T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BEZOUT MATRİSLERİ YARDIMIYLA DEVİRLİ GRUPLARIN ELDE EDİLMESİ

ÖZGÜR ERDAĞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ÖMÜR DEVECİ

ARALIK-2015
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BEZOUT MATRİSLERİ YARDIMIYLA DEVİRLİ GRUPLARIN ELDE EDİLMESİ

ÖZGÜR ERDAĞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ÖMÜR DEVECİ

ARALIK-2015
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Özgür ERDAĞ'ın Doç.Dr. Ömür DEVECİ'nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı " Bezout Matrisleri Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi" adlı bu çalışma, yapılan Tez Savunması Sınavı sonunda Jüri tarafından lisanüstü eğitim yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

17/12/2015

Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan : Doç. Dr. Ömür DEVECİ	....
Üye : Yrd.Doç.Dr. Güventürk UĞURLU	....
Üye :Yrd.Doç.Dr. Abdullah ÇAĞMAN	....

Bu Tezin Kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../........../............ gün ve ..../.......... Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Özgür ERDAĞ

Kars-2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında Bezout matrisleri yardımıyla devirli grupların elde edilmesi ve elde edilen devirli grupların mertebelerinin belirlenmesi üzerinde duruldu.

Çalışmanın 2. bölümünde, Bezout matrisleri ve üzerinde çalışılacak matematiksel yapılarla ilgili temel kavramlar tanıtıldı. Buna ek olarak 2. ve 3. bölümlerde kuramsal olarak tezdeki bulgulara esas teşkil etmesi bakımından çeşitli yollardan elde edilen bazı özel tanımlı matrisler yardımıyla üretilen devirli gruplar ve indirgemeli diziler hakkında geniş bir şekilde bilgi verildi.

Çalışmanın 4. bölümünde ise, k- basamak Fibonacci, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları kullanılarak Bezout matrisleri tanımlandı. Tanımlanan Bezout matrislerinin m-modülüne göre indirgenmeleri suretiyle bu matrisler üreteç olarak seçilerek devirli gruplar elde edildi. Son olarak farklı m değerleri için devirli grupların mertebelerinin belirlenmesi noktasında çeşitli formüller verildi.

2015, 92 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bezout Matrisleri, Devirli Grup, k-basamak Fibonacci Dizisi, Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell Dizisi, Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal Dizisi, m-modülü.

ABSTRACT

In this thesis study, we focused on obtaining the cyclic groups by the aid of the Bezout matrices and determing the orders of the defined cyclic groups.

In the 2nd section of study, the basic definition about the Bezout matrices and mathematical structures that to be studied on have been introduced. Additionally, at 2nd and 3rd sections, there have been broad information about the cyclic group produced with the aid of the obtained some custom-defined matrices in various ways and the recurrence sequences in terms of being essential in the finding of this thesis as theoretical.

In the 4th section of study, the Bezout matrices have been defined by using characteristic polinomials of the k-step Fibonacci, the Generalized order-k Pell and the Generalized order-k Jacobsthal sequences. The cyclic groups have been obtained from the defined Bezout matrices such that these matrices are chosen as generators by reducing their elements according to modulo m.

Finally, the various formulas have been given in terms of determining orders of the cyclic groups for the different m values.

2015, 92 Pages

Keywords: Bezout matrices, Cyclic Group, The k-step Fibonacci Sequence, The Generalized order-k Pell Sequence, The Generalized order-k Jacobsthal Sequence, modulo m.

SİMGELER DİZİNİ

e	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
G	Grup
$\lvert G\rvert$	Grubun mertebesi
$G=\langle A\rangle$	A tarafından üretilen grup
G/H	G nin H a göre bölüm grubu
$H\leq G$	H, G nin alt grubu
$H\lhd G$	H, G nin normal alt grubu
$AutG$	G nin otomorfizm grup
$\langle G,+,.\rangle$	Halka
$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$	$m\times n$ boyutlu matris
$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$	$n\times n$ boyutlu kare matris
A^T	A matrisinin transpozu
I_n	$n\times n$ mertebeden birim matris
E	Elementer matris
$\det A$	A matrisinin determinantı

$\mathbb{F}_2^N$	$\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde bir N boyutlu vektör uzayı
V_n	Grup cebiri
$S_r^{(N)}$	$\mathbb{F}_2^N$ de $r.$ Hamming küre
$K_r^{(N)}(x)$	N mertebeli $r.$ Krawtchouck polinomu
$(M_N)_{ij}$	N mertebeli MacWilliams matrisi
$D_r^{(N)}(x)$	N mertebeli $r.$ ayrık Chebyshev polinomu
$(D_N)_{ij}$	N mertebeli Chebyshev matrisi
Δ^n	$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ olarak tanımlanan fark operatörünün $n.$ kuvveti
$\mu(n)$	Möbius fonksiyonu
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nin m ye göre modülü
$h_k(m)$	$f(k,m)$ nin en küçük periyodu
$FH_3(n)$	3-basamak Fibonacci Hurwitz sayıları
$PH_3(n)$	3-basamak Pell Hurwitz sayıları
$JH_3(n)$	3-basamak Jacobsthal Hurwitz sayıları
$\{R(n)\}$	Redheffer dizisi
$R(G)_A$	Redheffer orbiti

$LR(G)_A$	$R(G)_A$ Redheffer orbitinin periyodunun uzunluğu
$\overline{R(G)_A}$	Esas Redheffer orbiti
$BLR(G)_A$	$\overline{R(G)_A}$ esas Redheffer orbitinin periyodik uzunluğunu
$P_k^F(x)$	k -basamak Fibonacci dizisi
$P_k^P(x)$	Genelleştirilmiş $k.$ mertebeden Pell dizisi
$P_k^J(x)$	Genelleştirilmiş k -mertebeden Jacobsthal dizisi
$B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)$	$P_k^F(x)$ polinomu için Bezout matrisi
$B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)$	$P_k^P(x)$ polinomu için Bezout matrisi
$B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)$	$P_k^J(x)$ polinomu için Bezout matrisi

1.GİRİŞ

Verilen bir matrisin kuvvetlerinin m-modülüne göre indirgenmesi sonucu devirli grupların üretilmesi, ilk olarak Lü ve Wang tarafından yapılan [41]'daki çalışmalarında karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada, genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin kuvvetleri m-modülüne göre indirgenerek devirli gruplar üretilmiş ve farklı m değerleri için elde edilen devirli grupların mertebelerinin belirlenmesi noktasında çeşitli formüller verilmiştir.

Sonraki süreçte yapılan çalışmalarda konsept çeşitli özel tanımlı matrislere genişletilmiştir. Bu çalışmalara örnek olarak [11,12,14,15,16,17,19,20,21,22,50]'de k-basamak Fibonacci, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları yardımıyla elde edilen Bezout matrisleri kullanılarak devirli gruplar elde edilmiş ve bu devirli grupların mertebeleri incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Gruplar

Tanım 2.1.1: G boştan farklı bir küme ve $*: G \times G \to G$ bir dönüşüm olsun. $*$ a, G üzerinde bir ikili işlem denir. Her $x, y \in G$ için $*(x, y) = x * y$ olarak yazılır. Üzerinde ikili işlemin tanımlandığı kümeye cebirsel yapı adı verilir ve $(G, *)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1: En çok bilinen ikili işlem örnekleri, tamsayıların (ve reel sayıların) toplama, çıkarma ve çarpma işlemleridir [37].

Tanım 2.1.2: $(G, *)$ cebirsel bir yapı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $(G, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir:

i. $*$ ikili işlemi birleşme özelliğine sahiptir, yani;

$$\forall x, y, z \in G \text{ için } x * (y * z) = (x * y) * z$$

dir.

ii. $(G, *)$ cebirsel yapısı birim elemana sahiptir, yani;

$$\forall x \in G \text{ için } x * e = e * x = x$$

olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

iii. G kümesindeki her elemanın $*$ ikili işlemine göre tersi mevcuttur, yani;

$$\forall x \in G \text{ için } x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

olacak şekilde $x^{-1} \in G$ vardır.

Örnek 2.1.2: $M_2(\mathbb{R})$ kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir grup değildir. Ancak her $A \in M_2(\mathbb{R})$ için $\det(A) \neq 0$ ise o zaman $M_2(\mathbb{R})$ kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir grup olur [49].

Tanım 2.1.3: $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. G grubundaki $*$ ikili işlemi değişmeli ise, yani;

$$\forall x, y \in G \text{ için } \quad x*y = y*x$$

oluyorsa $(G,*)$ grubuna değişmelidir denir.

Tanım 2.1.4: $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup olsun. Eğer

$$\forall x, y, z \in G \text{ için } \quad x*(y*z) = (x*y)*z \text{ (birleşme özelliği)}$$

şartı sağlanıyor ise $(G,*)$ ye yarı grup denir.

Örnek 2.1.3: Herhangi bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ ise o zaman $(P(A),\cup)$ ve $(P(A),\cap)$ birer yarı gruptur [49].

Tanım 2.1.5: $(G,*)$ cebirsel yapısı bir yarı grup olsun. Eğer

$$\forall x \in G \text{ için } \quad x*e = e*x = x$$

olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (birim elemanın varlığı), $(G,*)$ ye monoid denir.

Örnek 2.1.4: $(\mathbb{Z}^+,\cdot)$ bir monoid olmasına karşılık, $(\mathbb{Z}^+,+)$ bir monoid değildir [49].

Teorem 2.1.1: $(G,*)$ bir grup olsun. Buna göre

i. G nin birimi tektir.

ii. G nin her elemanının tersi tektir.

iii. $a \in G$ için $a*a = a$ ise $a = e$ dir.

iv. G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani, $a, b, c \in G$ için

$$a*b=a*c \text{ ise } b=c \quad \text{(soldan kısaltma kuralı)}$$

$$b*a=c*a \text{ ise } b=c \quad \text{(sağdan kısaltma kuralı)}$$

v. $a,b\in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.

vi. $a\in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ dır [49].

Tanım 2.1.6: $(G,*)$ bir grup olmak üzere $a\in G$ elemanlarının kuvvetleri $n\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$ için;

$$a^{n}=a*a*\ldots*a \ (n \text{ tane çarpan})$$

$$a^{0}=e \ (e,\ (G,*) \text{ nin birim elemanı})$$

$$a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^{n}$$

şeklinde tanımlanır [49].

Teorem 2.1.2: $(G,*)$ bir grup, $a\in G$ ve $m,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere a nın kuvvetleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir [49]:

i. $a^{m}*a^{n}=a^{m+n}=a^{n}*a^{m}$

ii. $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}=\left(a^{n}\right)^{m}$

iii. $a^{-m}=\left(a^{m}\right)^{-1}$

iv. $e^{m}=e$.

Tanım 2.1.7: $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup ve H da G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup oluyor ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H\leq G$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.3: $(G,*)$ cebirsel yapısı bir grup ve $\varnothing \neq H \leq G$ olsun. H nin G grubunun bir alt grubu olması için gerek ve yeter şart,

i. $\forall x, y \in H$ için $x * y \in H$

ii. $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$

şartlarını sağlamasıdır.

Tanım 2.1.8: $H = \{e\}$ ve $H = G$ alt grupları daima G grubunun alt gruplarıdır. Bu alt gruplara aşikar alt gruplar denir. $H = \{e\}$ alt grubu ve G den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H, G nin bir öz alt grubu ise $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: G bir grup ve H, G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. G grubunun H yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $< H >$ ile gösterelim. Bu takdirde $< H >$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup H yı içeren en küçük alt grup olur ve H tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.10: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gH = Hg$ (toplam notasyonunda $g + H = H + g$) oluyorsa H ya, G nin normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11: G bir grup ve H, G nin normal alt grubu olsun. G/H grubuna G nin H ye göre bölüm grubu denir.

Tanım 2.1.12: $(G,*)$ ve $(H,\bullet)$ iki grup olmak üzere bir $\vartheta : G \to H$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in G$ için

$$\vartheta(x * y) = \vartheta(x) \bullet \vartheta(y)$$

şartını sağlıyorsa ϑ ye bir grup homomorfizmi (ya da kısaca homomorfizm) denir.

Tanım 2.1.13: $\vartheta : G \to H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise ϑ ye bir monomorfizm denir.

Tanım 2.1.14: $\vartheta : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise ϑ ye bir epimorfizm denir.

Tanım 2.1.15: $\vartheta : G \to H$, örten ve 1-1 bir grup homomorfizmi ise ϑ ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.16: $\vartheta : G \to G$ grup homomorfizmine endomorfizm denir.

Tanım 2.1.17: $\vartheta : G \to G$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise ϑ ye bir otomorfizm denir.

Tanım 2.1.18: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere her $x \in G$ için $I_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan

$$I_a : G \to G$$

otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesini $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $AutG$ ile gösterilir [49].

Tanım 2.1.19: G bir grup olmak üzere G nin x elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu $H = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olarak ifade edilir ve $\langle x \rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = H$$

dir. Eğer $G = \langle x \rangle$ olacak şekilde bir x elamanı varsa o zaman G grubuna x elamanı tarafından üretilen devirli grup denir.

Örnek 2.1.5: $(\mathbb{Z}_6, +)$ grubu hem 1 hem de 5 tarafından üretilen devirli gruptur. Yani, $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle$ dir.

Tanım 2.1.20: G bir grup ve $x \in G$ olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = e$ ise x elemanına sonlu mertebeye sahiptir denir. Bu eşitliği sağlayan en küçük n doğal sayısına x in mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.4: Her devirli grup değişmelidir [49].

İspat: G , $a \in G$ tarafından üretilen bir devirli grup, yani;

$$G = \langle a \rangle = \{ a^n : n \in \mathbb{Z} \}$$

olsun. Buna göre $\forall x, y \in G$ için $xy = yx$ olduğunu gösterirsek o zaman teoremi ispatlamış oluruz. $x \in G$ ise G nin tanımından $x = a^k$, $k \in \mathbb{Z}$ olarak alabiliriz. Yine benzer düşünce ile $y \in G$ ise $y = a^s$, $s \in \mathbb{Z}$ olarak alabiliriz. O halde

$$xy = a^k a^s = a^{k+s} = a^s a^k = yx$$

yazarız. Bu ise G grubunun değişmeli olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.5: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir [49].

İspat: G , $a \in G$ tarafından üretilen bir devirli grup, yani;

$$G = \langle a \rangle = \{ a^n : n \in \mathbb{Z} \}$$

şeklinde bir devirli grup ve $H \leq G$ olsun. İspatımızı iki aşamada yapalım.

i. Eğer $H = \{e\}$ ise yani, G nin birim elemanından oluşan aşikar alt grubu ise o takdirde

$$\langle e \rangle = \{ e^n : n \in \mathbb{Z} \} = \{e\} = H$$

olduğundan açık olarak H bir devirli gruptur.

ii. $H \neq \{e\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bir $a^n \in H$ vardır. Diğer taraftan m nin $a^m \in H$ olacak şekilde en küçük pozitif kuvvetli tamsayı olduğunu farzedelim. Buna göre iddia ediyoruz ki,

$$H = \langle a^m \rangle$$

dir. Bunu iki kümenin eşitliği tanımına göre kapsama şeklinde gösterirsek o zaman istenilen gösterilmiş olur.

$$\langle a^m \rangle = \left\{ \left(a^m\right)^q : q \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde a^m nin kuvvetlerinden oluşan bir küme olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $a^m \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan kapalılıkta a^m nin bütün kuvvetleri aynı zamanda H da olacağından buradan

$$\langle a^m \rangle \subseteq H$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi de $a^n \in H$ alıp $a^n \in \langle a^m \rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Bölme Algoritmasından

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

olacak şekilde bir tek q, r tamsayı çifti vardır. Buradan hareketle

$$a^n = a^{mq+r} = a^{mq} \cdot a^r = \left(a^m\right)^q \cdot a^r$$

olup buradan a^r yi çekersek

$$a^r = \left(a^m\right)^{-q} \cdot a^n$$

buluruz. Halbuki

$$a^n \in H, \; a^m \in H \text{ ve } H \leq G$$

olduğundan, dolayısı ile her şeyden önce bir grup olduğundan

$$\left(a^m\right)^{-q} \in H$$

dir. Böylece

$$\left(a^m\right)^{-q} \in H \text{ ve } a^n \in H$$

olduğundan kapalılıktan

$$\left(a^m\right)^{-q} \cdot a^n \in H$$

yazarız. Buradan $a^r \in H$ sonucunu elde ederiz. Halbuki $0 \le r < m$ olduğundan $a^r \in H$ olması a^m nin H daki en küçük pozitif kuvvetli elemanı olması ile çelişir. O halde bu $r = 0$ olması durumunda mümkündür. Böylece $n = mq$ ve

$$a^n = a^{mq} = \left(a^m\right)^q \in \left\langle a^m \right\rangle$$

olur. Bu da

$$H \subseteq \left\langle a^m \right\rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece sonuç elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.1.6: G bir grup, $a \in G$ ve a nın mertebesi n yani, $o(a) = n$ olsun. Buna göre;

i. Eğer a nın mertebesi sonsuz ise o takdirde a nın bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.

ii. Eğer a nın mertebesi sonlu ise yani, $a^n = e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı n ise o takdirde a nın ürettiği devirli grubun yani, $\langle a \rangle$ nın mertebesi de n dir.

Diğer bir deyimle,

$$\langle a \rangle = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$$

dir.

iii. a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k = a^l$ olması için gerek ve yeter şart $k \equiv l \pmod{n}$ olmasıdır.

iv. $o(a) = n$ sonlu olmak üzere $a^k = e$ olması için gerek ve yeter şart $n \mid k$ olmasıdır [49].

Sonuç 2.1.1: $G=\langle a\rangle$ sonlu devirli bir grup ve $o(G)=k<\infty$ olsun. $H\neq\{e\}$ ve $a^n\in H$ olacak şekilde $n>0$ pozitif tamsayılarının en küçüğü m olmak üzere $H=\langle a^m\rangle$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$m|k \text{ ve } o(H)=\frac{k}{m}$$

dir [49].

Uyarı 2.1.1: $G=\langle a\rangle$ sonsuz mertebeli devirli bir grup ise o takdirde a^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından $H=\langle a^m\rangle$ devir grubu da sonsuz olur [49].

Teorem 2.1.7: $G=\langle a\rangle$ ve $o(G)=n$ olan bir devirli grup olsun. O takdirde G nin a^k tarafından üretilmesi için yani, $G=\langle a^k\rangle$ olması için gerek ve yeter şart k ile n nin aralarında relatif asal yani, $(k,n)=1$ olmasıdır [49].

İspat: $\Rightarrow$ Olmayan ergi yöntemi ile ispat yapılabilir. Bir an için $(k,n)=d>1$ olduğu varsayılırsa, buradan $d|k$ ve $d|n$ ya da sırası ile $k=dt$ ve $n=dr$ yazılır. Bu durumda,

$$\left(a^k\right)^r=\left(a^{dt}\right)^r=\left(a^{dr}\right)^t=\left(a^n\right)^t=e$$

öyle ki

$$o\left(a^k\right)\leq r<n$$

dir. Bu ise a^k nın G nin bir üreteci olmadığını gösterir. Çünkü

$$G=\langle a^k\rangle$$

olsaydı o zaman $G=\langle a\rangle$ olduğundan $o(a)=n$ dolayısı ile $o\left(a^k\right)=n$ olmalıydı. Bu bir çelişkidir. Dolayısı ile eğer $G=\langle a^k\rangle$ ise o zaman $(k,n)=1$ olmalıdır.

