T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ, İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ TÜRDEN PELL DAİRESEL DİZİLERİ VE UYGULAMALARI

Ali Kemal GÜNAÇTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç.Dr.Ömür DEVECİ

HAZİRAN-2016

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ, İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ TÜRDEN PELL DAİRESEL DİZİLERİ VE UYGULAMALARI

Ali Kemal GÜNAÇTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç.Dr.Ömür DEVECİ

HAZİRAN-2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ali Kemal Günaçtı'nın Doç.Dr.Ömür Deveci'nin danısmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Birinci, İkinci ve Üçüncü Türden Pell-dairesel Dizileri ve Uygulamaları" adlı bu çalısma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Egitim Yönetmeligi uyarınca değerlendirilerek oy …………….. ile kabul edilmistir.

.... / ..... /2016

	Adı ve Soyadı	**imza**
Baskan :	Doç.Dr Ömür DEVECİ	....
Üye :	Yrd.Doç.Dr. Sait TAŞ	....
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2016 gün ve ..../...................... sayılı kararı ile onaylanmıstır.

Doç.Dr. Özlem GÜRSOY KOL
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezim olan bu çalışmayı Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi olarak sunmaktayım.

Çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, tez konumu belirleyen, kıymetli vaktini bana ayırarak çalışmamın her aşamasını tecrübeleriyle ve en önemlisi de kaynaklarını paylaşarak destekleyen değerli danışman hocam Sayın Doç.Dr.Ömür Deveci'ye teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Benim için harcadığı emekleri ileriki çalışmalarımda bana gayret verecektir.

Çalışmalarım sırasında tecrübelerine sıkça başvurduğum değerli akademisyen arkadaşlarım Yeşim Aküzüm ve Özgür Erdağ'ı, bana gösterdikleri sabırdan dolayı tebrik ve teşekkür eder, çalışma hayatlarında kendilerine başarılar dilerim.

Son olarak hesaplamalarımı kolaylaştıran bilgisayar programını yapmamda beni destekleyen ağabeyim Mehmet Serkan Günaçtı'yı da burada anmalıyım. Çok zamanlar uykusuz kalıp programımı geliştirmek için vakit harcamıştır.

KARS-2016 Ali Kemal GÜNAÇTI

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bilindiği gibi Pell dizisi başlangıç değerleri $P_0 = 0, P_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$$

yineleme bağıntısına sahip bir dizidir. [21]'da Kılıç ve Taşcı, bu tanımı geliştirip genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisini tanımlamışlardır. Deveci, [3]'deki çalışmasında bu konsepti daha ileri götürüp, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin karakteristik polinomuyla elde ettiği dairesel matrisi kullanarak, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell-dairesel dizisini elde etmiştir.

Bu çalışmada genelleştirilmiş k-mertebeden Pell-dairesel dizisinin tanımından yola çıkarak birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerini elde ettik. Sonra, bu dizilerin elemanları ile dizilerin üreteç matrisleri arasında bağıntılar ortaya koyduk. Ayrıca, üreteç matrisleri ve dizilerden elde edilen bağıntılarla üretilen devirli grupları ele alıp mertebelerini inceledik. Daha sonra birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerini gruplara taşıyarak dizilerin sonlu gruplarda basit periyodik olduğunu gösterdik. Son olarak farklı r değerleri için $F(r,2)$ Fibonacci grubunda birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitlerinin periyotlarını hesapladık. Hesaplanan periyotlar, bir çizelge olarak metnin son kısmında verilmiştir.

2016, 104 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Pell dizisi, Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell Dizisi, Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell-dairesel Dizisi, Karakteristik Polinom, Üreteç Matris, Devirli Grup, Mertebe, Sonlu Grup, Fibonacci Grubu.

ABSTRACT

It is well-known that the Pell sequence $\{P_n\}$ is defined recursively by the equation

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$$

for $n \geq 1$, where $P_0 = 0, P_1 = 1$.

In [21], Kilic and Tasci defined the generalized order-*k* Pell sequence, $\{P_n^k\}$. Further, Deveci [3] defined the generalized order-*k* Pell-circulant sequence by using the circulant matrix which is obtained from the characteristic polynomial of the generalized order-*k* Pell sequence. In this work, we define the Pell-circulant sequences of the first, second and third kind by the aid of the generalized order-*k* Pell-circulant sequence. Then we obtain the relations between the elements of the sequences and generating matrices of the sequences. Also, we consider the cyclic groups which are generated by the generating matrices and the auxiliary equations of the defined recurrence sequences and then we study the orders of these groups. After that, we defined the Pell-circulant sequences of the first and third kind on finite groups and demonstrated that the sequences are simple periodic. Furthermore, we displayed the periods of the Pell-circulant sequences of the first and third kind by a chart, for several r values on $F(r,2)$ group.

2016, 104 Pages

Keywords: Pell Sequence, Generalized Order-*k* Pell Sequence, Generalized Order-*k* Pell-Circulant Sequence, Characteristic Polynomial, Generating Matrix, Cyclic Group, Order, Finite Group, Fibonacci Group.

SİMGELER DİZİNİ

G	Grup
$*$	İkili işlem
a^{-1}	a elemanının tersi
e	Grubun birim elemanı
$(G,*)$	Cebirsel yapı
$M_n(X)$	Elemanları X kümesinden seçilen $n\times n$ tipli matris
A^{-1}	A matrisinin tersi olan martis
$M_2^*(\mathbb{R})$	Reel girdili, 2×2 tipli, determinantı sıfırdan farklı matrislerin kümesi
$\|A\|$	A matrisinin determinantı
$\|G\|$, $\circ(G)$	G kümesinin eleman sayısı / kardinalitesi
$\circ(a)$, $\|a\|$	a elemanının mertebesi
I_n	$n\times n$ tipli birim matris
$(G:H)$	H grubunun G grubu içindeki indeksi
$H\subseteq G$	H kümesi G kümesinin altkümesidir
$H\leq G$	H grubu G grubunun altgrubudur
$H\lhd G$	H grubu G grubunun normal altgrubudur
G/N	G 'nin N 'ye göre bölüm grubu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	Elemanları n moduna göre indirgenmiş $\mathbb{Z}$ kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\varnothing$	Boş küme
$\cup$	Kümelerdeki birleşme işlemi
$\langle a \rangle$	a elemanının ürettiği devirli grup
$k \mid p$	k, p 'yi böler
$\varphi:(G,*)\to(H,\circ)$	G grubundan H grubuna bir grup homomorfizmi
$\varphi:G\to H$	G grubundan H grubuna bir grup homomorfizmi
lnx	Doğal logaritma
$(G:H)$	H grubunun G grubu içindeki indeksi
$G\cong H$	H grubu ile G grubu izomorftur
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
P_n	Pell dizisinin n .elemanı
$\{F_n^k\}_{k\geq 2}$	k -basamak Fibonacci dizisi
$\{P_n^k\}$	Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi
$Ser(A)$	A üzerinde bir serbest grup

$\langle A \mid B \rangle$	A'nın elemanlarıyla üretilen, B bağıntılarına sahip

grubun takdimi

$F(r,2)$	İki gerenli Fibonacci grubu
$(R,+,\cdot)$	Halka
1_R	Halkanın çarpma işlemine göre birim elemanı
$\lvert M_{ij} \rvert$	a_{ij} elemanının minörü
A_{ij}	a_{ij} elemanının kofaktörü
$Ek(A)$	A matrisinin ek matrisi (adjoint matrisi)
a_k	Bir dizinin k .elemanı
$A\text{mod}(m)$	A matrisinin her elemanının m modülüne göre

indirgenmesi

$f\left(k,m\right)$	k -basamak Fibonacci dizisinin elemanlarının m modülüne göre indirgenmesiyle oluşan dizi
$h_k(m)$	$f\left(k,m\right)$ dizisinin periyodu
$hP_2(m)$	m modülüne göre Pell dizisinin periyodu
$\left\lvert \langle R \rangle_{p^\alpha} \right\rvert$	$\langle R \rangle_{p^\alpha}$ grubunun mertebesi
$Q_k\left(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}\right)$	$x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir G grubundaki genelleştirilmiş k -meretebeden Pell dizisi
$PerQ_k\left(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}\right)$	$Q_k\left(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}\right)$ dizisinin periyodu
C_{k+1}	$\left(k+1\right)\times\left(k+1\right)$ tipli dairesel (circulant) matris

Q_{2^n}	Genelleştirilmiş Quarternion grubu
$LPC_k\left(Q_{2^n};x,y\right)$	Genelleştirilmiş Q_{2^n} quarternion grubundaki k -basamak Pell-dairesel dizilerinin periyodu
PC_n^k	k . türden Pell-dairesel dizisinin n . elemanı
X^kC_n	Gruplarda tanımlanan k . türden Pell-dairesel dizisinin n . elemanı
$l^kC_{(x,y)}(F(r,2))$	İki gerenli Fibonacci grubunda tanımlanan k . türden Pell-dairesel dizisinin periyodu

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

1.GİRİŞ

Kalman,[19]'teki çalışmada Fibonacci dizisinin elemanlarını matrislerle ifade ederek dizilerle ilgili araştırmaları matrislere entegre etmiş ve dizilerin elemanlarının elde edilmesi alanında yeni bir çalışma sahası oluşturmuştur.

Lü ve Wang'ın [23]'deki çalışmasıyla tanıştığımız özel matrisler yardımıyla devirli grup elde etme yöntemi çalışmamızın ana metodunu teşkil etmektedir. Lü ve Wang'ın çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin m modülüne göre çarpımsal katları alınarak devirli gruplar elde edilip, bu devirli grupların mertebelerinin, m modülüne göre k -basamak Fibonacci dizilerinin periyotlarına eşit olduğu gösterilmiştir.

[10]'daki çalışmada Deveci ve Karaduman, konsepti, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilerine genişleterek, tanımladıkları dizinin üreteç matrisi yardımıyla devirli gruplar elde etmiş, daha sonra dizinin m modülüne göre periyodu ile elde edilen devirli grupların mertebeleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır.

Yine Deveci, [3]'deki çalışmasında, Davis'in [2]'deki dairesel (circulant) matris tanımı ışığında genelleştirilmiş k-mertebe Pell-dairesel matrislerini ve k-basamak Pell-dairesel dizilerini tanımlamış, sonra da bu dizilerin elemanları ve üreteç matrisleri arasında bağıntılar kurmuştur. Aynı çalışmada Deveci, k-basamak Pell-dairesel dizilerini gruplara taşıyıp dizinin periyotlarını D_n dihedral grubunda hesaplamıştır.

Biz de Deveci'nin [3]'deki çalışmasından yola çıkarak birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerini oluşturup, dizilerin katsayıları yardımıyla elde ettiğimiz üreteç matrislerini konumuzun ana unsurları olarak kullandık. Buna göre, çalışmamızda aşağıda belirtilen birinci türden Pell-dairesel dizisi ve bu dizinin katsayıları vasıtasıyla elde ettiğimiz üreteç matrisi göz önüne alınırsa, yani

$$PC_n^1 = -2PC_{n-1}^1 + PC_{n-2}^1 - PC_{n-3}^1 \quad \text{ve} \quad M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

için M_1 üreteç matrisinin çarpımsal katını, mertebesini, PC_n^1 dizisinin elemanlarıyla arasındaki bağıntılarını ortaya koyduktan sonra bu diziyi m modülüne göre indirgeyerek $\left\{PC_n^1(m)\right\}=\left\{PC_1^1(m), PC_2^1(m), PC_3^1(m),..., PC_i^1(m),...\right\}$ dizisini elde edip, üreteç matrisi yardımıyla tanımladığımız devirli grubu inceledik. Öyleki bu durumda aşağıdaki matrisi ve devirli grubu elde ederiz:

$$\left(M_1\right)^n=\begin{bmatrix} PC_{n+3}^1 & PC_{n+2}^1-PC_{n+1}^1 & -PC_{n+2}^1 \\ PC_{n+2}^1 & PC_{n+1}^1-PC_n^1 & -PC_{n+1}^1 \\ PC_{n+1}^1 & PC_{n+2}^1+2PC_{n+1}^1 & -PC_n^1 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle M_1\right\rangle_m=\left\{M_1^i(\operatorname{mod} m) \mid i\geq 0\right\}$$

Aynı işlemleri ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizileri için de gerçekleştirip, devirli grupların mertebeleri arasındaki bağıntılarla, m modülüne göre indirgenen dizilerin periyotlarının genel formülerini elde ettik.

Ayrıca birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerini sonlu gruplara taşıyıp dizilerin sonlu gruplarda basit periyodik olduğunu gösterdik. Örneğin, birinci tür için dizinin gruplardaki karşılığı

$$X^1C_n=\left(X^1C_{n-3}\right)^{-1}\left(X^1C_{n-2}\right)\left(X^1C_{n-1}\right)^{-2}$$

olarak elde edilmiştir. Son kısımda, uygulama olarak farklı r değerleri için birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerinin $F(r,2)$ Fibonacci grubundaki periyotlarını hesapladık.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1.Gruplar

2.1.1.Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: G boştan farklı bir küme olsun. $a,b \in G$ olmak üzere

$$*: G \times G \to G$$

$$(a,b) \to a * b$$

dönüşümü G üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olarak adlandırılır ve $(G,*)$ ikilisi cebirsel yapı adını alır[30].

Tanım 2.1.2: G bir küme olsun. Her $a,b,c \in G$ için:

i. $a(bc) = (ab)c$ eşitliği sağlanıyorsa G kümesi $*$ ikili işlemine göre birleşmelidir (ya da asosyatiftir).

ii. $ae = ea = a$ eşitliğini sağlayan bir e elemanı varsa bu eleman G kümesinin $*$ ikili işlemine göre birim elemanıdır.

iii. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ eşitliğini sağlayan bir a^{-1} elemanı varsa bu eleman $*$ ikili işlemine göre a elemanının tersidir.

iv. $ab = ba$ eşitliği sağlanıyorsa işleme değişmelidir. Bu özellik için bazı kaynaklarda komutatif ya da Abelyen ifadesi de kullanılır[30].

Tanım 2.1.3: G kümesi, üzerinde tanımlanan işlemle bir cebirsel yapı olsun. Bu yapı sadece birleşme özelliğini sağlarsa yarı grup; birleşme özelliğine ve birim elemana sahipse monoid adını alır[30].

Tanım 2.1.4: G kümesi, üzerine tanımlanan işlemle bir cebirsel yapı olsun. Bu yapı birleşme özelliğine, birim elemana ve ters elemana sahipse grup adını alır. Bu özelliklere ek olarak işlem değişme özelliğine sahipse G, Abelyen grup adını alır[30].

Örnek 2.1.1: $M_2(\mathbb{R})$ reel sayılardan oluşan 2×2 tipli matrislerin kümesi olsun. Bu küme, matrislerdeki toplama işlemine göre Abelyen bir gruptur. Burada 2×2 tipli $0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matrisi grubun birim elemanıdır. Ayrıca $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{bmatrix}$ formundadır ve grubun elemanıdır. Bilinen toplama işlemi ile birleşme ve değişme özelliği gösterilebilir[20].

Örnek 2.1.2: $M_2^*(\mathbb{R})$ reel sayılardan oluşan 2×2 tipli determinantı sıfırdan farklı matrislerin kümesi olsun. Bu küme, matrislerdeki çarpma işlemine göre Abelyen olmayan bir gruptur. Burada işlemin birim elemanı 2×2 tipli $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$'dir ve kümenin elemanıdır. Ayrıca $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ formundadır ve kümenin elemanıdır. Bilinen işlemlerle bileşme işleminin sağlandığı görülebilir[20].

Not 2.1.1: Aksi söylenmedikçe $a*b$ işlemi ab ile gösterilecektir.

Teorem 2.1.1: Grubun birim elemanı tektir[30].

İspat: İki adet birim elemanının olduğunu varsayıp e_1 ve e_2 ile gösterelim. e_1 birim eleman olduğundan

$$e_1e_2=e_1$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan e_2 de birim eleman olduğundan

$$e_1e_2=e_2$$

eşitliği de sağlanır. Buradan $e_1=e_2$ sonucu elde edilir.

Teorem 2.1.2: G bir grup olsun. Her $a \in G$ elemanının yalnız bir adet tersi vardır[30].

İspat: Bir $a \in G$ elemanının iki adet tersinin olduğunu varsayalım a' ve a'' ile ifade edelim. $e \in G$ birim eleman olmak üzere $a' = a''$ eşitliği aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$$

Tanım 2.1.5 [30]: Grupta $a \in G$ elemanının kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

i. $a^n = \underbrace{aa............a}_{n}$

ii. $a^0 = e$

iii. $a^{-n} = (a^{-1})^n$

Önerme 2.1.1 [30]: G bir grup ve $a,b,c,d \in G$, $n,m \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

i. $ax = b$ denkleminin bir tek çözümü vardır.
ii. $ab = ac$ eşitliği varsa $b = c$ dir.
iii. $ba = ca$ eşitliği varsa $b = c$ dir.
iv. $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ dir.
v. $a^n a^m = a^{n+m}$ dir.
vi. $(a^n)^m = a^{nm}$ dir.

İspat:

i. Denklemin çözümü $ax = b \quad \Rightarrow \quad a^{-1}ax = a^{-1}b$

$$\Rightarrow \quad x = a^{-1}b$$

Elemanların tersi tek türlü olduğundan bu çözüm tektir.

ii. $ab = ac \quad \Rightarrow \quad a^{-1}ab = a^{-1}ac$

$$\Rightarrow \qquad b = c$$

iii. $ba = ca \quad \Rightarrow \quad baa^{-1} = caa^{-1}$

$$\Rightarrow \qquad b = c$$

iv. $e = a^{-1}(a^{-1})^{-1} = a^{-1}a \quad \Rightarrow \quad (aa^{-1})(a^{-1})^{-1} = (aa^{-1})a$

$$\Rightarrow \qquad \left(a^{-1}\right)^{-1} = a \qquad (e \text{ birim eleman})$$

v. Grupların birleşme özelliği olduğundan eşitlik aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$a^n a^m = (\underbrace{aa......a}_{n})(\underbrace{aa.....a}_{m})$$

$$= \underbrace{aa......a}_{n}\,\underbrace{aa......a}_{m}$$

$$= a^{n+m}$$

vi. $(a^n)^m = \underbrace{a^n a^n ....a^n}_{m} = a^{n+n+...+n} = a^{nm}$.

Teorem 2.1.3: G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Bu durumda

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

dir[30].

İspat: $e = ab(ab)^{-1} \quad \Rightarrow \quad a^{-1}e = a^{-1}ab(ab)^{-1}$

$$\Rightarrow \quad b^{-1}a^{-1} = b^{-1}b(ab)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$$

Sonuç 2.1.1 : G bir grup ve $a_1, a_2, ..., a_n \in G$ olsun. Bu durumda

$$(a_1a_2...a_n)^{-1} = a_n^{-1}...a_2^{-1}a_1^{-1}$$

dir[30].

