T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL *p*-DİZİLERİ

Merve AKDENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

ARALIK-2015

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve AKDENİZ'ın Doç.Dr. Ömür DEVECİ'nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı '' Gruplarda Genelleştirilmiş Pell p- adlı bu çalışma, yapılan Tez Savunması Sınavı sonunda Jüri tarafından lisanüstü eğitim yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek .... ile kabul edilmiştir.

......./......./2015

Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan : Doç. Dr. Ömür DEVECİ	....
Üye : Yrd.Doç.Dr. Güventürk UĞURLU	....
Üye : Yrd.Doç.Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	....

Bu Tezin Kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../........../............ gün ve ..../.......... Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Yüksek lisans eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, bana bu çalışmayı vererek kendimi geliştirmeye yönelik fırsat sunan Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ' ye, bu süreçte göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı şükranlarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sırasında hiçbir yardımını benden esirgemeyen Yeşim AKÜZÜM' e, bu süreçte karşılaştığım bütün zorlukları kolaylaştıran, en büyük desteğim Muhammed Emre UZGUR' a ve beni en iyi şekilde yetiştiren, herşeyin en iyisine layık olan aileme çok teşekkür ederim.

Merve AKDENİZ

KARS-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin hem devirli gruplardaki hem de iki ve daha fazla üreteçli gruplardaki karşılıklarının üzerinde duruldu.

İkinci bölümde, çalışmalar esnasında kullanılacak temel kavramların yanı sıra üzerinde çalışılacak indirgemeli diziler ve gruplar hakkında geniş bilgi verildi. Ayrıca ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamıza yön vermesi bakımından iyi bilinen bazı indirgemeli dizilerin gerek devirli gruplarda gerekse iki ve daha fazla üreteçli gruplardaki karşılıkları ele alındı.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin m modülüne göre periyotları incelendi. Öyle ki bu periyotlar aynı zamanda dizinin m mertebeden devirli gruptaki periyoduna karşılık gelmektedir. Bu bölümde ayrıca, genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri iki ve daha fazla üreteçli gruplara taşındı. Bu anlamda grup elemanları yardımıyla genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri ve esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri tanımlandı ve bu diziler sonlu gruplarda incelendi. Son olarak elde edilen bulguların uygulaması olarak, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral gruplarındaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin ve esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotları belirlendi.

2015, 66 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi, Esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi, Binary polyhedral grup, Periyot.

ABSTRACT

In this study, counterparts of the generalized Pell *p*-sequences in both the cyclic groups and groups which have two or more generators have been emphasized.

In section 2, detailed information about the reccurence sequences and the groups that will be studied on; as well as basic concepts that will be used during study have been given. Also in the section 2 and 3, counterparts of some well-known recurrence sequences in terms of giving direction to our work in both the cyclic groups and the groups which have two or more generators have been handled.

In section 4, the periods of the generalized Pell *p*-sequences according to module m have been researched, also these periods have been corresponded to the period of the sequence in a cyclic group of order m. Likewise; the generalized Pell *p*-sequences moved to the groups which have two or more generators. In this sense, the generalized Pell *p*-sequences and the basic generalized Pell *p*-sequences have been defined by the aid of the elements of group and these sequences have been researced in the groups.

Finally, the periods of the the generalized Pell *p*-sequences and the basic generalized Pell *p*-sequences have been determined in binary polyhedral groups $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ and $\langle 2,2,n\rangle$ as applications of the result obtained.

2015, 66 Pages

Anahtar Kelimeler: Generalized Pell *p*-sequences, Basic generalized Pell *p*-sequences, Binary polyhedral group, Period.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
G	Grup
$\lvert G \rvert$	G grubunun mertebesi
$K \leq G$	K, G ’ nin alt grubu
$K \lhd G$	K, G ’ nin normal alt grubu
$Aut(G)$	G ’ nin otomorfizm grubu
$I(G)$	G ’ nin iç otomorfizm grubu
(l,m,n)	Polyhedral grup
$\langle l,m,n \rangle$	Binary polyhedral grup
$f_n^{(k)}$	$1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)}$ *k*-basamak Fibonacci dizisinin *n*. elemanı

$k(m)$	Standart Fibonacci dizisinin m modülüne göre periyodu
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ ' nin m ' ye göre modülü
$h_k(m)$	$f(k,m)$' nin en küçük periyodu
$F_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ elemanları ile elde edilmiş *k*-nacci dizisi
$P_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$	$F_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$ *k*-nacci dizisinin periyodu
$\bar{F}_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$	$(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) \in X$ üreteç *j*-lisi için *m* uzunluğundaki esas *k*-nacci dizisi
$BP_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$	$\bar{F}_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$ esas *k*-nacci dizisinin periyodu
$\{P(n)\}$	Pell dizisi
$\{P_n^k\}$	Genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi
$\{P^{k,m}\}$	$\{P_n^k\}$ ' nin m ' ye göre modülü
$hP_k(m)$	$\{P^{k,m}\}$ ' nin en küçük periyodu
$Q_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ elemanları ile elde edilmiş genelleştirilmiş Pell dizisi

$PerQ_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	$Q_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizisinin periyodu
$\left\{P_p^{(p)}(n)\right\}$	Genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi
$\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}$	*m* modülüne göre genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi
$h_p^p(m)$	$\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}$ dizisinin en küçük periyodu
$Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ elemanları ile elde edilmiş Pell *p*- dizisi
$PerQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	$Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinin periyodu
$\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ elemanları ile elde edilmiş esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi
$BQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$	$\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinin periyodu

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi indirgemeli dizi kavramı, kuramsal olarak Sayılar Teorisinin en temel çalışma alanlarından biri iken matematik ve fizikten bilgisayar bilimleri ve güzel sanatlara kadar modern bilimin birçok alanında uygulama sahası bulmaktadır. Örnek olarak $\left[2,3,18,19,21-23,28,29,31-33,36,39,41-48,51\right]$' e bakabilirsiniz.

İndirgemeli diziler gruplara ilk olarak Wall ([49]) tarafından taşınmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda standart Fibonacci dizilerini ele almıştır.

Daha sonra yapılan çalışmalarda, farklı indirgemeli diziler gruplara taşınmış ve indirgemeli dizilerin çeşitli gruplardaki karşılıkları incelenmiştir. $\left[1,4,5,8-14,34,35,38,49,50\right]$' deki bilimsel çıktıları bu tür çalışmalara örnek olarak verilebilir.

Deveci vd. [12]' deki çalışmalarında $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral gruplarındaki k-nacci dizilerinin periyotlarını elde etmişlerdir. [13]' de Deveci ve Karaduman, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilerini gruplara taşımış ve bu dizinin D_n dihedral grubundaki karşılığının periyodunu belirlemişlerdir.

Bu çalışmada konsept genelleştirilip Pell *p*-dizilerine taşınacak ve bu dizilerin $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral gruplarındaki karşılıkları incelenecektir.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1.Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.1.1: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R' nin elemanlarının $a_1, a_2, \ldots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n \tag{2.1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan dizisine homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz (Everest et.al. 2003).

Tanım 2.1.2: $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$ şeklindeki n. dereceden polinoma (2.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırasıyla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler binary ve ternary lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırasıyla, tamsayı, rasyonel, cebirsel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

Eğer c_k, R' nin terslenebilir bir elemanı ise (2.1) şeklinde tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ şeklinde devam eder (Everest et.al. 2003).

Tanım 2.1.3: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R' nin elemanlarının $a_1, a_2, \ldots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir (Everest et.al. 2003).

Bu bağıntı kullanılarak,

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} + \cdots + c_k a_n \tag{2.2}$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir.

(2.2) bağıntısı için,

$$F(x)=(x^k-c_1x^{k-1}-\cdots-c_{k-1}x-c_k)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir.

Kalman, $a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0,c_1,\ldots,c_{k-1}$ ' ler sabitler olmak üzere

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+\cdots+c_{k-1}a_{n+k-1}$$

şeklindeki *k*-basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanlarını;

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ : & : & : & \ldots\ldots & : & : \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots\ldots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ : \\ : \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ : \\ : \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde etmiştir (Kalman 1982).

2.1.1. Fibonacci Dizileri

Tanım 2.1.1.1: $\{f_n\}$ Fibonacci dizisi, $f_0=0,\ f_1=1$ başlangıç değerleri ve $n\geq 0$ için

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

şeklindedir.

Silvester,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir (Silvester 1979).

Honsberger, Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q- matrisi denir (Honsberger 1985).

Tanım 2.1.1.2: $k,l \in R$ olmak üzere 2-basamak genel Fibonacci dizisi,

$$f_{n+2} = kf_{n+1} + lf_n$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$ (Simpson formülü).

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eşitliğine ‘’Binet formülü’’ denir. Bu formül n’ nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir. $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.1.1.3: Lucas sayıları, $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklindeki lineer indirgeme denklemi ile tanımlanan, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayılar dizisidir. n’inci Lucas sayısı, Lucas $L[n]$ ile gösterilir.

Yani Lucas dizisi

$$1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,\ldots$$

şeklindedir.

2.1.2. Pell Dizisi

Tanım 2.1.2.1: $\{P(n)\}$ Pell dizisi, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Yani Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,408,\ldots$$

şeklindedir.

Ercolona, Pell sayılarının

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M^n=\begin{bmatrix}P_{n+1} & P_n\\ P_n & P_{n-1}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde *M* matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir (Ercolano, 1979).

2.1.3. Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizisi

Tanım 2.1.3.1: Genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell sayılarının *k* dizisi :

$1-k\le n\le 0$ için,

$$P_n^i=\begin{cases}1, & n=1-i\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

başlangıç değerleri ve $n>0$ ve $1\le i\le k$ için,

$$P_n^i=2P_{n-1}^i+P_{n-2}^i+\cdots+P_{n-k}^i \tag{2.3}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada P_n^i, *i*. dizinin *n*. terimidir. $\{P_n^k\}$' ya genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi denir ve $k=2$ için Pell dizisi elde edilir.

Genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell matrisi,

$$R=\left[r_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış ve

$$E_n=\left[e_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k\\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \cdots & P_{n-k+1}^k\end{bmatrix}$$

olmak üzere $E_{n+1}=R\cdot E_n$ eşitliği elde edilmiştir (Taşçı ve Kılıç 2010).

2.1.4.Genelleştirilmiş Pell (*p*,*i*)-Sayıları

Tanım 2.1.4.1: Genelleştirilmiş Pell (*p*,*i*) -sayıları, verilen herhangi bir p $(p=1,2,3,...)$, $n>p+1$ ve $0\le i\le p$ için $P_p^{(i)}(1)=\cdots=P_p^{(i)}(i)=0$ ve $P_p^{(i)}(i+1)=P_p^{(i)}(i+2)=\cdots=P_p^{(i)}(p+1)=1$ başlangıç koşulları altında

$$P_p^{(i)}(n)=2P_p^{(i)}(n-1)+P_p^{(i)}(n-p-1) \tag{2.4}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Eğer $i=0$ ise başlangıç koşulu

$$P_p^{(0)}(1)=P_p^{(0)}(2)=\cdots=P_p^{(0)}(p+1)=1$$

olur (Kılıç 2007).

Örnek 2.1.4.1: $i = p = 1$ olduğunda genelleştirilmiş Pell (1,1)-sayısı $(n+1)$' inci Pell sayısı olur. Eğer $p=2$ ve $i=0$ olarak alırsak, $\{P_2^{(0)}(n)\}$ genelleştirilmiş Pell (2,0)-sayılarının dizisi,

$$1,1,1,3,7,15,33,73,161,\ldots$$

şeklinde olur (Kılıç 2007).

Ayrıca $p=2$ ve $i=1$ olduğunda, genelleştirilmiş Pell (2,1)-sayılarının başlangıç koşulları $P_2^{(1)}(1)=0$, $P_2^{(1)}(2)=P_2^{(1)}(3)=1$ olup $\{P_2^{(1)}(n)\}$ genelleştirilmiş Pell (2,1)-sayılarının dizisi,

$$0,1,1,2,5,11,24,53,117,258,\ldots$$

şeklindedir.

