: E \to E'$$

dir.

Tanım 3.6.7.[17] (I, τ_I, E) soft topolojik uzayı bir soft birim aralığı olsun ve (X, τ, E') bir soft topolojik uzay olsun. Eğer her $(x_{e'_1}, E'), (y_{e'_2}, E')$ soft noktaları için

$$\varphi(e_1) = e'_1, \quad \varphi(e_2) = e'_2, \qquad f(0) = x, \quad f(1) = y$$

olacak şekilde $(f, \varphi): (I, \tau_I, E) \to (X, \tau, E')$ bir soft yol bağlantılılık varsa (X, τ, E') soft topolojik uzayına soft yol bağlantılı uzay denir.

Önerme 3.6.8.[17] Eğer $(x_{e'_1}, E')$ soft topolojik uzayı bir soft yol bağlantılı topolojik uzay ise o zaman $(X, \tau_{e'})$, $\forall e' \epsilon E'$ için bir soft bağlantılı topolojik uzaydır.

Tanım 3.6.9.[17] $\{(X_s, \tau_s, E_s)\}_{s \epsilon S}$ ailesi soft topolojik uzayların bir ailesi ve $\forall s = s' \epsilon S$ için;

$$X_s \cap X_{s'} = \emptyset, E_s \cap E_{s'} = \emptyset,$$
$$E = \bigcup_{s \epsilon S} E_s, \qquad X = \bigcup_{s \epsilon S} X_s$$

olsun ve X üzerinde bir soft topolojiyi aşağıdaki gibi gösterelim;

$(F, E) \epsilon \tau \Leftrightarrow \forall e \epsilon E$, eğer $e \epsilon E_s$ ise o zaman $(F|_{E_s}, E_s) \epsilon \tau_s$.

(X, τ, E) soft topolojik uzayı $\{(X_s, \tau_s, E_s)\}_{s \epsilon S}$ ailesinin soft topolojik uzay toplamıdır ve $\bigoplus_s (X_s, \tau_s, E_s)$ şeklinde gösterilir.

Açıktır ki; $\forall s \epsilon S$ için eğer $j_s: E_s \to E$ ve $i_s: X_s \to X$ dönüşümleri gömme dönüşümleri ise o zaman

$$(i_s, j_s): (X_s, \tau_s, E_s) \to (X, \tau, E)$$

dönüşümü soft topolojik uzayların bir soft sürekli dönüşümüdür.

Örnek 3.6.10.[17] $E_1 = \{1,2\}, E_2 = \{3,4\}, X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, X_2 = \{x_4, x_5\}$ olsun ve

$$\tau_1 = \{\Phi, \widetilde{X_1}, (F_1, E_1), (F_2, E_1), (F_3, E_1)\},$$
$$\tau_2 = \{\Phi, \widetilde{X_2}, (G_1, E_2), (G_2, E_2), (G_3, E_2)\}$$

sırası ile X_1ve X_2 üzerinde iki soft topolojik uzay olsun o zaman $(F_1, E_1), (F_2, E_1), (F_3, E_1), (G_1, E_2), (G_2, E_2), (G_3, E_2)$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$F_1(1) = \{x_1, x_2\},\ F_1(2) = \{x_2, x_3\}$
$F_2(1) = \{x_3\}, \quad F_2(2) = \{x_1, x_2\}$
$F_3(1) = \emptyset, \quad F_3(2) = \{x_2\}$
ve
$G_1(3) = \{x_4\}, \quad G_1(4) = \{x_5\}$
$G_2(3) = X_2, \quad G_2(4) = \{x_4\}$
$G_3(3) = \{x_4\}, \quad G_3(4) = \emptyset$

Şimdi (X_1, τ_1, E_1) ve (X_2, τ_2, E_2) soft topolojik uzayının (X, τ, E) soft topolojik toplamını tanımlayalım. O zaman

$X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, E = E_1 \cup E_1 = \{1,2,3,4\}$
ve
$\tau = \{\Phi, \widetilde{X_1}, (P_1, E), (P_2, E), (P_3, E), (P_4, E), (P_5, E), (P_6, E), (P_7, E), (P_8, E), (P_9, E)\}$
ve X üzerinde $(P_1, E), (P_2, E), (P_3, E), (P_4, E), (P_5, E), (P_6, E), (P_7, E), (P_8, E), (P_9, E)$ soft kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$P_1(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_1(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_1(3) = \{x_4\}, \quad P_1(4) = \{x_5\},$
$P_2(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_2(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_2(3) = X_2, \quad P_2(4) = \{x_4\},$
$P_3(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_3(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_3(3) = \{x_4\}, \quad P_3(4) = \emptyset,$
$P_4(1) = \{x_3\}, \quad P_4(2) = \{x_1, x_2\}, \quad P_4(3) = \{x_4\}, \quad P_4(4) = \{x_5\},$

$P_5(1) = \{x_3\}$, $P_5(2) = \{x_1, x_2\}$, $P_5(3) = X_2$, $P_5(4) = \{x_4\}$,

$P_6(1) = \{x_3\}$, $P_6(2) = \{x_1, x_2\}$, $P_6(3) = \{x_4\}$, $P_6(4) = \emptyset$,

$P_7(1) = \emptyset$, $P_7(2) = \{x_2\}$, $P_7(3) = \{x_4\}$, $P_7(4) = \{x_5\}$,

$P_8(1) = \emptyset$, $P_8(2) = \{x_2\}$, $P_8(3) = X_2$, $P_8(4) = \{x_4\}$,

$P_9(1) = \emptyset$, $P_9(2) = \{x_2\}$, $P_9(3) = \{x_4\}$, $P_9(4) = \emptyset$,

Teorem 3.6.11.[17] $\{(X_s, \tau_s, E_s)\}_{s\epsilon S}$ ailesi soft topolojik uzayların bir ailesi olsun, (X^*, τ^*, E^*) uzayı bir soft topolojik uzay ve

$$(f, \varphi) = \bigoplus_s (X_s, \tau_s, E_s) \to (X^*, \tau^*, E^*)$$

bir soft dönüşüm olsun. (f, φ) ikilisi soft sürekli dönüşümdür $\Leftrightarrow$ $\forall s \epsilon S$ için,

$$(f, \varphi) \circ (i_s, j_s): (X_s, \tau_s, E_s) \to (X^*, \tau^*, E^*)$$

dönüşümü soft sürekli dönüşümdür.