Tanım 2.1.6: G bir grup ve $H \subseteq G$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer H, G'deki ikili işleme göre grup şartalarını sağlıyorsa H kümesine G'nin altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir[30].

Örnek 2.1.3: $(2\mathbb{Z},+)$ grubu $(\mathbb{Z},+)$'nin altgrubudur. $(\mathbb{Z},+)$ grubu da $(\mathbb{Q},+)$'nin altgrubudur[20].

Sıradaki iki teorem bir yapının altgrup olup olmadığını incelerken kolaylıklar sağlar.

Teorem 2.1.4: G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart

i. $H \neq \emptyset$,
ii. Her $a,b \in H$ için $ab \in H$,
iii. Her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$

koşullarının sağlanmasıdır[30].

İspat: Eğer $H \leq G$ ise (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanır. Tersine eğer bu üç şart sağlanırsa $H \leq G$ olduğunu göstermeliyiz.

$H \neq \emptyset$ ise en az bir $a \in H$ elemanı bulunur ve (iii) şartından dolayı $a^{-1} \in H$ vardır, böylece $aa^{-1} = e \in H$ yazılır. Demek ki birim eleman vardır. Her $a,b \in H$ için (iii) şartından dolayı $b^{-1} \in H$ ve (b) şartından dolayı $ab^{-1} \in H$ yazılır. Teorem gereğince $H \leq G$ olur.

Teorem 2.1.5: G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. Eğer H kümesi sonlu ise, $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart

i. $H \neq \emptyset$,

ii. Her $a,b \in H$ için $ab \in H$

koşullarının sağlanmasıdır[30].

İspat: Eğer $H \leq G$ ise (i) ve (ii) şartları sağlanır. Tersine eğer bu şartlar sağlanırsa $H \leq G$ olduğunu göstermeliyiz.

$H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olarak alalım. Bir $a \in H$ ve her $i = 1, 2, ..., n$ için (ii) koşuluna göre $ax_i \in H$ dir. Böylece $H = \{ax_1, ax_2, ..., ax_n\}$ yazılabilir. Ayrıca

$$i \neq j \;\Rightarrow\; x_i \neq x_i \;\Rightarrow\; ax_i \neq ax_i$$

olduğundan her $ax_i \in H$ birbirnden farklıdır. Böylece uygun bir $1 \leq t \leq n$ için $ax_t = e$ dir. Buradan da $a^{-1} = x_t \in H$ yazılır.

Tanım 2.1.7: Bir G grubunun eleman sayısı (kardinalitesi) grubun mertebesi olarak adlandırılır ve $|G|$ veya $\circ(G)$ notasyonlarından biri ile gösterilir[30].

Tanım 2.1.8: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^n = e$ eşitliğini sağlayan en küçük $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ sayısına (varsa eğer) a elemanının mertebesi adı verilir. a 'nın mertebesi $|a|$ ya da $\circ(a)$ ile gösterilir[30].

Tanım 2.1.9: G bir grup olsun. $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa bu gruba devirli grup adı verilir ve $G = \langle a \rangle$ ile gösterilir. $a \in G$ elemanına da grubun üreteci adı verilir[20].

Örnek 2.1.4: $G = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi i tarafından üretilen ya da $-i$ tarafından üretilen devirli bir gruptur. $G = \langle i \rangle = \langle -i \rangle$ yazılır[20].

Örnek 2.1.5: $(\mathbb{Z}_4,+)$ grubu hem 1 hem de 3 tarafından üretilen bir devirli gruptur. $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ olduğundan $\langle 1\rangle=\{1,2,3,0\}$ ve $\langle 3\rangle=\{3,2,1,0\}$ olur[30].

Teorem 2.1.6: Her devirli grup Abelyendir[30].

İspat: $G=\langle a\rangle$ bir devirli grup olsun. Her $r,s\in\mathbb{Z}$ için $a^r,a^s\in G$'dir. Bu durumda teorem

$$a^r a^s=a^{r+s}=a^{s+r}=a^s a^r$$

olarak ispatlanabilir.

Teorem 2.1.7: Devirli grupların tüm altgrupları devirlidir[30].

İspat: $G=\langle a\rangle$ ve $H\leq G$ olsun. Eğer $H=\{e\}$ ise $H=\langle e\rangle$'dir ve devirlidir.

$H\neq\{e\}$ olsun. $m\in\mathbb{Z}^+$ ise $a^m\in H$ olacak şekilde en küçük tamsayı olsun. H kapalı olduğundan a^m'nin tüm kuvvetleri H'ın elemanıdır; yani

$$\left\langle a^m\right\rangle=\left\{(a^m)^q:q\in\mathbb{Z}\right\}\subseteq H \tag{2.1.4}$$

dir. Şimdi de $a^n\in H$ alalım. $m\in\mathbb{Z}^+$, $a^m\in H$ olacak şekilde en küçük tamsayı olduğundan bölme algoritması ile $n=mr+s$, $0\leq s<m$ yazılır. Buradan

$$a^n=a^{mr+s}=\left(a^m\right)^r a^s \;\Rightarrow\; a^s=\left(a^m\right)^{-r}a^n$$

yazarız. $\left(a^m\right)^{-r}\in H$ ve $a^n\in H$ olduğundan $a^s=\left(a^m\right)^{-r}\cdot a^n\in H$ olur. $m\in\mathbb{Z}^+$, $a^m\in H$ olacak şekilde en küçük tamsayı olduğundan ve $0\leq s<m$ seçildiğinden bu durum sadece $s=0$ olması ile mümkündür. Böylece $a^n=a^{mr}=(a^m)^q\in\left\langle a^m\right\rangle$ ve buradan

$$H\subseteq\left\langle a^m\right\rangle=\left\{(a^m)^q:q\in\mathbb{Z}\right\} \tag{2.1.5}$$

elde edilir. (2.1.4) ve (2.1.5) durumlarından $H=\langle a^m \rangle$ olur.

Teorem 2.1.8: Mertebesi asal sayı olan her grup devirlidir[30].

İspat: G grubunun mertebesi p asal sayısı olsun. a ,G 'nin birim elemanından farklı bir eleman olmak üzere $H=\langle a \rangle$ devirli grubunun mertebesi k ise o takdirde $k \geq 2$ 'dir. Çünkü a ve e , H 'ın elemanlarıdır. Lagrange teoremine göre $k \mid p$ olmalıdır(bakınız sonuç 2.1.3). Hipotez gereği p asal olduğundan $k=p$ 'dir. O halde $H=G=\langle a \rangle$ 'dır.

Tanım 2.1.10: G bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olsun.

$$aH=\{ah : h \in H\} \text{ ve } Ha=\{ha : h \in H\}$$

kümeleri sırasıyla H 'ın G 'deki sol yan kümesi ve sağ yan kümesi olarak adlandırılır [30].

Not 2.1.2: Grubun işlemi toplama olarak tanımlanırsa yan kümeler $a+H=\{a+h : h \in H\}$ ve $H+a=\{h+a : h \in H\}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.1.6: $(H=\{0,2,4\},+)$ grubunu ele alalım. Bu grup $(\mathbb{Z}_6,+)$ 'nin altgrubudur. Bu durumda $(H,+)$ 'nın $(\mathbb{Z}_6,+)$ 'deki sol yakümeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a=0 \text{ için } 0+H=\{0,2,4\}=H$$

$$a=1 \text{ için } 1+H=\{1,3,5\}$$

$$a=2 \text{ için } 2+H=\{2,4,0\}$$

$$a=3 \text{ için } 3+H=\{3,5,1\}$$

$$a=4 \text{ için } 4+H=\{4,0,2\}$$

$$a=5 \quad \text{için} \quad 5+H=\{5,1,3\}$$

olup burada farklı olan yan kümeler $\{0,2,4\}$ ve $\{1,3,5\}$'dir.

Bu örnekten çıkarılabilecek bazı sonuçlar vardır.

Önerme 2.1.2 [30]:

i. $a \in aH$.

ii. $aH = bH$ ise $a \in bH$'dir.

iii. Herhangi iki yan küme için ya $aH = bH$ dir ya da $aH \cap bH = \varnothing$ dir.

İspat:

i. $a = ae \in aH$.

ii. $aH = bH$ ise $a \in aH = bH$ dir. Tersine $a \in bH$ ve $h \in H$ ise $a = bh$ olur. Buradan $aH = (bh)H = b(hH) = bH$ elde edilir.

iii. $aH \cap bH \neq \varnothing$ varsayalım ve $k \in aH \cap bH$ olsun. Bu durumda (ii) özelliğinden $kH = aH$ ve $kH = bH$ olur. Buradan da $aH = bH$ olur.

Tanım 2.1.11: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H'ın G'deki farklı sol yan kümelerinin(veya sağ yan kümelerinin) sayısına H'ın G içindeki indeksi adı verilir ve $(G:H)$ ile gösterilir[30].

Teorem 2.1.9 (Lagrange Teoremi): G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda H'ın mertebesi G'nin mertebesini böler[30].

İspat: H'ın G'deki farklı sol yan kümeleri $a_1H, a_2H, ..., a_nH$ olsun. O halde $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her $a_i \in G$ için $aH = a_iH$ yazılır. Ayrıca $a \in aH$ olduğundan G'nin her bir elemanı a_iH yan kümelerinden birine aittir. Bu durumda

$$G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_nH$$

yazabiliriz. $a_1H, a_2H, ..., a_nH$ kümeleri ayrık olduğundan

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + ... + |a_nH|$$

yazarız. Diğer taraftan

$$|a_1H| = |a_2H| = ... = |a_nH| = |H|$$

olduğundan

$$|G| = n \cdot |H|$$

elde edilir. Demek ki $|H| \mid |G|$ dir.

Sonuç 2.1.2: G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. H'nin G içindeki farklı sol(ya da sağ)yan kümelerinin sayısı yani indeksi

$$(G:H) = \frac{|G|}{|H|}$$

ile hesaplanır.

İspat: Lagrange teoreminin ispatında kullanılan n sayısı indekstir. $|G| = n \cdot |H|$ eşitliğinde $n = (G:H)$ olarak yazıldığında $|G| = (G:H) \cdot |H|$ olup buradan $(G:H) = \frac{|G|}{|H|}$ eşitliği sağlanır.

Sonuç 2.1.3: G sonlu bir grup olsun. Bu durumda her $a \in G$ için a'nın mertebesi G'nin mertebesini böler.

İspat: a elemanın mertebesi ürettiği bir grubun mertebesi ile aynıdır. Yani $|a| = |\langle a \rangle|$ dir. $\langle a \rangle$ ise G'nin bir alt kümesi olduğundan $\langle a \rangle \mid G$ yazılabilir.

Sonuç 2.1.4: Mertebesi asal sayı olan gruplar devirli gruptur.

İspat: $|G| = p$ ve $a \in G \setminus \{e\}$ olsun. $|\langle a \rangle| \neq 1$ ve $|\langle a \rangle| \, | \, p$ dir. O halde $|\langle a \rangle| = p$ 'dir. Buradan $\langle a \rangle = G$ elde edilir.

Tanım 2.1.12: G bir grup ve $H, K \subset G$ olsun. H ve K kümelerinin çarpma işlemi

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $H = \{h\}$ ise

$$\{h\} K = hK$$

olarak ifade edilebilir[30].

Teorem 2.1.10: G bir grup, $H \leq G$ ve $K \leq G$ olsun. $HK \leq G$ olması için gerek ve yeter şart $HK = KH$ olmasıdır[30].

İspat: $\Rightarrow: HK \leq G$ olsun. Buna göre $HK = KH$ olduğunu göstermeliyiz. Bu eşitliği göstermek için iki kümenin eşitliği tanımını kullanarak

$$KH \subset HK$$

ve

$$HK \subset KH$$

olduğunu göstermeliyiz. $y \in KH$ olarak alalım. Bu durumda KH kümesinin tanımı gereğince $y = kh$ olacak şekilde $k \in K$ ve $h \in H$ vardır. Diğer taraftan

$$y = kh = (h^{-1}k^{-1})^{-1}$$

olduğundan $y \in HK$ olduğunu söyleriz. Gerçekten

$$h^{-1} \in H \text{ ve } k^{-1} \in K$$

olduğundan $h^{-1}k^{-1} \in HK$ olmalıdır. Halbuki gerek şart hipotezinden $HK \le G$ olduğundan

$$(h^{-1}k^{-1})^{-1} \in HK$$

olur. Böylece $y \in KH$ alarak $y \in HK$ olduğunu göstermiş olduk. Bu ise

$$KH \subset HK \tag{2.1.1}$$

olmasını gerektirir. Şimdi de $x \in HK$ alıp $x \in KH$ olduğunu dolayısı ile ters kapsamanın geçerli olduğunu gösterelim.

$x \in HK$ ise hipotezden $HK \le G$ olduğundan

$$x^{-1} = hk$$

olacak şekilde $h \in H$ ve $k \in K$ vardır. Buna göre;

$$x = (x^{-1})^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$$

yazarız. Buradan $k^{-1} \in K$ ve $h^{-1} \in H$ olduğundan

$$x = k^{-1}h^{-1} \in KH$$

dır. Bu da

$$HK \subset KH \tag{2.1.2}$$

olmasını gerektirir. Böylece (2.1.1) ve (2.1.2)'den $HK = KH$ sonucunu elde ederiz.

$\Leftarrow$: $HK = KH$ olduğunu kabul ederek $HK \le G$ olduğunu gösterelim. Her $a, b \in HK$ için $a = h_1k_1$ ve $b = h_2k_2$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in H$ ve $k_1, k_2 \in K$ vadrır. Buna göre;

$$ab^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \tag{2.1.3}$$

yazarız. Diğer yandan $k_1k_2^{-1} \in K$ ve $h_2^{-1} \in H$ olduğundan

$$(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in KH$$

dır. Halbuki hipotezden $HK = KH$ olduğundan

$$(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in HK$$

yazarız. Bu ise

$$(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = hk$$

olacak şekilde $h \in H$ ve $k \in K$ varolmasını gerektirir. Böylece (2.1.3)'te bu değeri yerine yazarsak

$$ab^{-1} = h_1(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = (h_1h)k \in HK$$

buluruz. Bu ise $HK \leq G$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.13: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H'nın G'deki bütün sağ ve sol yan kümeleri birbirine eşit, yani her $a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa H altgrubuna G grubunun normal altgrubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir[30].

Teorem 2.1.11: G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir[30].

i. $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.

ii. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$ dir.

iii. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.

iv. $\forall g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

İspat: (a) $\Rightarrow$ **(b)** $gNg^{-1} = \{gng^{-1} : n \in N\}$ kümesine göre $gng^{-1} \in gNg^{-1}$ olduğu açıktır. Halbuki hipotezden $gng^{-1} \in N$ olduğundan

$$gNg^{-1} \subset N \tag{2.1.6}$$

dir.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** g yerine g^{-1} alarak (b)'de yerine yazalım.

$$g^{-1}N(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Ng \subset N$$

durumunu elde ederiz. Bu son ifadenin her iki tarafını soldan g ve sağdan g^{-1} ile işleme koyarsak

$$g(g^{-1}ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}$$

ve dolayısı ile

$$N \subset gNg^{-1} \tag{2.1.7}$$

elde ederiz. (2.1.6) ve (2.1.7)'den

$$gNg^{-1} = N$$

elde edilir.

(c) $\Rightarrow$ **(d)** $gNg^{-1} = N$ eşitliğinde her iki tarafı sağdan g ile işleme koyarsak $(gNg^{-1})g = Ng$ olup buradan

$$gN = Ng$$

elde edilir.

(d) $\Rightarrow$ **(a)** $gN = Ng$ eşitliğinin her iki tarafını sağdan g^{-1} ile işleme koyarsak

$$gNg^{-1} = (Ng)g^{-1} = Ne = N$$

eşitliğini elde ederiz. Halbuki $gNg^{-1} = \{gng^{-1} : n \in N\}$ kümesine göre $gng^{-1} \in gNg^{-1}$ dir ve $gNg^{-1} = N$ eşitliği sağlandığından $gng^{-1} \in N$ 'dir.

Teorem 2.1.12: G bir grup olmak üzere $H \triangleleft G$ ve $N \triangleleft G$ ise $HN \triangleleft G$ dir[30].

İspat: Her $x \in HN$ ve her $g \in G$ için

$$gxg^{-1} = ghng^{-1} = (ghg^{-1})(gng^{-1})$$

dir. $H \triangleleft G$ olduğundan $ghg^{-1} \in H$ ve $N \triangleleft G$ olduğundan $gng^{-1} \in N$ olup $gxg^{-1} \in HN$ dir.

Teorem 2.1.13: G bir grup ve $N \lhd G$ olmak üzere

$$G/N = \{aN : a \in G\}$$

kümesi üzerinde her $aN, bN \in G/N$ için

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

şeklinde bir ikili işlem tanımlanırsa G/N yapısı bir gruptur[30].

İspat: Her $a,b \in G$ için $ab \in G$ dir. Buradan

$$(ab)N \in G/N$$

olup

$$(aN)(bN) \in G/N$$

dir(Kapalılık). Her $aN, bN, cN \in G/N$ için

$$\begin{aligned}(aN)[(bN)(cN)] &= (aN)[(bc)N] \\ &= [a(bc)]N \\ &= [(ab)c]N \\ &= [(ab)N](cN) \\ &= [(aN)(bN)](cN) \quad \text{(Birleşme Özelliği)}\end{aligned}$$

$e \in G$ birim eleman ve her $aN \in G/N$ için

$$(aN)(eN) = (ae)N = aN$$

ve

$$(eN)(aN) = (ea)N = aN$$

olup birim eleman mevcuttur.

Şimdi de ters elemanın varlığını gösterelim. Öncelikle G grup olduğundan $a \in G$ ise $a^{-1} \in G$ dir. Buna göre $aN \in G/N$ için

$$(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN$$

ve

$$(a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN$$

olup her elemanın tersi vardır. Bu şartar sağlandığından G/N bir gruptur.

Tanım 2.1.14: $N \lhd G$ olmak üzere

$$G/N = \{aN : a \in G\}$$

kümesine G 'nin N 'ye göre bölüm grubu adı verilir.

Tanım 2.1.15: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olsun. Her $a,b \in G$ için

$$\varphi(a*b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

olacak şekilde tanımlanan $\varphi:(G,*) \to (H,\circ)$ dönüşümüne grup homomorfizmi ya da kısaca homomorfizm adı verilir[20].

Örnek 2.1.7: $\varphi:(\mathbb{R}^+,\cdot) \to (\mathbb{R},+)$, $\varphi(x) = lnx$ şeklinde tanımlanan dönüşüm homomorfizmdir. Her $a,b \in \mathbb{R}^+$ için

$$\varphi(a \cdot b) = ln(a \cdot b) = lna + lnb = \varphi(a) + \varphi(b)$$

dir[11].