$(p+1)\times(p+1)$ boyutlu A companion matrisi,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(p+1)\times(p+1)$ boyutlu E auxiliary matrisi,

$$E=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$(p+1)\times(p+1)$ boyutlu H_n matrisi,

$$H_n = \begin{bmatrix} P_p^{(0)}(n+p+2) & P_p^{(p-1)}(n+p+1) & P_p^{(p-2)}(n+p+1) & \cdots & P_p^{(1)}(n+p+1) & P_p^{(0)}(n+p+1) \\ P_p^{(0)}(n+p+1) & P_p^{(p-1)}(n+p) & P_p^{(p-2)}(n+p) & \cdots & P_p^{(1)}(n+p) & P_p^{(0)}(n+p) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ P_p^{(0)}(n+3) & P_p^{(p-1)}(n+2) & P_p^{(p-2)}(n+2) & \cdots & P_p^{(1)}(n+2) & P_p^{(0)}(n+2) \\ P_p^{(0)}(n+2) & P_p^{(p-1)}(n+1) & P_p^{(p-2)}(n+1) & \cdots & P_p^{(1)}(n+1) & P_p^{(0)}(n+1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış olsunlar. Bu matrisler arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.4.1: $n, p > 0$ için,

$$H_n = A^n \cdot E$$

dir (Kılıç 2007).

İspat: İspatı yapmak için n üzerinde tümevarım yöntemini kullanalım. Eğer $n=1$ ise

$$H_1 = \begin{bmatrix} P_p^{(0)}(p+3) & P_p^{(p-1)}(p+2) & \cdots & P_p^{(1)}(p+2) & P_p^{(0)}(p+2) \\ P_p^{(0)}(p+2) & P_p^{(p-1)}(p+1) & \cdots & P_p^{(1)}(p+1) & P_p^{(0)}(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_p^{(0)}(4) & P_p^{(p-1)}(3) & \cdots & P_p^{(1)}(3) & P_p^{(0)}(3) \\ P_p^{(0)}(3) & P_p^{(p-1)}(2) & \cdots & P_p^{(1)}(2) & P_p^{(0)}(2) \end{bmatrix}$$

dir.

Genelleştirilmiş $\text{Pell}(p,i)$ -sayılarının tanımından yola çıkarak H_1 matrisi;

$$H_1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Basit bir hesaplama ile $H_1 = A \cdot E$ eşitliği elde edilir. Böylece $n=1$ için ispat tamamlanır. Şimdi $n-1$ için eşitliğin sağlandığını varsayarak eşitliğin n için sağlandığını gösterelim. A matrisi companion matris olduğu için;

$$H_n = A^n E = AA^{n-1}E = A.H_{n-1}$$

eşitliği yazılabilir. Matris çarpımından ve genelleştirilmiş Pell (p,i)-sayılarının tanımından sonuca ulaşılır.

$(p+1)\times(p+1)$ boyutlu G_n matrisini aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$G_n = \begin{bmatrix} P_p^{(p)}(n+p+1) & P_p^{(p)}(n+1) & P_p^{(p)}(n+2) & \dots & P_p^{(p)}(n+p) \\ P_p^{(p)}(n+p) & P_p^{(p)}(n) & P_p^{(p)}(n+1) & \dots & P_p^{(p)}(n+p-1) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ P_p^{(p)}(n+2) & P_p^{(p)}(n-p+2) & P_p^{(p)}(n-p+3) & \dots & P_p^{(p)}(n+1) \\ P_p^{(p)}(n+1) & P_p^{(p)}(n-p+1) & P_p^{(p)}(n-p+2) & \dots & P_p^{(p)}(n) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

G_n matrisi ile A matrisi arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.4.2: $n>0$ için

$$A^n = G_n$$

dir (Kılıç 2007).

İspat: Genelleştirilmiş $\text{Pell}(p,p)$-sayılarının indirgeme bağıntısından yola çıkarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} P_p^{(p)}(n+p+1) \\ P_p^{(p)}(n+p) \\ \vdots \\ P_p^{(p)}(n+2) \\ P_p^{(p)}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_p^{(p)}(n+p) \\ P_p^{(p)}(n+p-1) \\ \vdots \\ P_p^{(p)}(n+1) \\ P_p^{(p)}(n) \end{bmatrix}.$$

Yukarıdaki indirgeme bağıntısını $(p+1)$ sütunlarına genelleştirilirse

$$G_n = AG_{n-1}$$

eşitliği elde edilir. Tümevarım yöntemini kullanılarak

$$G_n = A^{n-1}G_1$$

şeklindeki eşitlik yazılabilir. Genelleştirilmiş $\text{Pell}(p,p)$-sayılarının tanımından $G_1 = A$ olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Burada A matrisi genelleştirilmiş Pell p-matrisi olarak adlandırılmaktadır (Kılıç 2007).

Sonuç 2.1.4.1: $n, p > 0$ için

$$P_p^{(p)}(n+p+1) = 3\, P_p^{(p)}(n+p) + \sum_{j=0}^{p-1} P_p^{(p)}(n+j)$$

$$P_p^{(p-j)}(n+p+1) = P_p^{(p)}(n+p+1) + \sum_{k=1}^{j} P_p^{(p)}(n+k) \qquad 1 \le j \le p$$

dir (Kılıç 2007).

Fibonacci sayılarının Simpson formülü aşağıdaki matrisin determinantından elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

yani,

$$(-1)^n = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\right) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

olup dolayısıyla,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir.

Benzer olarak, genelleştirilmiş Pell(p,i)-sayıları için Simpson formulü üreteç matrislerin determinantları yardımıyla belirlenebilmektedir. $\det G_n = (-1)^{n+1}$ olduğundan farklı p değerleri için çeşitli bağıntılara ulaşılabilmektir. Örneğin, $p=2$ olursa G_n aşağıdaki gibi olup;

$$G_n = \begin{bmatrix} P_p^{(2)}(n+3) & P_p^{(2)}(n+1) & P_p^{(2)}(n+2) \\ P_p^{(2)}(n+2) & P_p^{(2)}(n) & P_p^{(2)}(n+1) \\ P_p^{(2)}(n+1) & P_p^{(2)}(n-1) & P_p^{(2)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

$$P_p^{(2)}(n-1)\left(P_p^{(2)}(n+2)\right)^2 - 2P_p^{(2)}(n+2)P_p^{(2)}(n+1)P_p^{(2)}(n) + \left(P_p^{(2)}(n+1)\right)^3 - P_p^{(2)}(n+3)P_p^{(2)}(n-1)P_p^{(2)}(n+1)$$
$$+ P_p^{(2)}(n+3)\left(P_p^{(2)}(n)\right)^2 = (-1)^{n+1}$$

eşitliği elde edilmektedir.

2.2. *m* Modülüne Göre İndirgemeli Diziler

Tanım 2.2.1: Eğer dizi belli bir terimden sonra sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodik dizi denir. Tekrar eden alt dizideki eleman sayısına ise dizinin periyodu denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,f,g,d,e,f,g,\ldots$ dizisi periyodik olup periyodu 4 olur.

Tanım 2.2.2: Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyodlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,a,b,c,d,e,\ldots$ dizisi basit periyodik olup periyodu 5' dir.

2.2.1. *m* Modülüne Göre Fibonacci Dizisi

Teorem 2.2.1.1: $f_n\left(\bmod m\right)$ basit periyodik bir dizidir (Wall 1960).

$f_n\left(\bmod m\right)$ dizisinin en küçük periyodu $k\left(m\right)$ ile gösterilir. $k\left(m\right)$ ifadesi m modülüne göre Fibonacci dizisinin Wall sayısı olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.1.2:

i. p bir asal sayı olmak üzere, eğer $m=\prod p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılabiliyorsa $k\left(m\right)=\text{okek}\left(k\left(p_i^{e_i}\right)\right)$ dır, yani $k\left(m\right)$, $k\left(p_i^{e_i}\right)$' lerin en küçük ortak katıdır.

ii. p bir asal sayı olmak üzere, $k\left(p^2\right)\neq k\left(p\right)$ ise $k\left(p^e\right)=p^{e-1}k\left(p\right)$'dir. Ayrıca $\ell, k\left(p^\ell\right)=k\left(p\right)$ olacak şekilde en büyük tamsayı olmak üzere $e>1$ için $k\left(p^e\right)=p^{e-1}k\left(p\right)$ olur (Wall 1960).

$u_0=a,\ u_1=b,\ u_2=c$ başlangıç değerleri olmak üzere $n\geq 3$ için $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}+u_{n-3}$ şeklinde tanımlanan tamsayı dizisinin m modülüne göre periyodu, $k_{(a,b,c)}\left(m\right)$ ile gösterilsin.

Lemma 2.2.1.1: $a,b,c,x,y,z,n\in\mathbb{Z}$ için $n>0$ olmak üzere a,b,c ve x,z,y tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse, $k_{(a,b,c)}\left(n\right)=k_{(x,y,z)}\left(n\right)$ olur (Campbell 2005).

Sonuç 2.2.1.1: $a,b,c,x,y,z,m,n \in \mathbb{Z}$ için $m,n>0$ olmak üzere a,b,c ve x,z,y tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse $k_{(a,b,c)}(n) \mid k_{(x,y,z)}(mn)$ olur (Campbell 2005).

Teorem 2.1.1.4: f_n, n. Fibonacci ve g_n, n. Lucas sayıları olmak üzere,

$$t = \min(\{n\text{: } n \text{ çift sayı ve } m \mid f_n\} \cup \{n : n \text{ tek sayı ve } m \mid g_n\})$$

olacak şekilde $m > 2$ için

$$k(m) = 2t$$

dir.

2.2.2. *m* Modülüne Göre *k*-basamak Fibonacci Dizisi

Tanım 2.2.2.1: $f_n^{(k)}$, $1 \le i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı $n > k$ için,

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)}$$

k-basamak Fibonacci dizisinin *n*. elemanıdır. $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} (\operatorname{mod} m)$ olmak üzere bu dizi *m* modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \ldots, f_n^{(k,m)}, \ldots \right)$$

dizisi elde edilir. O zaman $\left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \ldots, f_k^{(k,m)} \right) = (0,0,\ldots,1)$ olup bu dizi için (2.3) deki tekrar eden dizi bağıntıları aynıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 2.2.2.1: $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir (Lü and Wang 2007).

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid 0 \le a_i \le m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur, yani,

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \cdots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq 0$ sayısı vardır. Dizinin tanımından,

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

eşitliği elde edilebilir ki bu eşitlik yardımıyla

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)},\ f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)},\ f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)} \cdots,\ f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

olduğu görülebilir. Bu sonuç $f(k,m)$ dizisinin basit periyodik olduğunu göstermektedir.

$h_k(m)$ ile $f(k,m)$' nin en küçük periyodu gösterilir, $f(k,m)$' nin periyodu veya m modülüne göre *k*-basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü and Wang 2007).

Örnek olarak,

$$s(4,3) = (0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\cdots)$$

dizisi ele alınırsa, bu dizi $k=4$ basamak için her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar edip $h_4(3) = 26$ olur (Lü and Wang 2007).

p_i ler asal sayılar ve e_i ler pozitif tamsayılar olmak üzere, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}\ (t \geq 1)$ ise $h_k(m)$, $h_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 2.2.2.2: t, $h_k(p) = h_k\left(p^t\right)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Her $a \geq t$ için, $h_k\left(p^a\right) = p^{a-t} h_k(p)$ olur. Özellikle $h_k(p) = h_k\left(p^2\right)$ ise her $a > 1$ için, $h_k\left(p^a\right) = p^{a-1} h_k(p)$ dir (Lü and Wang 2007).

Varsayım 2.2.2.1: Eğer $p \geq k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) \mid (p^k - p^i)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ aralığında bir i sayısı vardır.

2.2.3. *m* Modülüne Göre Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi m modülüne indirgenerek

$$\left\{P^{k,m}\right\} = \left\{P_{1-k}^{k,m}, P_{2-k}^{k,m}, \cdots, P_0^{k,m}, P_1^{k,m}, P_2^{k,m}, \cdots, P_n^{k,m}, \cdots\right\}$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Burada $P_n^{k,m} = P_n^k \left(\bmod m\right)$' dir. Bu dizinin indirgeme bağıntısı (2.3) denklemindeki gibidir (Deveci ve Karaduman, 2015).

Teorem 2.2.3.1: $\left\{P^{k,m}\right\}$ periyodik bir dizidir (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: $U_k = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid 0 \leq x_i \leq m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $s(U_k) = m^k$ sonlu olup her $a \geq 0$ için

$$P_{a+1}^{k,m} = P_{b+1}^{k,m}, \cdots, P_{a+k}^{k,m} = P_{b+k}^{k,m}$$

olacak şekilde $b \geq a$ tamsayısı vardır. $\left\{P_n^k\right\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin tanımından

$$P_n^k = P_{n+k}^k - 2P_{n+k-1}^k - P_{n+k-2}^k - \cdots - P_{n+1}^k$$

olacaktır. Böylece

$$P_a^{k,m} = P_b^{k,m},\ P_{a-1}^{k,m} = P_{b-1}^{k,m},\ \cdots,\ P_2^{k,m} = P_{b-a+2}^{k,m},\ P_1^{k,m} = P_{b-a+1}^{k,m}$$

elde edilir ve bu da $\left\{P^{k,m}\right\}$' nin periyodik olduğunu gösterir.