$\Leftarrow (k,n)=1$ olsun. Buna göre $G=\langle a^k\rangle$ olduğunu gösterilmelidir.

$$G \subseteq \langle a^k \rangle$$

olduğu açıktır. Çünkü $a^k \in G$ ve G bir grup olduğundan kapalılıktan dolayı a^k nın kuvvetleri G ye aittir. Şimdi ters kapsamayı göstermek için

$$(k,n)=1 \Rightarrow ku+nv=1$$

olacak şekilde u,v tamsayıları vardır. O halde

$$a=a^{ku+nv}=a^{ku}a^{nv}$$

yazarız. Diğer taraftan $G=\langle a^k \rangle$ ve $o(G)=n$ olduğundan $o(a)=n$ dir. Böylece

$$a^{nv}=\left(a^n\right)^v=e^v=e$$

olup, buradan $a=a^{ku}$ eşitliğini elde edilir. Buna göre $a^m \in G$ ise o takdirde

$$a^m=\left(a^{ku}\right)^m=\left(a^k\right)^{um}\in\langle a^k \rangle$$

yazılır. Bu da,

$$G \subseteq \langle a^k \rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece $G=\langle a^k \rangle$ eşitliğini elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 2.1.2: Bir k tamsayısının $(\mathbb{Z}_n,+)$ grubunun bir üretici olması için gerek ve yeter şart $(k,n)=1$ olmasıdır [49].

Tanım 2.1.21: K, G nin bir alt grubu olsun. Eğer $K \cap Q=\{e\}$ ve $KQ=G$ olacak şekilde bir $Q \leq G$ alt grubu varsa, Q ya, G de, K nın bir komplementidir denir [23].

Tanım 2.1.22: *A* üzerindeki tüm kısaltılmış kelimelerin kümesi $Ser(A)$, aşağıdaki gibi tanımlanmış ikili işleme göre bir gruptur. Bu gruba *A* kümesi üzerindeki serbest grup denir [37].

i. Her $x \in Ser(A)$ için $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ dir.

ii. Her $x, y \in Ser(A) \setminus \{1\}$ için,

$$x = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}\ ,\ \ y = b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} \dots b_n^{\delta_n}$$

ise xy çarpımını tanımlarken, genelliği bozmadan, $n \geq r$ kabul edilebilir. Amaç x ve y yi yan yana yazarak bir kısaltılmış kelime oluşturmaktır. Burada $a_n^{\lambda_n} = b_1^{-\delta_1}$ ise x ile y yan yana yazılınca kısaltılmış kelime elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq k \leq r$ olmak üzere her $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ için $a_{n-i}^{\lambda_{n-i}} = b_{i+1}^{-\delta_{i+1}}$ koşulunu sağlayan en büyük k tamsayısı vardır. Eğer,

$$xy = \begin{cases} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_{n-k}^{\lambda_{n-k}} b_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots b_r^{\delta_r}\ , & k < r < n, \\ a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_{n-r}^{\lambda_{n-r}}\ , & k = r < n, \\ 1, & k = r = n \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa xy bir kısaltılmış kelime olur ve böylece, $Ser(A)$ üzerinde bir ikili işlem elde edilir.

Tanım 2.1.23: A boş olmayan bir küme, $B \subseteq Ser(A)$ ve B nin $Ser(A)$ içinde ürettiği normal alt grup, N olsun. Bu takdirde, $G = Ser(A)/N$ grubuna, $a \in A$ üreteçlerinin ve $w = e(w \in B)$ bağıntılarının belirlediği grup denir [37].

Tanım 2.1.24: X bir küme $F(x)$, X üzerinde serbest grup ve $R \leq F(x)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ a G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir. Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere, eğer bir G grubu $\langle X : R \rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [37].

Tanım 2.1.25: H ve N iki grup olmak üzere G grubunun H nin N ile grup genişlemesi olması için gerek ve yeter şart

i. G grubunun M normal alt grubu, N ile izomorftur,

ii. $G/M \cong H$ olmasıdır [42].

Tanım 2.1.26: G bir grup ve X boş olmayan bir küme olsun.

$$*: G \times X \to X$$

$$(g, x) \to g * x$$

fonksiyonu,

i. $\forall x \in X$ için $e * x = x$

ii. $\forall x \in X$ ve $g_1, g_2 \in G$ için $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona G nin X üzerine etkisi denir.

Eğer G nin X üzerine etkisi varsa, bu takdirde, G grubu X üzerine etki eder veya X, $*$ etkisi ile bir G-kümedir denir.

Boştan farklı bir H kümesi ile bu küme üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ ikili işlemlerinden oluşan cebirsel yapı $\langle H, +, \cdot \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.27: $\langle H, +, \cdot \rangle$ cebirsel yapısı verilmiş olsun. Eğer her $x, y, z \in H$ elemanları için

$$x(y+z) = (xy) + (xz)$$

ise, $\langle H, +, \cdot \rangle$ da soldan dağılma özelliği ve her $x, y, z \in H$ için

$$(x+y)z = (xz) + (yz)$$

ise, $\langle H, +, \cdot \rangle$ da sağdan dağılma özelliği vardır denir. Yani, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.1.28: $\langle H,+,\cdot\rangle$ cebirsel yapısı verilmiş olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $\langle H,+,\cdot\rangle$ cebirsel yapısına bir halka denir:

i. $\langle H,+\rangle$ değişmeli bir gruptur,

ii. $\langle H,\cdot\rangle$ birleşme özelliğine sahiptir, yani;

$$\forall x,y,z\in H \text{ için } x(yz)=(xy)z$$

dir.

iii. $\langle H,+,\cdot\rangle$ da soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

Tanım 2.1.29: H bir halka, $0\neq x\in H$ olmak üzere $xy=0$ olacak şekilde $y\neq 0$ varsa x e sol sıfır bölen ve y ye sağ sıfır bölen denir. H değişmeli bir halka ise x ve y ye sıfır bölen denir.

Tanım 2.1.30: H halkası birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halka ise H halkasına tamlık bölgesi denir.

Tanım 2.1.31: Birimli bir H halkasında $1_H\neq 0_H$ ise ve H nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, H a bir aykırı cisim denir [37].

Tanım 2.1.32: Eğer H değişmeli aykırı cisim ise, H a bir cisim denir [37].

Örnek 2.1.6: $F=\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Z}\}$ kümesini göz önüne alalım. O takdirde $(F,+,\cdot)$ birimli değişmeli bir halkadır. Toplamaya ve çarpmaya göre birim elemanları sırası ile

$$0=0+0\sqrt{3} \text{ ve } 1=1+0\sqrt{3}$$

tür. $(F,+,\cdot)$ birimli ve değişmeli halkasının cisim olduğunu göstermek için F nin sıfırdan farklı her bir elemanının F ye ait olan bir terse sahip olduğu gösterilmelidir. $a\neq 0$ ve $b\neq 0$ olmak üzere $a+b\sqrt{3}\in F$ olsun. Buna göre;

$$\left(a+b\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}\frac{\left(a-b\sqrt{3}\right)}{\left(a-b\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{a}{a^2-3b^2}+\frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}$$

yazılır. $\frac{a}{a^2-3b^2}$ ve $\frac{-b}{a^2-3b^2}$ her ikisi de rasyonel sayı olup, F kümesinin tanımından $\left(a+b\sqrt{3}\right)^{-1}\in F$ yazılır [49].

Tanım 2.1.33: R birimli ve değişmeli bir halka ve $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

şeklindeki ifadeye katsayıları R de olan x değişkenine bağlı, sabit terimi a_0 ve başkatsayısı a_n olan $n.$ dereceden polinom denir. Polinomlar genel olarak $P(x), Q(x),\ldots$ gibi sembollerle gösterilir. $P(x)$ polinomunun dercesi ise $der\left(P(x)\right)$ ile ifade edilir.

2.2. Matris Cebiri

Tanım 2.2.1: F bir cisim ve $a_{ij}\in F$ $\left(1\le i\le m,\, 1\le j\le n\right)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgen bir tabloya matris denir. m satır ve n sütundan oluşan bir matrise $m\times n$ tipinde bir matris ve a_{ij} sayılarına ise matrisin elemanları denir. $m\times n$ tipindeki matris, kısaca $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ile gösterilir. A matrisinin $i.$ satırı $r_i=\left[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right]$, $\left(1\le i\le m\right)$ ve $j.$ sütunu $s_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, $\left(1\le j\le n\right)$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.2.2: $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ve $B=(b_{ij})_{m\times n}$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşit ise bu iki matrise eşit matrisler denir. Yani, $A=B$ olması için gerek ve yeter şart $\forall i=1,2,...,m$ ve $\forall j=1,2,...,n$ için $a_{ij}=b_{ij}$ olmasıdır.

Tanım 2.2.3: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ve $B=(b_{ij})_{m\times n}$ matrisleri aynı tipten iki matris olmak üzere $A+B$ toplamı,

$$A+B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.2.4: $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F$ matrisinin bir $k\in\mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı, A matrisinin bütün elemanlarının k skaleri ile çarpımı olarak tanımlanır. Yani,

$$kA=k\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 2.2.1: A, B ve C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

i. $A+B=B+A$ (değişme özelliği)

ii. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$ (birleşme özelliği)

iii. $A+0=A$ (etkisiz eleman)

iv. $A-A=0$

v. $\lambda_1\left(A+B\right)=\lambda_1 A+\lambda_1 B$

vi. $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$

vii. $(\lambda_1\lambda_2)A=\lambda_1(\lambda_2 A)$

viii. $1.A=A$

özellikleri vardır [1].

Tanım 2.2.5: $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ve $B=(b_{ij})_{n\times p}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu iki matrisin çarpımı olan $A\cdot B=C=(c_{ij})_{m\times p}$ matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\,,\ \left(1\le i\le m,\ 1\le j\le p\right).$$

Burada A matrisinin sütun sayısı ile B matrisinin satır sayısı aynı olmalıdır.

Not 2.2.1: $C=A\cdot B$ matrisinin (i,j). elemanı; A nın i. satırı ile B nin j. sütunundaki elemanların karşılıklı çarpımlarının toplamı olarak ifade edilir.

Teorem 2.2.2: Eğer $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$ ve $C=(c_{ij})_{t\times q}$ ise, o zaman matrislerin çarpma işlemine göre birleşme (assosyatif) kuralı denilen aşağıdaki kural geçerlidir [48]:

$$A(BC)=(AB)C \tag{2.2.1}$$

İspat: İspat için matrislerin eşitliği tanımı kullanılacaktır. Buna göre eğer (2.2.1) eşitliğinin her iki tarafındaki matris çarpımlarından elde edilen matrislerin mertebelerinin ve karşılıklı elemanlarının eşit olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

Önce (2.2.1) eşitliğinin sol tarafını göz önüne alalım. $BC=D$ ve D nin genel elemanını d_{ij} ile gösterirsek, o zaman

$$BC=(b_{ij})_{n\times t}(c_{ij})_{t\times q}=(d_{ij})_{n\times q}=D$$

ve

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{t} b_{ik} c_{kj} \tag{2.2.2}$$

yazılır. Şimdi ise $A(BC) = AD = E$ ve E nin genel elemanını e_{ij} olarak alırsak, bu takdirde

$$AD = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}\left(d_{ij}\right)_{n\times q} = \left(e_{ij}\right)_{m\times q} = E \tag{2.2.3}$$

ve

$$e_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} d_{sj} \tag{2.2.4}$$

yazılır. (2.2.2) ifadesinden

$$d_{sj} = \sum_{k=1}^{t} b_{sk} c_{kj} \tag{2.2.5}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. (2.2.5) ifadesini (2.2.4) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{k=1}^{t} b_{sk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{t} \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(b_{sk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{t} \sum_{s=1}^{n} \left(a_{is} b_{sk} \right) c_{kj} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin sağ tarafını göz önüne alalım. $AB = F$ ve F nin genel elemanına f_{ij} dersek, o zaman

$$AB = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}\left(b_{ij}\right)_{n\times t} = \left(f_{ij}\right)_{m\times t} = F$$

ve

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{t} a_{is} b_{sj} \tag{2.2.7}$$

yazılır. Bu defa da $(AB)C = FC = G$ ve G nin genel elemanına g_{ij} olarak dersek, o zaman da

$$(AB)C = FC = \left(f_{ij}\right)_{m\times t}\left(c_{ij}\right)_{t\times q} = \left(g_{ij}\right)_{m\times q} = G \tag{2.2.8}$$

ve

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{t} f_{ik}c_{kj} \tag{2.2.9}$$

yazılır. (2.2.7) ifadesinden

$$f_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} \tag{2.2.10}$$

yazmak mümkündür. (2.2.10) ifadesini (2.2.9) da yerine yazarsak

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}\right)c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{t}\sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sk}\right)c_{kj} \tag{2.2.11}$$

elde edilir. Böylece (2.2.3) ve (2.2.8) ifadesinden E ve G matrislerinin mertebelerinin eşit olduğu, (2.2.6) ve (2.2.11) den E ve G nin karşılıklı elemanlarının eşit olduğu sonucu ortaya çıkar. Yani, $E = G$ olur. Bu ise (2.2.1) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.3:

i. $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times t}$ ve $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times t}$ olmak üzere, sol dağılma kuralı denilen

$$A\left(B + C\right) = AB + AC$$

kuralı geçerlidir.

ii. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{t\times m}$ ve $C=\left(c_{ij}\right)_{t\times m}$ olmak üzere, sağ dağılma kuralı denilen

$$\left(B+C\right)A=BA+CA$$

kuralı geçerlidir [48].

Tanım 2.2.6: Bir $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise, A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir. Yani, $A^T=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}^T=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$ dir. Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin transpozu,

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisidir.

Tanım 2.2.7: Bir matrisin tüm elemanları sıfır ise, bu matrise sıfır matris denir.

Tanım 2.2.8: Bir matrisin satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise kare matris denir. Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinde kare bir matristir.

Tanım 2.2.9: $A=\left(a_{ij}\right)$, $n\times n$ tipinde bir kare matris ise $a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa bu matrise köşegen matris denir. Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi köşegen matristir.

Tanım 2.2.10: Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn} = k$ ise matrise skaler matris denir. Eğer asal köşegen üzerindeki bütün elemanlar eşit ve bir ise bu matrise birim matris denir.

Tanım 2.2.11: $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $\forall i, j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine simetrik matris denir. Başka bir ifade $A^T = A$ ise A matrisi simetrik ve $A^T = -A$ ise A matrisi ters simetrik matristir. Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi simetrik matris ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 8 \\ -3 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ise ters simetrik bir matristir.

Tanım 2.2.12: $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ bir kare matris ve I , $n\times n$ birim matris olmak üzere,

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi varsa, o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.4: Bir kare matrisin tersi varsa tekdir [48].

İspat: Bir A kare matrisin B ve C gibi iki tane tersinin olduğunu varsayalım. Bu durumda ters matrisin tanımından dolayı A matrisinin tersi B ise,

$$AB = BA = I \tag{2.2.12}$$

ve eğer A matrisinin tersi C ise,

$$AC = CA = I \tag{2.2.13}$$

yazılır. Eğer $B = C$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunu için (2.2.12) ve (2.2.13) ifadelerini ve matrislerin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini göz önüne alarak

$$B = I,\ B = (CA)B = C(AB) = C,\ I = C$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.13: A matrisi terse sahip olan bir matris ise A matrisine tekil olmayan veya ters çevrilebilir matris denir. Eğer A matrisi bir terse sahip değilse, o zaman A matrisine tekil veya ters çevrilemez matris denir.

Teorem 2.2.5: Eğer A ve B ters çevrilebilir iki matris ise, o zaman AB çarpımı da ters çevrilebilirdir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir [48].

İspat: Eğer A ve B matrisleri ters çevrilebilir matrisler ise, o takdirde ters matris tanımından

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ ve } BB^{-1} = B^{-1}B = I$$

yazılır. Diğer taraftan matris çarpımının birleşme özelliğini kullanarak

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I \text{ ve } \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$$

yazılır. Böylece bunları birleştirerek

$$\left(AB\right)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=\left(B^{-1}A^{-1}\right)\left(AB\right)=I$$

yazmak mümkündür. Bu son ifade ise ters matris tanımı gereğince AB matrisinin tersinin $B^{-1}A^{-1}$ olduğunu ifade eder. Böylece AB ters çevrilebilirdir ve bu invers tek olduğundan

$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.14: A sıfır olmayan bir $n\times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere

$$AB=0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B, $n\times n$ tipinde bir kare matris varsa, o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir $n\times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere

$$CA=0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir C, $n\times n$ tipinde bir kare matris varsa, o zaman da A matrisine sağ sıfır bölen matrisi denir. Eğer A matrisi hem sol sıfır bölen matrisi hem de sağ sıfır bölen matrisi ise, o takdirde A matrisine sadece sıfır bölen matris denir [48].

Teorem 2.2.6: A sıfır olmayan bir kare matris olmak üzere eğer A nın tersi mevcut ise, o takdirde A matrisi bir sıfır bölen matrisi değildir [48].

İspat: Eğer $AB=0$ ya da $CA=0$ ve A matrisinin tersi A^{-1} ise, o takdirde

$$A^{-1}\left(AB\right)=\left(A^{-1}A\right)B=IB=B=0$$

veya

$$\left(CA\right)A^{-1}=C\left(A^{-1}A\right)=CI=B=0$$

yazılır. Bu ise A matrisi bir sıfır bölen matrisi olmadığını gösterir.

Tanım 2.2.15: Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır denir:

i. İlk k tane satır sıfırdan farklı ve $(k+1)$. satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

ii. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir ve bu 1 ler $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ olacak şekilde s_j. sütunda bulunurlar.

iii. Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij} = 1$ ise j. sütundaki a_{ij} nin altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Yukarıdaki (iii) koşulu "a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır" şeklinde alınırsa, (i)-(ii) koşullarını sağlayan matrise satırca indirgenmiş eşolon formdadır denir. Satır yerine sütunlar alınarak sütunca indirgenmiş form ve sütunca indirgenmiş eşolon form elde edilir [1].

Tanım 2.2.16: I , $n \times n$ bir birim matris olmak üzere I dan sadece bir elementer satır işlemi ile elde edilen bir $n \times n$ matrise bir elementer matris denir ve E ile gösterilir [48].

Teorem 2.2.7:

i. Eğer B, $m \times n$ matrisi; bir elementer satır işleminin uygulanması ile A $m \times n$ matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde B matrisi A matrisi ile bu elementer satır işlemlerine karşılık gelen $m \times m$ elementer matrisin çarpımına eşittir. Yani, eğer ε ile elementer satır işlemi gösterilirse, o zaman

$$B = \varepsilon(A) = \varepsilon(I_m)A$$

dır.

ii. Her elementer matris ters çevrilebilirdir. Üstelik her elementer matrisin tersi de yine bir elementer matristir [48].

Tanım 2.2.17: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. a_{ij} elemanının bulunduğu satırın ve sütunun silinmesi ile elde edilen kalan matrisin determinantına minör denir ve M_{ij} ile gösterilir.

Tanım 2.2.18: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisindeki herhangi bir a_{ij} elemanının minörü olan M_{ij} nin $\left(-1\right)^{i+j}$ ile çarpılmasıyla elde edilen değere a_{ij} elemanının kofaktörü denir ve A_{ij} ile gösterilir, yani;

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

dir.

Tanım 2.2.19: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi 1×1 tipinde ise determinantı kendisine eşittir. Eğer $n\geq 2$ için $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı, $1\leq i\leq n$ olmak üzere,

$$\det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadeye $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisinin $i.$ satıra göre açılımı denir. Benzer olarak $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisinin determinantı bir sütun kofaktörüne göre de hesaplanabilir.