Teorem 2.1.14: $\varphi: G \to H$ bir homomorfizm olsun. Buna göre aşağıdakiler, homomorfizmlerin temel özelliklerini teşkil eder.

i. e_G, G grubunun ve e_H, H grubunun birim elemanları olmak üzere

$$\varphi(e_G) = e_H$$

dir.

ii. Her $a \in G$ için

$$\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$$

dir.

iii. Her $a \in G$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\varphi(a^n) = [\varphi(a)]^n$$

dir.

iv. Eğer G grubu değişmeli ise $\varphi(G)$ de değişmelidir[30].

İspat:

i. $\varphi(a) = \varphi(ae_G) = \varphi(a)\varphi(e_G)$ ve $\varphi(a) = \varphi(e_G a) = \varphi(e_G)\varphi(a)$ olup birim elemanın tanımından $\varphi(e_G) = e_H$ olduğu görülür.

ii. $\varphi(e_G) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e_H$ yazılır. Ayrıca $e_H = \varphi(a)[\varphi(a)]^{-1}$ olarak yazılabilir. O halde

$$e_H = \varphi(a)[\varphi(a)]^{-1} = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$$

olup

$$\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$$

olarak elde edilir.

iii. Homomorfizm tanımı gereği işlemi koruduğundan

$$\varphi(a^n) = \underbrace{\varphi(a)\varphi(a)...\varphi(a)}_{n} = [\varphi(a)]^n$$

olarak gösterilebilir.

iv. G grubu değişmeli ise her $a,b \in G$ için

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$$

olur.

Teorem 2.1.15: $\varphi : G \to H$ bir homomorfizm olsun. Eğer $a \in G$'nin mertebesi n ise $\varphi(a)$'nın mertebesi n'yi böler[20].

İspat: Hipotez gereği $a^n = e_G$ olacak şekilde en küçük bir n pozitif tam sayısı vardır. Diğer yandan

$$\varphi(a^n) = [\varphi(a)]^n$$

ve

$$\varphi(a^n) = \varphi(e_G) = e_H$$

olduğundan

$$[\varphi(a)]^n = e_H$$

yazılabilir. Bu ise

$$\circ(\varphi(a)) \mid k$$

olmasını gerektirir.

Tanım 2.1.16: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olsun. $\varphi : (G,*) \to (H,\circ)$ dönüşümü birebir ve örten bir homomorfizm ise grup izomorfizmi ya da kısaca izomorfizm adını alır. $(G,*)$ ile $(H,\circ)$ arasında en az bir izomorfizm varsa $(G,*)$ ile $(H,\circ)$ birbirine izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.8: $(\mathbb{R},+)$ ile $(\mathbb{R}^{+},\cdot)$ birbirine izomorftur. $\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^{+},\cdot)$, $\varphi(a)=2^{a}$ dönüşümüne bakalım. Bu dönüşümün birebir ve örten olduğu aşikardır. Ayrıca her $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\varphi(a+b)=2^{a+b}=2^{a}\cdot 2^{b}=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

eşitliği sağlandığından homomorfizmdir.

Örnek 2.1.9: Her sonsuz devirli grup, $(\mathbb{Z},+)$ ile izomorftur. $G=\langle a\rangle$ sonsuz bir devirli grup olmak üzere $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to G$, $\varphi(n)=a^{n}$ ile tanımlanan dönüşümü ele alalım. Her $i,j\in\mathbb{Z}$ için $i\neq j$ olduğunda $a^{i}\neq a^{j}$ olacağından dönüşüm birebirdir. Bundan dolayı her $n\in\mathbb{Z}$ için farklı bir $a^{n}\in G$ mevcuttur. O halde dönüşüm örtendir. Ayrıca her $n,m\in\mathbb{Z}$ için

$$\varphi(n+m)=2^{n+m}=2^{n}\cdot 2^{m}=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$$

olup dönüşüm bir homomorfizmdir.

Teorem 2.1.16: $\varphi:G\to H$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda

- **i.** G 'nin mertebesi ile H 'ın mertebeleri eşittir, yani $|G|=|H|$ 'dir.
- **ii.** Her $a\in G$ için $|a|=|\varphi(a)|$ 'dir.

İspat:

- **i.** İzomorfizmin birebir olma şartı $|G|=|H|$ olmasını gerektirir.
- **ii.** $a\in G$ için $|a|=n$ olsun. Bu durumda $a^{n}=e_{G}$ 'dir. Buradan

$$\varphi\left(a^{n}\right)=\left[\varphi\left(a\right)\right]^{n}=e_{H}$$

yazarak $|a|=|\varphi(a)|$ sonucunu göstermiş oluruz.

2.1.2. Serbest Gruplar ve Grup Takdimleri

Tanım 2.1.17: $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$ kümesini ve elemanları, her $a\in A$ elemanının tersi a^{-1}'lerden ibaret olan $A^{-1}=\{a_1^{-1},a_2^{-1},a_3^{-1},...\}$ kümesini göz önüne alalım. Ayrıca bu iki kümeye ait olmayan bir de ι elemanı seçelim; $\iota\notin A\cup A^{-1}$. Terimleri $A\cup A^{-1}\cup\{\iota\}$'nın elemanları olan $(a_1,a_2,...,a_r,...)$ dizisinde uygun bir $n\geq 1$ için a_n teriminden sonraki tüm terimler ι ise, yani $(a_1,a_2,...,a_n,\iota,\iota,...)$ şeklinde ise bu diziye A üzerinde bir kelime adı verilir. Özel olarak her terimi ι olan $I=(\iota,\iota,\iota,...)$ şeklindeki diziye boş kelime denir[20].

Tanım 2.1.18: Aşağıdaki iki koşul sağlandığında $(a_1,a_2,...,a_n,\iota,\iota,...)$ kelimesi kısaltılmış kelime adını alır.

i. $1\leq i\leq n-1$ olan bir i için $a_i=a$ ise $a_{i+1}\neq a^{-1}$ dir ve $a_i=a^{-1}$ ise $a_{i+1}\neq a$ dır.

ii. $k\in\mathbb{N}$ ve $a_k=\iota$ ise, her $i\geq k$ için $a_i=\iota$ dır[20].

Örnek 2.1.10: $(a_1,a_2,a_1^{-1},a_3,\iota,\iota,...)$ bir kısaltılmış kelimedir. Ancak $(a_1,a_2,\iota,a_3^{-1},a_3,\iota,\iota,...)$ bir kısaltılmış kelime değildir. Çünkü ilk ι elemanından sonra, ι'dan başka hiçbir terim olmamalı ve yine a_3^{-1} ile a_3 şeklindeki ters elemanlar bir araya gelmemelidir.

Not 2.1.3: Bir kısaltılmış kelimenin terimleri $\lambda_i\in\{-1,1\}$ olmak üzere $a_i^{\lambda_i}$ şeklindedir ve bu durumda $x=(a_1^{\lambda_1},a_2^{\lambda_2},...,a_n^{\lambda_n},\iota,\iota,...)$ şeklinde yazılabilir. Kolaylık olması için bundan sonra

$$x=a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}...a_n^{\lambda_n}$$

biçiminde ifade edilecektir.

A üzerindeki tüm kısaltılmış kelimelerin kümesini $Ser(A)$ ile gösterelim. $x, y \in Ser(A)$ ve $n \geq r$ olmak üzere

$$x = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n} \quad , \quad y = b_1^{\delta_1} b_2^{\delta_2} ... b_r^{\delta_r}$$

olsun. Bu durumda xy çarpımını aşağıdaki gibi tanımlarız.

Tanım 2.1.19: $0 \leq k \leq r$ olmak üzere her $i = 0,1,...,k-1$ için $a_{n-i}^{\lambda_{n-i}} = b_{i+1}^{-\delta_{i+1}}$ koşulunu sağlayan en büyük tamsayı k olsun. Eğer

$$xy = \begin{cases} a_1^{\lambda_1} ... a_{n-k}^{\lambda_{n-k}} b_{k+1}^{\delta_{k+1}} ... b_r^{\delta_r} & , \ k < r < n \\ a_1^{\lambda_1} ... a_{n-r}^{\lambda_{n-r}} & , \ k = r < n \\ I & , \ k = r = n \end{cases}$$

ile tanımlanırsa xy bir kısaltılmış kelime olur ve böylece $Ser(A)$ üzerinde bir ikili işlem tanımlanmış olur[20].

Teorem 2.1.17: Boş olmayan her A kümesi için $Ser(A)$ bir gruptur ve A, $Ser(A)$'yı üretir[20].

İspat: $I = (\iota, \iota, \iota, ...)$ birim elemandır. Teorem 2.1.3 gereği $x^{-1} = a_n^{-\lambda_n} ... a_1^{-\lambda_1}$ dir. Birleşme işlemi olduğu da aşikardır.

Tanım 2.1.20: $Ser(A)$ ya A üzerinde bir serbest grup denir.

Teorem 2.1.18: Her grup, bir serbest grubun homomorf görüntüsüdür.

İspat: G herhangi bir grup olsun. G'nin birim elemanı e ve herhangi bir üreteçler kümesi A olsun. $h : Ser(A) \to G$ fonksiyonu, $h(I) = e$ ve $h(a_1^{\lambda_1} ... a_n^{\lambda_n}) = a_1^{\lambda_1} ... a_n^{\lambda_n}$ ile tanımlansın. Burada sol taraftaki $a_1^{\lambda_1} ... a_n^{\lambda_n}$ kısaltılmış bir kelimeyi, sağ taraftaki $a_1^{\lambda_1} ... a_n^{\lambda_n}$ ise G'deki bir elemanı ifade etmektedir. Böylece tanımlanan h, iyi tanımlı, örten bir homomorfizmdir.

Tanım 2.1.21: G herhangi bir grup ve A, G'nin herhangi bir üreteçler kümesi olsun. Eğer $G \cong Ser(A)$ ise, G grubu A üzerinde serbesttir denir ve A, G'nin serbest üreteçler kümesidir denir[20].

Örnek 2.1.11: $(\mathbb{Z},+)$ grubu $\{1\}$ kümesi üzerinde serbesttir; $\{1\}$ de $(\mathbb{Z},+)$ grubunun üreteçler kümesidir.

Teorem 2.1.19: G bir grup, $\{a_i : i \in I\}$ onun bir üreteçler kümesi ve G' de herhangi bir grup olsun. Eğer her $i \in I$ için G''nün farklı olmaları gerekmeyen $a_i' \in G'$ elemanları verilmişse, $\sigma : G \to G'$, $\sigma(a_i) = a_i'$ olacak şekilde en çok bir homomorfizm vardır. Eğer G grubu $\{a_i : i \in I\}$ üzerinde serbest grup ise, sözü edilen koşulları sağlayan bir ve yalnız bir homomorfizm vardır[20].

İspat: $\sigma : G \to G'$, her $i \in I$ için $\sigma(a_i) = a_i'$ koşullarını sağlayan bir homomorfizm olsun. Bu durumda her $x \in G$ için I'nın böyle bir sonlu altkümesi $I_x = \{i_1,...,i_r\}$ ve $\alpha_1,...,\alpha_r \in \mathbb{Z}$ bulunur ki

$$x = a_{i_1}^{\alpha_1} ... a_{i_r}^{\alpha_r} \qquad (2.1.8)$$

olur. σ bir homomorfizm olduğundan,

$$\sigma(x) = \sigma(a_{i_1}^{\alpha_1} ... a_{i_r}^{\alpha_r}) = (a_{i_1}')^{\alpha_1} ... (a_{i_r}')^{\alpha_r}$$

olması gerekir ki bu, $\sigma(a_i) = a_i'$, $1 \le i \le r$, özelliğine sahip bir homomorfizm varsa, onun tek olduğunu gösterir. Eğer ek olarak, G grubu $\{a_i\}$ üzerinde serbest grup ise, her $x \in G$ için (2.1.8) ifadesi tek türlü belirlidir. Dolayısıyla her $x = a_{i_1}^{\alpha_1} ... a_{i_r}^{\alpha_r} \in G$ için $\sigma(x) = (a_{i_1}')^{\alpha_1} ... (a_{i_r}')^{\alpha_r}$ tanımlanırsa G'den G''ye istenilen türde bir homomorfizm elde edilir.

Tanım 2.1.22: A boş olmayan bir küme, $B \subseteq Ser(A)$ ve B'nin $Ser(A)$ içinde ürettiği normal altgrup N olsun. Bu takdirde, $G = Ser(A)/N$ grubuna $a \in A$ üreteçleri ve $\omega = e(\omega \in B)$ bağıntılarının belirlediği grup denir. $\langle A \mid B \rangle$ gösterimi de, G grubunun takdimi adını alır[20].

Örnek 2.1.12: $\langle a \mid a^6 = e \rangle$ şeklinde taktim edilen grup, $\mathbb{Z}_6$ ile izomorf olan $\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ devirli grubudur.

Tanım 2.1.23: $D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = e, xy = yx^{-1} \rangle$ şeklinde taktim edilen gruba $2n$ mertebeli dihedral grup adı verilir. Dihedral grupta $|x| = n$ ve $|y| = 2$'dir.

Örnek 2.1.13: $n = 3$ için dihedral grubun takdimi $D_6 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1, xy = yx^{-1} \rangle$ olup bu grubun elemanları e, x, x^2, y, xy, x^2y olarak elde edilir.

Tanım 2.1.24: r tek sayı olmak üzere

$$F(r,2) = \left\langle x, y \mid (xy)^{\frac{r-1}{2}} = yx^{-1}, (yx)^{\frac{r-1}{2}} = xy^{-1} \right\rangle$$

takdimi ve $x^2 = y^2 = (xy)^{\frac{r+1}{2}}$ bağıntısıyla verilen gruba Fibonacci grubu denir. Burada x ve y üreteçlerinin mertebeleri $|x| = |y| = 2(r-1)$ olup grubun mertebesi $(r^2 - 1)$'dir.

Tanım 2.1.25: Boştan farklı R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemi tanımlanmış olsun. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağladığında halka adını alır.

i. $(R, +)$ değişmeli gruptur.

ii. Her $a, b \in R$ için $ab \in R$ dir (kapalılık).

iii. Her $a,b,c \in R$ için $a(bc)=(ab)c$ sağlanır (birleşme özelliği).

iv. Çarpma işleminin toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani her $a,b,c \in R$ için

$$a(b+c)=ab+ac$$

ve

$$(b+c)a=ba+ca$$

dır.

$(R,+,\cdot)$ halkası çarpma işlemine göre değişme özelliğini sağlarsa değişmeli (komütatif) halka; çarpma işlemine göre birim elemana sahipse birimli halka adını alır. Özel olarak çarpmaya göre birim elemanı 1_R ile gösterilir.

Tanım 2.1.26: $(R,+,\cdot)$ bir halka ve $a,b \in R$ olsun. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmasına rağmen $ab=0$ oluyorsa a 'ya sol sıfır bölen, b 'ye de sağ sıfır bölen adı verilir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan eleman sıfır bölen adını alır.

Örnek 2.1.14: $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ değişmeli halkasını ele alalım. Bu kümeden alınacak 3 ve 4 elemanları birlikte sıfır bölen teşkil ederler. Fakat 3 ve 5 birlikte seçilirse ikisi de ne sağ ne de sol bölen teşkil ederler.

2.2.Matrisler

2.2.1.Matrislerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: Elemanları bir A kümesinden alınan elemanlarlardan oluşan

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

formundaki dikdörtgen tabloya $m\times n$ tipli bir matris denir.

Örnek 2.2.1: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}_{2\times 3}$ matrisi 2×3 tipli bir matristir.

Tanım 2.2.2: $n\times n$ tipindeki matrislere kare matris adı verilir.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Tanım 2.2.3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

formundaki matrislere kösegen matris, a_{ij} elemanlarının oluşturduğu köşegene de esas köşegen adı verilir. Köşegen matris özel bir kare matristir.

Tanım 2.2.4: Matrislerde toplama işlemi aynı indisli elemanların toplamı şeklinde tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Bu işlemin yapılabilmesi için matrislerin tipleri aynı olmalıdır.

Tanım 2.2.5: Matrislerde skaler ile çarpma işlemi tüm elemanların skalerle çarpılması şeklinde tanımlanır.

$$kM = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Tanım 2.2.6: Matrislerde çarpma işlemi aşağıdaki gösterildiği şekilde tanımlanır. İki matrisin çarpımı,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}_{n\times r}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]_{ij} \quad , \; 1 \le i \le m \;\; , \; 1 \ge j \le r$$

ifadesinden elde edilen matristir. Çarpılacak olan matrislerden ilkinin sütun sayısı ikincinin satır sayısı ile aynı olmalıdır.

Örnek 2.2.2:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Teorem 2.2.1: Matrsilerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

İspat: İspatı örnekle yapalım.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

iken

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 14 & 18 & -11 \\ 20 & 25 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

olup genel olarak çarpmanın değişme özeliğinin olması gerekmediği sonucuna varılır.

Tanım 2.2.7: Esas köşegenini oluşturan elemanları 1, diğer elemanları 0 olan matrise birim matris adı verilir.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Birim matris özel bir köşegen matristir.

Önerme 2.2.1: Birim matrisin bazı özellikleri şöyledir:

i. Birim matrisle çarpılan bir matrisin bileşenleri değişmez.

$$AI = IA = A$$

ii. Birim matrisin her kuvveti birim matrise eşittir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$I^n = I\ .$$

Tanım 2.2.8: A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmiş formuna A'nın transpozu denir ve A^T ile gösterilir.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \Rightarrow A^T = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$$

Örnek 2.2.3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{için} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

dir.

Tanım 2.2.9: Bir kare matrisi bir skalere eşleyen fonksiyona deteminant denir. A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir.

2×2 tipli $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ile hesaplanır.

$n\times n$ tipli $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ matrisinin determinantını hesaplayabilmek için aşağıdaki tanımlar bilinmelidir.

Tanım 2.2.10: Bir A kare matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütununun silinmesiyle oluşan matrisin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir ve $\left|M_{ij}\right|$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.4: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisi için $\left|M_{23}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}_{2\times 2}$ biçimindedir.

Tanım 2.2.11: $(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ ifadesine a_{ij} elemanının kofaktörü denir ve

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.12: Bir matrisin determinantı herhangi bir satırın (veya sütunun) elemanlarının kofaktörlerinin toplamıdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+...+a_{1n}A_{1n}$$

Önerme 2.2.2: Determinantın özellikleri için aşağıdakiler söylenebilir:

i. Matriste bir satırın(ya da sütunun) elemanlarının tamamı sıfır ise determinant sıfıra eşittir.

ii. Herhangi iki satır(ya da sütun) aynı ya da birbirinin tam katı ise determinant sıfıra eşittir.

iii. Herhangi iki satırın(ya da sütunun) yeri değiştirilirse determinantın işareti değişir.

iv. $|A|=\left|A^T\right|$

v. $|AB|=|A|\cdot|B|$

vi. $\left|A^n\right| = \left|A\right|^n$

vii. $n \times n$ tipli A matrisi için k skaler olmak üzere $|kA| = k^n\,|A|$ 'dır.

viii. $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ix. Matrisin bir satırının bir k katı başka bir satıra eklenirse matrisin determinantı değişmez[17].