$hP_k(m)$, $\left\{P^{k,m}\right\}$' nin en küçük periyodu olsun. Bu periyoda genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin m modülüne göre periyodu denir.

Teorem 2.2.3.2: $u \in N$ için $hP_2\left(2^u\right) = 2^u$ olur (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından $u \in N$ için $P_{2^u} = 2P_{2^u-1} + P_{2^u-2} = 2^u \lambda \ (\lambda \in N)$ ve $P_{2^u+1} = 2P_{2^u} + P_{2^u-1} = 2^{u+1}\lambda + 2^u \beta + 1 \ (\beta \in N)$ yazılabilir. $P_{2^u} \equiv 0\left(\bmod 2^u\right)$ ve $P_{2^u+1} \equiv 1\left(\bmod 2^u\right)$ olduğundan devir 2^u. elemanla tekrar başlar. Yani $P_{2^u} \equiv P_0\left(\bmod 2^u\right), P_{2^u+1} \equiv P_1\left(2^u\right), \ldots$ olur. Böylece $hP_2\left(2^u\right) = 2^u$ olur.

Teorem 2.2.3.3: $hP_2(m)$ bir çift sayıdır (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: $P_\alpha \equiv P_\varphi (\bmod m)$ ve $P_{\alpha+1} \equiv P_{\varphi+1}(\bmod m)$ olsun. Pell dizisinin tanımından aşağıdaki durumlar elde edilir:

i. Eğer P_φ tek ise $P_{\varphi+1}$ çifttir.

ii. Eğer P_φ çift ise $P_{\varphi+1}$ tektir.

Böylece $hP_2(m)$ ' nin 2 tarafından bölünmesi gerektiği görülür ki, bu da bize $hP_2(m)$ ' nin çift olduğunu gösterir.

n_{ij} ler tamsayı olmak üzere, verilen bir $N = \left[n_{ij}\right]$ matrisi için, $N = (\bmod m)$, N ' nin her elemanının m modülüne göre indirgendiği anlamına gelir, yani, $N = (\bmod m) = \left(n_{ij} (\bmod m)\right)$ dir.

$\langle R \rangle_{p^\alpha} = \left\{R^i \left(\bmod p^\alpha\right) \middle| i \geq 0\right\}$ kümesini göz önüne alalım. $\det R = (-1)^{k+1}$ olduğundan $\left(\det R, p^\alpha\right) = 1$ olur ki bu da $\langle R \rangle_{p^\alpha}$ kümesinin devirli bir grup olduğunu göstermektedir. $\langle R \rangle_{p^\alpha}$ devirli grubunun mertebesi $\left|\langle R \rangle_{p^\alpha}\right|$ ile gösterilsin.

Teorem 2.2.3.4: $hP_k(p^\alpha) = \left|\langle R \rangle_{p\alpha}\right|$ dir (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: $\left|\langle R\rangle_{p\alpha}\right|$' nın $hP_k(p^{\alpha})$ tarafından bölündüğü açıktır. O halde $hP_k(p^{\alpha})$' nın da $\left|\langle R\rangle_{p\alpha}\right|$ tarafından bölündüğü gösterilirse ispat tamamlanır. $hP_k(p^{\alpha})=n$ olsun. Diğer taraftan $E_{n+1}=R^{n+1}=R.E_n$ olduğu biliniyor. Burada $E_n \equiv I\left(\bmod p^{\alpha}\right)$ (I birim matris olsun) olduğu için $R^{n+1}\equiv R\left(\bmod p^{\alpha}\right)$ elde edilir. Böylece $R^n \equiv I\left(\bmod p^{\alpha}\right)$ olduğu görülür ki, bu da $\left|\langle R\rangle_{p\alpha}\right|$' nın n' yi böldüğünü gösterir. Böylece $hP_k(p^{\alpha})=\left|\langle R\rangle_{p\alpha}\right|$ olduğu görülmektedir.

Teorem 2.2.3.5: p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}\ \left(t\geq 1\right)$ ise,

$$hP_k(m)=okek\left[hP_k\left(p_i^{e_i}\right)\right]$$

dir (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: $okek\left[hP_k\left(P_i^{e_i}\right)\right]=\delta$ olsun. $P_{\delta}^{k}\equiv P_0^{k}\left(\bmod m\right), P_{\delta+1}^{k}\equiv P_1^{k}\left(\bmod m\right),\cdots,P_{\delta+k-1}^{k}\equiv P_{k-1}^{k}\left(\bmod m\right)$ olduğundan $hP_k(m)=okek\left[hP_k\left(P_i^{e_i}\right)\right]$ dir.

Teorem 2.2.3.6: t, $hP_k(p)=hP_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha\geq t$ için $hP_k(p^{\alpha})=p^{\alpha-t}hP_k(p)$ dir. Özellikle, $hP_k(p)\neq hP_k(p^2)$ ise $\alpha>1$ için $hP_k(p^{\alpha})=P^{\alpha-1}hP_k(p)$ olur (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: θ, bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $R^{hP_k\left(P^{\theta+1}\right)}\equiv I\left(\bmod p^{\theta+1}\right)$ ise $R^{hP_k\left(P^{\theta+1}\right)}\equiv I\left(\bmod p^{\theta}\right)$ olduğu için $hP_k(p^{\theta})$' nin $hP_k(p^{\theta+1})$' yi böldüğü görülmektedir. Diğer taraftan $R^{hP_k\left(P^{\theta}\right)}=I+\left(a_{ij}^{(\theta)}p^{\theta}\right)$ yazılarak binom açılımından,

$$R^{hP_k\left(P^{\theta}\right)p}=\left(I+\left(a_{ij}^{(\theta)}p^{\theta}\right)\right)^{p}=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(a_{ij}^{(\theta)}p^{\theta}\right)^{i}\equiv I\left(\bmod p^{\theta+1}\right)$$

ifadesini elde ederiz ki, bu da $hP_k(p^{\theta+1})$ ' nin $hP_k(p^{\theta})p$ ' yi böldüğünü gösterir. Böylece ya $hP_k(p^{\theta+1})p = hP_k(p^{\theta})$ ya da $hP_k(p^{\theta+1}) = hP_k(p^{\theta})p$ olduğunu gösterir ki, buradaki ikinci durum ancak ve ancak p tarafından bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ elemanının mevcut olması durumunda sağlanmaktadır.

$hP_k(p^t) \neq hP_k(p^{t+1})$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ nin mevcut olduğu görülmektedir. Böylece $hP_k(p^{t+1}) \neq hP_k(p^{t+2})$ sonucuna ulaşılır ve t üzerinden tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

2.3.Grup Takdimleri

Tanım 2.3.1: *G* bir grup ve *S* de *G'* nin bir alt kümesi olsun. Eğer *G'* nin her elemanı *S'* nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa *S* kümesi, *G* grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır (Dummit and Foote, 2007).

Tanım 2.3.2: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit and Foote, 2007).

Tanım 2.3.3: *G* bir grup ve *S* de *G*' nin bir alt kümesi olsun. $s_1, s_2, \cdots, s_n$, *S*' nin elemanları ve her bir $a_i = \pm 1$ olmak üzere, *S'* deki bir kelime $s_1^{a_1}, s_2^{a_2}, \cdots, s_n^{a_n}$ şeklinde ifade edilir.

S' deki her bir kelime, *G'* nin bir elemanını temsil eder. Bu anlamda boş kelime *G'* nin birim elemanını temsil eder ve boş kelime uzunluğu sıfır olan tek kelimedir.

Tanım 2.3.4: *G* bir grup ve *S* de *G'* nin bir alt kümesi olsun. Eğer *G'* nin herhangi bir elemanı *S'* nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa *G* grubuna *S* kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 2.3.5: X bir küme, $F(x)$, X üzerinde serbest bir grup ve $R \subseteq F(x)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ ifadesine G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerinin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere, eğer bir G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir.

Lemma 2.3.1: Eğer G ve H sırası ile $\langle X : R \rangle$ ve $\langle Y : S \rangle$ şeklinde takdim edilmiş gruplar ise $[X, Y]$, $\{x^{-1}y^{-1}xy : x \in X, y \in Y\}$ şeklinde komütatörlerin kümesi olmak üzere, bu grupların $G \times H$ direkt çarpımı , $\langle X, Y : R, S, [X, Y] \rangle$ şeklinde takdim edilir (Johnson 1997; Sims 1994).

Tanım 2.3.6: $(G, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere, eğer $\varphi : G \to H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için,

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlıyorsa φ ’ ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.3.7: $\varphi : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ ’ ye bir epimorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.3.8: $\varphi : G \to H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ ’ ye bir monomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.3.9: $\varphi : G \to H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ’ ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

İzomorf gruplar arasında bire bir eşleme olup grup yapıları da bu eşleme altında bozulmaz.

Tanım 2.3.10: $\varphi : G \to G$ homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ , 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ’ ye bir grup otomorfizmi denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.3.11: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için $I_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan $\mathrm{I}_a : G \to G$ otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $\mathrm{I}(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $Aut(G)$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.3.12: G bir grup ve X , boş olmayan bir küme olsun.

$$* : G \times X \to X$$

$$(g, x) \to g * x$$

fonksiyonu,

i) $\forall x \in X$ için $e * x = x$

ii) $\forall x \in X$ ve $g_1, g_2 \in G$ için $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona *G'* nin X üzerine bir etkisi denir.

Tanım 2.3.13: *K*, *G'* nin alt grubu olsun. Eğer $K \cap Q = 1$ ve $KQ = G$ olacak şekilde bir $Q \leq G$ alt grubu varsa, Q ya, K ' nın bir komplementidir denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.3.14: G bir grup ve S de G ' nin bir alt kümesi olsun. G ' nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kapanışı denir.

Tanım 2.3.15: G bir grup ve $K \lhd G$ olsun. Eğer K , bir Q komplementine sahip ise bu taktirde G ' ye Q ile K ' nın yarı direkt çarpımı (Semi-Direct product) denir ve $G = K \times_{\varphi} Q$ ile gösterilir. Eğer $G = K \times_{\varphi} Q$ ise bu taktirde her $x \in Q$ için $\varphi_x : K \to K, \varphi_x(K) = xkx^{-1}$ ile tanımlanan dönüşüm K ' nın bir otomorfizmidir. Üstelik $\varphi : Q \to AutK,\ \varphi(x) = \varphi_x$ ile tanımlanan bir grup homomorfizmidir. Böylece Q ile K ' nın yarı direkt çarpımını oluşturmak için Q ' dan $AutK$ ' ya bir homomorfizme gerek vardır.

Yarı direkt çarpım hakkında daha detaylı bilgi için [16]' e bakılabilir.

Teorem 2.3.1: A ve B gruplar olsun. $\varphi : B \to AutA,\ \varphi(b) = \varphi_b$ bir grup homomorfizmi olsun. Bu taktirde $A \times B$ kartezyen çarpımı, $(ab)(a'b') = (a\varphi_b(a'), bb')$ işlemine göre bir gruptur.

Tanım 2.3.16: X bir küme, $F(X)$, X üzerinde bir serbest grup, $R \subseteq F(X)$ ve $\overline{R},\ F(X)$' deki R kümesinin normal kapanışı olsun. Yani, $\left\langle g^{-1}rg : g \in F(X), r \in R \right\rangle$ kümesi ile $F(X)$' in alt grubu verilmiş olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(X)/\overline{R}$ ise G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir (Campbell 2003).

Önerme 2.3.1: Aynı grubun iki takdimi verilmiş olsun. Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden diğer takdim elde edilebilir (Johnson 1997).

Lemma 2.3.2 (Von Dyck's Lemma): $R \subseteq S \subseteq F(X)$ olmak üzere, $G = \langle X / R \rangle$ ve $H = \langle X / S \rangle$ ise, her $x \in X$ elemanını sabitleyen ve $Ker\varnothing = \overline{S / R}$ olacak şekilde bir $\varnothing : G \to H$ epimorfizmi vardır. Tersine, $G = \langle X / R \rangle$' nin her bölüm grubu, $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X / S \rangle$ şeklinde bir takdime sahiptir (Johnson 1997).