Örnek 3.6.12.[17] (X, τ_1) ve . (Y, τ_2) iki yol bağlantılı ve soft ayrışım topolojik uzay olsunlar. O zaman $E_1 = \{e_1\}$, $E_2 = \{e_2\}$ için aşağıdaki topolojik uzayları oluştururuz;

$$\{F_U: E_1 \to P(X): F_U(e_1) = U, U\epsilon\tau_1\}$$
$$\{F_V: E_2 \to P(Y): F_V(e_2) = V, V\epsilon\tau_2\}$$

ve $(X \oplus Y, \tau_1 \oplus \tau_2, E_1 \cup E_2)$ topolojik uzayını göz önüne alalım. Her $e_1 = E_1 \cup E_2$ için

$$(X \oplus Y, (\tau_1 \oplus \tau_2)_{e_1} = (X, \tau_1)$$

ve her $e_2 = E_1 \cup E_2$ için

$$(X \oplus Y, (\tau_1 \oplus \tau_2)_{e_2} = (Y, \tau_2)$$

yol bağlantılı topolojik uzaydır fakat

$$(X \oplus Y, \tau_1 \oplus \tau_2, E_1 \cup E_2)$$

uzayı soft yol bağlantılı uzay değildir.

Açıktır ki (I, τ_I, E) soft evrenseli soft yol bağlantılı topolojik uzaydır bu yüzden $(1_I, 1_E): (I, \tau_I, E) \rightarrow (I, \tau_I, E)$ dönüşümü bir soft sürekli dönüşümdür.

Teorem 3.6.13.$[17]$ Bir soft yol bağlantılı topolojik uzayın soft sürekli dönüşümünün görüntüsü soft yol bağlantılıdır.

Teorem 3.6.14.$[17]$ (I, τ_I, E) soft birim aralığı bir soft bağlantılı topolojik uzaydır.

Teorem 3.6.15.$[17]$ herhangi bir soft yol bağlantılı topolojik uzay bir soft bağlantılı topolojik uzaydır.

Teorem 3.6.16.$[17]$ soft topolojik uzayların soft topolojik çarpımı bir soft bağlantılı topolojik uzaydır ⇔ her soft topolojik uzay bir soft yol bağlantılı topolojik uzaydır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1. Soft Topolojik Uzaylar Kategorisinde Homotopik Kümeler

Tanım 4.1.1. $(f,\varphi),(g,\psi):(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E')$ iki soft sürekli dönüşüm olsun. Eğer,

$$(F,\Phi)(x_e,0_n)=(f,\varphi)(x_e)=(f(x))_{\varphi(e)}$$
$$(F,\Phi)(x_e,1_n)=(g,\psi)(x_e)=(g(x))_{\psi(e)}$$

Koşullarını sağlayan $(F,\Phi):(X,\tau,E)\times(\mathrm{I},\tau_I,\mathbb{N})\to(Y,\tau',E')$ dönüşümü varsa o zaman (F,Φ) dönüşümüne soft homotopya, $(f,\varphi),(g,\psi)$ dönüşümlerine ise soft homotop dönüşümler denir.

Teorem 4.1.2. Soft homotopya bağıntısı denklik bağıntısıdır ve bileşkeye göre invaryanttır.

İspat: $(f,\varphi)\sim(f,\varphi)$ bağıntısı, $(F,\Phi)(x_e,t_n)=(f,\varphi)(x_e)$ şeklindedir. $(f,\varphi)\sim(g,\psi)$ bağıntısı ise bunlar arasında soft homotopya (F,Φ) olsun o zaman $(G,\Psi):X\times I\to Y$ homotopyasını

$$(G,\Psi)(x_e,t_n)=(F,\Phi)(x_e,(1-t)_n)$$

şeklinde verirsek

$$(G,\Psi)(x_e,0_n)=(F,\Phi)(x_e,1_n)=(g,\psi)(x_e)$$
$$(G,\Psi)(x_e,1_n)=(F,\Phi)(x_e,0_n)=(f,\varphi)(x_e)$$

olduğundan $(g,\psi)\sim(f,\varphi)$’dir.

Şimdi $(f,\varphi)\sim(g,\psi)$ ve $(g,\psi)\sim(h,\varkappa)$ ise bunlar arasındaki homotopya (F,Φ) ve (G,Ψ) olsun.