Teorem 2.2.8: A bir $n\times n$ kare matris olsun. Buna göre

i. Eğer A matrisinin iki satırı eşit ise, o zaman $\det A=0$ dır,

ii. Eğer A matrisi bir sıfır satırına sahipse, o zaman $\det A=0$ dır [48].

İspat:

i. A matrisinin iki satırının eşit olduğunu farzedelim. B matrisi eşit satırların yer değiştirilmesi ile A dan elde edilen bir matris olsun. Bu durumda $\det B=-\det A$ yazılabilir. Halbuki yer değiştirilen satırlar eşit olduğundan $B=A$ dir. Sonuç olarak buradan $\det A=\det B$ olduğu görülür. Böylece

$$\det A = \det B = -\det A$$

ifadesinden $\det A = 0$ bulunur.

ii. A matrisinin bir satırının sıfır olduğunu varsayalım. A nın herhangi bir başka satırını seçelim ve onu bir B matrisi elde etmek için sıfır satırına ilave edelim. Bu durumda $\det A = \det B$ yazılabilir. Halbuki B matrisi iki eşit satıra sahip olduğundan $\det B = 0$ yazmak mümkündür. Bundan dolayı $\det A = 0$ olur.

Teorem 2.2.9: Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [48].

İspat: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olsun. $\det B = \alpha \det A$ özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \cdot \det I \\
&= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.10: Bir A kare matrisinin determinantı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır, yani;

$$\det A = \det A^T$$

dir [48].

Tanım 2.2.20: $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle ede edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir ve A_{ij} ile gösterilir.

Teorem 2.2.11: Eğer $E,$ bir elementer matris ise, o zaman

i. $\det E \neq 0,$

ii. $\det E^T = \det E,$

iii. E^{-1} bir elementer matristir [48].

İspat: $\alpha \neq 0$ olmak üzere $P_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ elementer satır işlemine karşılık gelen elementer matrisi, P_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elementer satır işlemlerine karşılık gelen elementer matrisi ve $P_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i + ar_j$ satır işlemine karşılık gelen elementer matrisi gösterelim. Buna göre bu üç farklı tipten elementer matrislerin determinantlarını alacak olursak, o takdirde

$$\det P_i(\alpha) \det P_i(\alpha)^T = \alpha, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\det P_{ij} \det P_i^T = -1, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\det P_{ij}(\alpha) \det P_{ij}(\alpha)^T = 1, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) yi ispatlar. (iii) ü ispatlamak için sırasıyla

$$P_i(\alpha)^{-1} = P_i\left(\alpha^{-1}\right)$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 2.2.12: Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $\det A \neq 0$ olmasıdır [48].

İspat: Eğer A ters çevrilebilir bir matris ise, o zaman

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = I$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrisleri vardır. Böylece

$$\det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_k)\det(A) = \det I = 1$$

yazılır. Bundan dolayı $\det A \neq 0$ sonucu elde edilir.

Tersine; eğer A ters çevrilebilir bir matris değilse, o zaman

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = R$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrisleri vardır. Burada R, bir sıfır satırını kapsayan $n \times n$ bir eşolon matristir.

Böylece $\det R = 0$ olur ve $\det E_1 \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ olduğundan $\det A = 0$ olduğu görülür.

Teorem 2.2.13: A ve B $n \times n$ iki matris olsun. O takdirde

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

dir [48].

İspat: Eğer A bir elementer matris ise, o zaman iddianın doğru olduğunu söyleyebilir. A matrisi elementer matrislerin bir çarpımı olduğundan eşitlik yine doğrudur. Gerçekten E_1 ve E_2 elementer matrisler olmak üzere

$$A = E_1 E_2$$

ise, o zaman elementer matris için determinant özelliği iki kez ard arda uygulanması ile

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 B) = \det(E_1)\det(E_2 B)$$

$$= \det(E_1)\det(E_2)\det(B)$$

$$= \det(E_1E_2)\det(B)$$

$$= \det(A)\det(B)$$

yazılır. $k > 2$ olmak üzere

$$A = E_1E_2\dots E_k$$

olduğu zaman da ispat benzer olarak yapılabilir. Diğer taraftan her ters çevrilebilir matris elementer matrislerin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden A matrisinin ters çevrilebilir olduğu her zaman

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer A matrisi ters çevrilebilir değilse, o takdirde $\det(A) = 0$ ve $\det(AB) = 0$ dır. Böylece bu durumda da $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ifadesi geçerlidir.

2.3. Özel Tanımlı Matrisler

$N \geq 1$ için $\mathbb{F}_2^N$, $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde bir N boyutlu vektör uzayı ve V_n de, $f : \mathbb{F}_2^N \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan bütün fonksiyonların 2^N boyutlu kompleks grup cebiri olsun. V_n kümesi üzerinde tanımlanan ikili işlem f, $g \in V_n$ için

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_2^N} f(y)g(x+y), \quad x \in \mathbb{F}_2^N$$

şeklindedir.

V_n cebirinin her bir karakteri

$$Xy(x) = Xx(y) = (-1)^{x.y}, \quad x \cdot y \in \mathbb{F}_2^N$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$ olup, x ve y, $\{1, 2, \dots, N\}$ indekslerinin alt kümesi olarak yorumlanır. Bu yorumdan

$$x \cdot y = |x \cap y|$$

dir. Burada $|\ldots|$, kardinaliteliği (eleman sayısını) gösterir.

Yukarıdaki yoruma göre $x \in \mathbb{F}_2^N$ nin Hamming ağırlığı için $|x| = wt(x)$ gösterimi kullanılır ve aynı zamanda $x + y$, x ve y alt kümelerinin simetrik farkı olur. $x \in \mathbb{F}_2^N$, $\{1, 2, \ldots, N\}$ indekslerinin bir alt kümesi olarak yorumlandığı zaman x in komplementi için $\bar{x}$ gösterimi kullanılır (Detaylı bilgi [26]'de bulunabilir).

Tanım 2.3.1: $T_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$ olmak üzere

$$\langle Xx, Xy \rangle = 2^N T_y(x)$$

şeklinde olup her $f \in V_n$ için $\mathcal{F}(f) = \hat{f} \in V_N$ Fourier dönüşüm (Hadamard dönüşümü)

$$\mathcal{F}(f)(y) = \hat{f}(y) = \sum_{x \in \mathbb{F}_2^N} f(x)\, \mathcal{X}x(y) = \langle \mathcal{X}y. f \rangle, \quad y \in \mathbb{F}_2^N \qquad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlanır [27].

Not 2.3.1: Hadamard dönüşümlerin en iyi bilinen iki özelliği aşağıdaki gibidir:

i. $\hat{\hat{f}} = 2^N f, \quad \langle \hat{f} \hat{g} \rangle = 2^N \langle f, g \rangle$ (2.3.2)

ii. $F(f * g) = F(f) \cdot F(g),\ F(f \cdot g) 2^{-N} F(f) * F(g)$ (2.3.3)

[27].

Tanım 2.3.2: Her $r \in [0, N]$ ve $\psi_r^{(N)} (\equiv \psi_r)$,

$$\psi_r(x) \begin{cases} 1, & x \in S_r^{(N)} \\ 0, & x \notin S_r^{(N)} \end{cases}$$

olacak şekilde,

$$S_r^{(N)} \equiv S_r = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^N \mid wt(x) = r \right\}$$

$\mathbb{F}_2^N$ de r. Hamming küre olsun.

Her $f \in V_n$ fonksiyonu için

$$A_r(f) = \langle \psi_r, f \rangle = \sum_{x \in S_r^{(N)}} f(x), \quad 0 \le r \le N$$

şeklinde tanımlanır ve $\left(A_0(f), A_1(f), \ldots, A_N(f) \right)^T \in \mathbb{C}^{N+1}$, f nin ağırlık spektrumu olarak adlandırılır [27].

Tanım 2.3.3: (2.3.2) formülüne göre

$$A_r(\hat{f}) = \langle \psi_r, \hat{f} \rangle = 2^{-N} \langle \hat{\psi}_r, \hat{\hat{f}} \rangle = \langle \hat{\psi}_r, f \rangle \qquad (2.3.4)$$

dir. Diğer yandan, (2.3.1) formülüne göre

$$\hat{\psi}_r(x) = \langle \mathcal{X}x, \psi_r \rangle = \sum_{y \in S_r} \mathcal{X}y(x) = K_r^{(N)}(x)$$

dir. Burada $x = |x|$ ve $K_r^{(N)}(x)$,

$$K_r^{(N)}(x) = K_r(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{N-x}{r-i} \binom{x}{i}$$

şeklinde tanımlanan N mertebeli r. Krawtchouck polinomudur. Burada, $K_0^0(0) = 1$ dir [27].

Tanım 2.3.4: N mertebeli MacWilliams matrisi

$$\left(M_N \right)_{ij} = K_i^{(N)}(j), \qquad 0 \le i, j \le N$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\left(M_0 \right)_{ij} = 1$ dir [27].

Not 2.3.2: Krawtchouck polinomları ve MacWilliams matrisleri için bazı önemli formüller aşağıdaki gibidir [27]:

i. Geren fonksiyon;

$$\left(1+t\right)^{N-z}\left(1-t\right)^{z}=\sum_{k=0}^{\infty}K_{k}^{(N)}\left(z\right)t^{k}$$

şeklindedir.

ii. $K_{r}^{(N)}\left(z\right)=\sum_{l=0}^{r}\left(-1\right)^{l}\binom{N-z}{r-l}\binom{z}{l}$

$$=\sum_{l=0}^{r}\left(-1\right)^{l}2^{r-l}\binom{N-r+l}{l}\binom{N-z}{r-l}$$

$$=\sum_{l=0}^{r}\left(-2\right)^{l}\binom{N-l}{r-l}\binom{z}{l}$$

şeklindedir. Burada, $K_{0}^{0}\left(0\right)=1$ olduğu açıktır.

$K_{r}^{(N)}\left(z\right)$ polinomunun baş katsayısı $\frac{\left(-2\right)^{r}}{r!}$ dir.

iii. $C=diag\left(\binom{N}{0},\binom{N}{1},\ldots,\binom{N}{N}\right)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}K_{r}\left(i\right)K_{s}\left(i\right)=2^{N}\binom{N}{r}\delta_{r,s}$$

yani, $M_{N}CM_{M}^{T}=2^{N}C$ dir.

$$\sum_{i=0}^{N}K_{r}\left(i\right)K_{s}\left(i\right)=2^{N}\binom{N}{r}\delta_{r,s}$$

yani, $M_{N}^{2}=2^{N}I$ dir.

iv. Herhangi bir z için;

$$K_{r}^{(N)}\left(z\right)=\left(-1\right)^{r}K_{r}^{(N)}\left(N-z\right)$$

$z \in \{0,1,\dots,N\}$ için;

$$K_r^{(N)}(z) = (-1)^z K_{N-r}^{(N)}(z)$$

ve

$$\binom{N}{r} K_s(r) = \binom{N}{s} K_r(s)$$

yani, $M_N^T = C^{-1} M_n C$ dir.

v. Krawtchouck polinomları için aşağıdaki indirgeme bağıntıları söz konusudur:

a) $(r+1)K_{r+1}(z) = (N-2z)K_r(z) - (N-r+1)K_{r-1}(z)$,

$$K_0(z) = 1, \quad K_1(z) = N - 2z.$$

b) $(N-r)K_l(r+1) = (N-2l)K_l(r) - rK_l(r-1)$,

$$K_l(0) = \binom{N}{l}, \quad K_l(1) = \binom{N}{l}\left(1 - \frac{2l}{N}\right).$$

c) $d_N(j) = \begin{cases} 1, & j \in \{0, N\} \\ \frac{1}{2}, & j \notin \{0, N\} \end{cases}$ ve $0 \le i, j \le N$ olmak üzere;

$$K_i^{(N)}(j) = d_N(j)\left(K_i^{(N-1)}(j) + K_{i-1}^{(N-1)}(j) + K_i^{(N-1)}(j-1) - K_{i-1}^{(N-1)}(j-1)\right), \quad N \ge 1$$

dir. Burada ve $K_i^{(N-1)}(N) = K_N^{(N-1)}(j) = 0$ ve $i = -1$ veya $j = -1$ için her iki durumda da $K_i(j) = 0$ dir.

Örnek 2.3.1: M_0, M_1 ve M_2 MacWilliams matrisleri olsun.

$$M_0 = (1),$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Herhangi bir $y \in \mathbb{F}_2^N$ için $By : \mathbb{F}_2^N \to \mathbb{C}$ bir fonksiyonu

$$B_y(x) = \binom{|y|}{|x \cap y|} \cdot Xy(x), \quad x \in \mathbb{F}_2^N$$

şeklinde tanımlanır. By fonksiyonu hakkında detaylı bilgi [30]'da bulunabilir.

Her $r \in \{0,1,\dots,N\}$ için By fonksiyonu, V_n grup cebiri için bir taban olup

$$\sum_{y \in S_r} B_y(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{N-|x|}{r-i} \binom{|x|}{i}$$

eşitliği yalnızca $x = |x|$ e bağlı olarak elde edilir.

Tanım 2.3.5: N mertebeli $r.$ ayrık Chebyshev polinomu

$$D_r^{(N)}(x) = D_r(x) \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{N-x}{r-i} \binom{x}{i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $D_0^0(0) = 1$ dir [27].

Tanım 2.3.6: $\left(D_N\right)_{ij} = D_i^{(N)}\left(j\right),\quad 0 \le i, j \le N$ şeklindeki $\left(N+1\right)\times\left(N+1\right)$ boyutlu matrisi N mertebeli Chebyshev matrisi denir. Burada $N=0$ ise $\left(D_0\right)_{ij}=0$ ve $\left(M_1\right)_{ij} = \left(D_1\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dir [27].

Not 2.3.3: Chebyshev polinomları ve matrisleri için bazı önemli formüller aşağıdaki gibidir [27]:

i. $D_n^{(N)}\left(x\right) = \left(-1\right)^n \Delta^n \left(\binom{x}{n}\binom{x-N-1}{n}\right)$

Burada Δ^n, $\Delta f\left(x\right) = f\left(x+1\right) - f\left(x\right)$ olarak tanımlanan fark operatörünün *n.* kuvvetidir.

ii. $D_n^{(N)}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^i \binom{n}{i}\binom{N-x}{n-i}\binom{x}{i}$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^i \binom{n+i}{n}\binom{N-i}{n-i}\binom{x}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n-N-1}{i}\binom{n+N+1}{n-i}\binom{x+i}{n}$$

iii. $D_N D_N^T = diag\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N\right)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{i=0}^{N} D_r\left(i\right) D_s\left(i\right) = \gamma_r \delta_{r,s}$$

burada, $\gamma_r = \binom{2r}{r}\binom{N+1+r}{2r+1}$ dir.

iv. $D_n\left(N-x\right) = \left(-1\right)^n D_n\left(x\right),$

$$D_n^{(N)}\left(0\right) = \binom{N}{n},\ \ D_N^{(N)}\left(m\right)\left(-1\right)^m \binom{N}{m}.$$

N çift sayısı için,

$$D_n^{(N)}\left(\frac{N}{2}\right)=\begin{cases}0, & n \text{ tek ise}\\ (-1)^m\binom{\frac{N}{2}}{m}\binom{\frac{N}{2}+m}{m}, & n=2m \text{ ise}\end{cases}$$

$D_n^{(N)}$ polinomunun baş katsayısı $\dfrac{(-1)^n}{n!}\binom{2n}{n}$ dir.

$$D_0(x)=1,\ D_1(x)=-2x+N,\ D_2(x)=3x^2-3Nx+\binom{N}{2}.$$

v. Chebyshev polinomları için aşağıdaki indirgeme bağıntıları söz konusudur:

a) $n^2D_n=(2n-1)D_1D_{n-1}-(N+n)(N-n+2)D_{n-2}$.

b) $\Delta\big((x+1)(x-N)\Delta D_n(x)\big)=n(n+1)D_n(x+1)$,

$$D_n(0)=\binom{N}{n},\ D_n(1)=\binom{N-1}{n}-n\binom{N-1}{n-1}.$$

c) $nD_n^{(N)}(x)=nD_n^{(N-1)}(x-1)+(N-x)D_{n-1}^{(N-1)}(x)$

$$-(N+n-x)D_{n-1}^{(N-1)}(x-1),\ N\geq 1.$$

Örnek 2.3.2: D_0, D_1 ve D_2 Chebyshev matrisleri olsun.

$$D_0=(1),$$

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

ve

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tanım 2.3.7: P polinomu, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ şeklinde tanımlanan n. dereceden reel bir polinom olsun. P polinomunun katsayıları yardımıyla tanımlanan $H_n = (h_{ij})_{n\times n}$ Hurwitz matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

[34].

Tanım 2.3.8: $R_n = \left[r_{ij}\right]_{n\times n}$ Redheffer matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i \mid j \text{ yada } j = 1 \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Örneğin,

$$R_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir [44]. Burada

$$\det(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$$

olup, μ klasik Möbius fonksiyonudur.

Tanım 2.3.9: Her n pozitif tamsayısı için $\mu(n)$ Möbius fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ ise,} \\ 0, & p^2 | n, \ p \text{ asal ise,} \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 \ldots p_r \text{ ise, burada } i \neq j \text{ için } p_1 \neq p_1 \end{cases}$$

Detaylı bilgi [9]'da bulunabilir.

Tanım 2.3.10: D bir tamlık bölgesi, $der(P(x)) = n$ ve $der(Q(x)) = m$ olmak üzere $P(x), Q(x) \in D[x]$ olsun. Farzedelim ki $n \geq m$ olsun ve

$$P(x) = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \cdots + u_1 x + u_0 ,$$

$$Q(x) = v_m x^m + v_{m-1} x^{m-1} + \cdots + v_1 x + v_0$$

olduğunu kabul edelim. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları ile ilişkili Bezout matrisi

$$B_n(P,Q) = [b_{ij}]_{n \times n}$$

simetrik matristir. Burada b_{ij} elemanları,

$$\frac{P(x)Q(y) - P(y)Q(x)}{x - y} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j$$

özdeşliği tarafından elde edilir.

Burada dikkat etmek gerekir ki $B_n(P,Q)$ Bezout matrisi $D^{n \times n}$ içindedir ve b_{ij} elemanları

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{i+k-1} v_{i-k} - u_{i-k} v_{j+k-1}$$

formülü ile tanımlanır, burada her $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $m_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$ dir [2,8,33,45].

2.4. Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.4.1: R birimli ve değişmeli bir halka, $c_i \in R\,(1 \leq i \leq k)$ sabit katsayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_{k-1} a_{n+1} + c_k a_n \qquad (2.4.1)$$

şeklindeki k-basamak homojen lineer indirgemeli bağıntı yardımıyla tanımlanan $\{a_n\}$ dizisine R halkasının elemanlarının lineer indirgemeli dizisi denir [24].

Tanım 2.4.2: $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} + \cdots + c_k$ şeklindeki k. dereceden polinoma, (2.4.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırasıyla 2 ve 3 dereceden lineer indirgemeli diziler binary ve ternary lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla, tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır [24].

c_k, R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.4.1) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots,$ şeklinde devam eder [24].

Tanım 2.4.3: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, \ldots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan dizisine homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir. Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1+1)a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1}-c_i)a_{n+k-i} - c_k a_n \tag{2.4.2}$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir. (2.4.2) bağıntısı için

$$F(x) = \left(x^k - c_1 x^{k-1} \ldots c_{k-1}x - c_k\right)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir.

Kalman [36]'da $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ başlangıç değeri ve $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki k -basamak lineer indirgemeli bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin

elemanlarını;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde etmiştir.