Tanım 2.3.17: H ve N iki grup olmak üzere G grubunun H'nin N ile grup genişlemesi olması için gerek ve yeter şart

i. G grubunun M normal alt grubu, N ile izomorftur.

ii. $G / M \cong H$ tır (Mac Lane and Birkhoff, 1993).

Tanım 2.3.18: $l, m, n > 1$ için,

$$\left\langle x, y, z \middle| x^l = y^m = z^n = xyz = e \right\rangle$$

veya

$$\left\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e \right\rangle$$

şeklinde takdim edilen gruba (l, m, n) polyhedral grubu denir.

Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak $(l, m, n) \cong (m, n, l) \cong (n, l, m)$ olduğu görülebilir.

Eğer $t = lmn\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right) = mn + lm + ln - lmn$ pozitif ise (l, m, n) polyhedral grubu sonludur.

Eğer $1 < l \leq m \leq n$ ise yalnızca aşağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l, m, n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

(i) $l = m = 2$ ve n, $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı ise,

(ii) $l = 2,\ m = 3$ ve n, $3 \leq n \leq 5$ olacak şekilde bir tamsayı ise

(l, m, n) polyhedral grubu sonlu ise mertebesi $2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right)^{-1} = \frac{2lmn}{t}$ dır (Coxeter and Moser 1972).

Tanım 2.3.19: $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu $l, m, n > 1$ için;

$$\left\langle x, y, z \middle| x^l = y^m = z^n = xyz \right\rangle$$

şeklinde takdim edilir.

Burada $l = 2$ ise $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu 2-gerenli olarak

$$\left\langle y, z \middle| y^m = z^n = (yz)^2 \right\rangle$$

şeklinde takdim edilir.

(l,m,n) polyhedral grubu, $\langle l,m,n\rangle$ binary polyhedral grubu için bir bölüm grubu olarak meydana geldiğinden $t \leq 0$ olduğu zaman bu grup sonsuzdur. Bu gruptaki bağıntılar; $x^l = y^m = z^n = xyz = f$ şeklindedir. $t > 0$ olduğu zaman $f^2 = 1$ olur. Bu grupta x, y, z nin mertebeleri $\langle l,m,n\rangle$ polyhedral grubundakinin iki katıdır. Aynı zamanda bu grubun mertebesi de $\langle l,m,n\rangle$' nin iki katı olup $\dfrac{4lmn}{t}$ dır.

$(2,m,n)$ polyhedral grubu sonlu olduğu zaman, $\langle 2,m,n\rangle$ binary polyhedral grubu, C_2 devirli grubun $(2,m,n)$ polyhedral grubu ile bir genişlemesidir (Coxeter and Moser 1972).

$\langle 2,3,5\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 120 olup binary icosahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2,3,4\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 48 olup binary octahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2,3,3\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 24 olup binary tetrahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi $4n$ olup dicyclic grup diye adlandırılır.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.Gruplarda Lineer İndirgemeli Diziler

3.1.1.Sonlu Gruplarda *k*-Nacci Dizisi

Tanım 3.1.1.1: Sonlu bir gruptaki *k*-nacci dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ve

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} & ;\ j \le n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1}; & n \ge k \text{ için} \end{cases}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanır (Knox 1992).

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ elemanları tarafından gerilen (üretilen) sonlu bir gruptaki *k*-nacci dizisi $F_k\left(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}\right)$ şeklinde gösterilir. Buna göre tamsayılardaki $\bmod m$ ’ ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2\left(\mathbb{Z}_m; 0,1\right)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Bir $F_k\left(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}\right)$ *k*-nacci dizisinin periyodu $P_k\left(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}\right)$ şeklinde gösterilir. Grubun Fibonacci orbiti ve gruptaki *k*-nacci dizisi tanımlarından görülmektedir ki, *k*-gerenli bir grubun orbiti bu gruptaki *k*-nacci dizisine karşılık gelmektedir.

Tanım 3.1.1.2: G bir grup olsun. G ’ nin her elemanının içinde bulunduğu bir *k*-nacci dizisi mevcut ise G ’ ye *k*-nacci dizilenebilirdir denir (Knox 1992).

Teorem 3.1.1.1: Sonlu bir grupta bir *k*-nacci dizisi basit periyodiktir (Knox 1992).

Teorem 3.1.1.2: $n \ge 3$ olmak üzere $\left\langle x, y : x^n = y^2 = e, yx = x^{-1}y \right\rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubunda $P_k\left(D_n; x, y\right) = P\left(D_n; y, x\right) = 2k + 2$ dir (Knox 1992).

Tanım 3.1.1.3: Eğer bir grup i tane eleman tarafından geriliyorsa bu gruba i gerenli grup denir.

Teorem 3.1.1.3: G, 2-gerenli bir grup ve G' nin birim elemanı $F_2(G;x,y)$ ya da $F_2(G;y,x)$ Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G abelyendir (Knox 1992).

İspat: Genelliği bozmadan G' nin $F_2(G;x,y)$ Fibonacci dizisini düşünelim ve n doğal sayısı için G' nin birim elemanının bu dizinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin n. elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x, y, \cdots, s, e \cdots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Yalnız s^{-1}, $(n-1)$. pozisyon için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer şekilde, s^2 dizisinin $(n-2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizinin $(n-3)$. pozisyonunda olur. Bu şekilde devam ederek,

$$x, y, \cdots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \cdots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2} = -u_{i-1} + u_i$ bağıntısı kullanılarak s' nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif işaretli tamsayılardan bir Fibonacci dizisi oluşturulur. Böylece, grubun bir Fibonacci dizisi aşağıdaki iki forma sahip olur:

(i). n tek ise, dizi,

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \cdots s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_n} = x, s^{-u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1}+u_{n-2}} = s^{u_n}$$

olduğundan $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

(ii). n çift ise, dizi,

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \cdots s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{-u_n} = x, s^{u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{-u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) $s^{-u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} = s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n}$$

olduğu için $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde grup abelyendir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım,

$$A = \left\langle x, y : x^9 = y^2 = e, xy = yx \right\rangle$$

abelyen grubunu göz önüne alalım. Bu grubun Fibonacci dizileri,

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y\ ,$$

$$x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy \cdots$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3, x^5y, x^8y, x^4, x^3y, x^7y, x, x^8y, y, x^8,$$

$$x^8y, x^7y, x^6, x^4y, xy, x^5, x^6y, x^2y, x^8, xy, y, x, xy \cdots$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 3.1.1.1: 2-nacci dizilenebilir bir grup devirlidir (Knox 1992).

İspat: G, 2-nacci dizilenebilir bir grup olsun. Bu takdirde, G grubu ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. G, 2-gerenli bir grup ise e, G ' nin 2-nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi, G ' nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G ' nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde bulunur ve bu yüzden, G ' nin bütün elemanları, sadece bir s elemanının terimleri ile takdim edilir (s nin üsleri ile). O halde, G grubu 1-gerenlidir ya da devirlidir.

Genel olarak $k \geq 3$ için k -nacci dizilenebilir gruplar abelyen değildir. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı, k -nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 3.1.1.4: *G* grubu 2-gerenli bir grup olmak üzere *G'* nin birim elemanı bu grubun bir Fibonacci dizisinde görülürse, dizinin $x_i = e$ olacak şekilde x_i elemanlarının indislerinin bir koleksiyonunun aritmetik bir dizilişi olan bir dizi ihtiva eder (Knox 1992).

İspat: $G = \langle x, y \rangle$ abelyen olduğundan dizinin $n.$ terimi $x^{u_{n-1}} y^{n_n}$ şeklinde olur. Wall' ın [49] daki çalışmasında, $u_n \equiv 0 \pmod m$ olan terimlerin basit aritmetik dizilişteki indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ veya $y, y, y^2, y^3, \cdots, y^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikisi de indisleri aritmetik dizilişte olan pozisyonda olan e 'yi ihtiva eder. e ' nin ortaya çıkışının periyodu x ve y nin mertebelerine bağlıdır. $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots$ de e ' nin ortaya çıkışının bu periyodu e ' nin $x, x, x^2, \cdots, x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \cdots, y^{u_n}$ deki periyotlarının en küçük ortak katı olur. Bu durumda e ' nin $x, y, xy, xy^2, x^2y^3, \cdots$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliş ihtiva eden alt indisler olacaktır.

k-nacci dizilenebilir bir grubun bir homomorfik görüntüsü de *k*-nacci dizilenebilirdir. *k*-nacci dizilenebilir bir grubun, bir *k*-nacci dizilenebilir bir grup tarafından genişlemesinin *k*-nacci dizilenebilir olması gerekmez. *k*-nacci dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının *k*-nacci dizilenebilir olması gerekmez. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, yx = xy \rangle$$

abelyen grubu ele alındığında, bu grubun $\langle x\rangle$ ve $\langle y\rangle$ devirli gruplarının direkt çarpımı olduğu görülür.

$\langle x\rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2\left(\langle x\rangle; e, x\right) = e, x, x, x^2, x^3, x^5, x^8, x^4, x^3, x^7, x, x^8, e, x^8, x^8, x^7, x^6, x^2, x^8, x, e, x, x, \cdots$$

ve $\langle y\rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2\left(\langle y\rangle; e, y\right) = e, y, y, e\cdots$$

şeklindedir ve iki grup da 2-nacci dizilenebilirdir fakat bu grupların direkt çarpımı 2-nacci dizilenebilir değildir (Knox 1992).

Tanım 3.1.1.4: $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right) \in X$ üreteç j-lisi için m uzunluğundaki $\bar{F}_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$ esas k-nacci dizisi; $b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, \cdots, b_{j-1} = x_{j-1}$ başlangıç elemanlarıyla $\theta \in \operatorname{Aut} G$ ve $m \geq 1$,

$$b_0 = b_m\theta, b_1 = b_{m+1}\theta, b_2 = b_{m+2}\theta, \cdots, b_{k-1} = b_{m+k-1}\theta$$

olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olmak üzere

$$b_n = \begin{cases} b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} & j \leq n < k, \\ b_{n-k} b_{n-k+1} \cdots b_{n-1} & n \geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Deveci ve Karaduman, 2011).

[10]' da Deveci ve Karaduman, $\bar{F}_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$ dizisinin periyodunu $BP_k(G; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1})$ ile göstermiştir.

3.2. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

Tanım 3.2.1: Sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots,$ elemanlarının bir dizisidir ve dizinin her bir elemanı verilen $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ve

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 x_2 \cdots \left(x_{n-1}\right)^2, & j \le n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots \left(x_{n-1}\right)^2, & n \ge k \end{cases}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanır (Deveci ve Karaduman, 2015).

Teorem 3.2.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizileri periyodiktir (Deveci ve Karaduman, 2015).

İspat: *G*, sonlu bir grup olsun. $|G|$, *G* grubunun mertebesini göstersin. *G* grubunun $|G|^k$ tane farklı sıralı k-lısı olduğundan bu sıralı k-lılardan en az bir tanesinin grubun genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisinde iki defa görüleceği açıktır. Sıralı k-lılar tekrar ettiğinden dolayı genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizileri periyodiktir denir.

$Q_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizisinin periyodu $PerQ_k(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ ile gösterilsin. Tanımdan sonlu bir grupta olan genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisinin periyodunun üreteç kümesine ve $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişeceği açıktır. Ayrıca $hP_k(m)$' nin C_m devirli grubunun genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisinin periyodu olduğu aşikardır (Deveci ve Karaduman, 2015).

Tanım 3.2.2: *G*, sonlu bir grup olmak üzere *G*' nin her elemanı, *G*' nin elemanlarından meydana gelen bir genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisinde ortaya çıkıyorsa *G'* ye, genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizilendirilebilir denir.

Genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizilendirilebilir grupların direk çarpımlarının da genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizilendirilebilir olması gerekmez. Örneğin;

$$\left\langle x, y : x^2 = y^2 = e, xy = yx \right\rangle$$

D_2 four grubunu düşünürsek bu grubun Pell dizileri;

$$Q_2(D_2; x, y) = x, y, x, y, \cdots,$$

$$Q_2(D_2; y, x) = y, x, y, x, \cdots,$$

olup xy elemanı yukarıdaki dizilerin hiçbirinde ortaya çıkmadığından D_2 four grubunun genelleştirilmiş 2-mertebeden dizilendirilebilir olmadığı görülür. Fakat,

$$Q_2(C_2; e, x) = e, x, e, x, \cdots,$$

$$Q_2(C_2; e, y) = e, y, e, y, \cdots,$$

olduğundan $D_2 = C_2 \times C_2$ olup, C_2' nin genelleştirilmiş 2-mertebeden dizilendirilebilir olduğu açıktır (Deveci ve Karaduman, 2015).