Eğer;

$$(H,\varkappa)(x_e,t_n)=\begin{cases}(F,\Phi)(x_e,(2t)_n), & 0\le t\le {}^1/_2\\(G,\Psi)(x_e,(2t-1)_n), & {}^1/_2\le t\le 1\end{cases}$$

Şeklinde verirsek $(H,\varkappa)$ soft süreklidir ve (f,φ) ile $(h,\varkappa)$ arasında soft homotopyadır. Eğer;

$$(f_0,\varphi_0)\sim(f_1,\varphi_1):(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E'),$$
$$(g_0,\psi_0)\sim(g_1,\psi_1):(Y,\tau',E')\to(Z,\tau'',E'')$$

$(F,\Phi):(f_0,\varphi_0)\sim(f_1,\varphi_1)$ ve $(G,\Psi)(g_0,\psi_0)\sim(g_1,\psi_1)$ ise $(g_0,\psi_0)\circ(F,\Phi):X\to Z$ için

$$(g_0,\psi_0)(F,\Phi)(x_e,0_n)=(g_0,\psi_0)(f_0,\varphi_0)(x_e)$$
$$(g_0,\psi_0)(F,\Phi)(x_e,1_n)=(g_0,\psi_0)(f_1,\varphi_1)(x_e)$$

sağlanır, yani $(g_0,\psi_0)\circ(f_0,\varphi_0)\sim(g_0,\psi_0)\circ(f_1,\varphi_1)$ dir.

Öte yandan

$$(G,\Psi)\circ\big((f_1,\varphi_1)\times(1_I,1_{\mathbb{N}})\big)(x_e,0_n)=(G,\Psi)\left(\left(f_1(x)\right)_{\varphi_1(e)},0_n\right)$$
$$=(g_0,\psi_0)\big(f_1(x)_{\varphi_1(e)}\big)=(g_0,\psi_0)(f_1,\varphi_1)(x_e)$$
$$(G,\Psi)\circ\big((f_1,\varphi_1)\times(1_I,1_{\mathbb{N}})(x_e,1_n)\big)=(g_1,\psi_1)(f_1,\varphi_1)(x_e)$$

Olduğundan

$$(g_0,\psi_0)\circ(f_1,\varphi_1)\sim(g_1,\psi_1)\circ(f_1,\varphi_1)\Rightarrow(g_0,\psi_0)\circ(f_0,\varphi_0)\sim(g_1,\psi_1)\circ(f_1,\varphi_1)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3. Eğer $(f,\varphi),(g,\psi):(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E')$ soft dönüşümleri soft homotop ise her bir $e\epsilon E$ için $\varphi(e)=\psi(e)$ sağlandığında $f,g:(X,\tau_e)\to(Y,\tau'_{\varphi(e)})$ dönüşümleri homotopturlar.

İspat: $(F,\Phi):(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(Y,\tau',E')$ homotopyası için,
$(F,\Phi)(x_e,0_n)=(f,\varphi)(x_e)=(f(x))_{\varphi(e)}$,

$$(F,\Phi)(x_e,1_n)=(g(x))_{\varphi(e)}$$

sağlansın. O zaman

$$(F,\Phi):(X,\tau_e)\times(I,\tau_0)\to(Y,\tau'_{\varphi(e)})$$

topolojik uzayları sürekli dönüşümdür ve

$$(F,\Phi)(x,0_0)=f(x),\ (F,\Phi)(x,1_0)=g(x)$$

sağlandığında $f\sim g$'dir.

$Stop^2$ ile soft topolojik uzayların çiftler kategorisini gösterelim. Bu kategorinin nesneleri (X,A,τ,E), morfizmaları ise öyle $(F,\Phi):(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E')$ soft topolojik uzayların morfizmalarıdır ki

$$(F,\Phi)\Big|_{A:(A,\tau_A,E)\to(B,\tau'_B,E')}$$

alt uzayların morfizmalarıdır.

Tanım 4.1.4. $(f,\varphi),(g,\psi):(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E')$ iki soft dönüşüm ve $A\subset X$ olsun. Eğer;

$$(F,\Phi)(x_e,0_n)= (f,\varphi)(x_e), (F,\Phi)(x_e,1_n)=(g,\psi)(x_e)$$

ve $\forall x\epsilon A$ için

$$(F,\Phi)(x_e,t_n)= (f,\varphi)(x_e)=(g,\psi)(x_e)$$

sağlanırsa o zaman (F,Φ)'e göreli homotopya, (f,φ) ve (g,ψ) soft dönüşümlerine ise göreli homotop dönüşümler denir.

Açıktır ki göreli homotopya bir homotopyadır, tersi ise genelde doğru değildir.

(X,τ,E) soft topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. $(i,1_E):(A,\tau_A,E)\to(X,\tau,E)$ ile gömme fonksiyonunu gösterelim.

Tanım 4.1.5. Eğer $(r,1_E)\circ(i,1_E)=(1_A,1_E)$ koşulunu sağlayan $(r,1_E):(X,\tau,E)\to(A,\tau_A,E)$ soft dönüşümü varsa (A,τ_A,E) soft alt uzayına (X,τ,E) soft uzayının soft retraktı, $(r,1_E)$ dönüşümüne ise soft retrakt dönüşüm denir.

Önerme 4.1.6. Eğer (A,τ_A,E) soft alt uzayı (X,τ,E) soft uzayının soft retraktı ise $\forall e\epsilon E$ için $(A,(\tau_A)_e)$ uzayı (X,τ_e) uzayının soft retraktıdır.

İspat: $(r,1_E):(X,\tau,E)\to(A,\tau_A,E)$ dönüşümü soft retrakt dönüşüm olsun $\forall e\epsilon E$ için

$$r:(X,\tau_e)\to(A,(\tau_A)_e)$$

dönüşümü süreklidir ve

$$(r,1_E)\circ(i,1_E)=(r\circ i,1_E)=(1_A,1_E)$$

olduğunda $r\circ i=1_A$ sağlanır yani r retrakt dönüşümüdür.