Tanım 2.4.4: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi,

$$F_0 = 0 \text{ ve } F_1 = 1$$

başlangıç değerleri ile $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde tanımlanır, yani; Fibonacci dizisi

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

şeklindedir.

Silvester [46]'da

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir.

Hosenberg [32]'de Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceğini göstermiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q-matrisi denir.

Tanım 2.4.5: $f_n^{(k)}, 1 \leq i \leq k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartlarıyla tanımlı ve $n > k$ için,

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \tag{2.4.3}$$

k-basamak Fibonacci dizisinin n. elemanıdır. $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} (\operatorname{mod} m)$ olmak üzere bu dizi m-modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \ldots, f_n^{(k,m)}, \ldots \right)$$

dizisi elde edilir. O zaman $\left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \ldots, f_k^{(k,m)}, \ldots\right) = (0,0,\ldots,1)$ olup bu dizi için (2.4.3) deki tekrar eden dizi bağıntıları aynıdır [41].

Tanım 2.4.6: Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra sadece basit bir alt dizinin tekrarı şeklinde ise periyodiktir ve tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Örneğin; $x, y, z, t, w, e, x, y, z, t, w, e, \ldots$ dizisi periyodik olup başlangıç elemanı x ve periyodu 6 dır.

Teorem 2.4.1: $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir [41].

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : 0 \le a_i \le m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur, yani; her $u \ge 0$ için,

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \ldots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $v \ge u$ sayısı vardır. Tanımdan,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olur, yani;

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{k} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan kolaylıkla,

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \ldots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve $f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$ olduğu görülebilir. Böylece $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir.

$f(k,m)$ nin en küçük periyodu $h_k(m)$ gösterilir ve $f(k,m)$ nin periyodu veya m-modülüne göre k-basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır.

p_i ler asal sayılar ve e_i ler pozitif tamsayılar olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}\ (t\geq 1)$ ise $h_k(m)$, $h_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katıdır.

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen $k\times k$ tipli kare bir matris olsun.

$$G_n^{'}=\begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+k-1)1} & a_{(n+k-1)2} & \cdots & a_{(n+k-1)k} \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 2.4.1: $G^n=G_n^{'}$ dir [41].

Not 2.4.1: m_{ij} ler tamsayılar olmak üzere verilen bir $M=\left[m_{ij}\right]$ matrisi için, M nin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi $M(\bmod m)$ şeklinde ifade edilir, yani; $M(\bmod m)=\left(m_{ij}(\bmod m)\right)$ dir. $\langle M\rangle_m=\left\{M^i(\bmod m) \mid i\geq 0\right\}$ olsun.

Eğer $obeb(m,\det M)=1$ ise o zaman $\langle M\rangle_m$ bir devirli grup; $obeb(m,\det M)\neq 1$ ise $\langle M\rangle_m$ bir yarı gruptur. $\langle M\rangle_m$ kümesinin mertebesi $\left|\langle M\rangle_m\right|$ ile gösterilecektir.

$g_k\left(p^\alpha\right)$, $\langle G\rangle_{p^\alpha}$ grubunun mertebesi olsun. Aşağıdaki teorem $h_k\left(p^\alpha\right)$ ve $g_k\left(p^\alpha\right)$ arasındaki ilişkiyi verir [41].

Teorem 2.4.2: $h_k\left(p^\alpha\right)=g_k\left(p^\alpha\right)$ dir [41].

Teorem 2.4.3: t, $h_k(p)=h_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Her $\alpha \geq t$ için, $h_k(p^\alpha)=p^{\alpha-t}h_k(p)$ olur. Özellikle, eğer; $h_k(p)=h_k(p^2)$ ise $\alpha>1$ için, $h_k(p^\alpha)=p^{\alpha-1}h_k(p)$ dir [41].

Varsayım 2.4.1: Eğer $p \geq k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) \| (p^k-p^i)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ aralığında bir i sayısı vardır [41].

Tanım 2.4.7: $\{P_n\}$ Pell dizisi,

$$P_0=0 \text{ ve } P_1=1$$

başlangıç değerleri ile $n \geq 0$ için

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$$

şeklinde tanımlanır, yani; Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,\ldots$$

şeklindedir.

Pell sayılarının bazı özellikleri Horadam tarafından [31]'da elde edilmiştir. Bicknell ise, [5]'de Pell sayılarının aşağıdaki matris tarafından üretildiğini göstermiştir;

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{Z}$ için,

$$M^n=\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.4.8: Kılıç ve Taşçı [38]'de genelleştirilmiş k-basamak Pell sayılarının k dizilerini,

$$P_n^i=\begin{cases} 1, & n=1-i \text{ ise} \\ 1, & n \neq 1-i \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile $n>0$ ve $1-k\leq n\leq 0$ için;

$$P_n^i=2P_{n-1}^i+P_{n-2}^i+\cdots+P_{n-k}^i$$

bağıntısı yardımıyla tanımlamıştır. Burada P_n^i, i. dizinin n. terimidir. $i=k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş k-Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k=2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir ve $i=k$ için P_n^k ya genelleştirilmiş k-Pell sayıları denir.

Ayrıca Kılıç ve Taşçı [38]'de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisini

$$R=\left[r_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.4.4}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

$$E_n=\left[e_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k\\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k\end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

olmak üzere,

$$E_{n+1}=R\cdot E_n$$

eşitliğini elde etmişlerdir [38].

Tanım 2.4.9: $\alpha\geq 0$ sabit tamsayısı için $\left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi,

$$P_0^{(\alpha)}=0 \text{ ve } P_1^{(\alpha)}=1$$

başlangıç değerleri ile $n\geq 0$ için

$$P_{n+2}^{(\alpha)} = (\alpha+1) P_{n+1}^{(\alpha)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Ayrıca, Deveci ve Karaduman [19]'da $\alpha > 0$ sabitleri için genelleştirilmiş Pell dizilerinin elemanlarını

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(M^{(\alpha)}\right)^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisi yardımıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Deveci ve Karaduman [19]'da $\alpha > 0$ sabit tamsayısı için $P_n^{(\alpha)k}$ k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisini,

$$P_0^{(\alpha)k} = 0, \ldots, P_{k-2}^{(\alpha)k} = 0, P_{k-1}^{(\alpha)k} = 1$$

başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$P_{n+k}^{(\alpha)k} = (\alpha+1) P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \cdots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha)k}$$

bağıntısı yardımıyla tanımlamışlardır. Burada $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\beta_j = \binom{\alpha+j}{j+1}$ dir. Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha)2}\right\} = \left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Deveci ve Karaduman aynı çalışmada k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha)k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine k-basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir.

Tanım 2.4.10: $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi,

$$J_0=0 \text{ ve } J_1=1$$

başlangıç değerleri ile ve $n\geq 0$ için

$$J_n=J_{n-1}+2J_{n-2}$$

şeklinde tanımlanır, yani; Jacobsthal dizisi

$$0,1,1,3,5,11,21,43,\ldots$$

şeklindedir.

Köken ve Bozkurt [40]'de Jacobsthal sayılarının

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad F^n=\begin{bmatrix}J_{n+1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir F matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir.

Tanım 2.4.11: Yılmaz ve Bozkurt [52]'de genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal sayılarının k dizilerini,

$$J_n^i=\begin{cases}1, & i+n=1 \text{ ise},\\ 0, & \text{diğer durumlarda},\end{cases}\qquad 1-k\leq n\leq 0$$

başlangıç değerleriyle, $n>0$ ve $1\leq i\leq k$ için;

$$J_n^i=J_{n-1}^i+2J_{n-2}^i+\ldots+J_{n-k}^i$$

bağıntısı yardımıyla tanımlamışlardır. Burada J_n^i, dizinin $n.$ terimidir. $k=2$ ve $i=1$ için genelleştirilmiş k-basamak Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir.

Aynı çalışmada genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları için aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir;

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^i \\ J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ J_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ J_{n-2}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ J_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

burada C, $k \times k$ matrisi,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmıştır.

Ayrıca, aynı çalışmada genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri için,

$$B_n = \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$B_n = C^n$$

şeklinde denklem elde edilmiştir.

Tanım 2.4.12: G grubu $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ tarafından üretilen bir grup olsun. Bu takdirde $x_1=a_1,a_2,\ldots,a_n$, $x_{i+n}=\prod_{j=1}^{n}x_{i+j+-1}$, $i\geq 1$ dizisine G grubunun Fibonacci orbiti denir ve $F_A(G)$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.4.13: Sonlu bir gruptaki bir k-nacci (k-basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0,x_1,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0,x_1,x_3,\ldots,x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n=\begin{cases} x_0x_1x_2\ldots x_{n-1}, & j\leq n<k \\ x_{n-k}x_{n-k+1}, & n\geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0,x_1,x_3,\ldots,x_{j-1}$ grubu germesi gerekir. Böylece, bu k-nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0,x_1,x_3,\ldots,x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki k-nacci dizisi $F_k(G;x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{j-1})$ ile gösterilir. Buna göre tamsayılardaki $\bmod m$ ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2(\mathbb{Z}_m;0,1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır [39].

Bir $F_k(G;x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{j-1})$, k-nacci dizisinin periyodu $P_k(G;x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{j-1})$ şeklinde gösterilir. k-gerenli bir grubun Fibonacci orbiti bu gruptaki k-nacci dizisidir [39].

Tanım 2.4.14: G bir grup olsun. G nin her elemanın içinde bulunduğu bir k-nacci dizisi mevcut ise G ye k-nacci dizilendirilebilirdir [39].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. MacWilliams ve Chebyshev Matrisleri Yardımı ile Devirli ve Yarı Grupların Elde Edilmesi

Bu bölümde, MacWilliams ve Chebyshev matrislerinin kuvvetlerinin m-modülüne göre indirgenmesi suretiyle, bu matrislerin determinantlarının m-modülüne göre durumları göz önüne alınarak elde edilen devirli ve yarı gruplar incelenecektir. Bu anlamda, üretilen devirli ve yarı grupların mertebeleri hakkında geniş bir şekilde bilgi verilecektir.

Matrislerdeki genel çarpım ile;

$$\left((M_N)_{ij}\right)^{2k} = \left[m_{ij}\right]_{(N+1)\times(N+1)} = \begin{bmatrix} 2^{kN} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^{kN} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{kN} \end{bmatrix}, \ (k \geq 0) \tag{3.1.1}$$

yani, $\left((M_N)_{ij}\right)^{2k}$ matrisinin köşegen elemanları $2^{kN},\dots,2^{kN}$ olan $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu bir köşegen matris olduğu kolaylıkla ispatlanır.

Ayrıca $\det\left((M_N)_{ij}\right)$, $(N \geq 1)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\det\left((M_N)_{ij}\right) = \begin{cases} -2^{\frac{N^2+N}{2}}, & N \equiv 1,2 \bmod 4, \\ 2^{\frac{N^2+N}{2}}, & N \equiv 0,3 \bmod 4. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

m bir tek tamsayı ise $\langle M_N \rangle_m$ bir devirli grup, m bir çift tamsayı ise $\langle M_N \rangle_m$ bir yarı grup olduğu $(3.1.2)$ den kolaylıkla görülür.

Teorem 3.1.1: Eğer m bir tek tamsayı ise $\langle M_N \rangle_m$ devirli grubun mertebesi $2k$ dır. Burada k, $2^{kN} \equiv 1 (\bmod m)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayıdır [16].

İspat: (3.1.1) den $\left(\left(M_N\right)_{ij}\right)^{2k}\left(\bmod m\right)=I_{(N+1)}$ yazılır. $I_{(N+1)}$, $\left(N+1\right)\times\left(N+1\right)$ boyutlu bir birim matristir. k, $2^{kN}\equiv 1\left(\bmod m\right)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olarak seçilir ise $\left|\left\langle M_N\right\rangle_m\right|=2k$ elde edilir.

Örnek 3.1.1: $M_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ matrisini için $m=5$ olarak seçelim. $m=5$ bir tek tamsayı olduğundan $\left\langle M_2\right\rangle_5$ bir devirli grup olup mertebesi $2k$ dır ve $2^{2k}\equiv 1\left(\bmod 5\right)$ denkliğini sağlayan en küçük k tamsayısı 2 olur. Buradan $\left|\left\langle M_2\right\rangle_5\right|=4$ elde edilir.

Teorem 3.1.2: m bir çift tamsayı olsun. O zaman $\left\langle M_N\right\rangle_m$ yarı grubun mertebesi için iki durum söz konusudur [16]:

i. Eğer $m=2^u$ $\left(u\in N\right)$ ise, $\left\langle M_N\right\rangle_{2^u}$ yarı grubun mertebesi $2k$ dır. Burada k, $2^{kN}\equiv 0\left(\bmod m\right)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayıdır.

ii. Eğer t bir tek tamsayı olmak üzere $m=2^u t$ $\left(u\in N\right)$ ise o zaman, $\left|\left\langle M_N\right\rangle_{2^u t}\right|=\left|\left\langle M_N\right\rangle_{2^u}\right|+\left|\left\langle M_N\right\rangle_t\right|-1$ dir.

İspat:

i. (3.1.1) den $\left(M_N\right)_{ij}^{2k}\left(\bmod m\right)=0_{(N+1)}$ yazılır. Burada $0_{(N+1)}$, $\left(N+1\right)\times\left(N+1\right)$ boyutlu bir sıfır matristir. k, $2^{kN}\equiv 0\left(\bmod m\right)$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olarak seçilir ise $\left|\left\langle M_N\right\rangle_m\right|=2k$ elde edilir.

ii. $\left|\left\langle M_N\right\rangle_t\right|=2\alpha$ ve $\left|\left\langle M_N\right\rangle_{2^u}\right|=2\beta$ olsun. O zaman $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ ve $obeb\left(t,k_2\right)=1$ olmak üzere $2^{\alpha N}=k_1 t+1$ ve $2^{\beta N}=k_2 2^u$ olur. Dolayısıyla $2^{(\alpha+\beta)N}\equiv 2^u k_2\left(\bmod m\right)$ olup, yani; $\left(\left(M_N\right)_{ij}^{2\alpha+2\beta}\left(\bmod m\right)\equiv\left(M_N\right)_{ij}\right)^{2\beta}$ olur. Böylece $\left|\left\langle M_N\right\rangle_{2^u t}\right|=\left|\left\langle M_N\right\rangle_{2^u}\right|+\left|\left\langle M_N\right\rangle_t\right|-1$ elde edilir.

Örnek 3.1.2: $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi için $m=8$ olsun. $8=2^3$ şeklinde olduğu için $\langle M_3 \rangle_{2^3}$ grubu bir yarı grup belirtir ve mertebesi $2k$ dır.

$2^{3k} \equiv 0 \pmod 8$ denkliğini sağlayan en küçük k pozitif tamsayı 1 dir. Buradan $\left|\langle M_3 \rangle_{2^3}\right| = 2$ olur.

Örnek 3.1.3: $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için $m=192$ olsun. $192 = 2^6 \cdot 3$ şeklinde yazılabilir. Böylece Teorem 4.1.2 (ii) den $\langle M_4 \rangle_{2^6.3}$ grubu bir yarı grup belirtir ve $\left|\langle M_4 \rangle_{2^6.3}\right| = \left|\langle M_4 \rangle_{2^6}\right| + \left|\langle M_4 \rangle_{3}\right| - 1$ dir.

Burada $\langle M_4 \rangle_{2^6}$ grubunun mertebesi Teorem 3.1.2 (i) den $2k$ dır ve $2^{4k} \equiv 0 \left(\bmod 2^6\right)$ denkliğini sağlayan en küçük k pozitif tamsayı 2 dir. Böylece $\left|\langle M_4 \rangle_{2^6}\right| = 4$ olur.

Diğer yandan $\langle M_4 \rangle_3$ grubunun mertebesi Teorem 3.1.1 den $2k$ dır ve $2^{4k} \equiv 1 \pmod 3$ denkliğini sağlayan en küçük k pozitif tamsayı 1 dir. Böylece $\left|\langle M_4 \rangle_3\right| = 2$ olur. Dolayısıyla;

$$\left|\langle M_4 \rangle_{2^6.3}\right| = \left|\langle M_4 \rangle_{2^6}\right| + \left|\langle M_4 \rangle_{3}\right| - 1 = 4 + 2 - 1 = 5$$

olur.

Uyarı 3.1.1: p, $\det\left(\left(D_N\right)_{ij}\right)$ nin en büyük bir asal çarpanı ise $p! \mid \det\left(\left(D_N\right)_{ij}\right)$ dir [16].

Teorem 3.1.3: $obeb\left(p,\det\left(\left(D_N\right)_{ij}\right)\right)=1$ ve t, $\left|\left\langle D_N\right\rangle_p\right|=\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p^t}\right|$ olacak şekilde en büyük pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde her $\alpha \geq t$ için $\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p^\alpha}\right| = p^{\alpha-t}\left|\left\langle D_N\right\rangle_p\right|$ dir. Özellikle $\left|\left\langle D_N\right\rangle_p\right| \neq \left|\left\langle D_N\right\rangle_{p^2}\right|$ ise, her $\alpha > 1$ için $\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p^\alpha}\right| = p^{\alpha-1}\left|\left\langle D_N\right\rangle_p\right|$ olur [16].

İspat: İlk önce her $u \geq 1$ için $\left\langle D_N\right\rangle_{p^u}$ nın bir devirli grup olduğunu belirtelim. θ pozitif bir tamsayı olsun ve $\left|\left\langle D_N\right\rangle_m\right|$, $h_N\left(m\right)$ ile gösterilsin.

$\left(D_N\right)_{ij}^{h_N\left(p^{\theta+1}\right)} \equiv I_{N+1}\left(\operatorname{mod} p^{\theta+1}\right)$ yani $\left(D_N\right)_{ij}^{h_N\left(p^{\theta+1}\right)} \equiv I_{N+1}\left(\operatorname{mod} p^{\theta}\right)$ olduğunda dolayı $h_N\left(p^\theta\right)$ nin, $h_N\left(p^{\theta+1}\right)$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(D_N\right)_{ij}^{h_N\left(p^{\theta}\right)} = I_{N+1}\left(a_{ij}^{(\theta)}p^\theta\right)$ yazılarak binom açılımı yardımıyla

$$\left(D_N\right)_{ij}^{h_N\left(p^{\theta}\right)p} = \left(I_{N+1}\left(a_{ij}^{(\theta)}p^\theta\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(a_{ij}^{(\theta)}p^\theta\right)^i \equiv I_{N+1}\left(\operatorname{mod} p^{\theta+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik yardımıyla $h_N\left(p^\theta\right) \big| h_N\left(p^\theta\right)p$ sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece $h_N\left(p^{\theta+1}\right)=h_N\left(p^\theta\right)$ ya da $h_N\left(p^{\theta+1}\right)=h_N\left(p^\theta\right)p$ olur. Ancak, buradaki ikinci durum ancak ve ancak $p|a_{ij}^{(\theta)}$ olacak şekilde bir $a_{ij}^{(\theta)}$ nin var olması ile mümkündür. $h_N\left(p^t\right) \neq h_N\left(p^{t+1}\right)$ olduğundan $p|a_{ij}^{(\theta)}$ olacak şekilde bir $a_{ij}^{(\theta)}$ vardır. Böylece $h_N\left(p^{t+1}\right) \neq h_N\left(p^{t+2}\right)$ olur. t üzerinde tümevarım yöntemiyle kullanılarak ispat tamamlanmaktadır.