3.3. Binary Polyhedral Gruplarda *k*-nacci Dizileri

Teorem 3.3.1: G_2, $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ takdimiyle verilen bir grup olsun. $G_2 = \langle 2, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu için *k*-nacci dizisinin periyodu

$$P_k\left(G_2; x, y, z\right) = \begin{cases} 3, & k = 2 \\ 2k+2, & k \geq 3 \end{cases}$$

şeklindedir (Deveci *et. al*. 2011).

Teorem 3.3.2: $n > 2$ olmak üzere $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilen $G_n = \langle n, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu için *k*-nacci dizisinin periyodu $2k+2$ dir (Deveci *et. al*. 2011).

Teorem 3.3.3: $n>2$ olmak üzere $\langle x,y,z: x^2=y^n=z^2=xyz\rangle$ şeklinde takdim edilen $\langle 2,n,2\rangle$ binary polyhedral grubu için *k*-nacci dizisinin periyodu $2k+2$ dir (Deveci et. al. 2011).

Teorem 3.3.4: $n>2$ olmak üzere $\langle x,y,z: x^2=y^2=z^n=xyz\rangle$ takdimiyle verilen $G_n=\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grubu için *k*-nacci dizilerinin periyotları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

İlk olarak bu grubun $n>2$ olmak üzere $\langle x,y,z: x^2=y^2=(xy)^n\rangle$ takdimiyle verilen 2-gerenli durumu ele alınsın. 2-gerenli durumda hem x,y hem de y,x başlangıç elemanlarına göre bu gruptaki *k*-nacci dizilerinin periyodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n;x,y)=P_2(G_n;y,x)=6$

ii. $P_{3,4}(G_n;x,y)=P_{3,4}(G_n;y,x)=\begin{cases} n(k+1) \;, & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}.$

iii. $k\geq 5$ olsun.

1. Eğer n ‘ nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3,k-2]$ aralığında değil ise periyot aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n;x,y)=P_k(G_n;y,x)=\begin{cases} n(k+1) \;, & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}.$$

2. $[3,k-2]$ aralığında, n ’ nin çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı α ise aşağıdaki durumlar elde edilir:

i’. $j\in N$ için $\alpha.3^j\notin[3,k-2]$ ise

$$P_k\left(G_n;x,y\right)=P_k\left(G_n;y,x\right)=\begin{cases}\alpha\left(n\left(k+1\right)\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ \alpha\left(2n\left(k+1\right)\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

ii'. $\left[3,k-2\right]$ aralığındaki en büyük tek sayı β olsun. $j\in N$ için $\beta=\alpha.3^j$ ise

$$P_k\left(G_n;x,y\right)=P_k\left(G_n;y,x\right)=\begin{cases}\beta\left(n\left(k+1\right)\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ \beta\left(2n\left(k+1\right)\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

Şimdi grubun $n>2$ olmak üzere $\left\langle x,y,z:x^2=y^2=z^2=xyz=e\right\rangle$ şeklinde takdim edilen 3-gerenli durumu ele alınsın. x,y,z başlangıç elemanlarıyla bu gruptaki *k*-nacci dizisinin periyodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur :

i. $P_2\left(G_n;x,y,z\right)=6$

ii. $P_{3,4}\left(G_n;x,y,z\right)=\begin{cases}n\left(k+1\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ 2n\left(k+1\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}.$

iii. $k\geq 5$ olsun.

1. $\left[3,k-2\right]$ aralığında n ' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri yoksa

$$P_k\left(G_n;x,y,z\right)=\begin{cases}n\left(k+1\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ 2n\left(k+1\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

2. $\left[3,k-2\right]$ aralığında, n ' nin çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı α ise aşağıdaki durumlar elde edilir:

i'. $j\in N$ için $\alpha.3^j\notin\left[3,k-2\right]$ ise

$$P_k\left(G_n;x,y,z\right)=\begin{cases}\alpha\left(n\left(k+1\right)\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ \alpha\left(2n\left(k+1\right)\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

ii'. $\left[3,k-2\right]$ aralığındaki en büyük tek sayı β olsun. $j\in N$ için $\beta=\alpha.3^j$ ise

$$P_k\left(G_n;x,y,z\right)=\begin{cases}\beta\left(n\left(k+1\right)\right) \ , & n \text{ çift ise}\\ \beta\left(2n\left(k+1\right)\right), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olur.

z,x,y başlangıç elemanlarıyla bu gruptaki *k*-nacci dizisinin periyodu ise $2k+2$ olur (Deveci et. al. 2011).

3.4. Dihedral Grupta Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

Teorem 3.4.1: $n\geq 2$ olmak üzere $D_n=\left\langle x,y \middle| x^n=y^2=\left(xy\right)^2=e\right\rangle$ olsun.

i. *k*=2,4 olsun. $PerQ_2(D_n;x,y)=hP_k(2)$ dir.

$$\textbf{ii. } PerQ_3(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(hP_3(2)\right) & n\equiv 0 (\text{mod}4),\\ n\left(hP_3(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}4),\\ 2n\left(hP_3(2)\right) & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

iii. $k\geq 5$ olsun.

1. $\left[3,k-2\right]$ aralığında n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri yoksa periyot aşağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}4),\\ n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}4),\\ 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

dir.

2. $\left[3,k-2\right]$ aralığında n' nin çarpanlarından en büyük tek tamsayı olanı η ise aşağıdaki iki alt durum söz konusudur:

(2.1). $j\in N$ için, $\eta 3^i\notin\left[3,k-2\right]$ ise

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\eta\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}\,4),\\ \eta n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}\,4),\\ \eta 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

şeklindedir.

(2.2). $\left[3,k-2\right]$ aralığındaki en büyük tek sayı μ olsun. $j\in N$ için $\mu=\eta 3^i$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\mu\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 0(\text{mod}\,4),\\ \mu n\left(hP_k(2)\right) & n\equiv 2(\text{mod}\,4),\\ \mu 2n\left(hP_k(2)\right) & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

(Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat:

i. $k=2$ için elde edilen dizi,

$$x,y,x,y,\cdots$$

şeklindedir ve bu dizinin periyodu $hP_2(2)=2$ dir. $k=4$ için ise, periyodu $hP_4(2)=7$ olan

$$x,y,x,xy,y,e,e,x,y,xy,\cdots$$

dizi elde edilir.

ii. $hP_3(2)=7$ dir. Eğer $k=3$ olursa dizi,

$$x_0=x,x_1=y,x_2=x,\cdots$$

$$x_{14}=(xy)^8x,x_{15}=(xy)^7x,x_{16}=(xy)^4x,\cdots$$

$$x_{28}=(xy)^{16}x,x_{29}=(xy)^{15}x,x_{30}=(xy)^8x,\cdots$$

$$x_{2i\cdot 7}=(xy)^{8i}x,x_{2i\cdot 7+1}=(xy)^{8i-1}x,x_{2i\cdot 7+2}=(xy)^{4i}x,\cdots$$

şeklindedir. Dizinin periyodunu bulmak için $4i=nv$ $(v\in N)$ özelliğini sağlayan en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i=\dfrac{n}{4}$ olup,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2.\frac{n}{4}.7=\frac{n}{2}.7=\frac{n}{2}(hP_3(2))$$

olur.

$n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i=\dfrac{n}{2}$ olup,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2.\frac{n}{2}.7=n.7=n(hP_3(2))$$

olur.

$n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ veya $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ ise $i=n$ olup,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2.n.7=2n(hP_3(2))$$

elde edilir.

iii. $k\geq 5$ için dizi,

$$x_0=x,x_1=y,x_2=x,x_3=xy,x_4=y,x_5=x,\cdots$$

$$x_{2i.hP_k(2)-k+2}=(yx)^{4i},x_{2i.hP_k(2)-k+3}=(yx)^{\varepsilon_1 4i},x_{2i.hP_k(2)-k+4}=(yx)^{\varepsilon_2 4i},\cdots$$

$$x_{2i.hP_k(2)-1}=(yx)^{\varepsilon_{k-3}4i},x_{2i.hP_k(2)}=(yx)^{\tau}x,x_{2i.hP_k(2)+1}=(yx)^{\tau-1}x,\cdots$$

şeklinde meydana gelmektedir. Burada $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-3}\in N$ dır. Bu dizinin periyodunu belirlemek için $4i=nw\ (w\in N)$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer t, n' nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan tek tamsayı değil ise aşağıdaki şu üç durum söz konusudur:

(1.1). $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, $n|\tau$ ise $1\leq l\leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l}=e$$

ve $i=\dfrac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=2.\frac{n}{4}hP_k(2)=\frac{n}{2}hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.2). $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1\leq l\leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = \frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{2} hP_k(2) = nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.3). $n \equiv 1(\text{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

2. $[3, k-2]$ aralığında *n*' nin çarpanlarından en büyük tek tamsayı olanı η ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(2.1). Eğer $\eta^{3^j} \notin [3, k-2]$ ise $j \in N$ için üç durum ortaya çıkar;

(2.1.1). $n \equiv 0(\text{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l} = e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=2\eta\frac{n}{4}hP_k(2)=\eta\frac{n}{2}hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.2). $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l}=e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=2\eta\frac{n}{2}hP_k(2)=\eta nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.3). $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l}=e$$

ve $i=n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\eta 2nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2). $[3,k-2]$ aralığında en büyük tek tamsayı μ olsun. $j\in N$ için $\mu=\eta.3^i$ ise aşağıdaki üç durum söz konusudur:

(2.2.1). $n\equiv 0(\bmod 4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l}=e$$

ve $i=\mu\dfrac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=2\mu\frac{n}{4}hP_k(2)=\mu\frac{n}{2}hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2.2). $n\equiv 2(\bmod 4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l}=e$$

ve $i=\mu\dfrac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)}=x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1}=y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n;x,y)=2\mu\frac{n}{2}hP_k(2)=\mu nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2.3). $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \leq l \leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-l} = e$$

ve $i = \mu n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \mu 2nhP_k(2)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. *m* Modülüne Göre Genelleştirilmiş Pell *p*-Dizileri

$\left\{P_p^{(p)}(n)\right\}$ genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi *m* modülüne göre indirgenerek

$$\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}=\left\{P_p^{(p,m)}(1),P_p^{(p,m)}(2),\cdots,P_p^{(p,m)}(p),P_p^{(p,m)}(p+1)\cdots,P_p^{(p,m)}(i),\cdots\right\}$$

şeklindeki indirgemeli dizi elde edilir. Burada $P_p^{(p,m)}(i)=P_p^{(p)}(i)\ (\operatorname{mod} m)$ olup bu dizi (2.4) deki dizi ile aynı indirgeme bağıntısına sahiptir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.1.1: $\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}$ basit periyodik bir dizidir.

İspat: $W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{p+1})\,\middle|\, 0\le x_i\le m-1\right\}$ olsun. $s(W)=m^{p+1}$ olup her $j\ge 0$ için $P_p^{(p,m)}(i+p+1)\equiv P_p^{(p,m)}(j+p+1)$,

$$P_p^{(p,m)}(i+p)\equiv P_p^{(p,m)}(j+p),\cdots,P_p^{(p,m)}(i+1)\equiv P_p^{(p,m)}(j+1)$$

olacak şekilde bir $i\ge j$ sayısı vardır.

$$P_p^{(i)}(n)=2P_p^{(i)}(n-1)+P_p^{(i)}(n-p-1)$$

eşitliğinden

$$P_p^{(p,m)}(i)\equiv P_p^{(p,m)}(j),P_p^{(p,m)}(i-1)\equiv P_p^{(p,m)}(j-1),\cdots,P_p^{(p,m)}(i-j+1)\equiv P_p^{(p,m)}(1)$$

olduğu kolayca görülür. Buradan $\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}$ dizisinin basit periyodik olduğu sonucuna ulaşırız.