Tanım 4.1.7. Eğer $(r,1_E)\circ(i,1_E)\sim(1_A,1_E)$ koşulunu sağlayan $(r,1_E):(X,\tau,E)\to(A,\tau_A,E)$ soft dönüşümü varsa, (A,τ_A,E) soft alt uzayına (X,τ,E) soft uzayının zayıf retraktı, $(r,1_E)$ dönüşümüne ise soft zayıf retrakt dönüşüm denir.

Açıktır ki her soft retrakt soft zayıf retrakttır.

Önerme 4.1.8. Eğer (A, τ_A, E) soft alt uzayı (X, τ, E) soft uzayının zayıf soft retraktı ise $\forall e \epsilon E$ için $(A, (\tau_A)_e)$ uzayı (X, τ_e) uzayının soft zayıf retraktıdır.

İspat: $(r, 1_E): (X, \tau, E) \to (A, \tau_A, E)$ soft zayıf retrakt dönüşümü ve

$$(F, \Phi): (A, \tau_A, E) \times (I, \tau_I, \mathbb{N}) \to (A, \tau_A, E)$$

homotopyası için,

$$(F, \Phi)(x_e, 0_n) = (r, 1_E) \circ (i, 1_E)(x_e) = (r \circ i(x))_e,\ (F, \Phi)(x_e, \Phi_n) = x_e$$

sağlansın. O halde $\forall e \epsilon E$ için,

$$F: (A, (\tau_A)_e) \times (I, (\tau_I)_n) \to (A, (\tau_A)_e)$$

dönüşümü süreklidir ve $F(x, 0) = (r \circ i)(x)$, $F(x, 1) = x$ sağlandığından A kümesi X'in soft zayıf retraktıdır.

Tanım 4.1.9.

a) $(f, \varphi): (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E')$, $(g, \psi): (Y, \tau', E') \to (Z, \tau'', E'')$ iki soft dönüşüm ve

$$(G, \Psi): (X, \tau, E) \times (I, \tau_I, \mathbb{N}) \to (Z, \tau'', E'')$$

soft homotopyası için,

$$(G, \Psi)(x_e, 0_n) = (g, \psi)(f, \varphi)(x_e)$$

koşulu sağlansın. Eğer

$$(F,\Phi)(y_{e'},0_n)=(g,\psi)(y_{e'}) \text{ ve } (F,\Phi)(f,\varphi)((x_e),t_n)=G(x_e,t)$$

sağlanacak şekilde

$$(F,\Phi):(X,\tau',E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(Z,\tau'',E'')$$

soft homotopyası varsa (f,φ) dönüşümüne soft kotabakalanma denir.

b) Eğer $(i,1_E):(A,\tau_A,E)\to(X,\tau,E)$ soft sönüşümü soft kotabakalanma ise (X,A,τ,E) çiftine soft homotopyanın genişletilme özelliğine sahip olan çift denir.

Teorem 4.1.10. (X,A,τ,E) çifti soft homotopyanın genişletilme özelliğine sahip ise (A,τ_A,E) soft alt uzayı (X,τ,E) soft uzayının soft zayıf retraktı olması için gerek ve yeter koşul onun soft retrakt olmasıdır.

İspat: her bir soft retrakt soft zayıf retrakt olduğundan, ancak tersini göstermek yeterlidir.

(A,τ_A,E) soft alt uzayı soft zayıf retrakt olsun. O zaman

$$(r,1_E)\circ(i,1_E)\sim(1_A,1_E)$$

sağlanacak şekilde $(r,1_E):(X,\tau,E)\to(A,\tau_A,E)$ soft dönüşümü vardır.

$(r,1_E)\circ(i,1_E)$ ve $(1_A,1_E)$ dönüşümleri arasındaki homotopya,

$$(G,\Psi):(A,\tau_A,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(A,\tau_A,E)$$

olsun.

(X,A,τ,E) çifti homotopyanın genişletilme özelliğine sahip olduğundan,

$$(F,\Phi)(x_e,0_n)=(r,1_E)\circ(i,1_E)(x_e)=(r\circ i(x))_e$$

ve $x\epsilon A$ için

$$(F,\Phi)(x_e,t_n)=(G,\Psi)(x_e,t_n)$$

sağlanacak şekilde

$$(F,\Phi):(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(A,\tau_A,E)$$

soft homotopyası vardır. Eğer,

$$(r',1_E)(x_e)=(F,\Phi)(x_e,1_n)$$

olarak tanımlarsak o zaman $(r',1_E)$, soft retrakt dönüşüm olmaktadır ve $(r,1_E)$ ile soft homotoptur.

Tanım 4.1.11. Eğer (X,A,τ,E) soft topolojik uzaylar çifti için

$$(D,\Psi)(x_e,0_n)=x_e,\ (D,\Psi)(x_e,1_n)\epsilon(A,\tau_A,E)$$

sağlanacak şekilde

$$(D,\Psi):(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(X,\tau,E)$$

soft homotopyası varsa (X,τ,E) soft uzayı (A,τ_A,E) soft alt topolojik uzayına deforme olunur denir.

Teorem 4.1.12. (X,τ,E) soft topolojik uzayının (A,τ_A,E) soft alt topolojik uzayına deforme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $(i,1_E):(A,\tau_A,E)\to(X,\tau,E)$ soft gömme dönüşümünün soft homotopik sınıfta sağ tersinin var olmasıdır.