Tanım 2.2.13: Bir matrisin elemanlarının yerine elemanlarının kofaktörleri yazılıp transpozunun alınmasıyla oluşan matrise ek matris (adjoint matrisi) denir ve $Ek(A)$ ile gösterilir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Tanım 2.2.14: Bir A matrisi için $AB = BA = I$ olacak şekilde uygun bir B matrisi varsa bu matrise A 'nın çaprma işlemine göre tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Detrerminantı sıfırdan farklı matrislerin tersi aşağıdaki eşitlikle hesaplanır:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Ek(A)$$

2×2 tipindeki $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ ile hesaplanabilir.

Önerme 2.2.3:

i. $|A| \neq 0$ için $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ ’dır.

ii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

iii. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$

iv. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ [18].

Tanım 2.2.15: A bir kare matris ve λ bir skaler olmak üzere

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

olup $|A - \lambda I| = 0$ denklemini sağlayan λ değerlerine A matrisinin özdeğerleri x vektörünede A ’nın özvektörü adı verilir[32].

2.2.2.Dairesel (Circulant) Matris

Tanım 2.2.16: $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ sayılarının meydana getirdiği $C = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ dairesel (circulant) matrisi

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

şeklinde tanımlanır. $(n-1)$. dereceden $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ polinomu C_n dairesel matrisinin yardımcı polinomu olarak adlandırılır [2].

Önerme 2.2.4: Dairesel (circulant) matrisler için aşağıdaki durumlar basit matris işlemleri ile görülebilir.

- **i.** A ve B aynı tipli iki dairesel matris ve k ile m iki sakaler olsun. Bu durumda $kA+mB$ matrisi de dairesel matristir.
- **ii.** İki dairesel matrisin çarpımı bir dairesel matristir.
- **iii.** Bir dairesel matrisin çarpmaya göre tersi bir dairesel matristir.
- **iv.** Bir dairesel matrisin transpozu bir dairesel matristir.
- **v.** Dairesel matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği vardır[33].

C_n dairesel matris hakkında daha fazla bilgi için bakınız [18,24,29,33].

2.3.İndirgemeli Diziler

Tanım 2.3.1: R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n \quad (2.3.1)$$

formundaki bağıntıyı sağlayan $\{a_n\}$ dizisine $k-$mertebeden homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, ..., c_k$ sayıları R'den alınan sabit sayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz[12].

Tanım 2.3.2: $$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_{k-1} x + c_k$$

şeklindeki $k.$dereceden polinoma (2.3.1) denklemi için karakteristik polinom adı verilir[12].

Tanım 2.3.3: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + c_{k+1}$$

formundaki bağıntıyı sağlayan $\{a_n\}$ dizisine $k-$mertebeden homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir. Bu bağıntıda n yerine $n+1$ seçilerek elde edilen

$$a_{n+k+1} = c_1 a_{n+k} + c_2 a_{n+k-1} + ... + c_k a_{n+1} + c_{k+1}$$

bağıntısı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1+1)a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1}-c_i)a_{n+k-i} - c_k a_n \qquad (2.3.2)$$

şeklinde $(k+1)$ mertebeli homojen lineer indirgemeli dizi elde edilebilir. Bu durumda (2.3.2) bağıntısı için karakteristik polinom

$$F(x) = \left(x^k - c_1 x^{k-1} - ... - c_{k-1}x - c_k\right)(x-1)$$

olarak ifade edilir[12].

$(n+k)$.elemanı

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + ... + c_{k-1} a_{n+k-1} \qquad (2.3.3)$$

şeklindeki lineer indirgeme bağıntısıyla hesaplanan diziyi düşünelim. [19]'de Kalman, şekildeki gibi tanımlanan dizilerin elemanlarının companion matrisler formundaki üreteç matrisler yardımıyla belirlenebileceğini aşağıdaki gibi göstermiştir.

Kalman, A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlamış ve basit bir işlemle

$$A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

eşitliğine ulaşmıştır. $[a_0,...,a_{k-1}] = [0,...,0,1]$ olarak alınarak (2.3.4) denklemi

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

formunda yazılabilir. Daha da özel olarak a_n için

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir.

Daha fazla bilgi için bakınız [19].

2.3.1.Fibonacci Dizileri

Tanım 2.3.4: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

şeklindeki indirgeme (rekürans) bağıntısıyla tanımlanan $\{F_n\}$ dizisi, Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Fibonacci dizisi

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$$

şeklinde olup dizinin her bir elemanına Fibonacci sayısı denir.

$n.$ Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

formundadır.

Silvester [26]'de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanarak bu dizi hakkında birçok özellik elde etmiştir.

Tanım 2.3.5: $F_0^{(k)} = 0, ..., F_{k-2}^{(k)} = 0$, $F_{k-1}^{(k)} = 1$ başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + ... + F_n^{(k)} \tag{2.3.5}$$

şeklindeki indirgeme (rekürans) bağıntısı ile tanımlanan $\left\{F_n^k\right\}_{k \geq 2}$ dizisi, k -basamak Fibonacci dizisi olarak adlandırılır.

k -basamak Fibonacci dizisi Kalman tarafından incelenen

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + ... + c_{k-1} a_{n+k-1} \tag{2.3.6}$$

dizisinin özel bir şeklidir. Kalman, [19]'de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir. Bu eşitlik kullanılarak k -basamak Fibonacci dizisi için

$$\begin{bmatrix} F_n^{(k)} \\ F_{n+1}^{(k)} \\ F_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ F_{n+k-2}^{(k)} \\ F_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilebilir.

2.3.2.Pell Dizileri

Tanım 2.3.6: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısyla tanımlanan $\{P_n\}$ dizisi, Pell dizisi olarak adlandırılır. Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,...$$

şeklinde olup dizinin her bir elemanına Pell sayısı denir.

$n.$ Pell sayısı için Binet formülü

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

formundadır. Bicknell [1]'deki çalışmasında Pell sayıları için

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

matrisinin üreteç olduğunu göstermiştir ve bu anlamda $n\in\mathbb{Z}^{+}$ için

$$M^{n}=\begin{bmatrix}P_{n+1} & P_{n}\\ P_{n} & P_{n-1}\end{bmatrix}$$

eşitliğine ulaşmıştır.

Kılıç ve Taşcı, genelleştrilmiş k-mertebeden Pell sayılarının k dizilerini, $1\le i\le k$ olmak üzere $1-k\le n\le 0$ için

$$P_{n}^{i}=\begin{cases}1 & , \ n=1-i\\ 0 & , \ diğer\ durumlarda\end{cases}$$

başlangıç değerleri ve $n>0$ için;

$$P_{n}^{i}=2P_{n-1}^{i}+P_{n-2}^{i}+\ldots+P_{n-k}^{i}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlamışlardır. Burada P_{n}^{i}, $i.$ dizinin $n.$ terimidir. $i=k$ alınırsa $\left\{P_{n}^{k}\right\}$, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k=2$ alınırsa $\left\{P_{n}^{k}\right\}$ dizisi, standart $\left\{P_{n}\right\}$ Pell dizisine indirgenir ve $i=k$ için P_{n}^{k} terimine $n.$ genelleştirilmiş k-Pell sayısı denir [21].

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin karakteristik polinomu

$$f\left(x\right)=x^{k}-2x^{k-1}-x^{k-2}-\cdots-1$$

dir.

Ayrıca Kılıç ve Taşcı [21]'de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisini

$$R = \left[r_{ij} \right]_{k \times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3.6)$$

şeklinde tanımlamışlardır ve

$$E_n = \left[e_{ij} \right]_{k \times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \dots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \dots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \dots & P_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \qquad (2.3.7)$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R \cdot E_n$$

eşitliğini elde etmişlerdir.

Lemma 2.3.1: R ve E_n sırasıyla (2.3.6) ve (2.3.7)'deki matrisler olsunlar. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

dir[21].

Tanım 2.3.7: $\alpha \geq 0$ sabit tamsayısı için $\left\{ P_n^{(\alpha)} \right\}$ genelleştirilmiş Pell dizisi, başlangıç değerleri

$$P_0^{(\alpha)} = 0,\ P_1^{(\alpha)} = 1$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$P_{n+2}^{(\alpha)} = (\alpha + 1) P_{n+1}^{(\alpha)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır[14].

Deveci ve Karaduman, $\alpha > 0$ sabitleri için genelleştirilmiş Pell dizilerinin elemanlarının

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(M^{(\alpha)}\right)^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisi yardımıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir [10].

Deveci ve Karaduman, $\alpha > 0$ sabit tamsayısı için $P_n^{(\alpha)k}$ k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisini,

$$P_0^{(\alpha)k} = 0, \ldots, P_{k-2}^{(\alpha)k} = 0, P_{k-1}^{(\alpha)k} = 1$$

başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$P_{n+k}^{(\alpha)k} = (\alpha+1) P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha)k} + \cdots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha)k}$$

bağıntısı yardımıyla tanımlamışlardır. Burada $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\beta_j = \binom{\alpha+j}{j+1}$'dir. Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha)2}\right\} = \left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ olduğuna dikkat edilmelidir [10].

Deveci ve Karaduman aynı çalışmada k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha)k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha)k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{kxk}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine k -basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir [10].

2.4. m Modülüne Göre İndirgemeli Diziler

2.4.1. m Modülüne Göre k -basamak Fibonacci Dizileri

Tanım 2.4.1.1: (2.3.5)'te tanımlanan k -basamak Fibonacci dizisinin elemanları $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} (\operatorname{mod} m)$ olmak üzere m modülüne göre indirgenirse,

$$f(k,m)=(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)},..., f_n^{(k,m)},...)$$

şeklindeki indirgemeli dizi elde edilir. $f_i^{(k,m)}$, $f_i^{(k)} (\operatorname{mod} m)$ olduğundan $(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)},..., f_k^{(k,m)})=(0,0,...,1)$ olur ve bu dizi için indirgeme bağıntısı (2.3.5)'de tanımlanan indirgeme bağıntısıyla aynıdır[23].

Tanım 2.4.1.2: Bir dizi, belli bir elemanından sonra, bir alt dizinin tekrarı şeklinde devam ediyorsa periyodik dizi adını alır ve tekrar eden alt dizideki terim sayısına bu dizinin periyodu denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,f,g,d,e,f,g,d,...$ dizisi periyodiktir ve periyodu 4 'tür[23].

Tanım 2.4.1.3: Bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k -periyotlu basit periyodik dizi adı verilir. Örneğin; $a,b,c,d,e,a,b,c,d,e,a,...$ dizisi basit periyodiktir ve periyodu 5 'tir[23].

Teorem 2.4.1.1: $f\left(k,m\right)$ basit periyodik bir dizidir[23].

İspat: $S_k=\{(a_1,a_2,...,a_k)\,|\,0\le a_i\le m-1\}$ olsun. $|S_k|=m^k$ olup sonlu olduğundan her $u\ge 0$ için

$$f_{u+1}^{(k,m)}=f_{v+1}^{(k,m)},...,f_{u+k}^{(k,m)}=f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $v\ge u$ sayısı vardır. Dizinin tanımındaki

$$f_{n+k}^{(k)}=\sum_{j=0}^{k-1}f_{n+j}^{(k)}$$

eşitliği kullanılarak

$$f_{n}^{(k)}=f_{n+k}^{(k)}-\sum_{j=0}^{k-1}f_{n+j}^{(k)}$$

olduğu görülmektedir. Buradan

$$f_{u}^{(k,m)}=f_{v}^{(k,m)},f_{u-1}^{(k,m)}=f_{v-1}^{(k,m)},f_{u-2}^{(k,m)}=f_{v-2}^{(k,m)},\ldots,f_{2}^{(k,m)}=f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve $f_{1}^{(k,m)}=f_{v-u+1}^{(k,m)}$ olarak elde edilir ki bu da $f\left(k,m\right)$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir[23].

$h_k(m)$ ifadesi $f\left(k,m\right)$ dizisinin en küçük periyodunu gösterir ve $f\left(k,m\right)$'nin periyodu veya m mödülüne göre k-basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır[23].

Örnek 2.4.1.1:
$s\left(4,3\right)=\left(0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\ldots\right)$dizisini ele alalım. Bu dizi her 26 terimde bir ilk dört terimi ile tekrar ettiğinden basit periyodiktir ve $h_4(3)=26$'dır [23].

p_i sayıları asal sayılar ve e_i sayıları pozitif tamsayılar olmak üzere, $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i} \, (t \geq 1)$ ise $h_k(m)$, $h_k(p_i^{e_i})$ 'lerin en küçük ortak katıdır.

a_{ij} 'ler tamsayılar olmak üzere, verilen bir $A = \left[a_{ij} \right]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının m modülüne göre indirgenmesi $A\text{mod}(m)$ şeklinde ifade edilir. Yani, $A\text{mod}(m) = a_{ij} (\text{mod}\, m)$ 'dir.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$k \times k$ tipli bir kare matris olmak üzere $\langle G \rangle = \left\{ G^i \left(\text{mod}\, m \right) \middle| i \geq 0 \right\}$ kümesini göz önüne alalım. T, matrisin transpozu olmak üzere,

$$G^i \left(0, 0, \dots, 1\right)^T \left(\text{mod}\, m\right) = \left(f_{i+1}^{(k,m)}, f_{i+2}^{(k,m)}, \dots, f_{i+k}^{(k,m)} \right)$$

şeklindedir. Bu durumda $h_k\left(m\right)$, aşağıdaki eşitliği sağlayan en küçük h pozitif tamsayısı olarak elde edilir;

$$G^h \left(0, 0, \dots, 1\right)^T \left(\text{mod}\, m\right) = \left(0, 0, \dots, 1\right).$$

Şimdi $a_1 = \left(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}\right) = \left(0, 1, 0, \dots, 0\right)$ şeklinde k-boyutlu bir vektör ele alalım. Burada $n > 0$ olmak üzere $a_n = \left(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}\right)$ şeklinde tanımlanıp,

$$a_{n1} = a_{(n-1)k} \text{ ve } a_{ni} = a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(i-1)} \,, \ \left(i > 1\right) \qquad (2.4.2)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi de

$$G_n^{'} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n+k-1)1} & a_{(n+k-1)2} & \cdots & a_{(n+k-1)k} \end{bmatrix}$$

matrisiyle ilgili aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.4.1.1: $G_n = G_n^{'}$ 'dir[23].

$g_k\left(p^{\alpha}\right)$, $G_{p^{\alpha}}$ grubunun mertebesi olsun. Şimdi verilecek olan teorem $h_k\left(p^{\alpha}\right)$ ve $g_k\left(p^{\alpha}\right)$ arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 2.4.1.2: $h_k\left(p^{\alpha}\right) = g_k\left(p^{\alpha}\right)$ dir[23].

İspat: $g_k\left(p^{\alpha}\right)$, $h_k\left(p^{\alpha}\right)$ sayısına bölünebilir olduğu açıktır. O zaman sadece $h_k\left(p^{\alpha}\right)$'nin, $g_k\left(p^{\alpha}\right)$ sayısına bölünebildiğini göstermeliyiz. $h_k\left(p^{\alpha}\right) = n$ olsun. Bu durumda n aşağıdaki eşitliği sağlayan en küçük tamsayıdır;

$$G^n\left(0,0,\ldots,1\right)^T\left(mod\ p\right) = \left(0,0,\ldots,1\right).$$

Buradan ve Lemma 2.4.1.1'den, $0 \leq j \leq k-1$ için

$$a_{(n+j)k} \equiv 0\left(mod\ p^{\alpha}\right) \text{ ve } a_{(n+k-1)k} \equiv 1\left(mod\ p^{\alpha}\right)$$

olur. (2.4.2) kullanılarak her $j = 0,1,\ldots,k-1$ için

$$a_{(n+j-1)i} = a_{(n+j)(i+1)} - a_{(n+j-1)k} \equiv a_{(n+j)(i+1)}\left(mod\ p^{\alpha}\right)$$

olduğu görülür. Böylece

$$a_{n1} \equiv a_{(n+1)2} \equiv \ldots \equiv a_{(n+k-1)k} \equiv 1\left(mod\ p^{\alpha}\right)$$

elde edilir. $j+1 < i < k$ olduğu zaman,

$$a_{(n+j)i} \equiv a_{(n+j+1)(i+1)} \equiv \ldots \equiv a_{(n+k-i+j)k} \equiv 0\left(mod\ p^{\alpha}\right)$$

ve $j \geq i$ olduğu zaman, (2)'den $a_{(n+j-i+1)1} = a_{(n+j-i)k}$ olur. Bundan dolayı

$$a_{(n+j)i} \equiv a_{(n+j-1)(i-1)} \equiv \ldots \equiv a_{(n+j-i+1)1} = a_{(n+j-i)k} \equiv 0\left(mod\ p^{\alpha}\right)$$

dir. Bu tarkdirde $G^n \equiv I\left(mod\ p^{\alpha}\right)$ elde edilir.

Teorem 2.4.1.3: t, $g_k(p) = g_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için, $g_k\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha-t} g_k\left(p\right)$'dir. Özel olarak eğer $g_k\left(p\right) \neq g_k\left(p^2\right)$ ise her $\alpha > 1$ için $g_k\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha-1} g_k\left(p\right)$'dir[23].

İspat: Tanım gereği her pozitif r tamsayısı için $G^{g_k\left(p^{r+1}\right)} \equiv I\left(mod\ p^{r+1}\right)$ ve dolayısıyla $G^{g_k\left(p^{r+1}\right)} \equiv I\left(mod\ p^{r}\right)$'dir. Buna göre $g_k\left(p^r\right)$, $g_k\left(p^{r+1}\right)$'yı böler. Öte yandan $G^{g_k\left(p^{r}\right)} \equiv I + \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)$ yazılarak $g_k\left(p^{r+1}\right)$'nin $g_k\left(p^r\right) \cdot p$'yi bölebildiğini gösteren;

$$G^{g_k\left(p^r\right)p} = \left(I + \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(b_{ij}^{(r)} p^r\right)^i \equiv I\left(mod\ p^{r+1}\right)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ya $g_k\left(p^{r+1}\right) = g_k\left(p^r\right)$ ya da $g_k\left(p^{r+1}\right) = g_k\left(p^r\right)p$ olduğu görülmektedir ki buradaki ikinci durum ancak ve ancak p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(r)}$ nin varlığı ile mümkündür. $g_k\left(p\right) = g_k\left(p^t\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı t olduğundan $g_k\left(p^t\right) \neq g_k\left(p^{t+1}\right)$'dir. Buna göre p tarafından bölünemeyen bir $b_{ij}^{(t+1)}$ vardır ve böylece $g_k\left(p^{t+1}\right) \neq g_k\left(p^{t+2}\right)$'dir. t üzerinde yapılacak bir tümevarım ispatı tamamlar.