Teorem 3.1.4: $obeb\left(m,\det\left(D_N\right)_{ij}\right)=1$ ve p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$, $\left(t \geq 1\right)$ olsun. O zaman,

$$\left|\left\langle D_N\right\rangle_m\right| = okek\left[\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p_1^{e_1}}\right|,\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p_2^{e_2}}\right|,\ldots,\left|\left\langle D_N\right\rangle_{p_t^{e_t}}\right|\right]$$

dir [16].

İspat: $1 \le k \le t$ için $\left|\langle D_N \rangle_{p_k^{e_k}}\right| = \lambda_k$ ve $\left|\langle D_N \rangle_m\right| = \lambda$ olsun. O zaman,

$$\left(D_N\right)_{ij}^{\lambda_k} = \begin{cases} p_k^{e_k}\varepsilon_{ij}K_i^N\left(j\right), & i > j, \\ p_k^{e_k}\varepsilon_{ij}K_i^N\left(j\right)+1, & i = j, \\ p_k^{e_k}\varepsilon_{ij}K_i^N\left(j\right), & i < j, \end{cases}$$

ve

$$\left(D_N\right)_{ij}^{\lambda} = \begin{cases} m\varepsilon_{ij}^{'}K_i^N\left(j\right), & i > j, \\ m\varepsilon_{ij}^{'}K_i^N\left(j\right)+1, & i = j, \\ m\varepsilon_{ij}^{'}K_i^N\left(j\right), & i < j, \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da $0 \le i, j \le N$ için ε_{ij} ve $\varepsilon_{ij}^{'}$ tamsayılardır. Bu nedenle k nın tüm değerleri için $\left(D_N\right)_{ij}^{\lambda_k}$, $c \cdot \left(D_N\right)_{ij}^{\lambda}$, $\left(c \in \mathbb{N}\right)$ formundadır ve herhangi bir λ sayısı verildiğinde $\lambda = okek\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\right]$ eşitliğinin sağlandığı doğrulanmış olur.

Sonuç 3.1.1: $\left(D_2\right)_{2^k}$ ve $\left(D_2\right)_{3^k}$ yarı grupların mertebeleri sırasıyla $2k+1$ ve $2^k\left(k-1\right)+2k+1$ dir [16].

İspat: İlk önce $\det\left(\left(D_2\right)_{ij}\right) = -12$ olduğundan her $k \ge 1$ için $\langle D_2 \rangle_{2^k}$ ve $\langle D_2 \rangle_{3^k}$ nın yarı grup olduğunu belirtelim. Matrislerdeki genel çarpım ile;

$$\left(D_2\right)_{ij}^{2k} = \begin{bmatrix} 2^{2k} & 2^{k-1}\left(2^k - 3^k\right) & 0 \\ 0 & 6^k & 0 \\ 2^k\left(2^k - 3^k\right) & 2^{k-1}\left(2^k - 3^k\right) & 6^k \end{bmatrix}$$

ve $\left(k \ge 1\right)$ için

$$\left(D_2\right)_{ij}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 2^k\left(2^{k+1} - 3^k\right) & 2^{2k} & 6^k \\ 2 \cdot 6^k & 0 & -2 \cdot 6^k \\ 2^k\left(2^{k+1} - 3^k\right) & 2^k\left(2^k - 3^{k+1}\right) & 6^k \end{bmatrix}$$

olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

$\left(D_2\right)_{ij}^{2k+1}=0_3\left(\bmod 2^k\right)$ ve $\left(D_2\right)_{ij}^{2^k(k-1)+2k+1}\equiv\left(D_2\right)_{ij}^{2k}\left(\bmod 3^k\right)$ olduğundan $\left|\left(D_2\right)_{2^k}\right|=2k+1$ ve $\left|\left(D_2\right)_{3^k}\right|=2^k\left(k-1\right)+2k+1$ sonuçları elde edilmiştir.

3.2. Hurwitz Matrisi Yardımıyla Elde Edilen İndirgemeli Diziler ve Devirli Gruplar

Bu bölümde, 3-basamak Fibonacci, genelleştirilmiş 3-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş 3-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Hurwitz matrisleri yardımıyla tanımlanan indirgemeli diziler ve bu Hurwitz matrislerinin kuvvetlerinin m-modülüne göre indirgenmesi süratiyle elde edilen devirli gruplar ele alınacaktır. Bu anlamda, tanımlanan indirgemeli diziler, elde edilen devirli grupların mertebelerinin belirlenmesi ve indirgemeli dizilerin elemanlarıyla diziler tanımlanırken kullanılan Hurwitz matrislerinin kuvvetleri arasındaki bağıntılar hakkında geniş bir şekilde bilgi verilecektir. Buna ek olarak, tanımlanan indirgemeli dizilerin m-modülüne göre indirgenmesiyle oluşturulan dizilerin periyotlarıyla Hurwitz matrisleri yardımıyla üretilen devirli grupların mertebeleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

3.2.1. 3-basamak Fibonacci-Hurwitz, 3-basamak Pell-Hurwitz ve 3-basamak Jacobsthal-Hurwitz Sayıları

3-basamak Fibonacci, genelleştirilmiş 3-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş 3-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P_1\left(x\right)=x^3-x^2-x-1,$$

$$P_2\left(x\right)=x^3-2x^2-x-1$$

ve

$$P_3\left(x\right)=x^3-x^2-2x-1.$$

O zaman P_1, P_2 ve P_3 polinomlarının Hurwitz matrislerini sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$H_3^1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H_3^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ve

$$H_3^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[20].

Bu çalışmada sırasıyla H_3^1, H_3^2 ve H_3^3 matrisleri kullanılarak 3-basamak Fibonacci-Hurwitz, 3-basamak Pell-Hurwitz ve 3-basamak Jacobsthal-Hurwitz sayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$FH_3(n) = \begin{cases} -FH_3(n-3) - FH_3(n-2), & n \equiv 1 \bmod 3, \\ FH_3(n-4) - FH_3(n-3), & n \equiv 2 \bmod 3, \quad n > 3 \text{ için}, \\ -FH_3(n-4) - FH_3(n-3), & n \equiv 0 \bmod 3, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$PH_3(n) = \begin{cases} -2PH_3(n-3) - PH_3(n-2), & n \equiv 1 \bmod 3, \\ PH_3(n-4) - PH_3(n-3), & n \equiv 2 \bmod 3, \quad n > 3 \text{ için}, \\ -2PH_3(n-4) - PH_3(n-3), & n \equiv 0 \bmod 3, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

ve

$$JH_3(n) = \begin{cases} -JH_3(n-3) - JH_3(n-2), & n \equiv 1 \bmod 3, \\ JH_3(n-4) - 2JH_3(n-3), & n \equiv 2 \bmod 3, \quad n > 3 \text{ için}, \\ -JH_3(n-4) - JH_3(n-3), & n \equiv 0 \bmod 3, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

burada, başlangıç şartları

$FH_3(1)=0,\ FH_3(2)=FH_3(3)=1,\ PH_3(1)=0,\ PH_3(2)=PH_3(3)=1$ ve $JH_3(1)=0,$ $JH_3(2)=JH_3(3)=1$ dir.

Aynı çalışmada $n\geq 0$ için

$$FH_3(3n+3)=FH_3(3n+1)+(-1)^n, \tag{3.2.4}$$

$$PH_3(3n+3)=2\left(PH_3(3n+2)+PH_3(3n+1)\right)-(-1)^n \tag{3.2.5}$$

ve

$$JH_3(3n+3)=JH_3(3n+1)+(-1)^n \tag{3.2.6}$$

denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca Deveci ve Aküzüm [20] ‘de $n\geq 0$ H_3^1, H_3^2 ve H_3^3 matrislerinin $n.$ kuvveterini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir:

$$\left(H_3^1\right)^n=\begin{bmatrix} FH_3(3n+2) & FH_3(3n+1) & 0 \\ -FH_3(3n+1) & FH_3(3n+2) & 0 \\ FH_3(3n+2)-(-1)^n & FH_3(3n+1) & (-1)^n \end{bmatrix}, \tag{3.2.7}$$

$$\left(H_3^2\right)^n=\begin{bmatrix} PH_3(3n+2)+PH_3(3n+1) & PH_3(3n+1) & 0 \\ -PH_3(3n+1) & PH_3(3n+2) & 0 \\ 2PH_3(3n+2)-2(-1)^n & PH_3(3n+1)-(-1)^n & (-1)^n \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

ve

$$\left(H_3^3\right)^n=\begin{bmatrix} JH_3(3n+2)-JH_3(3n+1) & JH_3(3n+1) & 0 \\ -JH_3(3n+1) & JH_3(3n+2) & 0 \\ JH_3(3n+2)-JH_3(3n+1)-(-1)^n & JH_3(3n+1) & (-1)^n \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

$\det H_3^1=-2$, $\det H_3^2=-3$ ve $\det H_3^3=-3$ den dolayı 3-basamak Fibonacci-Hurwitz, 3-basamak Pell-Hurwitz ve 3-basamak Jacobsthal-Hurwitz sayıları aşağıdaki gibi Simpson formülleri elde edilebilir.

$$\left(FH_3(3n+2)\right)^2+\left(FH_3(3n+1)\right)^2=2^n, \tag{3.2.10}$$

$$\left(PH_3(3n+2)\right)^2+\left(PH_3(3n+1)\right)^2+\left(PH_3(3n+2)\right)\left(PH_3(3n+1)\right)=3^n \tag{3.2.11}$$

ve

$$\left(JH_3(3n+2)\right)^2+\left(JH_3(3n+1)\right)^2-\left(JH_3(3n+2)\right)\left(JH_3(3n+1)\right)=3^n \tag{3.2.12}$$

[20].

Bu tanımlardan faydalanarak,

$$\begin{cases} FH_3(n)=0, & \text{eğer } \; n\equiv 1,8,13,20 \bmod 24 \; \text{ ise,} \\ FH_3(n)>0, & \text{eğer } \; n\equiv 0,2,3,7,9,11,15,16,17,18,22 \bmod 24 \; \text{ ise,} \\ FH_3(n)<0, & \text{eğer } \; n\equiv 4,5,6,10,12,14,19,21,23 \bmod 24 \; \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} PH_3(n)=0, & \text{eğer } \; n\equiv 1,8,19,26 \bmod 36 \; \text{ ise,} \\ PH_3(n)>0, & \text{eğer } \; n\equiv 2,3,7,9,11,13,17,18,22,23,24,28,30,32,34 \bmod 36 \; \text{ ise,} \\ PH_3(n)<0, & \text{eğer } \; n\equiv 0,4,5,6,10,12,14,15,16,20,21,25,27,29,31,33,35 \bmod 36 \; \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} JH_3(n)=0, & \text{eğer } \; n\equiv 1,14,19,32 \bmod 36 \; \text{ ise,} \\ JH_3(n)>0, & \text{eğer } \; n\equiv 0,2,3,7,8,9,13,15,17,21,22,23,24,28,29,30,34 \bmod 36 \; \text{ ise,} \\ JH_3(n)<0, & \text{eğer } \; n\equiv 4,5,6,10,11,12,16,18,20,25,26,27,31,33,35 \bmod 36 \; \text{ ise} \end{cases}$$

sonuçlarına ulaşılır [20].

Teorem 3.2.1:

i. $$FH_3(3n+1)^2=\begin{cases} 2^{n-1}, & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ 2^{n-1}\left((-1)^{\frac{n}{2}+1}+1\right), & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

ve

$$FH_3(3n+2)^2 = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ 2^{n-1}\left((-1)^{\frac{n}{2}}+1\right), & \text{eğer } n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

ii. $PH_3(3n+1)^2 = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ 3^{n-1}, & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ 3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ 4 \cdot 3^{n-1}, & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$

ve

$$PH_3(3n+2)^2 = \begin{cases} 3^n, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ 2 \cdot 3^{n-1} - PH_3(3n+1) \cdot PH_3(3n+2), & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ 3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ -3^{n-1} - PH_3(3n+1) \cdot PH_3(3n+2), & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$$

iii. $JH_3(3n+1)^2 = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ 3^{n-1}, & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ 3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ 4 \cdot 3^{n-1}, & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$

ve

$$JH_3(3n+2)^2 = \begin{cases} 3^n, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ 2 \cdot 3^{n-1} + JH_3(3n+1) \cdot JH_3(3n+2), & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ 3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ -3^{n-1} + JH_3(3n+1) \cdot JH_3(3n+2), & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$$

[20].

İspat:

i. n üzerinden tümevarım yöntemiyle,

$$per\left(H_3^1\right)^n = \begin{cases} FH_3(3n+1)^2 - FH_3(3n+2)^2 = 0, & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ FH_3(3n+2)^2 - FH_3(3n+1)^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^n, & \text{eğer } n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

$$per\left(H_3^2\right)^n = \begin{cases} -PH_3\left(3n+1\right)^2 + PH_3\left(3n+2\right)^2 + PH_3\left(3n+1\right)PH_3\left(3n+2\right) = 3^n, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ PH_3\left(3n+1\right)^2 - PH_3\left(3n+2\right)^2 - PH_3\left(3n+1\right)PH_3\left(3n+2\right) = -3^{n-1}, & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ -PH_3\left(3n+1\right)^2 + PH_3\left(3n+2\right)^2 + PH_3\left(3n+1\right)PH_3\left(3n+2\right) = -3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ PH_3\left(3n+1\right)^2 - PH_3\left(3n+2\right)^2 - PH_3\left(3n+1\right)PH_3\left(3n+2\right) = 5\cdot 3^{n-1}, & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$$

ve

$$per\left(H_3^3\right)^n = \begin{cases} -JH_3\left(3n+1\right)^2 + JH_3\left(3n+2\right)^2 - JH_3\left(3n+1\right)JH_3\left(3n+2\right) = 3^n, & n \equiv 0 \bmod 6, \\ JH_3\left(3n+1\right)^2 - JH_3\left(3n+2\right)^2 + JH_3\left(3n+1\right)JH_3\left(3n+2\right) = -3^{n-1}, & n \equiv 1,5 \bmod 6, \\ -JH_3\left(3n+1\right)^2 + JH_3\left(3n+2\right)^2 - JH_3\left(3n+1\right)JH_3\left(3n+2\right) = -3^n, & n \equiv 2,4 \bmod 6, \\ JH_3\left(3n+1\right)^2 - JH_3\left(3n+2\right)^2 + JH_3\left(3n+1\right)JH_3\left(3n+2\right) = 5\cdot 3^{n-1}, & n \equiv 3 \bmod 6. \end{cases}$$

eşitliklerine ulaşılabilir. Bu eşitliklerin yanı sıra sırasıyla (3.2.10), (3.2.11) ve (3.2.12) denklemleri kullanılarak teoremin ispatı tamamlanır [20].

3.2.2. H_3^1, H_3^2 ve H_3^3 Yardımıyla Devirli Gruplar

$\det H_3^1 = -2$ olduğu için $2 \nmid m$ olduğu durumlarda $\left\langle H_3^1 \right\rangle_m$ devirli gruptur. Benzer şekilde $\det H_3^2 = -3$ ve $\det H_3^3 = -3$ olduğu için $3 \nmid m$ olduğu durumlarda $\left\langle H_3^2 \right\rangle_m$ ve $\left\langle H_3^3 \right\rangle_m$ devirli gruplardır.

Teorem 3.2.2: M matrisi H_3^1, H_3^2 ve H_3^3 matrislerinden herhangi biri olmak üzere p, $\left(\det M, p\right) = 1$ olacak şekilde bir asal sayı ve u, $\left|\left\langle M \right\rangle_p\right| = \left|\left\langle M \right\rangle_{p^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde her $v \ge u$ için $\left|\left\langle M \right\rangle_{p^v}\right| = p^{v-u} \cdot \left|\left\langle M \right\rangle_p\right|$ dır [20].

İspat: $\left\langle H_3^1 \right\rangle_m$ devirli grubunu ele alalım. O halde $2 \nmid m$ dir. Farzedelim ki a pozitif bir tamsayı ve $\left|\left\langle H_3^1 \right\rangle_m\right|$, $k(m)$ ile gösterilsin. Eğer $\left(H_3^1\right)^{k\left(p^{a+1}\right)} \equiv I\left(\bmod p^{a+1}\right)$ ise $\left(H_3^1\right)^{k\left(p^{a+1}\right)} \equiv I\left(\bmod p^{a}\right)$ dir. Burada I, 3×3 tipinde birim matristir. Böylece $k\left(p^a\right)$ nın

$k\left(p^{a+1}\right)$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(H_3^1\right)^{k\left(p^a\right)} = I + \left(h_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)$ yazılarak Binom açılımı yardımıyla

$$\left(H_3^1\right)^{k\left(p^a\right)\cdot p} = \left(I + \left(h_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(h_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)^i \equiv I \left(\bmod p^{a+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlik yardımıyla da $k\left(p^{a+1}\right) \cdot p$ nın $k\left(p^a\right) \cdot p$ yı böldüğü sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece $k\left(p^{a+1}\right) = k\left(p^a\right)$ yada $k\left(p^{a+1}\right) = k\left(p^a\right) \cdot p$ dir. p tarafından bölünemeyen bir $h_{ij}^{(a)}$ tamsayısının mevcut olduğu durumda $k\left(p^{a+1}\right) = k\left(p^a\right) \cdot p$ eşitliğinin geçerli olacağı açıktır. u, $k(p) = k\left(p^u\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $k\left(p^u\right) \neq k\left(p^{u+1}\right)$ olur. $k\left(p^u\right) \neq k\left(p^{u+1}\right)$ olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $h_{ij}^{(u+1)}$ tamsayısının mevcut olacağı açıktır. Dolayısıyla $k\left(p^{u+1}\right) \neq k\left(p^{u+2}\right)$ sonucu elde edilmektedir. u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanmaktadır.

$\left\langle H_3^2 \right\rangle_m$ ve $\left\langle H_3^3 \right\rangle_m$ devirli grupları için ispatlar yukarıdakine benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.2.3: G_m, $\left\langle H_3^1 \right\rangle_m$, $\left\langle H_3^2 \right\rangle_m$ ve $\left\langle H_3^3 \right\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi biri ve $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, $(k \geq 1)$ olsun. Burada p_i ler farklı asallar olmak üzere $\left|G_m\right| = okek\left[\left|G_{p_1^{e_1}}\right|, \left|G_{p_2^{e_2}}\right|, \ldots, \left|G_{p_k^{e_k}}\right|\right]$ dir [20].

İspat: $\left\langle H_3^2 \right\rangle_m$ devirli grubunu düşünelim. O halde $3 \nmid m$ dir. $1 \leq i \leq k$ için $\left|\left\langle H_3^2 \right\rangle_{p_i^{e_i}}\right| = \lambda_i$ ve $\left|\left\langle H_3^2 \right\rangle_m\right| = \lambda$ olsun. (3.2.8) den

$$PH_3\left(3\lambda_i + 2\right) = 1 \bmod p_i^{e_i},$$
$$PH_3\left(3\lambda_i + 1\right) = 0 \bmod p_i^{e_i},$$

ve

$$PH_3(3\lambda+2) = 1 \bmod m,$$
$$PH_3(3\lambda+1) = 0 \bmod m.$$

denklikleri elde edilir ki bu da bize $c \in \mathbb{N}$ için $PH_3(3\lambda+2) = c \cdot PH_3(3\lambda_i+2)$ ve $PH_3(3\lambda+1) = c \cdot PH_3(3\lambda_i+1)$ eşitliklerinin sağlandığını göstermektedir. Yani, i nin $[1,k]$ aralığındaki her değeri için $(H_3^2)^\lambda$ ifadesi $c \cdot (H_3^2)^{\lambda_i}$ formundadır. Dolayısıyla $\left|\langle H_3^2 \rangle_m\right| = okek\left[\langle H_3^2 \rangle_{p_1^{e_1}}, \langle H_3^2 \rangle_{p_2^{e_2}}, \ldots, \langle H_3^2 \rangle_{p_k^{e_k}}\right]$ eşitliğinin sağlandığı doğrulanmış olur.