İspat: *Gerektir*: (X,τ,E) soft topolojik uzayı (A,τ_A,E) soft alt topolojik uzayına deforme olsun. O zaman

$$D(x_e,0_n)=x_e,\ D(x_e,1_n)\epsilon(A,\tau_A,E)$$

koşullarını sağlayan,

$$(D, \Psi): (X, \tau, E) \times (I, \tau_I, \mathbb{N}) \to (X, \tau, E)$$

Soft homotopyası vardır. $(f, \varphi): (X, \tau, E) \to (A, \tau_A, E)$ soft dönüşümünü,

$$(i, 1_E) \circ (f, \varphi) = (D, \Psi)(x_e, 1_n)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (D, Ψ) soft dönüşümü $(1_A, 1_E)$ ile $(i, 1_E) \circ (f, \varphi)$ arasında soft homotopya olmaktadır. Böylece $(i, 1_E)$ soft dönüşümünün soft homotopik sınıfta sağ tersi vardır.

Yeterdir: $(i, 1_E)$ soft dönüşümünün soft homotopik sınıfta

$$(f, \varphi): (X, \tau, E) \to (A, \tau_A, E)$$

dönüşümünün sağ tersi olsun.

$(F, \Phi): (X, \tau, E) \times (I, \tau_I, \mathbb{N}) \to (X, \tau, E)$, $(1_A, 1_E)$ ile $(i, 1_E) \circ (f, \varphi)$ arasında soft homotopya olsun. O halde,

$$F(x_e, 0_n) = x_e \text{ ve } F(x_e, 1_n) = (i, 1_E)\big((f, \varphi)\big)(x_e) \epsilon (A, \tau_A, E)$$

olduğundan (X, τ, E) soft topolojik uzayı (A, τ_A, E) soft alt topolojik uzayına deforme olunur.

$(f, \varphi): (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E')$ soft sürekli fonksiyon olsun. $\big((X, \tau, E) \times (I, \tau_I, \mathbb{N})\big) \oplus (Y, \tau', E')$ soft topolojik uzayında aşağıdaki gibi bir denklik bağıntısı verelim:

$$(x_e, 1_n) \sim (f, \varphi)(x_e)$$

Burada $(x_e, 1_n)\epsilon(X,\tau,E) \to (I,\tau_I,\mathbb{N})$ ve $(f,\varphi)(x_e)\epsilon(Y,\tau',E')$ dir. $\big((X,\tau,E) \times (I,\tau_I,\mathbb{N})\big) \oplus (Y,\tau',E')$ soft uzayının bu denklik bağıntısına göre bölüm uzayını $Z_{(f,\varphi)}$ ile gösterelim ve (f,φ) soft dönüşümünün silindiri adını verelim.

$$(i, 1_E): (X,\tau,E) \to Z_{(f,\varphi)},\ (j, 1_{E'}): (Y,\tau',E') \to Z_{(f,\varphi)}$$

soft dönüşümlerini

$$(i, 1_E)(x_e) = [x_e, 0_n],\ j(y_{e'}) = [y_{e'}]$$

şeklinde tanımlayalım. $(r,\psi): Z_{(f,\varphi)} \to (Y,\tau',E')$ soft dönüşümü ise $[x_e, t_n]\epsilon Z_f$ soft noktası için,

$$(r,\psi)([x_e, 0_n]) = [(f,\varphi)(x_e)]$$

formülü ile ve $[y_{e'}]\epsilon Z_f$ soft noktası için ise

$$(r,\psi)([y_{e'}]) = [y_{e'}]$$

formülü ile verelim. O zaman (r,ψ) soft dönüşümü retrakt dönüşümüdür ve (Y,τ',E') soft uzayı Z_f soft uzayının retraktı olmaktadır.

Teorem 4.1.13. $(f,\varphi): (X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$, soft sürekli fonksiyon olsun. O zaman
a) $(r,\psi) \circ (i, 1_E) = (f,\varphi)$,
b) $1_{Z_f} \sim (j, 1_{E'}) \circ (r,\psi)$
c) $(i, 1_E): (X,\tau,E) \to Z_f$ kotabakalanmadır.

İspat: a) şıkkının ispatı açıktır.

b) $(F,\Phi): Z_f \times (I,\tau_I,\mathbb{N}) \to Z_f$ soft homotopyasını aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$(F,\Phi)([x_e,t_n],t'_n)=\left[x_e,\left((1-t')t+t'\right)_n\right],(F,\Phi)([y_{e'}],t'_n)=[y_{e'}]$$

böylece

$$(F,\Phi)([x_e,t_n],0_n)=[x_e,t_n]=1_{Z_f}[x_e,t_n]$$
$$(F,\Phi)([x_e,t_n],1_n)=[x_e,1_n]=[(f,\varphi)(x_e)]=(j,1_{E'})\circ(r,\psi)[x_e,t_n],$$

yani $1_{Z_f}\sim(j,1_{E'})\circ(r,\psi)$ dir.

$c)$ (Z,τ'',E'') herhangi bir soft topolojik uzay, $(g,\varkappa):Z_f\to(Z,\tau'',E'')$ soft sürekli fonksiyon ve $(G,\Psi):(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(Z,\tau'',E'')$ soft homotopyası için

$$(G,\Psi)(x_e,0_n)=(g,\varkappa)(x_e)$$

koşulu sağlansın. $(F,\Phi):Z_f\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(Z,\tau'',E'')$ homotopyasını aşağıdaki formüllerle tanımlayalım;

$$(F,\Phi)([y_{e'}],t'_n)=(g,\varkappa)[y_{e'}]$$

$$(F,\Phi)([x_e,t_n],t'_n)=\begin{cases}(g,\varkappa)(x_e,(t+(t-1)t')_n),\, eğer\ t+(t-1)t'\geq 0\\(G,\Psi)(x_e,\left((1-t')t'+t\right)_n),\, eğer\ t+(t-1)t'\leq 0\end{cases}$$

buradan

$$(F,\Phi)([y_{e'}],0_n)=(g,\varkappa)[y_{e'}],(F,\Phi)([x_e,t_n],0_n)=(g,\varkappa)([x_e,t_n])$$

ve

$$(F,\Phi)\Big|_{(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})=(G,\Psi)}$$

olduğundan $(i,1_E)$ soft dönüşümü soft kotabakalanmadır.