$\left\{P_p^{(p,m)}(n)\right\}$ dizisinin en küçük periyodu $h_p^p(m)$ ile gösterilir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

k bir asal sayı olmak üzere, $\langle A\rangle_{k^u} = \left\{ A^i \left(\bmod k^u \right) \middle| i \geq 0 \right\}$ kümesini göz önüne alalım. $A^n = G_n$ ve $\det G_n = (-1)^{n+1}$ olduğundan bu küme devirli bir grup olur. $\langle A\rangle_{k^u}$ devirli grubunun mertebesini $\left|\langle A\rangle_{k^u}\right|$ ile gösterirsek, (2.5) den $h_p^p\left(k^u\right) = \left|\langle A\rangle_{k^u}\right|$ olduğu görülmektedir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Örnek 4.1.1: $P_2^{(2,3)}(n) = \{0,0,1,2,1,0,2,2,1,1,1,0,1,\cdots\}$ olup $h_2^2(3) = 13$ olarak elde edilir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.1.2: *u*, bir asal sayı ve *t* de $h_p^p(u) = h_p^p\left(u^t\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olmak üzere her $\alpha \geq t$ için $h_p^p\left(u^\alpha\right) = u^{\alpha - t} \cdot h_p^p(u)$ olur (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: n pozitif bir tamsayı olsun. $A^{h_p^p\left(u^{n+1}\right)} \equiv I\left(\bmod u^{n+1}\right)$ olduğundan $A^{h_p^p\left(u^{n+1}\right)} \equiv I\left(\bmod u^n\right)$ olur ki, buradan $h_p^p\left(u^n\right)$' nin $h_p^p\left(u^{n+1}\right)$' yi böldüğü sonucunu elde ederiz. Diğer taraftan $A^{h_p^p\left(u^n\right)} = I + \left(a_{ij}^{(n)} \cdot u^n\right)$ olarak yazarsak,

$$A^{h_p^p\left(u^n\right)\cdot u} = \left(I + \left(a_{ij}^{(n)} \cdot u^n\right)\right)^u = \sum_{i=0}^{u} \binom{u}{i} \left(a_{ij}^{(n)} \cdot u^n\right)^i \equiv I\left(\bmod u^{n+1}\right)$$

ifadesini elde ederiz ki bu da $h_p^p\left(u^{n+1}\right)$' nin $h_p^p\left(u^n\right) \cdot u$' yu böldüğünü gösterir. Sonuç olarak ya $h_p^p\left(u^{n+1}\right) = h_p^p\left(u^n\right)$ ya da $h_p^p\left(u^{n+1}\right) = h_p^p\left(u^n\right) \cdot u$ dır. $h_p^p\left(u^{n+1}\right) = h_p^p\left(u^n\right) \cdot u$ durumu ancak ve ancak *u* tarafından bölünemeyen bir $a_{ij}^{(n)}$' nin varlığı ile mümkündür. $h_p^p\left(u^t\right) \neq h_p^p\left(u^{t+1}\right)$ olduğundan *u* tarafından bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Böylece $h_p^p\left(u^{t+1}\right) \neq h_p^p\left(u^{t+2}\right)$ olarak elde edilir ve *t* üzerinden tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

u_i ler birbirinden farklı asal sayılar ise $m = \prod_{i=1}^{t} u_i^{k_i}$ $,(t \geq 1)$ ise

$$h_p^p(m) = Icm\left[h_p^p\left(u_i^{k_i}\right)\right]$$

dır (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

4.2.Gruplarda Genelleştirilmiş Pell *p*-Dizileri

G, *j*-gerenli bir grup ve X de, $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right) \in X$ olacak şekilde $\underbrace{G \times G \times G \times \cdots \times G}_{j}$ kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer G grubu $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ elemanları tarafından üretilir ise $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right)$ ifadesine G ' nin bir geren *j*-lisi denir.

Her bir $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right) \in X$ geren *j*-lisi, $Aut\,G$ kümesinin elemanlarının etkisi altında X ' in farklı elemanları $|Aut\,G|$ ile gösterilir. Böylece G grubu için birbirine izomorf olmayan

$$d_j(G) = |X| / |Aut\,G| \;(|X|, X \text{ in eleman sayısıdır.})$$

tane geren *j*-lisi vardır (Deveci ve Karaduman, 2011).

Tanım 4.2.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi $(p \geq 2)$, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarından oluşan bir dizidir. Bu dizideki her bir eleman, verilen $x_0, \cdots, x_{j-1}$, $(p+1 \geq j)$ başlangıç elemanları ve

$$x_n = \begin{cases} x_0\left(x_{n-1}\right)^2, & j \leq n < p+1, \\ x_{n-p-1}\left(x_{n-1}\right)^2, & n \geq p+1 \end{cases}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile elde edilir.

Burada grubun $x_0, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları tarafından gerilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinin grubun yapısını yansıttığı söylenebilir.

$x_0,\cdots,x_{j-1}$ elemanları ile gerilen bir gruptaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi $Q^{(p)}(G;x_0,x_1,\cdots,x_{j-1})$ ile gösterilir.

Özel olarak, $C=\langle x\rangle$ devirli grubundaki genelleştirilmiş bir Pell *p*-dizisi $(p\geq 2)$,

$$x_0=e,x_1=e,\cdots,x_{p-1}=e,x_p=x$$

başlangıç elemanlarıyla $n\geq 1$ için

$$x_{n+p}=x_{n-1}(x_{n+p-1})^2$$

şeklinde tanımlanır (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.2.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş bir Pell *p*-dizisi basit periyodiktir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: *G* grubunun mertebesi *n* olsun. G ' nin elemanlarının n^{p+1} tane farklı (*p*+1)- tiplisi mevcut olduğundan, bu (*p*+1)-tiplilerden en az bir tanesi G grubunun genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinde iki defa görüleceği açıktır. Bu tekrardan dolayı genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi periyodiktir. Genelleştirilmiş Pell *p*-dizisi periyodik olduğundan

$$x_{u+1}=x_{v+1},x_{u+2}=x_{v+2},\cdots,x_{u+p+1}=x_{v+p+1}$$

bağıntılarını sağlayan $u>v$ olacak şekilde *u* ve *v* doğal sayıları mevcuttur.

Genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinin tanımındaki indirgeme bağıtısından

$$x_u=\left(x_{u+p+1}\right)\cdot\left(x_{u+p}\right)^{-2} \text{ ve } x_v=\left(x_{v+p+1}\right)\cdot\left(x_{v+p}\right)^{-2}$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $x_u=x_v$ olup bu şekilde işleme devam edilirse

$$x_{u-v}=x_{v-v}=x_0,x_{u-v+1}=x_{v-v+1}=x_1,\cdots,x_{u-v+p}=x_{v-v+p}=x_p$$

şeklindeki bağıntılara ulaşılmaktadır ki, bu da genelleştirilmiş Pell *p*-dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ genelleştirilmiş Pell p-dizisinin periyodu $PerQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ ile gösterilir.

Konsepti ayrıntılı şekilde ele almak için G ' nin $\operatorname{Aut} G$ kümesinin, genelleştirilmiş Pell p-dizisi üzerinde etkisi incelenmelidir.

$\operatorname{Aut} G$, $\theta : G \to G$ olacak şekilde bütün izomorfizmlerin kümesi ve $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right) \in X$ olduğundan $\left(x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{j-1}\theta\right) \in X$ olacağı açıktır.

$A \subseteq G$ ve $\theta \in \operatorname{Aut} G$ için θ altında A ' nın görüntüsü

$$A\theta = \{a\theta : a \in A\}$$

şeklinde olur (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Lemma 4.2.1: $\left(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\right) \in X$ ve $\theta \in \operatorname{Aut} G$ olmak üzere

$$\left(Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})\right)\theta = Q^{(p)}(G; x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{j-1}\theta)$$

olur (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: $Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) = \{a_i\}$ olsun.

$$\{a_i\}\theta = \{a_i\theta\}$$

ve

$$a_{i+p}\theta = \left(a_{i-1}\left(a_{i+p-1}\right)^2\right) = a_{i-1}\theta a_{i+p-1}\theta a_{i+p-1}\theta$$

olup sonuç açıktır.

$\operatorname{Aut} G$ kümesinin ω tane elemanının $Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizisini kendi üzerine götürdüğünü varsayalım. Bu durumda $\theta \in \operatorname{Aut} G$ için $\left|\operatorname{Aut} G\right| / \omega$ tane farklı

$Q^{(p)}(G; x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{j-1}\theta)$ genelleştirilmiş Pell p-dizisi vardır (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Tanım 4.2.2: $p \geq 2$ ve $p+1 \geq j$ olmak üzere, $(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) \in X$ j-lisi için m esas periyotlu $\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ esas genelleştirilmiş Pell p-dizisi, verilen $a_0 = x_0, a_1 = x_1, a_2 = x_2, \cdots, a_{j-1} = x_{j-1}$ başlangıç değerleri ile

$$a_n = \begin{cases} a_0 \left(a_{n-1}\right)^2 & j \leq n < p+1, \\ a_{n-p-1}\left(a_{n-1}\right)^2 & n \geq p+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ grup elemanlarının bir dizisidir.

Burada $m \geq 1$, $\theta \in \operatorname{Aut} G$ için $a_0 = a_m\theta, a_1 = a_{m+1}\theta, a_2 = a_{m+2}\theta, \cdots, a_p = a_{m+p}\theta$ olacak şekilde en küçük tamsayıdır.

G, j-gerenli bir grup ve $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+j-1}$ elemanları G grubunu üretttiği için θ otomorfizmi tek şekilde belirlenir. $\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ esas genelleştirilmiş Pell p-dizisi m elemandan oluşan sonlu bir dizidir.

$\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ esas genelleştirilmiş Pell p-dizisinin periyodu $BQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ ile gösterilecektir.

Sonlu bir G grubundaki $Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ ve $\bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizilerinin tanımlarından açık olarak görülür ki bu dizilerin periyodları seçilen geren kümesine ve bu kümenin elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.2.2: G, bir sonlu grup ve $(x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) \in X$ olmak üzere $PerQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) = n$ ve $BQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) = m$ ise m, n' yi böler ve $\operatorname{Aut} G$ ‘nin $Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizisini kendi üzerine götüren n/m tane elemanı vardır (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: $\theta \in \operatorname{Aut} G$ otomorfizminin mertebesi α olsun. Bu durumda,

$$Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) = \bar{Q}^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})(G) \cup Q^{(p)}(G; x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{j-1}\theta)(G) \cup$$

$$\cup Q^{(p)}(G; x_0\theta^2, x_1\theta^2, \cdots, x_{j-1}\theta^2)(G) \cup \cdots$$

ve

$$BQ^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}) = BQ^{(p)}(G; x_0\theta, x_1\theta, \cdots, x_{j-1}\theta)$$

olduğundan $n = m \cdot \alpha$ eşitliğini elde ederiz. Böylece $1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{\alpha-1}$ dönüşümlerinin $Q^{(p)}(G; x_0, x_1, \cdots, x_{j-1})$ dizisini kendi üzerine götürdüğü sonucuna ulaşılır. Buradan $\alpha = n/m$ elde edilir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.2.3: $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ takdimiyle verilen $G_n = \langle n, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubundaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin ve esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $PerQ^{(2)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} 3n, & n \text{ çift ise,} \\ 6n, & n \text{ tek ise} \end{cases}$ ve $BQ^{(2)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} 3n, & n \text{ çift ise,} \\ 3n, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$

ii. $PerQ^{(3)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(3)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} 4n, & n \text{ çift ise,} \\ 8n, & n \text{ tek ise} \end{cases}.$

iii. $p \geq 4$ olsun.

1. Eğer $[3, p-1]$ aralığında n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri yoksa periyot aşağıdaki gibidir;

$$PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n(p+1), & n \text{ çift ise,} \\ 2n(p+1), & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

2. Eğer t, n' nin $[3, p-1]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $t \cdot 3^j \notin [3, p-1]$ ise periyot aşağıdaki gibidir;

$$PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} t(n(p+1)), & n \text{ çift ise}, \\ t(2n(p+1)), & n \text{ tek ise}. \end{cases}$$

ii'. Eğer s, $[3, p-1]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $s = t \cdot 3^j$ ise periyot aşağıdaki gibidir;

$$PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} s(n(p+1)), & n \text{ çift ise}, \\ s(2n(p+1)), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

(Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: Grubun takdimine göre $|x| = 2n$, $|y| = 4$ ve $|z| = 4$ dir.

i. $Q^{(2)}(G_n; x, y, z)$ dizisi

$$x, y, z, x^{n+1}, yx^2, z^3, x, yx^4, z, x^{n+1}, yx^6, z^3, x, yx^8, z, \cdots$$

şeklinde olup dizinin terimleri aşağıdaki formda yazılabilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = x^{n+1}, x_4 = yx^2, x_5 = z^3,$$

$$x_6 = x, x_7 = yx^4, x_8 = z, x_9 = x^{n+1}, x_{10} = yx^6, x_{11} = z^3, \cdots,$$

$$x_{6i} = x, x_{6i+1} = yx^{4i}, x_{6i+2} = z, x_{6i+3} = x^{n+1}, x_{6i+4} = yx^{2+4i}, x_{6i+5} = z, \cdots.$$

Buradan kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunu belirlemek için $4i = 2nv$ $(v \in \mathbb{N})$ eşitliğini sağlayan en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olup dizideki terimler arasında $x\theta = x$, $y\theta = y$ ve $z\theta = z$ eşitliklerini sağlayan ve x^n elemanıyla eşlenik θ, iç otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(2)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(2)}(G_n; x, y, z) = 3n$$

olur.