$\langle H_3^1 \rangle_m$ ve $\langle H_3^3 \rangle_m$ devirli grupları için benzer ispatlar yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılabilir.

3-basamak Fibonacci-Hurwitz, 3-basamak Pell-Hurwitz ve 3-basamak Jacobsthal-Hurwitz dizileri m-modülüne göre indirgenirse aşağıdaki gibi indirgemeli diziler elde edilmektedir:

$$\{FH_3^m(n)\} = \{FH_3^m(1), FH_3^m(2), FH_3^m(3), \ldots, FH_3^m(i), \ldots\},$$

$$\{PH_3^m(n)\} = \{PH_3^m(1), PH_3^m(2), PH_3^m(3), \ldots, PH_3^m(i), \ldots\}$$

ve

$$\{JH_3^m(n)\} = \{JH_3^m(1), JH_3^m(2), JH_3^m(3), \ldots, JH_3^m(i), \ldots\}$$

dir. Burada

$FH_3^m(i) = FH_3(i)(\bmod m)$, $PH_3^m(i) = PH_3(i)(\bmod m)$ ve $JH_3^m(i) = JH_3(i)(\bmod m)$ dir. Bu dizilerdeki indirgeme bağıntıları sırasıyla (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) deki bağıntılarla aynıdır [20].

Teorem 3.2.4: Eğer $2 \nmid m$ ise $\{FH_3{}^m(n)\}$ dizisi basit periyodiktir. Benzer şekilde $3 \nmid m$ ise $\{PH_3{}^m(n)\}$ ve $\{JH_3{}^m(n)\}$ dizileri de basit periyodiktir [20].

İspat: $\left\{JH_3^m(n)\right\}$ dizisini göz önüne alalım. $X=\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle|0\le x_i\le m-1\right\}$ olsun. $|X|=m^3$ olur ki bu da birbirinden farklı sıralı 3-lülerin sayısının m^3 olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu sıralı 3-lülerin yardımıyla elde edilecek herhangi bir dizide, bu sıralı üçlülerin en az birinin tekrar etmesi gerekmektedir ki bu tekrardan dolayı dizinin periyodik olduğunu görülmektedir. Böylece $i>j$ ve $JH_3^m(i+3)\equiv JH_3^m(j+3)$, $JH_3^m(i+2)\equiv JH_3^m(j+2)$ ve $JH_3^m(i+1)\equiv JH_3^m(j+1)$ ise $i\equiv j \bmod 3$ olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

(3.2.3) den kolaylıkla,

$$JH_3^m(i-1)\equiv JH_3^m(j-1),\, JH_3^m(i-2)\equiv JH_3^m(j-2),\ldots, JH_3^m(i-j+1)\equiv JH_3^m(1)$$

olduğu görülür ki bu da $\left\{JH_3^m(n)\right\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu göstermektedir.

$\left\{FH_3^m(n)\right\}$ ve $\left\{PH_3^m(n)\right\}$ dizileri için ispat benzer şekilde yapılabilir.

$\left\{FH_3^m(n)\right\}$, $\left\{PH_3^m(n)\right\}$ ve $\left\{JH_3^m(n)\right\}$ dizilerinin periyodları sırasıyla $l_F(m)$, $l_P(m)$ ve $l_J(m)$ ile gösterilsin.

Sonuç 3.2.1:

i. p, $p\neq 2$ olacak şekilde bir asal sayı ise $l_F(p)=3\cdot\left|\left\langle H_3^1\right\rangle_p\right|$ dir.

ii. p, $p\neq 3$ olacak şekilde bir bir asal sayı ise $l_P(p)=3\cdot\left|\left\langle H_3^2\right\rangle_p\right|$ ve $l_J(p)=3\cdot\left|\left\langle H_3^3\right\rangle_p\right|$ dir [20].

3.3. Redheffer Dizileri ve Uygulamaları

3.3.1. Redheffer Sayıları

Bu bölümde ilk olarak, Redheffer matrisi yardımıyla Redheffer dizisi tanımlanacak ve bu dizinin elemanları için çeşitli özellikler elde edilecektir.

Daha sonra bu dizi m-modülüne göre incelenecek ve bu manada dizinin m-modülüne göre indirgenmesi sonucu oluşacak periyodik dizi için çeşitli kurallar verilecektir.

Buna ek olarak, Redheffer dizisini genişleterek bu diziyi 2 ve 3 gerenli gruplarda, grup elemanları yardımıyla yeniden tanımlanacaktır. Bu anlamda 2 ve 3 gerenli grupların Redheffer ve esas Redheffer orbitleri tanımlanacak ve bu orbitler incelenecektir.

Son olarak, elde edilen sonuçların uygulaması olarak, S_3 Simetrik grubu, Q_8 Quarternion grubu, D_{2n} Dihedral grubu ve Dihedral grubunun bir genişlemesi olan $[2,q]$ grubunun Redheffer ve esas Redheffer orbitlerinin periyodları elde edilecektir.

$\{R(n)\}$ Redheffer dizisi aşağıdaki aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R(n)=\begin{cases} R(n-1)+R(n-2)+R(n-3), & n\equiv 1 \bmod 3 \\ R(n-3)+R(n-4), & n\equiv 2 \bmod 3\,,\ \ n>3 \text{ için} \\ R(n-3)+R(n-5), & n\equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

burada $R(1)=R(2)=0$ ve $R(3)=1$ dir [22].

Deveci bu çalışmada, $n\geq 1$ için Redheffer dizisinin elemanları arasında aşağıdaki bağıntıların sağlandığını göstermiştir:

$$R(3n+2)=R(3n+1)-R(3n)\,,$$

$$R(3n+3)=R(3n+1)-R(3n-1)\,,$$

$$R(3n)=R(3n-1)+1\,.$$

denklemleri elde edilmiştir [22]. Ayrıca n üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak, $n\geq 1$ için $(R_3)^n$ matrisi ağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$(R_3)^n=\begin{bmatrix} R(3n+3)+R(3n+2) & R(3n+1) & R(3n+1) \\ R(3n+1) & R(3n+3) & R(3n+2) \\ R(3n+1) & R(3n+2) & R(3n+3) \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

$\det R_3=-1$ olduğundan Redheffer sayıları için Simpson formülü

$$(R(3n+3)-R(3n+2)\left[\left(R(3n+3)+R(3n+2)\right)^2-2R(3n+1)^2\right]=\left(-1\right)^n$$

olarak elde edilir [22].

$n\geq 3$ için (4.2.1) eşitliğinden faydalanarak,

$$\begin{bmatrix} R(n+3) \\ R(n+2) \\ R(n+1) \\ R(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(n+2) \\ R(n+1) \\ R(n) \\ R(n-1) \end{bmatrix},\ n\equiv 2 \bmod 3 \text{ için,}$$

$$\begin{bmatrix} R(n+5) \\ R(n+4) \\ R(n+3) \\ R(n+2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(n+4) \\ R(n+3) \\ R(n+2) \\ R(n+1) \end{bmatrix},\ n\equiv 1 \bmod 3 \text{ için}$$

ve

$$\begin{bmatrix} R(n+4) \\ R(n+3) \\ R(n+2) \\ R(n+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(n+3) \\ R(n+2) \\ R(n+1) \\ R(n) \end{bmatrix},\ n\equiv 0 \bmod 3 \text{ için}$$

sonuçlarına ulaşılmıştır. O halde $n\geq 1$ için

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} R(3n+4) \\ R(3n+3) \\ R(3n+2) \\ R(3n+1) \end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(3n+1) \\ R(3n) \\ R(3n-1) \\ R(3n-2) \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(3n+1) \\ R(3n) \\ R(3n-1) \\ R(3n-2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir [22].

Teorem 3.3.1: n pozitif bir tam sayı olsun. O halde

$$R(3n+1)^2 - R(3n+4)R(3n-2) = \begin{cases} 1, & n \text{ tek ise} \\ \text{-1}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir [22].

İspat: Öncelikle

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

yazılabilir. Ayrıca n üzerinden tümevarım yöntemi ile,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} R(3n+4) & 0 & 0 & R(3n+1) \\ R(3n+3) & 0 & -1 & R(3n-1) \\ R(3n+3) & -1 & 0 & R(3n-1) \\ R(3n+1) & 0 & 0 & R(3n-2) \end{bmatrix}, & n \text{ tek ise} \\ \begin{bmatrix} R(3n+4) & 0 & 0 & R(3n+1) \\ R(3n+2) & 1 & 0 & R(3n) \\ R(3n+2) & 0 & 1 & R(3n) \\ R(3n+1) & 0 & 0 & R(3n-2) \end{bmatrix}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitlikliğine ulaşılabilir.

3.3.2. *m*-modülüne göre Redheffer Dizisi

Redheffer dizisini bir m-modülüne göre indirgeyerek,

$$\left\{R^{(m)}(n)\right\} = \left\{R^{(m)}(1), R^{(m)}(2), R^{(m)}(3), \ldots, R^{(m)}(i), \ldots\right\}$$

indirgemeli dizisi elde edilmiştir. Burada, $R^{(m)}(i) = R(i) \bmod m$ dir.

Teorem 3.3.2: $\left\{R^{(m)}(n)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [22].

İspat: $A = \left\{(a_1, a_2, a_3) | 0 \le a_i \le m-1\right\}$ olmak üzere $|A| = m^3$ olur ki bu da birbirinden farklı sıralı 3-lülerin sayısının m^3 olduğunu gösterir. Dolayısıyla bu sıralı 3-lüler yardımıyla elde edilecek herhangi bir dizide, bu sıralı 3-lülerin en az birinin tekrar etmesi gerekmektedir ki bu tekrardan dolayı dizinin periyodik olduğu görülmektedir. Böylece $i > j$ ve

$$R^{(m)}(i+3) = R^{(m)}(j+3), R^{(m)}(i+2) = R^{(m)}(j+2), R^{(m)}(i+1) = R^{(m)}(j+1)$$

ise $i \equiv j \bmod 3$ olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Redheffer dizisinin tanımından faydalanarak,

$$R^{(m)}(i-1) \equiv R^{(m)}(j-1), R^{(m)}(i-2) \equiv R^{(m)}(j-2), \ldots, R^{(m)}(i-j+1) \equiv R^{(m)}(1)$$

denklikleri elde edilebilir ki bu da $\{R^{(m)}(n)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{R^{(m)}(n)\}$ dizisinin en küçük periyodu $l_r(m)$ ile gösterilsin. $\langle R_3 \rangle_m = \{(R_3)^i (\bmod m) | i \geq 0\}$ olsun. $\det(R_3)^i = (-1)^i$ den dolayı $\langle R_3 \rangle_m$ devirli bir gruptur. $|\langle R_3 \rangle_m|$, $\langle R_3 \rangle_m$ grubunun mertebesini ve p asal bir sayı olsun. Buna göre (4.2.2) den $l_r(p) = 3|\langle R_3 \rangle_p|$ eşitliği elde edilmiştir.

Örnek 3.3.1:

$$\{R^{(3)}(n)\} = \{0,0,1,1,0,1,2,1,2,2,0,1,0,2,0,2,2,0,1,1,2,1,2,0,0,0,1,1,0,1,\ldots\}$$

ve

$$(R_3)^8 \equiv I \bmod 3$$

olduğundan $l_r(3) = 3|\langle R_3 \rangle_3| = 24$ tür.

Teorem 3.3.3: p asal bir sayı ve u, $l_r(p) = l_r(p^u)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olsun. O zaman her $v \geq u$ için $l_r(p^v) = p^{v-u} \cdot l_r(p)$ dir [22].

İspat: a pozitif bir tamsayı ve $\left(R_3\right)^{l_r\left(p^{a+1}\right)} \equiv I\left(\bmod p^{a+1}\right)$ olmak üzere $\left(R_3\right)^{l_r(p^{a+1})} \equiv I(\bmod p^a)$ dir. Burada I, 3×3 tipinde birim matristir. Böylece $l_r\left(p^a\right)$ nın $l_r\left(p^{a+1}\right)$ yi böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(R_3\right)^{l_r\left(p^a\right)} = I + \left(r_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)$ yazılarak binom açılımı yardımıyla,

$$\left(R_3\right)^{l_r(p^a)\cdot p} = \left(I + (r_{ij}^{(a)} \cdot p^a)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} (r_{ij}^{(a)} \cdot p^a)^i \equiv I(\bmod p^{a+1})$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik yardımıyla $l_r\left(p^{a+1}\right)$ nın, $l_r\left(p^a\right)$ yı böldüğü sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece $l_r(p^{a+1}) = l_r(p^a)$ ya da $l_r(p^{a+1}) = l_r(p^a)\cdot p$ olup, p tarafından bölünemeyen bir $r_{ij}^{(a)}$ tamsayısının mevcut olduğu açıktır. u, $l_r\left(p\right) = l_r\left(p^u\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $l_r\left(p^u\right) \neq l_r\left(p^{u+1}\right)$ olur. $l_r\left(p^u\right) \neq l_r\left(p^{u+1}\right)$ olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $r_{ij}^{(u+1)}$ tamsayısının mevcut olacağı açıktır. Dolayısıyla $l_r\left(p^{u+1}\right) \neq l_r\left(p^{u+2}\right)$ sonucu elde edilmektedir. u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanmaktadır.

Teorem 3.3.4: p_i ler farklı asal sayıları olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, $\left(k \geq 1\right)$ olsun. O zaman $l_r\left(m\right) = okek\left[l_r\left(p_1^{e_1}\right), l_r\left(p_2^{e_2}\right), \ldots, l_r\left(p_k^{e_k}\right)\right]$ dir [22].

İspat: $l_r\left(p_i^{e_i}\right)$, $\left\{R^{\left(p_i^{e_i}\right)}\left(n\right)\right\}$ dizisinin periyot uzunluğu olduğundan bu dizi sadece $\lambda l_r\left(p_i^{e_i}\right)$, $\left(\lambda \in \mathbb{N}\right)$ bloğundan sonraki uzunluğun tekrarından oluşmaktadır. Ayrıca $l_r\left(m\right)$, $\left\{R^{(m)}\left(n\right)\right\}$ dizisinin periyot uzunluğu olup, i nin tüm değerleri için $\left\{R^{\left(p_i^{e_i}\right)}\left(n\right)\right\}$ dizisinin terimleri $l_r\left(m\right)$ nin tekrarından oluşmaktadır. O zaman $l_r\left(m\right)$, i nin tüm değerleri için $\lambda \cdot l_r\left(p_i^{e_i}\right)$ şeklinde olup bu sayı $\left\{R^{(m)}(n)\right\}$ nin periyodunu vermektedir. Böylece $l_r\left(m\right) = okek\left[l_r\left(p_1^{e_1}\right), l_r\left(p_2^{e_2}\right), \ldots, l_r\left(p_k^{e_k}\right)\right]$ elde edilmektedir.

3.3.3. Redheffer Dizisi ve Gruplardaki Esas Redheffer Dizisi

G, j-gerenli sonlu bir grup ve X, $\underbrace{G\times G\times G\times\ldots\times G}_{j}$ nin alt kümesi olsun. Eğer $\left(x_1,x_2,\ldots,x_j\right)\in X$ ise G, $x_1,x_2,\ldots,x_j$ tarafından üretilmektedir. $\left(x_1,x_2,\ldots,x_j\right)$ ifadesi G grubunun bir geren j-lisi olarak adlandırılmaktadır.

Her bir $\left(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}\right)\in X$ geren j-lisi, $AutG$ kümesinin elemanlarının etkisi altında X in $|AutG|$ tane elemanına dönüşür. Bundan dolayı G grubu için

$$d_j\left(G\right)=|X||AutG|$$

tane izomorf olmayan geren j-lisi vardır (burada $|X|$, X in elemanlarının sayısını verir).

$d_j\left(G\right)$ notasyonu hakkında ayrıntılı bilgiye [29] çalışmasında ulaşılabilir.

Tanım 3.3.1: G sonlu bir grup olmak üzere A kümesi tarafından üretilen grup $G=\langle A\rangle$ olsun. Burada A kümesi, $A=\{x_1,x_2\}$ ya da $A=\{x_1,x_2,x_3\}$ dir. G grubunun Redheffer orbiti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

i. G, 2-gerenli bir grup olsun. $R(G)_{\{x_1,x_2\}}$ Redheffer orbitindeki $\left(x_1,x_2\right)\in X$ geren çifti tarafından üretilen G nin elemanlarının $\{a_i\}$ dizisi

$$a_1=x_1,\ a_2=x_2,\ a_3=e$$

başlangıç değerleri ve $i\geq 1$ için,

$$a_{i+3}=\begin{cases} a_i a_{i+1} a_{i+2}, & i\equiv 1 \bmod 3, \\ a_{i-1}a_i, & i\equiv 2 \bmod 3, \\ a_{i-2}a_i, & i\equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

ii. G, 3-gerenli bir grup olsun. $R(G)_{\{x_1,x_2,x_3\}}$ Redheffer orbitindeki $(x_1,x_2,x_3)\in X$ geren 3-lüsü tarafından üretilen G nin elemanlarının $\{a_i\}$ dizisi

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ a_3 = x_3$$

başlangıç değerleri ve $i \geq 1$ için,

$$a_{i+3} = \begin{cases} a_i a_{i+1} a_{i+2}, & i \equiv 1 \bmod 3, \\ a_{i-1} a_i, & i \equiv 2 \bmod 3, \\ a_{i-2} a_i, & i \equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

olarak tanımlanır [22].

Teorem 3.3.5: Sonlu bir grubun Redheffer orbiti basit periyodiktir [22].

İspat: G nin mertebesi n olsun. G grubunda ki birbirinden farklı sıralı 3-lülerin sayısının n^3 olduğundan bu sıralı 3-lülerden en az bir tanesinin G nin bir Redheffer orbitinde iki defa görüleceği açıktır. Doalyısıyla bu sıralı 3-lüler tekrar ettiğinden dolayı Redheffer orbiti periyodiktir.

Redheffer orbiti periyodik olduğundan dolayı,

$$a_{i+1} = a_{j+1},\ a_{i+2} = a_{j+2},\ a_{i+3} = a_{j+3}$$

yazılmaktadır. Burada mevcut olan i ve j doğal sayıları için $i > j$ dir. Redheffer orbitinde tanımlanan bağıntı yardımıyla ve $n > 3$ için

$$\begin{aligned} &a_n\left(a_{n-1}\right)^{-1}\left(a_{n-2}\right)^{-1} = a_{n-3}, && i \equiv 1 \bmod 3 \text{ ise} \\ &a_n\left(a_{n-3}\right)^{-1} = a_{n-4}, && i \equiv 2 \bmod 3 \text{ ise} \\ &a_n\left(a_{n-3}\right) = a_{n-5}, && i \equiv 0 \bmod 3 \text{ ise} \end{aligned}$$

yazılmaktadır. Bu nedenle $a_i = a_j$ ve aşağıdaki bağıntı yardımıyla,

$$a_{i-1} = a_{j-1}, a_{i-2} = a_{j-2}, \ldots, a_{j-(j-1)} = a_{i-(j-1)} = a_1$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da dizinin basit periyodik olduğu anlamına gelir. $LR(G)_A$, $R(G)_A$ Redheffer orbitinin periyodunun uzunluğunu belirtir ve A kümesi tarafından üretilen G nin Redheffer uzunluğu olarak adlandırılır.

Tanım 3.3.2: G sonlu bir grup olsun. Eğer G nin her elemanı G nin Redheffer orbitinde görünüyorsa, o zaman G grubuna Redheffer alt dizilenebilirdir denir.