Her bir (X,τ,E) soft topolojik uzayında $x_e^o \epsilon (X,\tau,E)$ soft noktasını belirleyelim ve bu uzayı (X,τ,E,x_e^o) şeklinde gösterelim. Eğer,

$$(f,\varphi):(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$$

soft dönüşümü için $(f,\varphi)(x_e^o) = y_{e'}^0$ koşulu sağlanırsa (f,φ) dönüşümüne belirli noktalı soft topolojik uzayların soft dönüşümü denir.

Belirli noktalı soft topolojik uzaylar ve onların dönüşümleri bir kategori oluşturur. Bu kategoriyi $Stop_o$ ile gösterelim. $Stop_o$ kategorisinde soft homotopya göreli homotopyadır, yani

$$(f,\varphi),(g,\psi):(X,\tau,E,x_e^o) \to (Y,\tau',E',y_{e'}^o)$$

dönüşümleri soft homotoptur ancak ve ancak

$$(F,\Phi)(x_e,0_n) = (f,\varphi)(x_e),(F,\Phi)(x_e,1_n) = (g,\psi)(x_e)$$

ve

$$(F,\Phi)(x_e^o,t_n) = (f,\varphi)(x_e^o) = (g,\psi)(x_e^o)$$

koşullarını sağlayan $(F,\Phi):(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ soft dönüşümü vardır.

(X,τ,E,x_e^o) soft topolojik uzayından $(Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ soft topolojik uzayına giden soft dönüşümlerin homotopik sınıflarını $[X,x_e^o;Y,y_e^o]$ şeklinde gösterelim. Bu küme belirli noktalı bir kümedir. Belirli nokta olarak;

$$(C_1,C_2):(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E'),(C_1,C_2)(x_e) = y_{e'}^0$$

dönüşümler çiftinin homotopik sınıfını sabit alalım.

(X,τ,E,x_e^o) belirli noktalı soft topolojik uzay olsun.

$$C_n(X,\tau,E,x_e^o) = (X,\tau,E) \times (I,\tau_I,\mathbb{N})\Big|_{(X,\tau,E)\times\{0_n\}\cup(I,\tau_I,\mathbb{N})\times\{x_e^o\}}$$

$E \times \mathbb{N}$ kümesi üzerinde soft bölüm uzayına (X,τ,E,x_e^o) soft uzayının soft konisi denir. $\forall n\epsilon\mathbb{N}$ için

$$(i,C_n):(X,\tau,E) \to C_n(X,\tau,E,x_e^o)$$

dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım; $C_n: E \to E \times \mathbb{N}$, $\forall e\epsilon E$ için $C_n(e) = (e,n)$ ve $i: X \to C_n(X)$, $\forall x\epsilon X$ için $i(x) = [x, 1_n]$ dir. O zaman (i, C_n) ikilisi (X,τ,E) ile görüntüsü arasında bir soft homeomorfizmadır.

Lemma 4.1.14. $(f,\varphi):(X,\tau,E,x_e^o) \to (Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ soft dönüşümünün soft sabit dönüşümle göreli kompakt olması için gerek ve yeter koşul (f,φ) soft dönüşümünün $(F,\Psi): C(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ genişletilmesinin var olmasıdır.

İspat: (F,Ψ) soft dönüşümü $(C_1,C_2):(X,\tau,E,x_e^o) \to (Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ soft sabit dönüşümle göreli homotop olsun. Burada $\forall x\epsilon X$ için $C_1(x) = y^o$ ve $\forall e\epsilon E$ için $C_2(e) = e'$ dir.

$$(H,\Psi):(X,\tau,E) \times (I,\tau_I,\mathbb{N}) \to (Y,\tau',E')$$

bu dönüşümler arasındaki göreli homotopya olsun. Yani,

$$(H,\Psi)(x_e,0_n) = (C_1,C_2)(x_e) = y_{e'}^o$$
$$(H,\Psi)(x_e,1_n) = (f,\varphi)(x_e) = \big(f(x)\big)_{\varphi(e)}$$

ve

$$(H,\Psi):\big((X,\tau,E)\times\{0_n\}\cup(I,\tau_I,\mathbb{N})\times\{x_e^o\}\big) = (C_1,C_2)(x_e) = y_{e'}^o$$

sağlanır. O zaman (H,Ψ) soft dönüşümü, $(F,\Psi): C(X,\tau,E) \to (Y,\tau',E')$ soft dönüşümünü üretir ve bu soft dönüşüm için

$$(F,\Psi)[x_e,1_n]=(H,\Psi)(x_e,1_n)=(f,\varphi)(x_e)$$

sağlanır. Yani (F,Ψ) soft dönüşümü (f,φ) soft dönüşümünün genişletilmesidir.

Tersine; eğer $(G,\Psi): C(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E')$ soft dönüşümü (f,φ) soft dönüşümünün bir genişletilmesi ise

$$(H,\Psi):(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\to(Y,\tau',E')$$

soft dönüşümünü

$$(X,\tau,E)\times(I,\tau_I,\mathbb{N})\xrightarrow{(q,1_{I\times\mathbb{N}})}C(X,\tau,E)\xrightarrow{(G,\Psi)}(Y,\tau',E')$$

soft dönüşümlerinin bileşkesi olarak tanımlayalım. O zaman (H,Ψ) soft dönüşümü (f,φ) soft dönüşümü ile (C_1,C_2) soft sabit dönüşümü arasında göreli homotopyadır. Eğer $(f,\varphi):(X,\tau,E,x_e^o)\to(Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ soft dönüşümü soft sabit dönüşüm ise bu soft dönüşümünün silindirine (f,φ) soft dönüşümünün konisi denir ve $C_{(f,\varphi)}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki lemmanın ispatı lemma 4.14. ün ispatı şeklinde verilir.