2.4.2. m Modülüne Göre Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell Dizileri

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi bir m modülüne indirgenirse

$$\left\{P^{k,m}\right\}=\left\{P_{1-k}^{k,m},P_{2-k}^{k,m},...,P_{0}^{k,m},P_{1}^{k,m},P_{2}^{k,m},...,P_{n}^{k,m},...\right\}$$

formunda indirgemeli bir dizi elde edilir. Burada

$$P_n^{k,m}=P_n^k(\mathrm{mod}\,m)$$

şeklindedir[10].

Teorem 2.4.2.1: $\left\{P^{k,m}\right\}$ periyodik bir dizidir[10].

İspat: $U_k=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_k\right)\middle|\,0\le x_1\le m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $\left|U_k\right|=m^k$ sonlu olur. Yani herhangi bir $a\ge 0$ için

$$P_{a+1}^{k,m}=P_{b+1}^{k,m},...,P_{a+k}^{k,m}=P_{b+k}^{k,m}$$

olacak şekilde $b\ge a$ sayısı vardır. Genelleştirilmiş k -mertebe Pell dizisi $\left\{P_n^k\right\}$ tanımındaki

$$P_{n+k}^k=2P_{n+k-1}^k+P_{n+k-2}^k+...+P_n^k$$

ifadesi

$$P_n^k=P_{n+k}^k-2P_{n+k-1}^k-P_{n+k-2}^k-...-P_{n+1}^k$$

olarak düzenlenir ve bu eşitlik kullanılarak

$$P_a^{k,m}=P_b^{k,m},P_{a-1}^{k,m}=P_{b-1}^{k,m},...,P_2^{k,m}=P_{b-a+2}^{k,m},P_1^{k,m}=P_{b-a+1}^{k,m}$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da $\left\{P^{k,m}\right\}$ 'nin periyodik olduğunu gösterir.

$hP_k(m)$, m modülüne göre indirgenmiş genelleştirilmiş k-mertebe Pell dizisinin periyodunu ifade eder.

Örneğin; $\{P^{3,3}\} = \{1,0,0,1,2,2,1,0,0,1,...\}$ olup dizi 6 adımda bir tekrar ettiğinden $hP_3(3) = 6$'dir.

Burada $k = 2$ alındığında $hP_2(m)$, m modülüne göre Pell dizisinin periyodunu gösterir.

Teorem 2.4.2.2: Her $u \in \mathbb{N}$ için $hP_2(2^u) = 2^u$ olur[10].

İspat: $\{P_n\}$ Pell dizisi tanımından her $u \in \mathbb{N}$ için

$$P_{2^u} = 2P_{2^u-1} + P_{2^u-2} = 2^u \lambda (\lambda \in \mathbb{N})$$

ve

$$P_{2^u+1} = 2P_{2^u} + P_{2^u-1} = 2^{u+1}\lambda + 2^u \beta + 1 (\beta \in \mathbb{N})$$

yazılabilir. $P_{2^u} \equiv 0 (\bmod 2^u)$ ve $P_{2^u+1} \equiv 1 (\bmod 2^u)$ olduğundan devir her 2^u. elemandan sonra tekrar başlar. Yani

$$P_{2^u} \equiv P_0 (\bmod 2^u), P_{2^u+1} \equiv P_1 (\bmod 2^u), ...$$

dir. Böylece

$$hP_2(2^u) = 2^u$$

sonucu elde edilr.

Teorem 2.4.2.3: $hP_2(m)$ bir çift sayıdır[10].

İspat: $P_\alpha \equiv P_\varphi (\bmod m)$ ve $P_{\alpha+1} \equiv P_{\varphi+1} (\bmod m)$ olsun. $\{P_n\}$, Pell dizisinin tanımından aşağıdaki durumlara ulaşılır:

i. Eğer P_φ tek ise $P_{\varphi+1}$ çifttir.

ii. Eğer P_φ çift ise $P_{\varphi+1}$ tektir.

Böylece $hP_2(m)$'nin 2 tarafından bölünmesi gerektiği, yani çift olduğu görülür.

Aşağıdaki teoremde, $\langle R\rangle_{p^\alpha} = \{R^i \bmod(p^\alpha) \mid i \geq 0\}$ bir devirli bir grup olmak üzere $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$ ifadesi, $\langle R\rangle_{p^\alpha}$'nın mertebesini ifade etmektedir.

Teorem 2.4.2.4: $hP_k(p^\alpha) = \left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$'dir[10].

İspat: $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$'nin $hP_k(p^\alpha)$ tarafından bölündüğü açıktır. O halde $hP_k(p^\alpha)$'nin de $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$ tarafından bölündüğünü göstermek gerekir. $hP_k(p^\alpha) = n$ olsun. $E_{n+1} = R^{n+1} = R \cdot E_n$ olduğunu biliyoruz. $E_n \equiv \mathrm{I} \bmod(p^\alpha)$ (I birim matris) olduğu için $R^{n+1} \equiv R \bmod(p^\alpha)$ elde edilir. Böylece $R^n \equiv I \bmod(p^\alpha)$ olduğu görülür ki, bu da $\left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$'nın n'yi böldüğünü gösterir. Böylece $hP_k(p^\alpha) = \left|\langle R\rangle_{p^\alpha}\right|$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.4.2.5: p_i sayıları farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i} \; (t \geq 1)$ olsun. Bu durumda

$$hP_k(m) = okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]$$

dir[10].

İspat: $okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right] = \delta$ olsun.

$$P_\delta^k \equiv P_0^k (\bmod m), P_{\delta+1}^k \equiv P_1^k (\bmod m), \ldots, P_{\delta+k-1}^k \equiv P_{k-1}^k (\bmod m)$$

olduğundan

$$hP_k(m) = okek\left[hP_k(p_i^{e_i})\right]$$

dir.

Teorem 2.4.2.6: t, $hP_k(p) = hP_k(p^t)$ eşitliğini sağlayan pozitif tamsayılardan en büyüğü olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için,

$$hP_k(p^\alpha) = p^{\alpha - t} hP_k(p)$$

olur. Özel olarak eğer $hP_k(p) \neq hP_k(p^2)$ olması şartıyla her $\alpha > 1$ için $hP_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} \cdot hP_k(p)$ olur[10].

İspat: θ, pozitif bir tamsayı olsun. Tanım gereği $R^{hP_k(p^{\theta+1})} \equiv I (\bmod\, p^{\theta+1})$ olduğu için $R^{hP_k(p^{\theta+1})} \equiv I (\bmod\, p^{\theta})$ olur. Buna göre $hP_k(p^\theta)$'nin $hP_k(p^{\theta+1})$'yi böler. Diğer taraftan $R^{hP_k(p^\theta)} \equiv I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^\theta\right)$ olarak yazılırsa, $hP_k(p^{\theta+1})$'nin $hP_k(p^\theta) \cdot p$'yi böldüğünü gösteren

$$R^{hP_k(p^\theta)p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^\theta\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(\theta)} p^\theta\right)^i \equiv I \left(\bmod\, p^{\theta+1}\right)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre ya $hP_k(p^{\theta+1}) = hP_k(p^\theta)$ ya da $hP_k(p^{\theta+1}) = hP_k(p^\theta)p$ olmalıdır. $hP_k(p^{\theta+1}) = hP_k(p^\theta)p$ eşitliğinin sağlanması ancak ve ancak p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ olduğunda mümkündür. $hP_k(p^t) \neq hP_k(p^{t+1})$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ vardır. Böylece $hP_k(p^{t+1}) \neq hP_k(p^{t+2})$ olarak elde edilir. İspat t üzerinden tümevarımla tamamlanır[10].

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell Dizileri

Tanım 3.1.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizisinin her bir elemanı, verilen $x_0, x_1, ..., x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 ... \left(x_{n-1}\right)^2 & , \ j \le n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} ... \left(x_{n-1}\right)^2 & , \ n \ge k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, x_1, ..., x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Demek ki genelleştirilmiş k -meretebeden Pell dizisi, grubun yapısını yansıtır. $x_0, x_1, ..., x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir G grubundaki genelleştirilmiş k -meretebeden Pell dizisi $Q_k\left(G; x_0, x_1, ..., x_{j-1}\right)$ ile gösterilir.

Tamsayılarda bir m modülüne göre Pell dizisi $Q_2\left(\mathbb{Z}_m; 0, 1\right)$ olarak yazılır. Grup elemanlarının genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizisi, sonlu bir grubun Pell dizisi olarak adlandırılır[10].

Teorem 3.1.1: Sonlu bir grupta genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi periyodiktir[10].

İspat: G , sonlu bir grup olsun ve $|G|$, G grubunun mertebesini göstersin. G grubunun $|G|^k$ tane farklı sıralı k -lısı olduğundan bu sıralı k -lılardan en az bir tanesi tekrar eder. Sıralı k -lılar tekrar ettiğinden dolayı genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi periyodiktir.

$Q_k\left(G; x_0, x_1, ..., x_{j-1}\right)$ dizisinin periyodu $PerQ_k\left(G; x_0, x_1, ..., x_{j-1}\right)$ ile gösterilir. Tanımdan, sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k -meretebeden Pell dizisinin periyodunun seçilen üreteç kümesine ve $x_0, x_1, ..., x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişir. Ayrıca $hP_k(m)$, C_m devirli grubunda genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisinin periyodu olduğu aşikardır[10].

Tanım 3.1.2: G , sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanının görüldüğü, G 'nin elemanlarının bir genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisi varsa bu durumda G grubuna genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilirdir denir[10].

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilir grupların direkt çarpımları genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizilenebilir olmayabilir. Örneğin; e birim olmak üzere;

$$\left\langle x, y \middle| x^2 = y^2 = e, xy = yx \right\rangle$$

şeklinde verilen D_2 dihedral grubunu ele alalım. D_2 grubunun $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ gruplarının direkt çarpımıdır. D_2 grubunun Pell dizileri

$$Q_2\left(D_2; x, y\right) = x, y, x, y, ...$$

$$Q_2\left(D_2; y, x\right) = y, x, y, x, ...$$

şeklinde olacaktır. Burada xy elemanı iki dizide de olmadığı için D_2 grubu genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilir değildir. Ancak $\langle x \rangle$ grubu

$$Q_2\left(D_2; e, x\right) = e, x, e, x, ...$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir.

Benzer şekilde $\langle y \rangle$ grubu

$$Q_2\left(D_2; e, y\right) = e, y, e, y, ...$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir[10].

Sonuç 3.1.1: D_2 Dihedral grubunun genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu $hP_k(2)$'dir[10].

Teorem 3.1.2: $n>2$ için $D_n = \left\langle x,y \middle| x^2 = y^2 = (xy)^n = e \right\rangle$ olsun. Bu durumda,

i. $k=2,4$ iken $PerQ_k(D_n;x,y) = hP_k(2)$'dir.

ii. $$PerQ_3(D_n;x,y) = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(hP_3(2)\right), & n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ n\left(hP_3(2)\right), & n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 2n\left(hP_3(2)\right), & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

iii. $k \geq 5$ olması halinde iki durum vardır.

a. Eğer n'nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3,k-2]$ aralığında değil ise periyot

$$PerQ_k(D_n;x,y) = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ n\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ 2n\left(hP_k(2)\right), & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

dir.

b. Eğer η, n'nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum vardır.

b1. Eğer $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\eta 3^j \notin [3,k-2]$ ise periyot

$$PerQ_k(D_n;x,y) = \begin{cases} \eta\frac{n}{2}\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \eta n\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \eta 2n\left(hP_k(2)\right), & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

dir.

b2. Eğer μ, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mu = \eta 3^j$ ise periyot

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = \begin{cases} \mu\dfrac{n}{2}\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4) \\ \mu n\left(hP_k(2)\right), & n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4) \\ \mu 2n\left(hP_k(2)\right), & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir"(Deveci ve Karaduman 2015).

İspat:

i. $k = 2$ aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, x, y, ...$$

Böylece bu dizinin periyodu $hP_2(2) = 2$ olur. Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, x, xy, y, e, e, x, y, x, xy, ...$$

ve periyot $hP_4(2) = 7$'dir.

ii. $hP_3(2) = 7$ olup $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$$\begin{aligned} & x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, ... \\ & x_{14} = (xy)^8 x, x_{15} = (xy)^7 x, x_{16} = (xy)^4 x, ... \\ & x_{28} = (xy)^{16} x, x_{29} = (xy)^{14} x, x_{30} = (xy)^8 x, .. \\ & x_{2i\cdot 7} = (xy)^8 x, x_{2i\cdot 7+1} = (xy)^7 x, x_{2i\cdot 7+2} = (xy)^4 x, .. \end{aligned}$$

Burada $v \in \mathbb{N}$ için $4i = nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Eğer $n \equiv 0 \,\mathrm{mod}(4)$ ise bu durumda $i = \dfrac{n}{4}$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2\cdot\frac{n}{4}\cdot 7=\frac{n}{2}\cdot 7=\frac{n}{2}hP_3(2)$$

olduğu görülür.

Eğer $n\equiv 2\bmod(4)$ ise bu durumda $i=\frac{n}{2}$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2\cdot\frac{n}{2}\cdot 7=n\cdot 7=n\cdot hP_3(2)$$

olduğu görülür.

Eğer $n\equiv 1\bmod(4)$ veya $n\equiv 3\bmod(4)$ ise bu durumda $i=n$ olur. Böylece,

$$PerQ_3(D_n;x,y)=2\cdot n\cdot 7=n\cdot 7=2n\cdot hP_3(2)$$

olduğu görülür.

iii. $k\geq 5$ için $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k-3}\in\mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki dizi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&x_0=x,x_1=y,x_2=x,x_3=xy,x_4=y,x_5=x\ldots\\
&x_{2i\cdot hP_k(2)-k+2}=(yx)^{4i},x_{2i\cdot hP_k(2)-k+3}=(yx)^{\varepsilon_1 4i},x_{2i\cdot hP_k(2)-k+4}=(yx)^{\varepsilon_2 4i},\ldots\\
&x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=(yx)^{\varepsilon_{k-3}4i},x_{2i\cdot hP_k(2)}=(yx)^{\tau}x,x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=(yx)^{\tau-1}x,\ldots
\end{aligned}$$

Burada periyodu belirlemek için $\omega\in\mathbb{N}$ olmak üzere $4i=n\cdot\omega$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur.

a. Eğer n 'nin çarpanlarından tek olanlarının hiçbiri $[3,k-2]$ aralığında değil ise

üç durum söz konusudur;

a1. $n\equiv 0\bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1\leq l\leq k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\dfrac{n}{4}$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)}=x\ ,\ x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2\cdot\frac{n}{4}hP_k(2)=\frac{n}{2}hP_k(2)$$

yazılır.

a2. $n\equiv 2\bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\dfrac{n}{2}$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)}=x\ ,\ x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2\cdot\frac{n}{2}hP_k(2)=n\cdot hP_k(2)$$

yazılır.

a3. $n\equiv 1\bmod(4)$ veya $n\equiv 3\bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=n$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)}=x\ ,\ x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2n\cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b. Eğer η, n 'nin $[3,k-2]$ aralığındaki çarpanlarından en büyük olanı ise iki durum söz konusudur;

b1. Eğer $j\in\mathbb{N}$ için $\eta 3^j \notin [3,k-2]$ ise üç durum söz konusudur.

b1.1. $n\equiv 0 \bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{4}$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)}=x \ , \ x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2\cdot\eta\frac{n}{4}hP_k(2)=\eta\frac{n}{2}\cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b1.2. $n\equiv 2 \bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1\le l\le k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1}=e$$

ve $i=\eta\dfrac{n}{2}$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)}=x \ , \ x_{2i\cdot hP_k(2)+1}=y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n;x,y\right)=2\cdot\eta\frac{n}{2}hP_k(2)=\eta n\cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b1.3. $n \equiv 1 \bmod(4)$ veya $n \equiv 3 \bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = n$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \ , \ x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\eta n \cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b2. Eğer μ, $\left[3, k-2\right]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \mu 3^i$ ise üç durum söz konusudur.

b2.1. $n \equiv 0 \bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \frac{n}{4}$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)} = x \ , \ x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu \frac{n}{4} \cdot hP_k(2) = \mu \frac{n}{2} \cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b2.2. $n \equiv 2 \bmod(4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için

$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \frac{n}{2}$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)} = x \ , \ x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu\frac{n}{2}\cdot hP_k(2) = \mu n\cdot hP_k(2)$$

yazılır.

b2.3. $n \equiv 1\text{mod}(4)$ veya $n \equiv 3\text{mod}(4)$ ve $n|\tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu n$ için

$$x_{2i\cdot hP_k(2)} = x \ , \ x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$$

olur. Buradan

$$PerQ_k\left(D_n; x, y\right) = 2\mu n\cdot hP_k(2)$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. Pell-Dairesel (Circulant) Dizileri

Genelleştirilmiş k -mertebeden Pell dizisinin karakteristik polinomu

$$f\left(x\right) = x^k - 2x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - 1$$

olduğundan bu polinomun katsayıları kullanılarak oluşturulan dairesel matris

$$C_{k+1} = \left[c_{ij}\right]_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{cases} 1 \ , \ \left(i = k+1, \ j = 1\right) \ ve \ \left(i+1 = j \ , 1 \le i \le k\right), \\ \text{-2} \ , \ \left(i = k, \ j = 1\right), \left(i = k+1, \ j = 2\right) \ \text{ve} \ \left(i+2 = j \ , 1 \le i \le k-1\right), \\ \text{-1} \ , \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklindedir[3].

Örneğin; C_3 ve C_5 dairesel matrisleri açık olarak

$$C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } C_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

k 'nın farklı değerleri için C_{k+1} matrisi kullanılarak, genelleştirilmiş k -mertebe Pell-dairesel dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$k = 2$ için

$$x_n = \begin{cases} -2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}, & n \equiv 1 \bmod 3, \\ x_{n-2} - x_{n-3} - 2x_{n-4}, & n \equiv 2 \bmod 3, (n > 3) \\ -x_{n-3} - 2x_{n-4} + x_{n-5}, & n \equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

olup dizinin başlangıç değerleri $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = 1$'dir.