Eğer n tek ise $n=i$ olup dizideki terimler arasında $x\theta = x^{n+1}$, $y\theta = y$ ve $z\theta = z^{-1}$ olacak şekilde ikinci dereceden θ, dış otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(2)}\left(G_n;x,y,z\right)=6n \text{ ve } BQ^{(2)}\left(G_n;x,y,z\right)=3n$$

elde edilir.

ii. $Q^{(3)}\left(G_n;x,y,z\right)$ dizisi,

$$x,y,z,x^{n+1},x^3,yx^6,z^3,x,x^5,yx^{16},z,x^{n+1},x^7,yx^{30},z^3,x,x^9,yx^{48},z,x^{n+1},\cdots$$

şeklinde olup dizinin terimleri aşağıdaki formda yazılabilir:

$$x_0=x,x_1=y,x_2=z,x_3=x^{n+1},x_4=x^3,x_5=yx^6,x_6=z^3,x_7=x,$$

$$x_8=x^5,x_9=yx^{16},x_{10}=z,x_{11}=x^{n+1},x_{12}=x^7,x_{13}=yx^{30},x_{14}=z^3,x_{18}=x,\cdots,$$

$$x_{8i}=x^{4i+1},x_{8i+1}=yx^{8i^2+8i},x_{8i+2}=z,x_{8i+3}=x^{n+1},$$

$$x_{8i+4}=x^{3+4i},x_{8i+5}=yx^{8i^2+16i+6},x_{8i+6}=z^3,x_{8i+7}=x,\cdots.$$

Buradan kolaylıkla görülür ki, dizinin periyodunu belirlemek için $4i=2nv\ (v\in \mathrm{N})$ eşitliğini sağlayan en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

Eğer n çift ise $i=\dfrac{n}{2}$ olup buradan $PerQ^{(3)}\left(G_n;x,y,z\right)=4n$ elde edilir.

Eğer n tek ise $n=i$ olup buradan $PerQ^{(3)}\left(G_n;x,y,z\right)=8n$ elde edilir.

Ayrıca dizinin terimleri arasında θ, birim dönüşümü tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(3)}\left(G_n;x,y,z\right)=BQ^{(3)}\left(G_n;x,y,z\right)$$

elde edilir.

iii. Eğer $p \geq 4$ ise $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2p-4} \in \mathrm{N}$ olmak üzere $Q^{(p)}(G_n; x, y, z)$ dizisi aşağıdaki formdadır:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = x^{n+1}, x_4 = x^3, x_5 = x^7, \cdots, x_p = x^{2^{p-2}-1}\left(x_\alpha = x^{2^{\alpha-2}-1}, 4 \leq \alpha \leq p\right), \cdots,$$

$$x_{(2p+2)i} = x^{\lambda_1 4i+1}, x_{(2p+2)i+1} = yx^{\lambda_2 4i}, x_{(2p+2)i+2} = z, x_{(2p+2)i+3} = x^{n+1}, x_{(2p+2)i+4} = x^{4i+3},$$

$$x_{(2p+2)i+5} = x^{\lambda_3 4i+7}, \cdots, x_{(2p+2)i+p+1} = x^{\lambda_{p-2} 4i+2^{p-1}-1}\left(x_{(2p+2)i+\alpha} = x^{\lambda_{\alpha-2} 4i+2^{\alpha-2}-1}, 5 \leq \alpha \leq p+1\right),$$

$$x_{(2p+2)i+p+2} = yx^{\lambda_p 4i+2}, x_{(2p+2)i+p+3} = z^3, x_{(2p+2)i+p+4} = x, x_{(2p+2)i+p+5} = x^{4i+1}$$

$$x_{(2p+2)i+p+6} = x^{\lambda_{p+1} 4i+1}, \cdots, x_{(2p+2)i+2p+1} = x^{\lambda_{2p-4} 4i+1}, \cdots.$$

Burada dizinin periyodunu belirlemek için $4i = 2nv$ $(v \in \mathrm{N})$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekmektedir.

1. Eğer $[3, p-1]$ aralığında, n' nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri yoksa iki durum söz konusudur:

1. Durum: Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ dir. Böylece $PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = n(p+1)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer n tek ise $i = n$ dir. Böylece $PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = 2n(p+1)$ olur.

2. Eğer t, $[3, p-1]$ aralığında n' nin çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise iki durum söz konusudur:

i'. Eğer $j \in \mathrm{N}$ için $t \cdot 3^j \notin [3, p-1]$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer n çift ise $i = t \cdot \frac{n}{2}$ dir. Böylece

$$PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = t(n(p+1))$$

olur.

2. Durum: Eğer *n* tek ise $i = t \cdot n$ dir. Böylece

$$PerQ^{(p)}\left(G_n; x, y, z\right) = t\left(2n\left(p+1\right)\right)$$

olur.

ii'. Eğer *s*, $\left[3, p-1\right]$ aralığındaki tek sayıların en büyük olanı ve $j \in \mathrm{N}$ için $s = t \cdot 3^j$ ise iki alt durum ortaya çıkar:

1. Durum: Eğer *n* çift ise $i = s \cdot \frac{n}{2}$ dir. Böylece $PerQ^{(p)}\left(G_n; x, y, z\right) = s\left(n\left(p+1\right)\right)$ elde edilir.

2. Durum: Eğer *n* tek ise $i = s \cdot n$ dir. Böylece $PerQ^{(p)}\left(G_n; x, y, z\right) = s\left(2n\left(p+1\right)\right)$ elde edilir.

Ayrıca dizinin terimleri arasında birim dönüşüm tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(p)}\left(G_n; x, y, z\right) = BQ^{(p)}\left(G_n; x, y, z\right)$$

elde edilir (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.2.4: Eğer G_n, $\left\langle y, z : y^n = z^2 = \left(yz\right)^2 \right\rangle$ şeklinde takdim edilen bir grup ise bu gruptaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotları için aşağıda verilen durumlar söz konusudur:

i. $PerQ^{(2)}\left(G_n; y, z\right) = \begin{cases} 3n, & n \text{ çift ise,} \\ 6n, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$

ii. $p \geq 3$ olsun.

1. Eğer $\left[3, p\right]$ aralığında n' nin tek tamsayı çarpanlarından hiçbiri yok ise

$$PerQ^{(p)}\left(G_n; y, z\right) = \begin{cases} n\left(p+1\right), & n \text{ çift ise} \\ 2n\left(p+1\right), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

2. Eğer t, $[3,p]$ aralığında n' nin çarpanlarından en büyük tek tamsayı olanı ise aşağıdaki iki alt durum ortaya çıkar:

i'. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $t \cdot 3^j \notin [3,p]$ ise periyot

$$PerQ^{(p)}(G_n; y,z) = \begin{cases} t(n(p+1)), & n \text{ çift ise,} \\ t(2n(p+1)), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

ii'. Eğer s, $[3,p]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $s = t \cdot 3^j$ ise periyot

$$PerQ^{(p)}(G_n; y,z) = \begin{cases} s(n(p+1)), & n \text{ çift ise,} \\ s(2n(p+1)), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Ayrıca, $p \geq 2$ için

$$BQ^{(p)}(G_n; y,z) = \begin{cases} \dfrac{PerQ^{(p)}(G_n; y,z)}{2}, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ PerQ^{(p)}(G_n; y,z), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

G_n grubu, $\langle x,y,z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilir ise bu gruptaki genelleştirilmiş Pell p-dizilerinin periyotları aşağıdaki gibidir:

$$PerQ^{(p)}(G_n; x,y,z) = \begin{cases} n(p+1), & n \text{ çift ise,} \\ 2n(p+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$BQ^{(p)}(G_n; x,y,z) = \begin{cases} n(p+1), & n \text{ çift ise,} \\ n(p+1), & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

(Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: İlk olarak 2 gerenli durumu ele alalım. Burada $|y| = 2n$, $|z| = 4$ ve $|yz| = 4$ dir. $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2p-2}$ ve $i \in \mathrm{N}$ olmak üzere $Q^{(2)}(G_n; y, z)$ ve $Q^{(p)}(G_n; y, z)$ $(p > 2)$ dizileri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$x_0 = x, x_1 = z, x_2 = y^{n+1}, x_3 = y^3, x_4 = zy^6, x_5 = y, x_6 = y^5, \cdots,$$

$$x_{6i} = y^{4i+1}, x_{6i+1} = zy^{8i^2+8i}, x_{6i+2} = y^{n+1}, x_{6i+3} = y^{4i+3}, x_{6i+4} = zy^{8i^2-2}, x_{6i+5} = y, \cdots$$

ve

$$x_0 = y, x_1 = z, x_2 = y^{n+1}, x_3 = y^3, \cdots, x_{p+1} = y^{2^p-1}\left(x_\alpha = y^{2^{\alpha-1}-1}, 3 \le \alpha \le p+1\right),$$

$$x_{p+2} = zy^{2^{p+1}-2}, x_{p+3} = y, x_{p+4} = y^5, \cdots, x_{2p+1} = y^{2^{p-1}\cdot(p-2)+1}\left(x_{p+3+\beta} = y^{2^{\beta+1}\cdot\beta+1}, 1 \le \beta \le p-2\right), \cdots,$$

$$x_{(2p+2)i} = y^{\lambda_1 4i+1}, x_{(2p+2)i+1} = zy^{\lambda_2 4i}, x_{(2p+2)i+2} = y^{n+1}, x_{(2p+2)i+3} = y^{4i+3},$$

$$x_{(2p+2)i+4} = y^{\lambda_3 4i+7}, \cdots, x_{(2p+2)i+p+1} = y^{\lambda_p 4i+\left(2^p-1\right)}, \left(x_{(2p+2)i+\alpha} = y^{\lambda_{\alpha-1} 4i+\left(2^{\alpha-1}-1\right)}, 4 \le \alpha \le p+1\right),$$

$$x_{(2p+2)i+p+2} = zy^{\lambda_{p+1} 4i+\left(2^{p+1}-2\right)}, x_{(2p+2)i+p+3} = y, x_{(2p+2)i+p+4} = y^{4i+5}, x_{(2p+2)i+p+5} = y^{\lambda_{p+2} 4i+17}, \cdots,$$

$$x_{(2p+2)i+2p+1} = y^{\lambda_{2p-2} 4i+\left(2^{p-1}(p-2)+1\right)}\left(x_{(2p+2)i+p+4+\beta} = y^{\lambda_{p+\beta+1} 4i+\left(2^{\beta+1}\cdot\beta+1\right)}, 1 \le \beta \le p-3\right), \cdots.$$

$n \equiv 2(\bmod 4)$ ise dizideki terimler arasında $y\theta = y^{-1}$ ve $z\theta = z^{-1}$ eşitliklerini sağlayan ikinci dereceden θ dış otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$BQ^{(p)}(G_n; y, z) = \frac{PerQ^{(p)}(G_n; y, z)}{2}$$

elde edilir.

$n \neq 2 \pmod 4$ olduğunda ise dizinin terimleri arasında birim dönüşüm tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(p)}(G_n; y, z) = BQ^{(p)}(G_n; y, z)$$

olur.