Lemma 4.1.15. Herhangi $(f,\varphi):(X,\tau,E,x_e^o)\to(Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ ve $(g,\psi):(Y,\tau',E',y_{e'}^o)\to(Z,\tau'',E'',z_{e''}^o)$ soft dönüşümleri için $(g,\psi)\circ(f,\varphi)$ soft dönüşümünün sabit dönüşümle göreli soft homotop olması için gerek ve yeter koşul (g,ψ) soft dönüşümünün $(F,\Psi): C_{(f,\varphi)}\to(Z,\tau'',E'')$ genişletilmesinin var olmasıdır.

Tanım 4.1.16. $(X,\tau,E,x_e^o)\xrightarrow{(f,\varphi)}(Y,\tau',E',y_{e'}^o)\xrightarrow{(g,\psi)}(Z,\tau'',E'',z_{e''}^o)$ [4.1.1]

belirli noktalı soft topolojik uzayların dizisi olsun. Eğer her bir $(D,\tilde{\tau},\tilde{E},d_{\tilde{e}}^o)$ soft topolojik uzayı için;

$$[(X,\tau,E,x_e^o);(D,\tilde{\tau},\tilde{E},d_{\tilde{e}}^o)]\xleftarrow{(f,\varphi)^*}[(Y,\tau',E',y_{e'}^o);(D,\tilde{\tau},\tilde{E},d_{\tilde{e}}^o)]\xleftarrow{(g,\psi)^*}[(Z,\tau'',E'',z_{e''}^o);(D,\tilde{\tau},\tilde{E},d_{\tilde{e}}^o)]$$

Belirli noktalı kümelerin dizisi tam ise [4.1.1] dizisine kotam denir.

Teorem 4.1.17. Her bir $(f,\varphi):(X,\tau,E,x_e^o)\rightarrow(Y,\tau',E',y_{e'}^o)$ soft sürekli dönüşümü için soft topolojik uzayların

$$(X,\tau,E,x_e^o)\rightarrow(Y,\tau',E',y_{e'}^o)\rightarrow C_{(f,\varphi)}$$

dizisi kotamdır.

İspat: $\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)$ herhangi bir soft topolojik uzay olsun. Göstermemiz gereken;

$$\left[(X,\tau,E,x_e^o);\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)\right]\xleftarrow{(f\varphi)_*^*}\left[(Y,\tau',E',y_{e'}^o);\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)\right]\xleftarrow{(g,1_E)_*^*}\left[C_{(f,\varphi)};\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)\right]$$

belirli noktalı kümeler dizisi tamdır.

$1_{C_{(f,\varphi)}}:C_{(f,\varphi)}\rightarrow C_{(f,\varphi)}$ soft dönüşümü $(j,1_E):(Y,\tau',E',y_{e'}^o)\rightarrow C_{(f,\varphi)}$ soft dönüşümünün genişletilmesi olduğundan lemma 4.15.' den $(j,1_E)\circ(f,\varphi)$ soft dönüşümü sabit dönüşümle soft homotoptur. O halde

$$y_m(j,1_E)^*\subset ker(f,\varphi)^*$$

elde edilir.

Eğer $[h,\varkappa]\epsilon\,\mathrm{ker}(f,\varphi)^*$ ise $(h,\varkappa)\circ(f,\varphi)$ soft dönüşümü sabit dönüşümle soft homotoptur. Yine lemma 4.15.'ten $(h,\varkappa):(Y,\tau',E',y_{e'}^o)\rightarrow\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)$ dönüşümünün $(h',\varkappa):C_{(f,\varphi)}\rightarrow\left(D,\tilde{\tau},\widetilde{E},d_{\tilde{e}}^o\right)$ genişletilmesi vardır. Bu durumda ;

$$(j,1_{E'})^*([h',\varkappa])=[(h',\varkappa)\circ(j,1_{E'})]=[h,\varkappa]$$

Sağlanır. Yani $ker(f,\varphi)^*\subset y_m(j,1_E)^*$'dir

KAYNAKLAR

[1] Acar U., Koyuncu F., Tanay B., “Soft sets ve soft rings”, Comput. Math. Appl.59(2010) 34583463.

[2] Ahmad B. ,Kharal A., “On fuzzy soft sets”, Adv. Fuzzy Sytst. 2009 (2009).

[3] Ali M. I., Feng F., Liu X. Y., Mind W. K., shabir M., “On some new operations in soft set theory”, Comput. Math. Appl. 57 (2009) 1547-1553.

[4] Aktaş H., Çağman N., “Soft sets and soft group” Information Science 177 (2007) 2726-2735.

[5] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç. “On Fuzzy Homotopy Sets”, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, Vol. 1, No.3., (2006).

[6] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç. “Algebraic structures on fuzzy homotopy sets”, Preceeding of the jangjeon Matematical Society, 9, (2006), No:2, pp. 161-173

[7] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç. “Soft locally compact and soft paracompact spaces”, Journal of Mathematics and System Science, (2013) Vol. 3, 122-130

[8] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç. “Intuitionistic fuzzy soft topological spaces”, TWMS, J. Pure and Appl. Math. (2014), V 5, No 5, 66-79

[9] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç. “Some results on fuzzy soft topological spaces”, Numerical and Soft Computing Methods for Characteristic Value Problems of ODE and ODEs Systems, 2013.