$k \geq 3$ ise $n > k+1$ için

$$x_n = \begin{cases} -x_{n-1} - x_{n-2} - \cdots - x_{n-k+2} - 2x_{n-k+1} + x_{n-k} - x_{n-k-1}, & n \equiv 1 \bmod (k+1), \\ -x_{n-2} - x_{n-3} - \cdots - x_{n-k+2} - 2x_{n-k+1} + x_{n-k} - x_{n-k-1} - x_{n-k-2}, & n \equiv 2 \bmod (k+1), \\ \vdots & \\ -x_{n-k+2} - 2x_{n-k+1} + x_{n-k} - x_{n-k-1} - \cdots - x_{n-2k+2}, & n \equiv k-2 \bmod (k+1), \\ -2x_{n-k+1} + x_{n-k} - x_{n-k-1} - \cdots - x_{n-2k+1}, & n \equiv k-1 \bmod (k+1), \\ x_{n-k} + x_{n-k-1} - \cdots - x_{n-2k+1} - x_{n-2k}, & n \equiv k \bmod (k+1), \\ -x_{n-k-1} - x_{n-k-2} - \cdots - x_{n-2k+1} - x_{n-2k} - x_{n-2k-1}, & n \equiv k \bmod (k+1) \end{cases}$$

olup dizinin başlangıç değerleri $x_1 = x_2 = \cdots x_k = 0$ ve $x_{k+1} = 1$ 'dir[3].

Örneğin genelleştirilmiş 5-mertebe Pell-dairesel dizisi

$$x_n = \begin{cases} -x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3} - 2x_{n-4} + x_{n-5} - x_{n-6} \ , \ n \equiv 1 \bmod 6 \\ -x_{n-2} - x_{n-3} - 2x_{n-4} + x_{n-5} - x_{n-6} - x_{n-7} \ , \ n \equiv 2 \bmod 6 \\ -x_{n-3} - 2x_{n-4} + x_{n-5} - x_{n-6} - x_{n-7} - x_{n-8} \ , \ n \equiv 3 \bmod 6 \\ -2x_{n-4} + x_{n-5} - x_{n-6} - x_{n-7} - x_{n-8} - x_{n-9} \ , \ n \equiv 4 \bmod 6 \\ x_{n-5} - x_{n-6} - x_{n-7} - x_{n-8} - x_{n-9} - 2x_{n-10} \ , \ n \equiv 5 \bmod 6 \\ -x_{n-6} - x_{n-7} - x_{n-8} - x_{n-9} - 2x_{n-10} + x_{n-11} \ , \ n \equiv 0 \bmod 6 \end{cases} \quad (n > 6)$$

şeklindedir ve başlangıç değerleri $x_1 = x_2 = ... = x_5 = 0 \ ve \ x_6 = 1$'dir.

$n \geq 0$ için tümevarım yöntemiyle

$$\left(C_{k+1}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k} & x_{n(k+1)+k-1} & \cdots & x_{n(k+1)+2} & x_{n(k+1)+1} \\ x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k} & \cdots & x_{n(k+1)+3} & x_{n(k+1)+2} \\ x_{n(k+1)+2} & x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} & \cdots & x_{n(k+1)+4} & x_{n(k+1)+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n(k+1)+k-1} & x_{n(k+1)+k-2} & x_{n(k+1)+k-3} & \cdots & x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k} \\ x_{n(k+1)+k} & x_{n(k+1)+k-1} & x_{n(k+1)+k-2} & \cdots & x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} \end{bmatrix} \qquad (3.2.2)$$

olduğu görülebilir. Görüldüğü gibi $\left(C_{k+1}\right)^n$, $k+1$ mertebeli bir dairesel matristir[3].

$P(x) = x_{n(k+1)+k+1} + x_{n(k+1)+1}x + ... + x_{n(k+1)+k}x^k$ polinomu $\left(C_{k+1}\right)^n$ matrisinin yardımcı polinomudur[3].

$k \geq 3$ olmak üzere k -basamak Pell-dairesel dizisi

$$a_1 = a_2 = ... = a_{k-1} = 0, a_k = 1$$

başlangıç değerleri ve $n \geq 0$ için

$$a_{n+k+1} = -2a_{n+k} - a_{n+k-1} - ... - a_{n+2} + a_{n+1} \qquad (3.2.3)$$

şeklindeki indirgeme bağantısıyla tanımlanır[3].

k -basamak Pell-dairesel dizisi $\{a_n\}$ 'nin üreteç fonksiyonunu

$$g(x)=\frac{x^{k-1}}{-x^k+x^{k-1}+\ldots+x^2+2x+1}$$

şeklinde elde edilmektedir.

(3.2.3) denkleminin katsayıları kullanırak

$$M_k=\left[m_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & \ldots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki yardımcı (companion) matrisi yazılır. Bu matris k -basamak Pell-dairesel matrisi adını alır. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} a_{n+k+1} \\ a_{n+k} \\ \vdots \\ a_{n+2} \end{bmatrix}=M_k\begin{bmatrix} a_{n+k} \\ a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

dir[3].

$n\geq k-1$ olmak üzere tümevarım yöntemiyle

$$\left(M_k\right)^n=\begin{bmatrix} a_{n+k} & a_{n+1}-a_{n+2}-\ldots-a_{n+k-1} & a_{n+2}-a_{n+3}-\ldots-a_{n+k-1} & \ldots & a_{n+k-2}-a_{n+k-1} & a_{n+k-1} \\ a_{n+k-1} & a_n-a_{n+1}-\ldots-a_{n+k-2} & a_{n+1}-a_{n+2}-\ldots-a_{n+k-2} & \ldots & a_{n+k-3}-a_{n+k-2} & a_{n+k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & a_{n-k+2}-a_{n-k+3}-\ldots-a_n & a_{n-k+3}-a_{n-k+4}-\ldots-a_n & \ldots & a_{n-1}-a_n & a_n \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir[3].

Bilindiği gibi bir indirgemeli dizinin Simpson formülü kendisini üreten marisin determinantı alınarak elde edilir. Örneğin; $\det M_k = (-1)^{k+1}$ olduğu için 3-basamak Pell-dairesel sayılarının Simpson formülü

$$(a_{n+1})^3 + (a_{n+2})^2 a_{n-1} + a_{n+3}(a_n)^2 - 2a_{n+2}a_{n+1}a_n - a_{n+3}a_{n+1}a_{n-1} = 1$$

şeklinde elde edilir. Burada $n \geq 2$ dir[3].

3.3. C_{k+1} ve M_k Matrisleri Yardımıyla Devirli Gruplar

$A = [a_{ij}]$ bir matris ve a_{ij} elemanları tamsayılar olmak üzere $A(\text{mod } m)$, A matrisinin elemanlarının m modülüne göre indirgenerek yazılması anlamına gelir; yani, $A(\text{mod } m) = (a_{ij}(\text{mod } m))$ dir. $\langle A \rangle_m = \{A^i (\text{mod } m) | i \geq 0\}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer $obeb(m, \det A) = 1$ ise $\langle A \rangle_m$ kümesi bir devirli grup olur. $|\langle A \rangle_m|$ ifadesi de $\langle A \rangle_m$ kümesinin mertebesini ifade eder. $\det M_k = (-1)^{k+1}$ olduğundan her m pozitif tam sayısı için $\langle M_k \rangle_m$ bir devirli gruptur. Benzer şekilde $obeb(\det C_{k+1}, m) = 1$ durumunu sağlayan m tam sayıları için $\langle C_{k+1} \rangle_m$ devirli grup teşkil eder.

Burada C_{k+1} ve M_k matrisleri ele alınmıştır.

Teorem 3.3.1: p bir asal sayı ve $\langle G \rangle_{p^\alpha}$ da $\langle C_{k+1} \rangle_{p^\alpha}$ ya da $\langle M_k \rangle_{p^\alpha}$ gruplarından biri olsun $(\alpha \in \mathbb{N})$. u, $|\langle G \rangle_p| = |\langle G \rangle_{p^u}|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise her $v \geq u$ için $|\langle G \rangle_{p^v}| = p^{v-u} \cdot |\langle G \rangle_p|$'dir. Özel olarak $|\langle G \rangle_p| \neq |\langle G \rangle_{p^2}|$ ise her $v \geq 2$ için $|\langle G \rangle_{p^v}| = p^{v-1} \cdot |\langle G \rangle_p|$'dir [3].

İspat: $\langle M_k \rangle_{p^\alpha}$ grubunu ele alalım ve $h(p^\alpha) = \left| \langle M_k \rangle_{p^\alpha} \right|$ olsun. Eğer $(M_k)^{h(p^{\alpha+1})} \equiv I \left(\bmod p^{\alpha+1}\right)$ ise $(M_k)^{h(p^{\alpha+1})} \equiv I \left(\bmod p^{\alpha}\right)$ de sağlanır. Burada a pozitif bir tamsayı ve I, $k \times k$ tipli birim matristir. Bu da gösterir ki $h(p^a)$, $h(p^{a+1})$'yi böler. Ayrıca $(M_k)^{h(p^a)} = I + \left(m_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)$ olduğundan

$$(M_k)^{h(p^a)p} = \left(I + \left(m_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(m_{ij}^{(a)} \cdot p^a\right)^i \equiv I \left(\bmod p^{a+1}\right)$$

sonucu çıkarılabilir. Dolayısıyla $h(p^{a+1})$ da, $h(p^a) \cdot p$'yi böler. Buna göre ya $h(p^{a+1}) = h(p^a)$ ya da $h(p^{a+1}) = h(p^a) \cdot p$ durumları vardır. $h(p^{a+1}) = h(p^a) \cdot p$ durumu ancak ve ancak p'nin bölmediği bir $m_{ij}^{(a)}$ sayısı var olduğunda sağlanır. u, $h(p) = h(p^u)$ eşitliğini sağlayan en büyük tamsayı olduğundan $h(p^u) \neq h(p^{u+1})$'dir. Bu da, p'nin bölmediği bir $m_{ij}^{(u+1)}$ sayısının var olduğunu gösterir. Bundan dolayı $h(p^{u+1}) \neq h(p^{u+2})$'dir. İspatı tamamlamak için de tümevarım metodu uygulamak yeterli olur. $\langle C_{k+1} \rangle_{p^\alpha}$ için ispat benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 3.3.2: $\langle G \rangle_m$, $\langle C_{k+1} \rangle_m$ ya da $\langle M_k \rangle_m$ devirli gruplarından biri olsun. p_i sayıları birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}, (t \geq 1)$ olarak kabul edelim. Bu durumda $\left|\langle G \rangle_m\right| = \text{okek}\left[\left|\langle G \rangle_{p_1^{e_1}}\right|, \left|\langle G \rangle_{p_2^{e_2}}\right|, \cdots, \left|\langle G \rangle_{p_t^{e_t}}\right|\right]$ ile hesaplanır[3].

İspat: $\langle C_{k+1} \rangle_m$ devirli grubunu ele alalım. Bu grup için $obeb(\det C_{k+1}, m) = 1$'dir. $1 \leq i \leq t$ için $\left|\langle C_{k+1} \rangle_{p_i^{e_i}}\right| = \lambda_i$ ve $\left|\langle C_{k+1} \rangle_m\right| = \lambda$ olduğunu farzedelim. (3.2.1)'deki matrise göre

$$x_{\lambda_i(k+1)+j} \equiv 0 \bmod p_i^{e_i} \ , 1 \leq j \leq k$$
$$x_{\lambda_i(k+1)+k+1} \equiv 1 \bmod p_i^{e_i}$$

ve

$$x_{\lambda(k+1)+j} \equiv 0 \bmod m \ , 1 \le j \le k$$
$$x_{\lambda(k+1)+k+1} \equiv 1 \bmod m$$

dir. Buradan $t \in \mathbb{N}$ ve $1 \le j \le k+1$ lmak üzere $x_{\lambda(k+1)+k+1} = \alpha x_{\lambda_i(k+1)+j}$ sonucu çıkar, bu da i 'nin tüm değerleri için $(C_{k+1})^{\lambda}$ 'nin $\alpha \cdot (C_{k+1})^{\lambda_i}$ formunda olduğunu gösterir. Bu ise $\left|\langle C_{k+1}\rangle_m\right| = \text{okek}\left[\left|\langle C_{k+1}\rangle_{p_1^{e_1}}\right|, \left|\langle C_{k+1}\rangle_{p_2^{e_2}}\right|, \cdots, \left|\langle C_{k+1}\rangle_{p_t^{e_t}}\right|\right]$ olduğunu ispatlar.

$\langle M_k\rangle_m$ için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Bilinmektedir ki bir dizinin belirli bir noktasından sonra elemanlar tekrar eden bir alt dizi olarak devam ediyorsa dizi periyodik adını alır. Tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Bir dizinin ilk k elamanı tekrarlı olarak bir alt dizi oluşturursa dizi, k periyotlu basit periyodik dizi adını almaktadır.

$$\{x_n(m)\} = \{x_1(m), x_2(m), x_3(m), ..., x_j(m), ...\}$$

ve

$$\{a_n(m)\} = \{a_1(m), a_2(m), a_3(m), ..., a_j(m), ...\}$$

sırasıyla dizileri bir m modülüne göre indirgenmiş, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell-dairesel dizisi ve k-basamak Pell-dairesel dizisini ifade etsin. Burada $x_j(m) = x_j(\bmod m)$ ve $a_j(m) = a_j(\bmod m)$ 'dir.

Teorem 3.3.3: Her m pozitif tamsayısı için $\{a_n(m)\}$ basit periyodiktir. $\{x_n(m)\}$ dizisi de $obeb(\det C_{k+1}, m) = 1$ olduğunda basit periyodiktir [3].

İspat: $\{a_n(m)\}$ dizisini ele alalım. $Q = \{(q_1, q_2, ..., q_k) | 0 \le q_i \le m-1\}$ kümesi sıralı k-lıların bir kümesi olsun. Bu durumda $|Q| = m^k$ 'dir. Elemanları $\mathbb{Z}_m$ kümesinden alınan

m^k adet sıralı k-lı olduğundan $\{a_n(m)\}$ dizisinde sıralı k-lılardan en az biri tekrarlanır. Böylece bu sıralı k-lıdan sonra alt dizi tekrarlanmaya başlar; yani $\{a_n(m)\}$ dizisi periyodik olur. Böylece eğer

$$a_{i+1}(m) \equiv a_{j+1}(m), a_{i+2}(m) \equiv a_{j+2}(m), ..., a_{i+k}(m) \equiv a_{j+k}(m)$$

ve $i > j$ ise $i \equiv j \bmod k$'dir. Tanımdan kolayca

$$a_i(m) \equiv a_j(m), a_{i-1}(m) \equiv a_{j-1}(m), ..., a_{i+(j-1)}(m) \equiv a_{j-(j-1)}(m) = a_1(m)$$

elde edilir. Bu da $\{a_n(m)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\{x_n(m)\}$ için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Aşağıdaki ifadelerde $\{a_n(m)\}$ ve $\{x_n(m)\}$ dizilerinin periyotları sırasıyla $l_a^k(m)$ ve $l_x^k(m)$ ile gösterilmiştir.

Sonuç 3.3.1:

i. p bir asal sayı ve $obeb(\det C_{k+1}, p) = 1$ ise $l_x^k(p) = (k+1) \cdot \left|\langle C_{k+1} \rangle_p\right|$'dir.

ii. Her p asal sayısı için $l_a^k(p) = \left|\langle M_k \rangle_p\right|$'dir [3].

p bir asal sayı ve

$$A(p^\alpha) = \left\{x^n \left(\bmod p^\alpha\right) \middle| n \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 1, x^k = -2x^{k-1} - x^{k-2} - ... - x + 1, k \geq 3\right\}$$

olsun. Bu durumda $A(p^\alpha)$ kümesi bir devirli gruptur.

Artık k-basamak Pell-dairesel dizisinin karakteristik polinomu ile $l_a^k(m)$ periyodu arasındaki bağıntıyı verebiliriz.

Sonuç 3.3.2: p bir asal sayı ve $\alpha \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $A\left(p^{\alpha}\right)$ devirli grubu $\langle M_k \rangle_{p^{\alpha}}$ devirli grubuna izomorftur[3].

3.4.Gruplarda k -basamak Pell-Dairesel Dizileri

G, j-gerenli sonlu bir grup ve X de $\left(x_1, x_2, ..., x_j\right) \in G$ olacak şekilde $\underbrace{G \times G \times ... \times G}_{j}$ kümesinin bir alt kümesi olsun. Bu durumda G grubuna $x_1, x_2, ..., x_j$ tarafından üretilmiştir ve $\left(x_1, x_2, ..., x_j\right)$'e de G'nin üreteç j-lisi denir.

Tanım 3.4.1: $G = \langle X \rangle$ grubu $X = \{x_1, x_2, ..., x_j\}$ kümesinin elemanlarıyla üretilen sonlu bir grup olsun. Bu durumda G grubundaki k-basamak Pell-dairesel dizisinin tanımı aşağıdaki gibidir:

$j = 2$ ise

$$b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = (x_1)^{-1}(x_2)^{-2}, ..., b_k = (b_1)^{-1} ... (b_{k-2})^{-1}(b_{k-1})^{-2}$$

olup $n \geq 1$ için

$$b_{k+n} = (b_n)(b_{n+1})^{-1} ... (b_{n+k-2})^{-1}(b_{n+k-1})^{-2}$$

dir.

$j \geq 3$ ise

$$b_1 = x_1, b_2 = x_2, ..., b_i = x_j$$

olup $n \geq 1$ için

$$b_{i+n} = \begin{cases} (b_1)^{-1}(b_2)^{-1} ... (b_{i+n-2})^{-1}(b_{i+n-1})^{-2} & , \ j+n \leq k \\ (b_{i+n-k})(b_{i+n-k+1})^{-1} ... (b_{i+n-2})^{-1}(b_{i+n-1})^{-2}, & j+n > k \end{cases}$$

dir[3].

$x_1, x_2, ..., x_j$ elemanlarıyla ürertilen k-basamak Pell-dairesel dizisini $PC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.4.1: $X = \{x_1, x_2, ..., x_j\}$ olmak üzere $G = \langle X \rangle$ bir sonlu grup olsun. Bu durumda G grubundaki k-basamak Pell-dairesel dizisi periyodiktir. Özel olarak eğer $k \geq j$ ise G grubundaki k-basamak Pell-dairesel dizisi basit periyodiktir[3].

İspat: $|G| = n$ olsun. G'de n^k adet farklı k-lı bulunduğundan bunlardan en az biri $PC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$ dizisinde tekrar eder. Bu tekrardan dolayı dizi periyodiktir.

Şimdi de $k \geq j$ olsun. $PC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$ periyodik olduğundan $u, v \in \mathbb{N}$, $u \geq v$ için

$$b_{u+1} = b_{v+1}, b_{u+2} = b_{v+2}, ..., b_{u+k} = b_{v+k}$$

dir. k-basamak Pell-dairesel dizisi tanımından $j = 2$ için

$$(b_{n+k})(b_{n+k-1})^2 (b_{n+k-2})...(b_{n+1}) = (b_n)$$

ve $j \geq 3$ için

$$(b_{i+n})(b_{i+n-1})^2 (b_{i+k-2})...(b_{i+n-k+1}) = (b_{i+n-k})$$

dir. Bundan dolayı $b_u = b_v$'dir; bunun da sonucu olarak

$$b_{u-1} = b_{v-1}, b_{u-2} = b_{v-2}, ..., b_{u-(v-1)} = b_{v-(v-1)} = b_1$$

dir. Bu da dizinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$PC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$ dizisinin periyodunu $LPC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$ ile göstereceğiz. Tanımdan anlaşılmaktadır ki $LPC_k\left(G; x_1, ..., x_j\right)$, seçilen üreteçler ve bunların mertebeleriyle ilişkilidir. Burada genelleştirilmiş quarternion grup Q_{2^n} 'daki k -basamak Pell-dairesel dizisinin periyodunu inceleyeceğiz.