Eğer $\theta \in AutG$ ve $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X$ ise $(x_1\theta, x_2\theta, \ldots, x_j\theta) \in X$ olduğu açıktır.

$B \subseteq G$ alt kümesi ve $\theta \in AutG$ için B kümesinin θ altındaki görüntüsü

$$B\theta = \{b\theta : b \in B\}$$

şeklindedir [22].

Lemma 3.3.1: $\theta \in AutG$ olsun. O zaman $(R(G)_A)\theta = R(G)_{A\theta}$ dır [22].

İspat: $R(G)_A = \{a_i\}$ olsun. O zaman $i \geq 1$ için,

$$a_{i+3}\theta = \begin{cases} a_i\theta a_{i+1}\theta a_{i+2}\theta, & i \equiv 1 \bmod 3, \\ a_{i-1}\theta a_i\theta, & i \equiv 2 \bmod 3, \\ a_{i-2}\theta a_i\theta, & i \equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

olduğundan $\{a_i\}\theta = \{a_i\theta\}$ dir.

Eğer $AutG$ kümesinin k tane elemanı $R(G)_A$ orbitini kendi üzerine dönüştürür ise $\theta \in AutG$ için $|AutG||k$ tane farklı $R(G)_A$ Redheffer orbiti belirlenebilir.

Tanım 3.3.3: G sonlu bir grup olmak üzere A kümesi tarafından üretilen grup $G = \langle A \rangle$ olsun. Burada A kümesi, $A = \{x_1 x_2\}$ ya da $A = \{x_1 x_2, x_3\}$ dir. G grubunun Redheffer orbiti aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

i. G, 2-gerenli bir grup olsun. Herhangi bir $\theta \in AutG$ için $(x_1, x_2) \in X$ geren çifti için *m* esas uzunluğa sahip $\overline{R(G)_{\{x_1, x_2\}}} = \{b_i\}$ esas Redheffer orbiti

$$b_1 = x_1,\ b_2 = x_2,\ b_3 = e$$

başlangıç değerleri ile $i \geq 1$ için

$$b_{i+3} = \begin{cases} b_i b_{i+1} b_{i+2}, & i \equiv 1 \bmod 3, \\ b_{i-1} b_i, & i \equiv 2 \bmod 3, \\ b_{i-2} b_i, & i \equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada $m \geq 1$ için

$$b_1 = b_{m+1}\theta, b_2 = b_{m+2}\theta, \ldots, b_6 = b_{m+6}\theta$$

olacak şekilde en küçük tamsayılardır.

ii. G, 3-gerenli bir grup olsun. Herhangi bir $\theta \in AutG$ için $(x_1, x_2, x_3) \in X$ geren üçlüsü için *m* esas uzunluğa sahip $\overline{R(G)_{\{x_1,x_2,x_3\}}} = \{b_i\}$ esas Redheffer orbiti

$$b_1 = x_1,\ b_2 = x_2,\ b_3 = x_3$$

başlangıç değerleri ile $i \geq 1$ için

$$b_{i+3} = \begin{cases} b_i b_{i+1} b_{i+2}, & i \equiv 1 \bmod 3, \\ b_{i-1} b_i, & i \equiv 2 \bmod 3, \\ b_{i-2} b_i, & i \equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada $m \geq 1$ için

$$b_1 = b_{m+1}\theta, b_2 = b_{m+2}\theta, \ldots, b_6 = b_{m+6}\theta$$

olacak şekilde en küçük tamsayılardır.

$BLR(G)_A$, $\overline{R(G)_A}$ esas Redheffer orbitinin periyodik uzunluğunu belirtmektedir ve A kümesi tarafından üretilen G nin esas Redheffer uzunluğu olarak adlandırılmaktadır. $\overline{R(G)_A}$ esas Redheffer orbiti m tane eleman içerdiğinden dolayı sonlu olduğu açıktır. Eğer G, 2-gerenli bir grup ise, $1 \leq i \leq 5$ ve b_{m+i}, b_{m+i+1} G yi gerecek şekilde bir i tamsayısı mevcuttur. Ayrıca, G, 3-gerenli bir grup ise b_{m+i}, b_{m+i+1}, b_{m+i+3} G yi gerecek şekilde bir i tamsayının mevcut olduğu kolaylıkla görülmektedir. Böylece θ dönüşümünün tek türlü olarak belirlenebileceği sonucuna ulaşılmaktadır [22].

Teorem 3.3.6: G sonlu bir grup ve $G=\langle A\rangle$ grubu $A=\{x_1,x_2\}$ ya da $A=\{x_1,x_2,x_3\}$ kümeleri tarafından üretilmiş olsun. Eğer $LR(G)_A=n$ ve $BLR(G)_A=m$ ise, m nin, n yi böldüğü görülmektedir ve $AutG$ kümesinin $R(G)_A$ yı kendisi üzerine dönüştüren $n|m$ tane eleman vardır [22].

İspat: $\theta\in AutG$ otomorfizminin mertebesi t olmak üzere $n=mt$ olsun.

$$R(G)_A=\overline{R(G)_A}\cup\overline{R(G)_{A\theta}}\cup\overline{R(G)_{A\theta^2}}\cup\cdots$$

olduğundan $BLR(G)_A=BLR(G)_{A\theta}$ dır. Bu eşitlik yardımıyla $1,\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{t-1}$ dönüşümlerinin $R(G)_A$ orbitini kendisi üzerine dönüştürdükleri görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3.4. Uygulamalar

Teorem 3.3.7: $LR(S_3)_{\{x,y\}}=3\cdot BLR(S_3)_{\{x,y\}}=36$ [22].

İspat: Mertebesi 6 olan S_3 simetrik grubu $\left\langle x,y:x^2=y^3=(xy)^2=e\right\rangle$ şeklinde takdim edilmektedir. $R(S_3)_{\{x,y\}}$ Redheffer orbiti

$$\begin{aligned}&x,y,e,xy,xy,x,x,e,y^2,yx,x,yx,xy,y,e,yx,yx,xy,xy,e,y^2,x,\\&xy,x,yx,y,e,x,x,yx,yx,e,y^2,xy,yx,xy,x,y,e,\ldots\end{aligned}$$

şeklinde olup $x\theta=yx$ ve $y\theta=y$ olduğundan $LR(S_3)_{\{x,y\}}=36$ ve $BLR(S_3)_{\{x,y\}}=12$ elde edilmektedir. Burada θ, y^2 ye eşlenik bir iç otomorfizmdir.

Ayrıca S_3 simetrik grubunun her elemanı yukarıdaki dizide ortaya çıktığı için S_3 simetrik grubu Redheffer dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 3.3.8: $LR(Q_8)_{\{x,y\}}=2\cdot BLR(Q_8)_{\{x,y\}}=24$ [22].

İspat: Mertebesi 8 olan Q_8 quarternion grubu $\left\langle x,y:x^4=e,y^2=x^2,yx=x^3y\right\rangle$ takdim edilmektedir. $R(Q_8)_{\{x,y\}}$ Redheffer orbiti

$$x,y,e,xy,xy,x,x^3,x^2,y,xy,x,yx,x^3,y,e,yx,yx,x^3,x,x^2,y,yx,x^3,xy,x,y,e,\ldots$$

şeklinde olup $x\theta=x^3$ ve $y\theta=y$ olduğundan $LR(Q_8)_{\{x,y\}}=24$ ve $BLR(Q_8)_{\{x,y\}}=12$ elde edilmektedir. Burada θ, y ye eşlenik bir iç otomorfizmdir.

Ayrıca, Q_8 quaeternion grubunun bir elemanı olan y^3 yukarıdaki dizinin bir elemanı olarak ortaya çıkmadığı için Q_8 quaternion grubu Redheffer dizilenebilir bir grup değildir.

Teorem 3.3.9:

i. $LR(D_4)_{\{x,y\}}=BLR(D_4)_{\{x,y\}}=12$.

ii. $n\geq 3$ için $LR(D_{2n})_{\{x,y\}}=2\cdot BLR(D_{2n})_{\{x,y\}}=24$ [22].

İspat: Mertebesi $2n$ olan D_{2n} dihedral grubu $\left\langle x,y:x^2=y^2=(xy)^n=e\right\rangle$ taktimi tarafından ele alınsın. $R(D_{2n})_{\{x,y\}}$ Redheffer orbiti

$$\begin{aligned}&x,y,e,xy,xy,x,(xy)^2x,(xy)^2,xyx,yx,x,xy,yxy,y,e,\\&yx,yx,yxy,(xy)^3y,(yx)^2,(yx)^2y,xy,yxy,yx,x,y,e,\ldots\end{aligned}$$

dir.

i. $LR(D_4)_{\{x,y\}}=BLR(D_4)_{\{x,y\}}=12$ dir. Çünkü $x\theta=x$ ve $y\theta=y$ dir. Burada θ birim dönüşümdür.

ii. $n\geq 3$ ise $LR(D_{2n})_{\{x,y\}}=24$ ve $BLR(D_{2n})_{\{x,y\}}=12$ dir. Çünkü $x\theta=yxy$ ve $y\theta=y$ olduğundan θ, y tarafından konjugasyonla indirgenmiş bir iç otomorfizmdir. D_4 (4-grup), D_6, D_8 ve D_{10} gruplarının Redheffer dizilenebilir olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Buna ek olarak $n \geq 6$ için D_{2n} grubu Redheffer dizilenebilir bir grup değildir. Çünkü D_{2n} Dihedral grubunun $(xy)^3$ elemanı yukarıdaki dizinin bir elemanı olarak ortaya çıkmadığı için D_{2n} grubu Redheffer dizilenebilir bir grup değildir.

Teorem 3.3.10: $LR([2,q])_{\{x,y,z\}} = 6q$ ve $BLR([2,q])_{\{x,y,z\}} = \begin{cases} \dfrac{3q}{2}, & n \text{ çift ise,} \\ 3q, & n \text{ tek ise,} \end{cases}$

[22].

İspat: Mertebesi $4q$ olan $[2,q]$ grubu $\langle x, y : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (xz)^2 = (yz)^q = e \rangle$ şeklinde takdim edilmektedir. $[2,q] = C_2 \times D_{2q}$ olduğu açıktır. Burada C_2 mertebesi 2 olan devirli bir gruptur. $R([2,q])_{\{x,y,z\}}$ Redheffer orbiti

$$\begin{aligned} &x, y, z, xyz, xy, xz, x(yz)^2, yzy, y, x(yz)^3, x(yz)^3 y, x(yz)^2 y, \\ &x(yz)^4, (yz)^6 y, (yz)^5 y, x(yz)^5, x(yz)^{10} y, x(yz)^9 y, x(yz)^6, \\ &(yz)^{15} y, (yz)^{14} y, x(yz)^7, x(yz)^{21} y, x(yz)^{20} y, x(yz)^8, (yz)^{28} y, (yz)^{27} y, \ldots \end{aligned}$$

dir. Bundan faydalanarak

$$x, y, z, xyz, xy, xz, \ldots,$$

$$\begin{aligned} &z_{6i+1} = x(yz)^{2i}, \; z_{6i+2} = (yz)^{2i^2-i} y, \; z_{6i+3} = (yz)^{2i^2-i-1} y, \\ &z_{6i+4} = x(yz)^{2i+1}, \; z_{6i+5} = x(yz)^{2i^2+i} y, \; z_{6i+6} = x(yz)^{2i^2+i-1} y, \ldots. \end{aligned}$$

dizisinin genel hali tanımlanmıştır. Ayrıca en küçük $i \in \mathbb{N}$ ve $v \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $i = qv$ dir. Eğer $i = q$ seçersek o zaman $LR([2,q])_{\{x,y,z\}} = 6q$ elde edilmektedir.

Eğer $q \equiv 0 \bmod 4$ ise o zaman, $x\theta = x(yz)^{\frac{q}{2}}$, $y\theta = (yz)^{a_1} y$ ve $z\theta = (yz)^{a_1 - 1} y$ den dolayı $BLR([2,q])_{\{x,y,z\}} = \dfrac{3q}{2}$ dir. Burada $\dfrac{9q^2}{8} - \dfrac{3q}{4} \equiv a_1 \bmod q$ dir ve θ mertebesi 4 olan bir dış otomorfizmdir.

Eğer $q \equiv 2 \bmod 4$ ise o zaman, $x\theta = x(yz)^{\frac{q}{2}}$, $y\theta = x(yz)^{a_2} y$ ve $z\theta = x(yz)^{a_2-1} y$ den dolayı $BLR([2,q])_{\{x,y,z\}} = \frac{3q}{2}$ dir. Burada $\frac{9(q-2)^2}{8} + \frac{15(q-2)}{4} + 3 \equiv a_2 \bmod q$ dir ve θ mertebesi 4 olan bir dış otomorfizmdir.

Eğer n tek ise o zaman, $x\theta = x$, $y\theta = xy$ ve $z\theta = xz$ den dolayı $BLR([2,q])_{\{x,y,z\}} = 3q$ dir. Burada θ mertebesi 4 olan bir dış otomorfizmdir.

Ayrıca, $[2,q]$ grubunun yz elemanı yukarıdaki dizinin bir elemanı olarak ortaya çıkmadığı için $[2,q]$ grubun Redheffer dizilenebilir bir grup değildir.

Teorem 3.3.11:

i. $LR(A_4)_{\{x,y,z\}} = 3 \cdot BLR(A_4)_{\{x,y,z\}} = 18.$

ii. $LR(A_4)_{\{x,y\}} = 3 \cdot BLR(A_4)_{\{x,y\}} = 72$ [22].

İspat: Mertebesi 12 olan A_4 alterna grubu $\langle x, y, z : x^2 = y^3 = z^3 = xyz = e \rangle$ ya da $\langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^3 = e \rangle$ şeklinde takdim edilmektedir.

3-gerenlilerin durumunu düşünelim. $z = y^2 x$ olduğu açıktır. $R(A_4)_{\{x,y,z\}}$ Redheffer orbiti

$$x, y, z, e, xy, yxy, yxy^2, xy, yxy, e, xyx, y^2, y^2xy, xyx, y^2, e, y, y^2x, x, y, z, \ldots$$

şeklinde olup $x\theta = y^2xy$, $y\theta = xyx$ ve $z\theta = y^2$ olduğundan $LR(A_4)_{\{x,y,z\}} = 18$ ve $BLR(A_4)_{\{x,y,z\}} = 6$ olarak elde edilir. Burada θ, xy^2 ye eşlenik bir iç otomorfizmdir. Ayrıca, $\{x, y, z\}$ geren kümesi için A_4 alterna grubu Redheffer dizilenebilir değildir. Çünkü $R(A_4)_{\{x,y,z\}}$ orbiti on tane farklı elemandan oluşuyorken A_4 grubu 12 elemana sahiptir.

2 -gerenlilerin durumunu düşünelim. $R(A_4)_{\{x,y\}}$ orbiti

$$x, y, e, xy, xy, x, y^2, y^2x, xyx, y^2x, yx, yxy^2, e, yxy^2, yxy, y^2, yxy^2, yxy, y,$$
$$xy^2, xy, xyx, yxy^2, yxy, y^2xy, y, e, xyx, xyx, y^2xy, y^2, yxy, yx, yxy, xy, x, e,$$
$$x, xy^2, y^2, x, xy^2, y, y^2x, xyx, yx, x, xy^2, yxy^2, y, e, yx, yx, yxy^2, y^2, xy^2, xy, xy^2,$$
$$xyx, y^2xy, e, y^2xy, y^2x, y^2, y^2xy, y^2x, y, yxy, yx, xy, y^2xy, y^2x, x, y, e, \dots$$

şeklinde olup, periyodu 72 dir. Yani, $LR(A_4)_{\{x,y\}} = 72$ dir. Burada $x\theta = yxy^2$ ve $y\theta = y$ olduğundan $BLR(A_4)_{\{x,y\}} = 24$ olarak elde edilir. Burada θ, y ye eşlenik bir iç otomorfizmdir.

Ayrıca, $\{x, y\}$ geren kümesi için A_4 alterna grubunun bütün elemanları $R(A_4)_{\{x,y\}}$ orbitinde ortaya çıktığından dolayı bu grup $\{x, y\}$ geren kümesine göre Redheffer dizilenebilirdir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Bezout Matrisi Yardımıyla Devirli Gruplar

Bu bölümde, k-basamak ile $(k-1)$-basamak Fibonacci dizileri, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ile genelleştirilmiş $(k-1)$-mertebeden Pell dizileri ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal ile genelleştirilmiş $(k-1)$-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Bezout matrisleri tanımlacaktır. Bu matrislerin kuvvetlerinin m-modülüne indirgenmesi suretiyle bu matrislerin determinatlarının m-modülüne göre durumu göz alınarak devirli gruplar üretilecek ve bu devirli grupların geniş bir şekilde incelenecektir.

k-basamak Fibonacci, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P_k^F(x) = x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1,$$

$$P_k^P(x) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1$$

ve

$$P_k^J(x) = x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - 1.$$

$P_k^F(x)$, $P_k^P(x)$ ve $P_k^J(x)$ polinomları için Bezout matrislerini aşağıdaki gibi yazılabilir.

Tanım 4.1.1: Her $k \geq 3$ pozitif tamsayısı için, $B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right) = \left[b_{ij}\right]_{k\times k}$ Bezout matrisi aşağıdaki gibidir:

$$b_{i(k-t)} = \begin{cases} 0, & i < t < k, \\ 2, & i = t < k, \\ 1, & (0 < t < i < k);\ (t = 0 \text{ ve } i = k), \\ -1, & (t = 0 \text{ ve } i < k);\ (t < n \text{ ve } i = k). \end{cases}$$

yani,

$$B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right) = \begin{bmatrix} & & & & -1 \\ & & & & -1 \\ & & M & & \vdots \\ & & & & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

dır. Burada M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}$$

şeklindeki kare bir matristir [21].

Örnek 4.1.1:

$$B_5\left(P_5^F(x), P_4^F(x)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tanım 4.1.2: Her $k \geq 3$ pozitif tamsayısı için, $B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right) = \left[b_{ij}\right]_{k\times k}$ Bezout matrisi aşağıdaki gibidir:

Eğer $k = 3$ ise $B_3\left(P_3^P(x), P_2^P(x)\right)$ Bezout matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Eğer $k=4$ ise $B_4\left(P_4^P(x), P_3^P(x)\right)$ Bezout matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$k \geq 5$ olmak üzere $B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right) = \left[b_{ij}\right]_{k\times k}$ Bezout matrisleri aşağıdaki formda tanımlanır:

$$b_{i(k-t-1)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq i < t < k-1, \\ -1, & (1 \leq i = t < k-1); (1 \leq i < k-1 \text{ ve } t = -1); (i = k \text{ ve } 1 \leq t < k-1), \\ 2, & (2 \leq i < k-1 \text{ ve } t = i-1 \text{ ya da } t = 0); (i = k-1 \text{ ve } 2 \leq t \leq k-2), \\ -2, & (i = k-1 \text{ ve } t = -1); (i = k \text{ ve } t = 0), \\ 3, & (i = 1 \text{ ve } t = 0); (i = k-1 \text{ ve } t = k-2), \\ 4, & i = k-1 \text{ ve } t = 0, \\ 1, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

yani, $k \geq 5$ için

$$B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right) = \begin{bmatrix} & & & & 3 & -1 \\ & & & & 2 & -1 \\ & & M & & \vdots & \vdots \\ & & & & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \cdots & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

dir. Burada M matrisi

$$M=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(k-2)\times(k-2)}$$

şeklindeki kare bir matristir [21].