[10] Bayramov S. and Gunduz(Aras) Ç., Ozturk T. Y., “Homology Theory in the category of fuzzy topological Spaces”, Lambert Academic Publishing (2012) (acceped).

[11] S. Bayramov, L. Mdzinarishvili, C. Gündüz (Aras), The extension of singular homology on the category of soft topological spaces, International Journal of Engineering and Innovative Technology, (2013), V. 3, No 2, 292-299

[12] Cağman N, Karataş S., Enginoglu S., “Soft topology”, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 351—358.

[13] Eilenberg S., Steenrod N., “Foundations of Algebraic Topology”, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1952).

[14] Egelking R., “General Topology”, Polish Scientifiz Publishers, Warszawa, 1997.

[15] Feng F., Jun Y. B., Zhao X, “Soft semirings”, Comput. Math. Appl., 56 (2008) 2621-2628.

[16] Gunduz(Aras) C., Bayramav S., “Algebraic structures on fuzzy homotopy sets”, Proceeding Of The Jangjeon Mathematical Socety, 9, No.2, pp., (2006), 161-173.

[17] Gunduz(Aras) C., “ Soft Pakt Connectedness on Soft Topological Spaces’’ Proceedings of the International Conference, Computational and Connected Mathematical Methods in Sicience and Engineering, Almeria, Spain (2013), 239 - 246

[18] Gunduz(Aras) C., “Homotopy Theory on The Category of Fuzzy Topological Spaces”, Proceedding The Jangjean Mathematical Society, Vol.11 No.1 (2008) 13-26.

[19] Gunduz(Aras) C. and Bayramov S., “On Fuzzy Exact Homotopy Sets”, Southeast Asian Bulletion of Mathematics, 34, (2010) 1009-1022.

[20] Gunduz(Aras) C., Bayramav S., “Cech Homology Theory in The Category of Sostak Fuzzy Topological Spaces”, International Journal of Contemporary Math. Sciences No:2, (2010).

[21] Gunduz(Aras) C., Bayramav S., “Intuitionistic fuzzy soft module”, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 2480-2486.

[22] Gunduz(Aras) C., Bayramav S., “Fuzzy soft modules”, Internatonal Mathematical Forum, 6(11) (2011) 517-527.

[23] Hu S. T., “Homotopy Theory”, New York and London, (1959).

[24] Huber P. J., “Homotopy theory in general categories”, Math. Ann. 144 (1961), 361-385.

[25] Hussain S., Ahmad B., “Some properties of soft topological spaces”, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 4058- -4067.

[26] Jing-liang L., Rui-xia Y., Bing- xue Y., “Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups”, Chinese Control and Descision Conference (2008), 2626-2629.

[27] Jun Y. B., Park C. H., “Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-Algebras”, Inform. Sci. 178 (2008) 2466-2475.

[28] Jun Y. B., “Soft BCK/BCI-Algebras”, Comput. Math. Appl. 56(5) (2008) 1408-1413.

[29] Kharal A., Ahmad B., “Mappings on Fuzzy Soft Classes”, Adv. İn Fuzzy Syst. 2009 (2009).

[30] Klawonn F., “Homotopy Theory in The Category of Fuzzy Topological Spaces” Departmen of Computer Science, Technical University of Braunschweig, W-3300 Braunschweigh, Germany.

[31] Kucuk A., Ozturk T. Y., “Homology modules of fuzzy soft modules”, Annals of fuzzy mathematics and informatics (2012) (accepted)

[32] Maji P. K., Bismas R., Roy A. R., “Fuzzy soft sets”, journal of Fuzzy Mathematics 9(3) (2001) 589-602.

[33] Maji P. K., Roy A. R., Bismas R., “An Application of soft sets in a decision making problem”, Comput. Math. Appl. 44 (2002) 1077-1083.

[34] Maji P. K., Bismas R., Roy A. R., “Soft set theory”, Comput. Math. Appl. 45 (2003) 555-562.

[35] Massey W. S., “Homology and Cohomology teory”, New York-Basel, 1978.

[36] Min W. K., “A note on soft topological spaces”, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 3524- -3528.

[37] Molodtsov D., “Soft set theory – first results”, Comput. Math. Appl.37 (1999) 19-31.

[38] Ozturk T. Y., Gunduz(Aras) C., Bayramov S., “ Inverse and direct systems of soft modules”, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1), (2012) 73-85.

[39] Shabir H., Bashir A., “Some properties of soft topological spaces”, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 4058- 4067.

[40] Shabir M., Naz M., “On soft topological spaces”, Comput. Math. Appl. 61 (2011) 1786-1799.

[41] Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., “Soft sets and soft modules”, Lecture Nothes in Comput. Sci. 5009 (2008) 403-409.

[42] Switzer R. M., “Algebraic Topology Homotopy and Homology”, Springer-Verlag, 1975.

[43] Tanay B., Kandemir M. B., “Topological structure of fuzzy soft sets”, Comput. Math. Appl. 61 (2011) 2952-2957.

[44] Zadeh L. A., “Fuzzy sets”, Information and Control 8 (1965) 338-353.

[45] Zorlutuna İ., Akdag M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 3(2) (2012), 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul'da doğdum. İlkokulumu Kocaeli'nde okudum. Liseyi Kocaeli'nde Darıca Neşet Yalçın Lisesi'nde 2009 yılında bitirdim ve yine 2009 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2013 yılında üniversiteden mezun oldum ve yine 2013 Güz Dönemi'nde Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalın'nda yüksek lisans öğrenimime başladım.