$n \geq 3$ olmak üzere Q_{2^n} genelleştirilmiş Quarternion grubu

$$Q_{2^n} = \left\langle x, y \middle| x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \right\rangle$$

şeklinde takdim edilmektir. Burada $\left|Q_{2^n}\right| = 2^n$, $|x| = 2^{n-1}$ ve $|y| = 4$ 'dir.

Teorem 3.4.2 [3]: (x, y) geren (üreteç) çifti için genelleştirilmiş Q_{2^n} quarternion grubundaki k -basamak Pell-dairesel dizilerinin periyotları aşağıdaki gibidir:

i. $LPC_3\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 7$,

ii. $LPC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-2} \cdot l_a^k(2)$, $(k \geq 4)$.

İspat: İspatı, doğrudan hesaplama yöntemiyle yapacağız. $l_a^3(2) = 7$ olduğunu göz önünde bulundurarak;

i. $PC_3\left(Q_{2^n}; x, y\right)$ dizisi

$$x, y, x^{-1}y^{-2} = x^{n-1}, xy^{-1}\left(x^{n-1}\right)^{-2} = y^{-1}x, y\left(x^{n-1}\right)^{-1}\left(y^{-1}x\right)^{-2} = yx, x^{n-1}\left(y^{-1}x\right)^{-1}\left(yx\right)^{-2} = x^{-2}y,$$
$$y^{-1}x\left(yx\right)^{-1}\left(x^{-2}y\right)^{-2} = e, yx\left(x^{-2}y\right)^{-1} = x, x^{-2}yex^{-2} = y, ex^{-1}y^{-2} = x^{n-1}, \ldots$$

şeklinde olduğundan, dizinin periyodu 7'dir.

ii. $k \geq 4$ ise $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-3}, \lambda_{k-1} \in \mathbb{Z}$ ve λ_{k-2} pozitif tek tam sayı olmak üzere $PC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right)$ dizisi

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = x^{n-1}, x_4 = y^{-1}x^3, \ldots,$$
$$x_{2i \cdot l_a^k(2)-k+4} = x^{\lambda_1 4i}, \ldots, x_{2i \cdot l_a^k(2)} = x^{\lambda_{k-3} 4i}, x_{2i \cdot l_a^k(2)+1} = x^{\lambda_{k-2} 4i+1}, x_{2i \cdot l_a^k(2)+2} = x^{\lambda_{k-1} 4i}, x_{2i \cdot l_a^k(2)+3} = x^{n-1}, \ldots$$

şeklindedir. Bu durumda dizinin periyodunu belirlemek için $n \geq 3$ olmak üzere $2^{n-1} \mid 4i$ şartını sağlayan en küçük i tamsayısını bulmalıyız.

$i = n-3$ olarak seçersek

$$x_{2^{n-2} \cdot l_a^k(2)-k+4} = \ldots = x_{2^{n-2} \cdot l_a^k(2)} = e, x_{2^{n-2} \cdot l_a^k(2)+1} = x, x_{2^{n-2} \cdot l_a^k(2)+2} = y, x_{2^{n-2} \cdot l_a^k(2)+3} = x^{n-1}$$

olur ki, bu da dizinin her $\left(2^{n-2} \cdot l_a^k(2)\right)$ tane elemanda bir başa dönerek tekrar ettiğini gösteririr. Dolayısıyla $LPC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-2} \cdot l_a^k(2)$ olarak elde edilir.

Teorem 3.4.3 [3]: (y, x) ikilisiyle üretilen genelleştirilmiş Q_{2^n} quarternion grubunda k -basamak Pell-dairesel dizisinin periyodu

i. $LPC_3\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-3} \cdot 7$,

ii. $LPC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-2} \cdot l_a^k(2)$, $(k \geq 4)$.

İspatı önceki teoremdeki gibi yapılabilir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Birinci, İkinci ve Üçüncü Türden Pell-Dairesel Dizileri

Bu çalışmada genelleştirilmiş k-mertebeden Pell-dairesel dizileri yardımıyla birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizileri tanımlanmış ve bu dizilerin elemanları ile dizilerin üreteç matrisleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca tanımlanan diziler, m modülüne göre indirgenip, üreteç matrisleri ve yardımcı denklemlerle elde edilen devirli gruplar incelenmiştir. Buna ek olarak, elde edilen bu devirli grupların mertebeleri ile m modülüne göre indirgenen dizilerin periyotları arasındaki bağıntılara ulaşılmıştır. Son olarak tanımlanan diziler gruplara taşınmış ve bu anlamda birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitleri tanımlanmıştır. Tanımlanan orbitler sonlu gruplarda incelenmiş ve elde edilen bulguların uygulaması olarak farklı r değerleri için $F(r,2)$ Fibonacci grubunun birinci ve üçüncü türden orbitlerinin periyotları belirlenmiştir.

(3.2.1) eşitlikleri kullanılarak birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizileri şöyle tanımlanır:

Başlangıç değerleri $PC_1^1 = PC_2^1 = 0$ ve $PC_3^1 = 1$ olmak üzere $n > 3$ için

$$PC_n^1 = -2PC_{n-1}^1 + PC_{n-2}^1 - PC_{n-3}^1, \tag{4.1.1}$$

başlangıç değerleri $PC_1^2 = PC_2^2 = PC_3^2 = 0$ ve $PC_4^2 = 1$ olmak üzere $n > 4$ için

$$PC_n^2 = PC_{n-2}^2 - PC_{n-3}^2 - 2PC_{n-4}^2, \tag{4.1.2}$$

başlangıç değerleri $PC_1^3 = PC_2^3 = PC_3^3 = PC_4^3 = 0$ ve $PC_5^3 = 1$ olmak üzere $n > 5$ için

$$PC_n^3 = -PC_{n-3}^3 - 2PC_{n-4}^3 + PC_{n-5}^3. \tag{4.1.3}$$

(Deveci ve Günaçtı [8]).

Birinci,ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$P^{(1)}(x)=\frac{x^2}{x^3-x^2+2x+1}$$

$$P^{(2)}(x)=\frac{x^3}{2x^4+x^3-x^2+1}$$

ve

$$P^{(3)}(x)=\frac{x^4}{-x^5+2x^4+x^3+1}$$

olarak elde edilir[8].

(4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi companion matrisler yazılabilir:

$$M_1=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$M_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

M_1, M_2 ve M_3 matrisleri sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel matrisleri olarak adlandırılır. Burada $\det M_1=-1$, $\det M_2=2$ ve $\det M_3=1$ olduğuna dikkat edelim[8].

$n \geq 1$ olmak üzere tümevarım yoluyla

$$\left(M_1\right)^n = \begin{bmatrix} PC_{n+3}^1 & PC_{n+2}^1 - PC_{n+1}^1 & -PC_{n+2}^1 \\ PC_{n+2}^1 & PC_{n+1}^1 - PC_n^1 & -PC_{n+1}^1 \\ PC_{n+1}^1 & PC_{n+2}^1 + 2PC_{n+1}^1 & -PC_n^1 \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

$$\left(M_2\right)^n = \begin{bmatrix} PC_{n+4}^2 & PC_{n+5}^2 & -PC_{n+3}^2 - 2PC_{n+2}^2 & -2PC_{n+3}^2 \\ PC_{n+3}^2 & PC_{n+4}^2 & -PC_{n+2}^2 - 2PC_{n+1}^2 & -2PC_{n+2}^2 \\ PC_{n+2}^2 & PC_{n+3}^2 & -PC_{n+1}^2 - 2PC_n^2 & -2PC_{n+1}^2 \\ PC_{n+1}^2 & PC_{n+2}^2 & PC_{n+3}^2 - PC_{n+1}^2 & -2PC_n^2 \end{bmatrix} \tag{4.1.5}$$

ve

$$\left(M_3\right)^n = \begin{bmatrix} PC_{n+5}^3 & PC_{n+6}^3 & PC_{n+7}^3 & PC_{n+8}^3 + PC_{n+5}^3 & PC_{n+4}^3 \\ PC_{n+4}^3 & PC_{n+5}^3 & PC_{n+6}^3 & PC_{n+7}^3 + PC_{n+4}^3 & PC_{n+3}^3 \\ PC_{n+3}^3 & PC_{n+4}^3 & PC_{n+5}^3 & PC_{n+6}^3 + PC_{n+3}^3 & PC_{n+2}^3 \\ PC_{n+2}^3 & PC_{n+3}^3 & PC_{n+4}^3 & PC_{n+5}^3 + PC_{n+2}^3 & PC_{n+1}^3 \\ PC_{n+1}^3 & PC_{n+2}^3 & PC_{n+3}^3 & PC_{n+4}^3 + PC_{n+1}^3 & PC_n^3 \end{bmatrix} \tag{4.1.6}$$

olduğu görülebilir. Bir indirgeme dizisinin Simpson formülünün üreteç matrisinin determinantı yoluyla elde edilebildiğinden örnek olarak birinci türden Pell-dairesel dizisini düşünecek olursak bu dizi için Simpson formülü

$$\begin{gathered}(PC_{n+1}^1)^3 - (PC_{n+2}^1)^3 + 2(PC_{n+1}^1)^2 PC_{n+3}^1 - 2PC_{n+1}^1 (PC_{n+2}^1)^2 - 2PC_n^1 PC_{n+1}^1 PC_{n+2}^1 + \\ PC_{n+3}^1 (PC_n^1)^2 - PC_n^1 (PC_{n+2}^1)^2 - PC_n^1 PC_{n+1}^1 PC_{n+3}^1 + PC_{n+1}^1 PC_{n+2}^1 PC_{n+3}^1 = (-1)^n\end{gathered}$$

şeklindedir[8].

Önceki kısımlarda değinildiği gibi $A = \left[a_{ij}\right]$ bir matris ve a_{ij} elemanları tamsayılar olmak üzere $A\left(\bmod m\right)$, A matrisinin elemanlarının m modülüne göre indirgenerek yazılması anlamına gelir; yani, $A\left(\bmod m\right) = \left(a_{ij} \left(\bmod m\right)\right)$ dir.

$\langle A \rangle_m = \{ A^i \pmod m \mid i \geq 0 \}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer $obeb(m, \det A) = 1$ ise $\langle A \rangle_m$ kümesi bir devirli grup olur. $|\langle A \rangle_m|$ ifadesi de $\langle A \rangle_m$ kümesinin mertebesini ifade eder.

Bu bilgilere göre her m pozitif tamsayısı için $\langle M_1 \rangle_m$ ve $\langle M_3 \rangle_m$ kümeleri birer devirli gruptur. $\langle M_2 \rangle_m$ kümesi ise m bir tek tamsayı olduğunda devirli olmaktadır.

4.2. m Modülüne Göre Birinci, İkinci ve Üçüncü Türden Pell-Dairesel Dizileri

Şimdi M_1, M_2 ve M_3 tarafından üretilip m modülüne göre alınan devirli grupların mertebelerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.2.1: λ bir asal sayı ve $\langle G \rangle_{\lambda^n}$ kümesi $\langle M_1 \rangle_{\lambda^n}$, $\langle M_2 \rangle_{\lambda^n}$ ile $\langle M_3 \rangle_{\lambda^n}$ kümelerinden biri olsun $(n \in N)$. $|\langle G \rangle_{\lambda}| = |\langle G \rangle_{\lambda^u}|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı u olması durumunda her $v \geq u$ için $|\langle G \rangle_{\lambda^v}| = \lambda^{v-u} \cdot |\langle G \rangle_{\lambda}|$ eşitliği vardır. Özel olarak $v \geq 2$ için $|\langle G \rangle_{\lambda}| \neq |\langle G \rangle_{\lambda^2}|$ ise bu durumda $|\langle G \rangle_{\lambda^v}| = \lambda^{v-1} \cdot |\langle G \rangle_{\lambda}|$'dir[8].

İspat: $\langle M_2 \rangle_{\lambda^n}$ devirli grubunu ele alalım; bu durumda $\lambda \neq 2$ dir. a pozitif bir tamsayı olsun ve $|\langle M_2 \rangle_{\lambda^n}|$ sayısı $h_2(\lambda^n)$ ile gösterilsin. Eğer $(M_2)^{h_2(\lambda^{a+1})} \equiv I \pmod{\lambda^{a+1}}$ ise $(M_2)^{h_2(\lambda^{a+1})} \equiv I \pmod{\lambda^{a}}$ yazılabilir. Burada I, 4×4 tipli birim matristir. Buna göre $h_2(\lambda^a)$, $h_2(\lambda^{a+1})$ sayısını böler. Ayrıca $(M_2)^{h_2(\lambda^a)} = I + (m_{ij}^{(a)} \cdot \lambda^a)$ ifadesini binom açılımıyla yazılırsa

$$(M_2)^{h_2(\lambda^a) \cdot \lambda} = \left(I + \left(m_{ij}^{(a)} \cdot \lambda^a\right)\right)^{\lambda} = \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} \left(m_{ij}^{(a)} \cdot \lambda^a\right)^i \equiv I \pmod{\lambda^{a+1}}$$

elde edilir. Buna göre $h_2\left(\lambda^{a+1}\right)$, $h_2\left(\lambda^{a}\right)\cdot\lambda$ sayısını böler. Bu da demektir ki ya $h_2\left(\lambda^{a+1}\right)=h_2\left(\lambda^{a}\right)$ ya da $h_2\left(\lambda^{a+1}\right)=h_2\left(\lambda^{a}\right)\cdot\lambda$ dır. $h_2\left(\lambda^{a+1}\right)=h_2\left(\lambda^{a}\right)\cdot\lambda$ durumu ancak ve ancak λ tarafından bölünmeyen bir $m_{ij}^{(a)}$ sayısı varsa sağlanır. u sayısı $h_2\left(\lambda\right)=h_2\left(\lambda^{u}\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $h_2\left(\lambda^{u}\right)\neq h_2\left(\lambda^{u+1}\right)$'dir. Buradan λ tarafından bölünmeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ tamsayısının var olduğu anlaşılır ve böylece $h_2\left(\lambda^{u+1}\right)\neq h_2\left(\lambda^{u+2}\right)$ eşitsizliğini elde ederiz. İspatı tamamlamak için u üstünde bir tümevarım uygulamak yeterli olacaktır.

$\langle M_1\rangle_{\lambda^n}$ ve $\langle M_3\rangle_{\lambda^n}$ için teorem benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.2.2: m bir pozitif tamsayıyı ve $\langle G\rangle_m$ kümesi $\langle M_1\rangle_m$, $\langle M_2\rangle_m$ ile $\langle M_3\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi birini göstersin. λ_i sayıları birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{e_i}$, $(k\geq 1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$\left|\langle G\rangle_m\right| = \text{okek}\left[\left|\langle G\rangle_{\lambda_1^{e_1}}\right|,\left|\langle G\rangle_{\lambda_2^{e_2}}\right|,\cdots,\left|\langle G\rangle_{\lambda_k^{e_k}}\right|\right]$ 'dır [8].

İspat: $\langle M_3\rangle_m$ devirli grubunu ele alalım. $1\leq i\leq k$ için $\left|\langle M_3\rangle_{\lambda_i^{e_i}}\right|=\beta_i$ ve $\left|\langle M_3\rangle_m\right|=\beta$ olduğunu farzedelim. (4.1.6)'den

$$\begin{aligned}
&x_{\beta_i+5}\equiv 1\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right),\\
&x_{\beta_i}\equiv 1\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right),\\
&x_{\beta_i+u}\equiv 0\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right), u=1,2,3,4,6,7,8\,için
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&x_{\beta+5}\equiv 1\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right),\\
&x_{\beta}\equiv 1\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right),\\
&x_{\beta+u}\equiv 0\left(\text{mod } p_i^{e_i}\right), u=1,2,3,4,6,7,8\,için
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $0 \leq k \leq 8$ ve $\lambda \in N$ için $x_{\beta+k} = \lambda \cdot x_{\beta_i+k}$ sonucu çıkar. Bunun anlamı $(M_3)^{\beta}$, i'nin her değeri için $t \cdot (M_3)^{\beta_i}$ formunda olduğudur. Bu da bize $\left|\langle M_3 \rangle_m\right| = \text{okek}\left[\langle M_3 \rangle_{p_1^{e_1}}, \langle M_3 \rangle_{p_2^{e_2}}, \ldots, \langle M_3 \rangle_{p_k^{e_k}}\right]$ olduğunu göstermektedir.

$\langle M_1 \rangle_m$ ve $\langle M_2 \rangle_m$ için teorem benzer şekilde ispatlanabilir.

Birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizilerini bir m modülüne göre indirgediğimizde

$$\left\{PC_n^k(m)\right\} = \left\{PC_1^k(m), PC_2^k(m), PC_3^k(m), \cdots, PC_i^k(m), \cdots\right\}$$

şeklinde tekrarlı diziler elde ederiz. Burada $PC_i^k(m) = PC_i^k(\bmod m)$ ve $k = 1,2,3$ dir. Bu dizilerdeki indirgeme bağıntıları sırasıyla (4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3)'deki indirgeme bağıntılarının aynısıdır.

Teorem 4.2.3 [8]: m modülüne göre indirgenmiş $\left\{PC_n^1\right\}$, $\left\{PC_n^2\right\}$ ve $\left\{PC_n^3\right\}$ dizilerinin periyotları aşağıdaki gibidir:

i. $\left\{PC_n^1(m)\right\}$ ve $\left\{PC_n^3(m)\right\}$ dizileri her pozitif m tamsayısı için periyodiktir

ii. $\left\{PC_n^2(m)\right\}$ dizisi her pozitif m tamsayısı için periyodiktir. Özel olarak $obeb(2,m) = 1$ olduğunda $\left\{PC_n^2(m)\right\}$ dizisi basit periyodik olur.

İspat: Birinci türden Pell-dairesel $\left\{PC_n^1(m)\right\}$ dizisini ele alalım. $S = \left\{(s_1, s_2, s_3) \middle| 0 \leq s_i \leq m-1\right\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_m$'nin elemanlarının m^3 adet farklı sıralı 3-lüsü var olduğundan, bu sıralı 3-lülerin en az biri $\left\{PC_n^1(m)\right\}$ dizisi içinde iki defa ortaya çıkacaktır. Bu tekrardan dolayı dizi periyodiktir. Bu durumda $i > j$ olmak üzere $PC_{i+3}^1(m) \equiv PC_{j+3}^1(m)$, $PC_{i+2}^1(m) \equiv PC_{j+2}^1(m)$, $PC_{i+1}^1(m) \equiv PC_{j+1}^1(m)$ ise $i \equiv j \bmod 3$ olduğu sonucu elde edilir. Tanımdan hareketle

$$PC_i^1(m) \equiv PC_j^1(m), PC_{i-1}^1(m) \equiv PC_{j-1}^1(m), \ldots,$$

$$PC_{i-j+2}^1(m) \equiv PC_{j-(j-2)}^1(m) = PC_2^1(m), PC_{i-j+1}^1(m) \equiv PC_{j-(j-1)}^1(m) = PC_1^1(m)$$

yazılır. Böylece dizinin basit periyodik olduğu görülmüş olur.