Şimdi bu grubun 3-gerenli durumu ele alalım. Burada $|x| = 4$, $|y| = 2n$ ve $|z| = 4$ dir. $i \in \mathrm{N}$ için $Q^{(2)}(G_n; x, y, z)$ ve $Q^{(p)}(G_n; x, y, z)$ $(p > 2)$ dizileri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, \cdots,$$

$$x_{6i-3} = x^3, x_{6i-2} = y^{n+1}, x_{6i-1} = xy^{4i-1},$$

$$x_{6i} = x, x_{6i+1} = y, x_{6i+2} = xy^{4i+1}, \cdots$$

ve

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = x^3, \cdots, x_p = x^3, x_{p+1} = x^3, x_{p+2} = y^{n+1}, x_{p+3} = xy^3, x_{p+4} = x, \cdots, x_{2p+1} = x, \cdots,$$

$$x_{(2p+2)i-(p+1)} = x^3, x_{(2p+2)i-p} = y^{n+1}, x_{(2p+2)i-p+1} = xy^{4i-1}, x_{(2p+2)i-p+2} = x, \cdots, x_{(2p+2)i-1} = x,$$

$$x_{(2p+2)i} = x, x_{(2p+2)i+1} = y, x_{(2p+2)i+2} = z, x_{(2p+2)i+3} = x^3, \cdots, x_{(2p+2)i+p} = x^3, \cdots.$$

n çift ise dizinin terimleri arasında birim dönüşüm tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(p)}(G_n; x, y, z) = BQ^{(p)}(G_n; x, y, z)$$

elde edilir.

n tek olduğunda ise dizideki terimler arasında $x\theta = x^{-1}$, $y\theta = y^{n+1}$ ve $z\theta = z^{-1}$ eşitliklerini sağlayan ikinci dereceden θ dış otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$BQ^{(p)}(G_n;x,y,z)=\frac{PerQ^{(p)}(G_n;x,y,z)}{2}$$

olur (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

Teorem 4.2.5: Eğer G_n grubu, $\langle y,z : y^2 = z^n = (yz)^2 \rangle$ şeklinde takdim edilir ise bu guruptaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotları aşağıdaki gibidir:

$$PerQ^{(p)}(G_n;y,z)=\begin{cases} n(p+1), & n\,\text{çift ise} \\ 2n(p+1), & n\,\text{tek ise} \end{cases}$$

ve

$$BQ^{(p)}(G_n;y,z)=\begin{cases} \dfrac{PerQ^{(p)}(G_n;y,z)}{2}, & n\equiv 2(\operatorname{mod}4), \\ PerQ^{(p)}(G_n;y,z) & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Eğer G_n grubu, $\langle x,y,z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$ şeklinde takdim edilirse periyodu aşağıdaki gibidir:

$$PerQ^{(p)}(G_n;x,y,z)=\begin{cases} n(p+1), & n \text{ çift ise} \\ 2n(p+1), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$BQ^{(p)}(G_n;x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{PerQ^{(p)}(G_n;x,y,z)}{2}, & n\,\text{tek ve } p=2 \text{ ise} \\ PerQ^{(p)}(G_n;x,y,z), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

İspat: İlk olarak 2-gerenli durumu ele alalım. Burada $|y|=4$, $|z|=2n$ ve $|yz|=4$ dir. $n\equiv 2(\operatorname{mod}4)$ olduğunda dizideki terimler arasında $y\theta = y^{-1}$ ve $z\theta = z^{n+1}$ eşitliklerini sağlayan ikinci dereceden θ dış otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$BQ^{(p)}(G_n;y,z)=\frac{PerQ^{(p)}(G_n;y,z)}{2}$$

elde edilir.

$n\neq 2(\text{mod}\,4)$ olduğunda ise dizinin terimleri arasında birim dönüşüm tanımlı olduğundan

$$PerQ^{(p)}(G_n;y,z)=BQ^{(p)}(G_n;y,z)$$

olur.

G_n grubunun 3-gerenli durumu ele alınırsa $|x|=4$, $|y|=4$ ve $|z|=2n$ dir. n tek ise dizideki terimler arasında $x\theta=x$, $y\theta=y^{-1}$ ve $z\theta=z^{n+1}$ eşitliklerini sağlayan ikinci dereceden θ dış otomorfizmi tanımlı olduğundan

$$BQ^{(2)}(G_n;x,y,z)=\frac{PerQ^{(2)}(G_n;x,y,z)}{2}$$

elde edilir.

Diğer durumlarda ise dizinin terimleri arasında birim dönüşüm tanımlı olduğundan

$$BQ^{(p)}(G_n;x,y,z)=PerQ^{(p)}(G_n;x,y,z)$$

olur (Deveci, Akdeniz ve Karaduman, 2015).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak, genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri m modülüne göre indirgenmiş ve indirgenen dizinin basit periyodik olduğu gösterilerek, farklı m tamsayı değerleri için periyotların belirlenmesi noktasında çeşitli formüller elde edilmiştir.

Daha sonra, genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri gruplara taşınmış ve bu anlamda bu diziler *p*' nin farklı değerleri için grup elemanları yardımıyla yeniden tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin gruplardaki karşılıklarının sonlu gruplardaki durumları ele alınmış ve bu dizilerin sonlu gruplarda basit periyodik oldukları gösterilmiştir. Bunun yanı sıra gruplarda genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotlarının daha kolay yoldan sistematik bir şekilde belirlenmesi için grup elemanları ve otomorfizm kavramı kullanılarak esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizileri tanımlanmış ve bu diziler sonlu gruplarda incelenmiştir.

Son olarak, elde edilen sonuçların uygulaması olarak, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral gruplarındaki esas genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotları kullanılarak, bu gruplardaki genelleştirilmiş Pell *p*-dizilerinin periyotları belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1]. Aydın H. and Dikici R., 1998, ‘’General Fibonacci sequences in finite groups’’, The Fibonacci Quart.,36 (3), 216-221.

[2]. Bosma W. and Kraaikamp C., 1990, ‘’Metrical theory for optimal continued fractions’’, J. Number Theory, 34 (3), 251-270.

[3]. Becker P. G., 1994, ‘’*k*-regular power series and Mahler-type functional equations’’, J. Number Theory, 49 (3), 269-286.

[4]. Campbell C.M., Campbell P. P., 2005, ’’The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups’’, J. Appl. Math. Comput., 19, 231-240.

[5]. Campbell C.M., Doostie H. and Robertson E. F., 1990, ‘’Fibonacci length of generating pairs in groups in Applications of Fibonacci Numbers’’, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, 27-35.

[6]. Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., 1972, ‘’Generator and relations for discrete groups’’, 3 rd edition, Springer, Berlin.

[7]. Deveci Ö., Akdeniz M. and Karaduman E., 2015, ‘’The generalized Pell p-sequences in groups’’, Ars Comb., 120, 383-401.

[8]. Deveci Ö., ‘’The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups’’, Util. Math., to appear.

[9]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2012, ‘’The generalized order-k Lucas sequences in Finite groups’’, J. Appl. Math., 464580-1-464580-15.

[10]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2011, ‘’On the basic k-nacci sequences in finite groups’’, Discrete Dyn. Nat. Soc., 639476-1-639476-13.

[11]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2012, ‘’The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices’’, Linear Algebra and Its Appl.,437 (10), 2538-2545.

[12]. Deveci Ö., Karaduman E. and Campbell C. M., 2011, ‘’On The k-nacci sequences in finite binary polyhedral groups’’, Algebra Colloq.,18 (Spec 1), 945-954.

[13]. Deveci Ö. and Karaduman E., 2015, ‘’The Pell sequences in finite groups’’, Util. Math., 96: 263-276.

[14]. Doostie H. and Hashemi M., 2006, ‘’Fibonacci lengths involving the Wall number *k(n)’’*, J. Appl. Math. Comput.20, 171-180.

[15]. Doostie H., and Campbell, P.P., 2006, ‘’On the commutator lengths of certain classes of finitely presented groups’’, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 74981, Pages 1-9, DOI 10.1155/IJMMS/2006/74981.

[16]. Dummit, D.S. and Foote ,R.M., 2004. Abstract Algebra. 3nd edition(John Wiley &Sons,Inc.).

[17]. Everest G., Poorten A. Vander, Shparlinski I., T. Word, 2003, “ Recurrence Sequences” , Amerikan Mathematical Society.

[18]. El Naschie M.S., 2005, ‘’Deriving the essential features of standard model from the general theory of relativity’’, Chaos, Solitons and Fractals, 26, 1-6.

[19]. El Naschie M.S., 2005, ’’Stability analysis of two-slit experiment’’, Chaos, Solitons and Fractals, 24, 941-946.

[20]. Ercalano J., 1979, "Matrix Generators of Pell Sequences", Fibonacci Quart., 17 (1), 71-77.

[21]. Falcon S. and Plaza A., 2009, ‘’*k*-Fibonacci sequences modulo m’’, Chaos, Solitons and Fractals, 41, 497-504.

[22]. Fraenkel A.S. and Klein S. T., 1996, ‘’Robutst universal complete codes for transmission and compression’’, Discrete Appl. Math., 64, 31-55.

[23]. Gogin N.D. and Myllari A.A., 2007, ‘’The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices’’, Programing and Computer Software, published in Programmirovanie, 33(2), 74-79.

[24]. Hall P., 1936, ‘’The Eulerian Functions of a Group’’, Quart. J. Math., 7 (1), 134-151.

[25]. Horadam A.F., 1971, "Pell Identities", Fibonacci Quart, 9 (3), 245-252.

[26]. Hossenberg R., 1985, The matrix *Q*, Mathematical Gems 3. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 106-107.

[27]. Johnson, D.L., 1997. Presentations of Groups, 2^{nd} edition, London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press**,** Cambridge.

[28]. Kalman D., 1982, ‘’Generalized Fibonacci numbers by matrix methods’’, The Fibonacci Quart., 20 (1), 73-76.

[29]. Kaluge G. R., 2010/2011, ‘’Penggunaan Fibonacci dan Josephus problem dalam algoritma enkripsi transposisi+substitusi’’, Makalah IF 3058 Kriptografi-Sem. II Tahun.

[30]. Kılıç E. and Taşcı D., 2010, "On the generalized Fibonacci and Pell sequences by Hessenberg matrices", Ars Combinatoria, 94, 161-174.

[31]. Kılıç E., 2009, The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums, Chaos, Solitons and Fractals, 40 (4), 2047-2063.

[32]. Kılıç E. and Taşçı D., 2006, The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers, Taiwanese J. Math., 10(6), 1661-1670.

[33]. Kirchoof B.K., Rutishauser R., 1990, ‘’the phyllotavy of costus (costaceae)’’, Bot Gazette, 151 (1), 88-105.

[34]. Knox S.W., 1992, "Fibonacci sequences in finite groups", The Fibonacci Quart., 30 (2), 116-120.

[35]. Lü K. and Wang J., 2007, *‘’k*-step Fibonacci sequence modulo *m’’*, Util. Math.,71,169-178.

[36]. Mandelbaum D. M., 1972, ‘’Synchronization of codes by means of Kautz’s Fibonacci encoding’’, IEEE Transactions on Information Theory,18 (2) , 281-285.

[37]. Mac Lane, S. and Birkhoff, G., 1993, Algebra, 3rd ed. New York: Chelsea.

[38]. Özkan E., Aydın H. and Dikici R., 2003, ‘’3-step Fibonacci series modulo *m’’*, Appl. Math. Comput, 143 (1), 165-172.

[39]. Pinch R.E.G., 1991, ‘’Recurrent sequences modulo prime Powers, In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III’’, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester December.

[40]. Silvester J. R., 1979, ‘’Fibonacci proporties by matrix methods’’, Mathematical Gazette, 63, 188-191.

[41]. Shannon A.G. and Horadam A.F., 2004, ‘’Generalized Pell numbers and polinomials’’, Applications of Fibonacci Numbers, 213-224.

[42]. Spinadel V.W., 1999, ‘’The family of metallic means’’, Vis Math., 1 (3), 721-745.

[43]. Spinadel V.W., 2002, ‘’The metallic means family and forbidden symmetries’’, Int. Math. J., 2 (3), 279-288.

[44]. Stakhov A.P. and Rozin B., 2006, ‘’Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p- numbers’’, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 1014-1025.

[45]. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. and Massingua V., 1999, ‘’Introduction in to Fibonacci coding and cryptography’’, Kharkov, Osnova.

[46]. Syein W., 1993, ‘’Modelling the evolution of Stelar archictecture in Vascular plants’’, Int. J. Plant Sci., 154 (2), 229-263.

[47]. Taşçı D. and Kılıç E., 2006, ‘’On the order-& generalized Lucas numbers’’, Appl. Math. Comput. 20, 171-180.

[48]. Vajda S., 1989, ‘’Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden sectioni theory and applications’’, New York, John Wiley&Sons.

[49]. Wall D. D.,1960, ‘’Fibonacci series modulo m’’, Amer. Math. Monthly, 67, 525-532.

[50]. Wilcox H.J., 1986, ‘’Fibonacci sequences of period *n* in groups’’, Fibonacci Quart., 24, 356-361.

[51]. Yılmaz F. and Bozkurt D., 2009, ‘’The generalized order-k Jacobsthal numbers’’, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4 (34), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve AKDENİZ

Doğum Yeri : SAMSUN

Doğum Tarihi : 01/03/1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Samsun Milli Piyango Anadolu Lisesi (2001-2005)

Lisans : Atatürk Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi /Matematik Bölümü (2005-2010)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi /Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Milli Eğitim Bakanlığı 2012-2015

Yayınları: Deveci Ö., Akdeniz M. and Karaduman E., 2015, ‘’The generelized Pell p-sequences in groups’’, Ars Comb., 120, 383-401.