Örnek 4.1.2:

$$B_6\left(P_6^P(x),P_5^P(x)\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$k\geq 3$ için

$$\det B_k\left(P_k^F(x),P_{k-1}^F(x)\right)=\det B_k\left(P_k^P(x),P_{k-1}^P(x)\right)=\begin{cases} -1 & \text{eğer } k\equiv 0,3 \bmod 4, \\ 1, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 4.1.3: Her $k\geq 3$ pozitif tamsayısı için, $B_k\left(P_k^J(x),P_{k-1}^J(x)\right)=\left[b_{ij}\right]_{k\times k}$ Bezout matrisi aşağıdaki gibidir:

Eğer $k=3$ ise $B_3\left(P_3^J(x),P_2^J(x)\right)$ Bezout matrisi

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Eğer $k=4$ ise $B_4\left(P_4^J(x),P_3^J(x)\right)$ Bezout matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $k \geq 5$ olmak üzere $B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right) = \left[b_{ij}\right]_{k \times k}$ Bezout matrisleri aşağıdaki formda tanımlanır:

$$b_{i(k-t-1)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq i < t < k-1, \\ 3, & (1 \leq i = t < k-1); (i = k-1 \text{ ve } t = k-2); (i = 1 \text{ ve } t = 0), \\ 6, & 2 \leq i < k-1 \text{ ve } t = i-1, \\ 1, & (2 \leq i < k-1 \text{ ve } t = i-1 \text{ ya da } t = 0); (i = k \text{ ve } t = -1), \\ -1, & (i = k-1 \text{ ve } t = -1); (i = k \text{ ve } t = 0), \\ -2, & (1 \leq i < k-1 \text{ ve } t = -1); (i = k \text{ ve } 1 \leq t < k-1), \\ 4, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} .$$

yani; $k \geq 5$ için

$$B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right) = \begin{bmatrix} & & & & 3 & -2 \\ & & & & 1 & -2 \\ & & M & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -2 \\ 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

dir. Burada M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 6 & 4 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 3 & 6 & 4 & \cdots & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 4 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{(k-2) \times (k-2)}$$

şeklindeki kare bir matristir [21].

$k \geq 3$ için $\det B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right) = \det B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right) = \pm 1$ olduğundan $m \geq 2$ için $\left\langle B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right\rangle_m$ ve $\left\langle B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)\right\rangle_m$ kümeleri devirli gruplardır $\left(\det B_k\left(P_k(x), P_{k-1}(x)\right), m\right) = 1$ dir.

Teorem 4.1.1: M matrisi $B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)$, $B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)$ ve $B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)$ matrislerinden herhangi biri olmak üzere p, $(\det M, p) = 1$ olacak şekilde bir asal sayı ve α, $\left|\langle M\rangle_p\right| = \left|\langle M\rangle_{p^\alpha}\right|$ eşitliğini sağlayan pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde her $\lambda \geq \alpha$ için $\left|\langle M\rangle_{p^\lambda}\right| = p^{\lambda-\alpha} \cdot \left|\langle M\rangle_p\right|$ dir [21].

İspat: $k \geq 3$ ve $m \geq 2$ için $\left\langle B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right\rangle_m$ devirli grubunu göz önüne alalım. a pozitif bir tamsayı ve $\left|\left\langle B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right\rangle_m\right|$, $o(m)$ ile gösterilsin. Eğer

$$\left(B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right)^{o\left(p^{a+1}\right)} \equiv I \left(\text{mod } p^{a+1}\right)$$

ise $\left(B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right)^{o\left(p^{a+1}\right)} \equiv I \left(\text{mod } p^{a}\right)$ dir. Burada I, $k \times k$ tipinde birim matristir. Böylece $o\left(p^{a+1}\right)$ nın $o\left(p^{a}\right)$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right)^{O\left(p^{a+1}\right)} = I + \left(b_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)$ yazılarak binom açılımı yardımıyla

$$\left(B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right)^{O\left(p^{a+1}\right)\cdot p} = \left(I + \left(b_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(b_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)^i \equiv I \left(\text{mod } p^{a+1}\right)$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlik yardımıyla $o\left(p^{a+1}\right)$ nın $o\left(p^{a}\right) \cdot p$ yı böldüğü sonucuna ulaşılmaktadır. Böylece $o\left(p^{a+1}\right) = o\left(p^{a}\right)$ ya da $o\left(p^{a+1}\right) = o\left(p^{a}\right) \cdot p$ olur p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(a)}$ mevcut olduğu durumda $o\left(p^{a+1}\right) = o\left(p^{a}\right) \cdot p$ eşitliğinin geçerli olacağı açıktır. α, $o(p) = o\left(p^\alpha\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $o\left(p^\alpha\right) \neq o\left(p^{\alpha+1}\right)$ olur. $o\left(p^\alpha\right) \neq o\left(p^{\alpha+1}\right)$ olduğundan p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(a)}$ tamsayısının mevut olacağı açıktır. Dolayısıyla

$o\left(p^{\alpha+1}\right) \neq o\left(p^{\alpha+2}\right)$ sonucu elde edilmektedir. α üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanmaktadır.

$\left\langle B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)\right\rangle_m$ ve $\left\langle B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right\rangle_m$ devirli grupları için ispatlar yukarıdakine benzer olarak yapılabilir.

Örnek 4.1.3:

i. $\left|\left\langle B_5\left(P_5^F(x), P_4^F(x)\right)\right\rangle_7\right| = 48$

olup,

$$\left|\left\langle B_5\left(P_5^F(x), P_4^F(x)\right)\right\rangle_{7^{10}}\right| = 1936973136 = 7^9 \cdot 48 \text{ dir.}$$

ii. $\left|\left\langle B_3\left(P_3^P(x), P_2^P(x)\right)\right\rangle_{11}\right| = 12$

olup,

$$\left|\left\langle B_3\left(P_3^P(x), P_2^P(x)\right)\right\rangle_{11^{20}}\right| = 733909085380974555492 = 11^{19} \cdot 12 \text{ dir.}$$

iii. $\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x), P_3^J(x)\right)\right\rangle_5\right| = 104$

olup,

$$\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x), P_3^J(x)\right)\right\rangle_{5^{15}}\right| = 634765625000 = 5^{14} \cdot 104$$

dir.

Teorem 4.1.2: G_m, $\left\langle B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right\rangle_m$, $\left\langle B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)\right\rangle_m$ ve $\left\langle B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi biri olsun ve p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{n=1}^{t} p_n^{e_n}$, $(t \geq 1)$ olsun. O zaman,

$$|G_m| = okek\left[\left|G_{p_1^{e_1}}\right|, \left|G_{p_2^{e_2}}\right|, \ldots, \left|G_{p_k^{e_k}}\right|\right]$$

dir [21].

İspat: $2 \nmid m$ için $\left\langle B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right\rangle_m$ devirli grubunu olduğunu göz önüne alalım. $1 \le i \le t$ için $\left|\left\langle B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right\rangle_{p_n^{e_n}}\right| = u_n$ ve $\left|\left\langle B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right\rangle_m\right| = u$ olsun. O zaman

$$\left(B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right)^{u_n} = \begin{cases} p_n^{e_n}\varepsilon_{ij}, & i > j, \\ p_n^{e_n}\varepsilon_{ij} + 1, & i = j, \\ p_n^{e_n}\varepsilon_{ij}, & i < j, \end{cases}$$

ve

$$\left(B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)\right)^{u} = \begin{cases} m\varepsilon_{ij}^{'}, & i > j, \\ m\varepsilon_{ij}^{'} + 1, & i = j, \\ m\varepsilon_{ij}^{'}, & i < j, \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $0 \le i, j \le k$ için, ε_{ij} ve $\varepsilon_{ij}^{'}$ tamsayılardır. $1 \le n \le t$ için $m = c \cdot p_n^{e^n}$ olduğundan u, $m = c \cdot u$ formundadır. Böylece $|u| = okek\left[u_1, u_2, \cdots, u_t\right]$ eşitliğinin sağlandığı doğrulanmış olur.

$\left\langle B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)\right\rangle_m$ ve $\left\langle B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)\right\rangle_m$ devirli grupları için ispatlar yukarıdakine benzer olarak yapılabilir.

Örnek 4.1.4:

i. $\left|\left\langle B_5\left(P_5^F(x), P_4^F(x)\right)\right\rangle_{5^3}\right| = 5^2 \cdot 78 = 1950$, $\left|\left\langle B_{11}\left(P_{11}^F(x), P_{10}^F(x)\right)\right\rangle_{11}\right| = 1330$ ve $1375 = 5^3 \cdot 11$ den dolayı $\left|\left\langle B_5\left(P_5^F(x), P_4^F(x)\right)\right\rangle_{1375}\right| = 259350 = okek\left[1950, 1330\right]$ dir.

ii. $\left|\left\langle B_3\left(P_3^P(x),P_2^P(x)\right)\right\rangle_{2^5}\right|=2^4\cdot 7=112$, $\left|\left\langle B_3\left(P_3^P(x),P_2^P(x)\right)\right\rangle_{3^4}\right|=3^3\cdot 26=702$ ve $2592=2^5\cdot 3^4$ den dolayı $\left|\left\langle B_3\left(P_3^P(x),P_2^P(x)\right)\right\rangle_{2592}\right|=39312=okek\left[112,702\right]$ dir.

iii. $\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x),P_3^J(x)\right)\right\rangle_{3}\right|=20$, $\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x),P_3^J(x)\right)\right\rangle_{5}\right|=104$,

$$\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x),P_3^J(x)\right)\right\rangle_{7}\right|=114 \text{ ve } 105=3\cdot 5\cdot 7$$

den dolayı $\left|\left\langle B_4\left(P_4^J(x),P_3^J(x)\right)\right\rangle_{105}\right|=29640=okek\left[20,104,114\right]$ dir.

Sonuç 4.1.1: M, $B_k\left(P_k^F(x),P_{k-1}^F(x)\right)$, $B_k\left(P_k^P(x),P_{k-1}^P(x)\right)$ ve $B_k\left(P_k^J(x),P_{k-1}^J(x)\right)$, ve matrislerinden herhangi biri ve p de $p\geq k$ ve $\left(\det M,p\right)=1$ olacak şekilde bir asal sayı olsun. O zaman $p\leq 2999$ ve $0\leq v\leq k+1$ için $\left|\left\langle M\right\rangle_p\right| \, \Big\| \, p^{k+2}-p^v$ dır [21].

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, sırasıyla $P_k^F(x)$, $P_k^P(x)$ ve $P_k^J(x)$ k-basamak Fibonacci, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell ve genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizilerinin karakteristik polinomları olmak üzere $k \geq 3$ için $B_k\left(P_k^F(x), P_{k-1}^F(x)\right)$, $B_k\left(P_k^P(x), P_{k-1}^P(x)\right)$ ve $B_k\left(P_k^J(x), P_{k-1}^J(x)\right)$ matrisleri tanımlanmıştır. Tanımlanan matrislerin kuvvetlerinin m-modülüne göre indirgenmesi sonucu bu matrisler üreteç olarak seçilerek devirli gruplar elde edilmiş ve farklı m değerleri için elde edilen devirli grupların mertebeleri çeşitli formüllerle belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Ağargün, A.G. and Özdağ, H., “Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri”, Birsen Yayınevi, İstanbul, **2008**.

[2] Barnett, S., “A note on the Bezoutian matrix”, *SIAMJ. Appl. Math.*, 22 (1), 84- 86, **1972**.

[3] Başar, F., “Lineer Cebir”, Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul **2012**.

[4] Bateman H. and Erdelyi A., “Higher Transcendental Function”, *McGraw-Hill,* Vol.2, **1953**.

[5] Bicknell, M., "A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences", *The Fibonacci Quart*., 13 (4), 345-350, **1975**.

[6] Campbell, C.M. and Campbell, P.P., “The Fibonacci Lengths of Binary Polyhedral Groups and Related Groups”, *Congr. Numer.*, 194, 95-102, **2009**.

[7] Campbell, C.M. and Campbell, P.P., "The Fibonacci Length of Certain Centro-Polyhedral Groups”, *J. Appl. Math. Comput*, 19, 231-240, **2005**.

[8] Cayley, A., “Note sur la method d’elimination de Bezout”, *J. Reine Angew. Math*., 53, 366-367, **1857.**

[9] Computing the summation of the Möbius function by Marc Deléglise and Joël Rivat Experimental Mathematics Volume 5, Issue 4291-295.

[10] Çallıalp, F., “Soyut Cebir” İstanbul **2001**.

[11] Deveci, Ö. , **2011**. “The Polytopic k-step Fibonacci Sequences in Finite Groups” *Discrete Dyn. Nat. Soc*., Volume 2011, Article ID 431840, 12 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2011/431840, **2011**.

[12] Deveci, Ö. and Karaduman, E., “The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices”, *Linear Algebra and its Applications*, 437, 2538-2545, **2012**.

[13] Deveci, Ö. and Karaduman, E., 2012. “ The Generalized order-k Lucas Sequences in Finite Groups*”, J. Appl. Math.,* Volume 2012, Article ID 464580, 15 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2012/464580, **2012**.

[14] Deveci, Ö. and Karaduman, E. (to appear). “The Pell Sequences in Finite Groups”, *Util. Math*.

[15] Deveci, Ö. (to appear). “The Pell-Padovan Sequences and The Jacobsthal-Padovan Sequences in Finite Groups”, *Util. Math*.

[16] Deveci, Ö. and Aküzüm, Y., “The Cyclic Groups via MacWilliams and Chebyshev Matrices”, *Journal of Math. Reseacrh*, 6 (2), 55-58, **2014**.

[17] Deveci Ö., Akdeniz M. and Karaduman E., ‘’The generelized Pell p-sequences in groups’’, *Ars Comb*., 120, 383-401, **2015**.

[18] Deveci, Ö. and Karaduman, E., “On the Basic k-nacci Sequences in Finite Groups”, *Discrete Dyn. Nat. Soc*., 639476-1-639476-13, **2011**.

[19] Deveci, Ö. and Karaduman, E., “Requrrence Sequence in Groups”, *Lambert Academic Publishing*, Germany, **2013**.

[20] Deveci, Ö. and Y. Aküzüm, “The Recurrence Sequences via Hurwitz Matrices”, *The Scientific Annals of “Al-I. Cuza” University of Iasi*, **2014**.

[21] Deveci, Ö., Aküzüm, Y., Karaduman, E. and Erdağ, O., “The Cyclic grups via Bezout matrices”, *Journal of Mathematics Research*, Vol. 7 (2), 34-41, **2015**.

[22] Deveci, Ö., (baskıda), “The Redheffer Sequences and Its Applications”.

[23] Dummit, D. S. and Foote, R. M., “Abstract Algebra”, 3^{nd} editon (John Wiley & Sons,Inc.), **2004**.

[24] Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski I. and Ward, T., “ Recurrence Sequences” , *Amerikan Mathematical Society*, **2003**.

[25] Gandhi, B. K. and Reddy, M. J., “Triangular Numbers in the Generalized Associated Pell Sequence”, *Indian J. Pure appl. Math*., Vol. 34 (8), 1237-1248, **2003**.

[26] Gogin, N. and Hirvencalo, M., “Recurrent Construction of MacWilliams and Chebyshev Matrices”, *Fundamenta Informaticae*, 116(1-4), 93-110, **2012**.

[27] Gogin, N. and Hirvencalo, M., “On the Generating Function of Discrete Cheyshev Polynomial”, TUCS technical Reports, 819, Turku Centre for Computer Science, **2007**.

[28] Gogin, N.D. and Myllari, A.A., “The Fibonacci-Padovan Sequence and MacWilliams Transform Matrices”, *Programing and Computer Software, Published in Programmirovanie*, 33 (2), 74-79, **2007**.

[29] Hall, P., “The Eulerian functions of a group”, *Quart. J. Math*., 7, 134-151, **1936**.

[30] Hirvencalo, M., “Studies on Boolean Functions Related to Quantum Computing”, *Ph.D. Thesis, Univesity of Turku*, **2003**.

[31] Horadam, A.F., "Pell Identities", *The Fibonacci Quart*., 9 (3), 245-252, **1971**.

[32] Hosenberg R., "The Matrix Q", *Mathematical Gems III. Washington, DC: Math. Assoc.* Amer. 106-107, **1985**.

[33] Householder, A., “Householder, Bezoutians, Elimination an Localization”, *SIAM Review*, 12, 73-78, **1970**.

[34] Hurwitz, A. “Ueber die Bedingungen unter welchen eine gleichung nur Wurzeln mit negative reellen teilen besitzt”, *Mathematische Annalen*, 46, 273-284, **1895**.

[35] Johnson, D.L., Presentations of Groups, and edition, London Math. Soc. Student Texts 15, *Cambridge University Press*, Cambridge, **1997**.

[36] Kalman, D., “Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods”, *The Fibonacci Quart.*, 20 (1), 73-76, **1982**.

[37] Karakaş, H.İ., “Cebir Dersleri”, Tüba Yayınları, Ankara, **2010** (ikinci baskı).

[38] Kılıç, E. and Taşçı, D. "The Generalized Binet Formula, Representation and Sums of the Generalized order $-k$ Pell Numbers", *Taiwanese J. Math*., 10 (6), 1661-1670, **2006**.

[39] Knox, S.W., “Fibonacci Sequences in Finite Groups”, *The Fibonacci Quart.*, 30 (2), 116-120, **1992**.

[40] Köken, F. and Bozkurt, D., “On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods”, *Int.J. Contemp. Math. Sciences*, 3 (13), 605-614, **2008**.

[41] Lü, K. and Wang, J., “ k-step Fibonacci Sequence Modulo m”, *Util. Math.*, 71, 169-178, **2007**.

[42] Mac Lane, S. and Birkhoff, G., *Algebra, 3rd ed*. New York: Chelsea, **1993**.

[43] MacWilliams, F.J. and Sloane, N.J.A., “The Theory of Error-Correcting Codes”, *North-Holland*, **1977**.

[44] Redheffer, R.M., “Eine explizit lösbare optimierungsaufgabe, *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, 36, **1997**.

[45] Sylwester, J.J., “On a theory of the syzgetic relations of two rational integral functions, Comrising an application to the theory of Strum’s functions, and that of

greatest algebraical common measure", *Philosophical Transactions of The Royal Society of London*, 143, 407-548, **1853**.

[46] Silvester J.R., "Fibonacci Proporties by Matrix Methods", *Mathematical Gazette*, 63, 188-191, **1979**.

[47] Taşçı, D. and Kılıç, E., "On the order-k Generalized Lucas Numbers", *Appl. Math. Comput.*, 20, 171-180, **2006**.

[48] Taşçı, D., "Lineer Cebir", Gazi Kitapevi, Ankara, **2005** (üçüncü baskı).

[49] Taşçı, D., "Soyut Cebir", Alp Yayınevi, Ankara **2010** (ikinci baskı).

[50] Taş, S. and Karaduman, E., "The Padovan Sequence in Finite Grup", *Chiang Mai, Journal of Science*, 41(2), 456-462, **2014**.

[51] Wall, D.D., "Fibonacci Series Modulo *m*" , *Amer. Math. Monthly*, 67, 525-532, **1960**.

[52] Yılmaz, F. and Bozkurt, D. "The Generalized order-k Jacobsthal Numbers", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4 (34), 1685-1694, **2009**.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Özgür ERDAĞ

Doğum Yeri: KARS

Doğum Tarihi: 10.07.1986

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: ingilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Kars Cumhuriyet Lisesi (2000-2004)

Lisans: Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2008-2012)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Yayınları: Deveci, Ö., Aküzüm, Y., Karaduman, E. and Erdağ, O., "The Cyclic grups via Bezout matrices", *Journal of Mathematics Research,* Vol. 7 (2), 34-41, **2015**.