$\{PC_n^2(m)\}$ ve $\{PC_n^3(m)\}$ dizileri için ispat benzer şekilde yapılabilir.

$\{PC_n^1(m)\}$, $\{PC_n^2(m)\}$, $\{PC_n^3(m)\}$ dizilerinin periyotları sırasıyla $lC^1(m), lC^2(m)$ ve $lC^3(m)$ ile gösterilir.

Aşağıda sunulan sonuçlarda $lC^1(m)$, $lC^2(m)$ ve $lC^3(m)$ periyotları ile $|\langle M_1\rangle_m|$, $|\langle M_2\rangle_m|$, $|\langle M_3\rangle_m|$ mertebeleri arasında tespit edilen bazı bağıntılar ifade edilmiştir.

Sonuç 4.2.1: λ herhangi bir asal sayı olsun. Bu durumda $lC^1(\lambda) = |\langle M_1\rangle_\lambda|$ ve $lC^3(\lambda) = |\langle M_3\rangle_\lambda|$ eşitlikleri vardır. $\lambda > 2$ olacak şekilde bir asal sayı olduğunda ise $lC^2(\lambda) = |\langle M_2\rangle_\lambda|$ eşitliği görülür[8].

İspat: Bu özellik (4.1.4), (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin getirdiği bir sonuçtur.

λ bir asal sayı; ayrıca $u \geq 1$ olmak üzere

$$A_1(\lambda) = \{x^n (\operatorname{mod} \lambda) : n \in \mathbb{Z}, x^3 = -2x^2 + x - 1\}$$

ve

$$A_3(\lambda) = \{x^n (\operatorname{mod} \lambda) : n \in \mathbb{Z}, x^5 = -x^2 - 2x + 1\}$$

kümelerini ele alalım. Bu şartlarda $A_1(\lambda)$ ve $A_3(\lambda)$ kümeleri devirli gruplardır.

Artık birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizileri ile bunların periyotları $lC^1(m)$, $lC^3(m)$ arasında bir bağıntı verebiliriz.

Sonuç 4.2.2: λ bir asal sayı olsun. Bu durumda $A_1(\lambda)$ ve $A_3(\lambda)$ devirli grupları sırasıyla $\langle M_1\rangle_\lambda$ ve $\langle M_3\rangle_\lambda$ devirli grupları ile izomorftur[8].

4.3.Gruplarda Birinci ve Üçüncü Türden Pell-Dairesel Dizileri

Tanım 4.3.1: $X=\{x_1,x_2,...,x_j\}$ olmak üzere $G=\langle X\rangle$ sonlu üretilmiş bir grup olsun. Bu durumda G grubunun birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$n\geq 1$ için

$$X^1C_n=\left(X^1C_{n-3}\right)^{-1}\left(X^1C_{n-2}\right)\left(X^1C_{n-1}\right)^{-2}$$

olup bu dizinin başlangıç değerleri

$$\begin{cases} X^1C_1=\left(x_1\right)^{-1}, X^1C_2=x_2, X^1C_3=x_3 & , j=3ise \\ X^1C_1=\left(x_1\right)^{-1}, X^1C_2=\left(x_1\right)^{-1}, X^1C_3=x_2 & , j=2ise \end{cases}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $n\geq 1$ için

$$X^3C_n=\left(X^3C_{n-5}\right)\left(X^3C_{n-4}\right)^{-2}\left(X^3C_{n-3}\right)^{-1}$$

olup bu dizinin başlangıç değerleri

$$\begin{cases} X^3C_1 = x_1 \;,\; X^3C_2 = x_2 \;,\; X^3C_3 = x_3 \;,\; X^3C_4 = x_4 \;,\; X^3C_5 = x_5 & , j = 5 ise \\ X^3C_1 = (x_1)^2 \;,\; X^3C_2 = x_1 \;,\; X^3C_3 = x_2 \;,\; X^3C_4 = x_3 \;,\; X^3C_5 = x_4 & , j = 4 ise \\ X^3C_1 = (x_1)^5 \;,\; X^3C_2 = (x_1)^2 \;,\; X^3C_3 = x_1 \;,\; X^3C_4 = x_2 \;,\; X^3C_5 = x_3 & , j = 3 ise \\ X^3C_1 = (x_1)^{12} \;,\; X^3C_2 = (x_1)^5 \;,\; X^3C_3 = (x_1)^2 \;,\; X^3C_4 = x_1 \;,\; X^3C_5 = x_2 & , j = 2 ise \end{cases}$$

şeklindedir.

G grubunun birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitleri sırasıyla $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ve $P^3C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.1: Eğer G sonlu bir grup ise G grubunun $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ve $P^3C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ orbitleri basit periyodiktir.

İspat: G grubunun birinci türden Pell-dairesel orbitini yani $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$'yi ele alalım. G'nin mertebesini n olarak kabul edersek G'nin elemanlarının n^3 tane farklı sıralı 3-lüsünün mevcut olacağı açıktır. Bu da bize bu sıralı üçlülerin en az bir tanesinin $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ orbitinde iki defa karşımıza çıkacağını gösterir. Bu tekrardan dolayı dizinin periyodik olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ dizisi periyodik olduğundan

$$X^1C_{u+1} = X^1C_{v+1} \;,\; X^1C_{u+2} = X^1C_{v+2} \text{ ve } X^1C_{u+3} = X^1C_{v+3}$$

olacak şekilde $u \geq v$ doğal sayılarının mevcut olduğu açıktır. Dizinin tanımındaki indirgeme bağıntısı kullanılarak

$$\left(X^1C_{n-2}\right)\left(X^1C_{n-1}\right)^{-2}\left(X^1C_n\right)^{-1} = X^1C_{n-3}$$

bağıntısına ulaşılır ki bu da bizi

$$X^1C_u = X^1C_v$$

ve dolayısıyla

$$X^1C_1 = X^1C_{u-v+1} \text{ , } X^1C_2 = X^1C_{u-v+2} \text{ ve } X^1C_3 = X^1C_{u-v+3}$$

eşitliklerine ulaştırır ki dolayısıyla $P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}$ orbiti basit periyodik olur.

$P^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ve $P^3C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ orbitlerinin periyotları sırasıyla $l^1C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ve $l^3C_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ile gösterilir.

4.4.Birinci ve Üçüncü Türden Pell-Dairesel Dizilerinin Fibonacci Grubundaki Periyotları

r 'nin çeşitli değerlerine göre Fibonacci grubunun birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitlerinin periyotları aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.4.1 Fibonacci grubunda birinci ve üçüncü türden Pell-dairesel orbitlerinin bazı r değerleri için periyotları

	$l^1C_{(x,y)}(F(r,2))$	$l^3C_{(x,y)}(F(r,2))$
r=5	56	372
r=7	84	372
r=9	168	744
r=11	168	26 412
r=13	336	7 068
r=15	3 192	694 648
r=17	336	4 464
r=19	252	2 232
r=21	168	5 854 660
r=23	1 064	226 920
r=25	168	67 704
r=27	6 832	1 293 444
r=29	3 192	1 683 944
r=31	336	105 648
r=33	3 808	304 544
r=35	51 576	2 589 120
r=37	252	212 040
r=39	504	2 019 960
r=41	336	1 003 656
r=47	3 696	8 675 040
r=49	1 680	7 440
r=53	30 744	204 228
r=55	3 024	127 224
r=59	4 872	22 680 840
r=61	1 344	1 056 480

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada sadece birinci, ikinci ve üçüncü türden Pell-dairesel dizileri ile çalışılmıştır. Araştırmalar daha geniş mertebeli dizilere genişletilerek sürdürülebilir. Ayrıca Pell dairesel dizilerinin Fibonacci grubu dışındaki gruplardaki periyotları araştırılıp ortaya konulabilir.

KAYNAKLAR

[1]. M. Bicknell, “A Primer on the Pell Sequences and Related Sequences”, The Fibonacci Quart, **1975,** 13(4), 345-350.

[2]. P.R. Davis, “Circulant matrices”, John Wiley, New York, **1979**.

[3]. O. Deveci, “The Pell-Circulant Sequences and their Applications”, is Submitted.

[4]. O. Deveci, “The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups”, Util. Math., **2015**.

[5]. O. Deveci and Y. Akuzum, “The cyclic groups and the semigoups via MacWilliams and Chebyshev matrices”, Journal of Math. Reseacrh, **2014**, 6(2), 55-58.

[6]. O. Deveci and Y. Akuzum, “The recurrence sequences via Hurwitz matrices”, The Scientific Annals of “Al. I. Cuza” University of Iasi, **2015**.

[7]. O. Deveci, Y. Akuzum, E. Karaduman and O. Erdag, “The cyclic groups via Bezout matrices”, Journal of Math. Reseacrh, **2015**, 7(2), 34-41.

[8]. O. Deveci, A.K. Günaçtı, “The Pell-Circulant Sequences of the First, Second and Third kind and their Applications”, 2^{nd} İnternational Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, İstanbul, June **2015**.

[9]. O. Deveci and E. Karaduman, “The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices”, Linear Algebra and its Appl., **2012**, 437, 2538-2545.

[10]. O. Deveci and E. Karaduman, “The Pell sequences in finite groups”, Util. Math., **2015**, 96, 263-276.

[11]. M. Erdoğan ve G. Yılmaz, “Çözümlü Problemlerle Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi”, ISBN: 978-975-6319-02-4, Beykent Üniversitesi Yayınları, İstanbul, **2008**.

[12]. G. Everest, A. Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, “Recurrence Sequences”, ISBN-10: 0-8218-3387-1, ISBN-13: 978-0-8218-3387-2, Mathematical Survey and Monographs, vol.104, England, **2003**.

[13]. D.D. Frey and J.A. Sellers, “Jacobsthal numbers and alternating sing matrices”, Journal of Integer Sequences,**2000**,2, Article 00.2.3.

[14]. B.K. Gandhi and M.J. Reddy, “Triangular numbers in the generalized associated Pell sequence”, Indian Journal of Pure andapplied Mathematics, vol 34, no 8, pp. 1237-1248, **2003**.

[15]. J.B. Gil, M.D. Wiener and C Zara, “Complete Padovan sequences in finite fields”, http://arxiv.org/pdf/math/0605348.pdf.

[16]. N.D. Gogin and A.A. Myllari, “The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices”, Programing and Computer Software, published in Programmirovanie, **2007**,33(2), 74-79.

[17]. D.R. Hill, B. Kolman, “Uygulamalı Lineer Cebir”, ISBN: 605-5829-87-2, Palme Yayıncılık, İstanbul, 2000.

[18]. A.W. Ingleton, “The rank of circulant matrices”, J. London Math. Soc., **1956**, 1-31(4), 445-460.

[19]. D. Kalman, “Generalized Fibonacci numbers by matrix methods”, The Fibonacci Quart., **1982**, 20(1), 73-76.

[20]. H.İ. Karakaş, “Cebir Dersleri”, Tüba Yayınları, Ankara, **2010** (2. baskı).

[21]. E. Kilic and D. Tasci, “The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers”, Taiwanese J. Math., **2006**, 10(6), 1661-1670.

[22]. G-Y. Lee, “k-Lucas numbers and associated bipartite graphs”, Linear Algebra Appl. **2000**, 320, 51-61.

[23]. K. Lü and J. Wang, “k-step Fibonacci sequence modulo m”, Util. Math., **2007**, 71, 169-178.

[24]. T. Muir, “The theory of determinants in historical order of development”, v.4, Macmillan and Co, London, **1911**.

[25]. A.G. Shannon, A.F. Horadam and P.G. Anderson, “The auxiliary equation associated with plastic number”, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **2006**, 12(1), 1-12.

[26]. J.R. Silvester, “Fibonacci properties by matrix methods”, *Mathematical Gazette*, **1979**(63), 188-191.

[27]. V.W. Spinadel, “The metallic means family and forbidden symmetries”, Int. Math. J., **2002**, 2(3), 279-288.

[28]. A.P. Stakhov and B. Rozin, “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers”, Chaos, Solitons and Fractals, **2006**, 27, 1162-1167.

[29]. B. Stephen, “Matrices methods and applications”, Oxford University Press, New York, **1990**.

[30]. D. Taşcı, “Soyut Cebir”, Alp Yayınevi, Ankara **2010** (2. baskı).

[31]. D. Tasci and M.C. Firengiz, "Incomplete Fibonacci and Lucas p-numbers", Math. and Compt. Modell., **2010**, 52, 1763-1770.

[32]. N. Tuglu, E.G. Kocer and A.P. Stakhov, "Bivarite Fibonacci like p-polinomials", Appl. Math. and Compt., **2004**, 155, 637-641.

[33]. A. Uslu, "Dairesel matrisler ve uygulaması", Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, **2008**.

[34]. S. Vajda, "Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden section theory and applications", New York, John Wiley&Sons, **1989**.

[35]. F. Yilmaz and D. Bozkurt, "The generalized order-k Jacobsthal numbers", Int. J. Contemp. Math. Sciences, **2009**, 4(34), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

1986 doğumluyum. Liseyi Balıkesir'in Gönen ilçesinde okudum. Lisans eğitimimi Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladım. Özel kurumlarda öğretmenlik yaptığım sırada Kars Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans çalışmama başladım.

BİRİNCİ, İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ TÜRDEN PELL DAİRESEL DİZİLERİ VE UYGULAMALARI

ORIJINALLIK RAPORU

%17	%7	%5	%14
BENZERLIK ENDEKSI	İNTERNET KAYNAKLARI	YAYINLAR	ÖĞRENCI ÖDEVLERI

BIRINCIL KAYNAKLAR

1	Submitted to Kafkas Ãniversitesi Öğrenci Ödevi	%11
2	www.aidic.it İnternet Kaynağı	%1
3	Submitted to University of Bristol Öğrenci Ödevi	<%1
4	ekilic.etu.edu.tr İnternet Kaynağı	<%1
5	www.cyberforum.ru İnternet Kaynağı	<%1
6	acl.mit.edu İnternet Kaynağı	<%1
7	ERCAN, Selami. "On the derived series of Baer groups", TUBITAK, 2004. Yayın	<%1
8	www.matemasuk.com İnternet Kaynağı	<%1
9	www.coursehero.com İnternet Kaynağı	<%1

10	3dprint.nih.gov İnternet Kaynağı	<%1
11	Submitted to University of Leeds Öğrenci Ödevi	<%1
12	www.m-hikari.com İnternet Kaynağı	<%1
13	ccsenet.org İnternet Kaynağı	<%1
14	Gregory S. Duane. "Synchronized chaos in extended systems and meteorological teleconnections", Physical Review E, 12/1997 Yayın	<%1
15	web.iku.edu.tr İnternet Kaynağı	<%1
16	zaki.math.web.id İnternet Kaynağı	<%1
17	www.passcape.com İnternet Kaynağı	<%1
18	ddfe.curtin.edu.au İnternet Kaynağı	<%1
19	research.att.com İnternet Kaynağı	<%1
20	abstract.ups.edu İnternet Kaynağı	<%1
21	m-hikari.com	

İnternet Kaynağı

<%1

22	Submitted to Chiang Mai University Öğrenci Ödevi	<%1
23	www-fs.informatik.uni-tuebingen.de İnternet Kaynağı	<%1
24	pirsquared.org İnternet Kaynağı	<%1
25	Ömür Deveci. "The Polytopic-k-Step Fibonacci Sequences in Finite Groups", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011 Yayın	<%1
26	Submitted to Ardahan Üniversitesi Öğrenci Ödevi	<%1
27	www.cinematography.net İnternet Kaynağı	<%1
28	informatik.uibk.ac.at İnternet Kaynağı	<%1
29	answers.yahoo.com İnternet Kaynağı	<%1
30	de.slideshare.net İnternet Kaynağı	<%1
31	Ömür Deveci. "On the Basic k-nacci Sequences in Finite Groups", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011	<%1

Yayın

32	www.eunitrat.hu İnternet Kaynağı	<%1
33	www.ece.mcmaster.ca İnternet Kaynağı	<%1
34	optimierung.math.uni-goettingen.de İnternet Kaynağı	<%1
35	en.calameo.com İnternet Kaynağı	<%1
36	M. G. Epitropakis. "Root finding and approximation approaches through neural networks", ACM SIGSAM Bulletin, 12/1/2005 Yayın	<%1
37	www.sachverstaendigenrat-wirtschaft.de İnternet Kaynağı	<%1
38	Submitted to University of Durham Öğrenci Ödevi	<%1
39	vivondo.ru İnternet Kaynağı	<%1
40	williams.comp.ncat.edu İnternet Kaynağı	<%1
41	Falcon, S.. "On the Fibonacci k-numbers", Chaos, Solitons and Fractals, 200706 Yayın	<%1
42	www.fatonmerovci.com İnternet Kaynağı	<%1

43	fs.gallup.unm.edu İnternet Kaynağı	<%1
44	www.math.ucsd.edu İnternet Kaynağı	<%1
45	Submitted to University of Reading Öğrenci Ödevi	<%1
46	Kybernetes, Volume 29, Issue 7 (2006-09-19) Yayın	<%1
47	www.vtzi.ru İnternet Kaynağı	<%1
48	Kilic, E.. "On the computing of the generalized order-k Pell numbers in log time", Applied Mathematics and Computation, 20061001 Yayın	<%1
49	www.math.muni.cz İnternet Kaynağı	<%1
50	lbn.gamesnet.pl İnternet Kaynağı	<%1
51	ntmsci.com İnternet Kaynağı	<%1
52	www.dcsc.tudelft.nl İnternet Kaynağı	<%1
53	Krattenthaler, C.. "Advanced determinant calculus: A complement", Linear Algebra and its Applications, 2005.	<%1

Yayın

54	www.tacrearops.com İnternet Kaynağı	<%1
55	journal.taiwanmathsoc.org.tw İnternet Kaynağı	<%1
56	Kilic, E.. "The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods", Journal of Computational and Applied Mathematics, 20071215 Yayın	<%1
57	ROGER L. JONES. "Oscillation in ergodic theory", Ergodic Theory and Dynamical Systems, 08/1998 Yayın	<%1

ALINTILARI ÇIKART ÜZERINDE

BIBLIYOGRAFYAYI ÇIKART ÜZERINDE

EŞLEŞMELERI ÇIKAR KAPAT