T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT DÜZGÜN UZAYLAR

Adem YOLCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin Öztürk

HAZİRAN 2016

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT DÜZGÜN UZAYLAR

Adem YOLCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin Öztürk

HAZİRAN 2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Adem YOLCU' nun Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK'ün danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Soft Düzgün Uzaylar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek **oy birliği** ile kabul edilmiştir.

28/06/2016

	Adı-Soyadı	İmza
Başkan :	Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK	......
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	......
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Rabia ÇAKAN	......

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim kurulunun .../.../20.. gün ve .../...... sayılı kararı ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Beni bu konuya yönlendiren ve bu çalışmamda en büyük emeği geçen, değerli bilim adamı, danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK'e ve bölümümün değerli hocalarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca her türlü maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Kars-2016 Adem YOLCU

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT DÜZGÜN UZAYLAR

Adem YOLCU

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Sosyal bilimlerde, fen bilimlerinde, mühendislik ve tıpta ki birçok problemin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yeterli olamayabilmektedir. Bu problemler genellikle karar verme ile ilgilidir. Son yıllarda geliştirilmiş olan bulanık(fuzzy) kümeler teorisi, sezgisel bulanık(intuitionistik fuzzy) kümeler teorisi, kaba(rough) kümeler teorisi, esnek(soft) kümeler teorisi, bulanık esnek(fuzzy soft) kümeler teorisi bu karar verme problemlerinin çözümü için önemli derecede katkı sağlamıştır. Bu teoriler matematiğin birçok alt dallarında araştırmacıların yoğun olarak çalışmış olduğu güncel konulardır. Düzgün uzaylar kategorisi topolojinin en önemli konularından biridir. Çünkü topolojik uzayların araştırılmasında düzgün yapı, iyi bir araç olarak kullanılmaktadır.

Bu tezde soft düzgün uzaylar incelenmiş, soft düzgün açık dönüşümler tanımlanarak gerekli teoremler ispatlanmıştır.

2016, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: Soft küme, Soft topolojik uzay, soft civar, soft düzgün yapı, soft düzgün uzay, soft düzgün açık fonksiyon, soft düzgün sürekli fonksiyon

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOFT UNIFORM SPACES

Adem YOLCU

Kafkas University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Taha Yasin ÖZTÜRK

The methods of classical mathematics may not be sufficient in problem solving in social sciences, physical sciences, engineering and medicine. These problems are generally related to decision making. Fuzzy sets theory, intuitionistic fuzzy sets theory, rough sets theory, soft sets theory, fuzzy soft sets theory, which have been developed recently, have remarkably contributed to solving these decision making problems. These theories are actual subjects which have been intensively studied by researchers in a number of sub-branches of mathematics. The category of uniform spaces is one of the most significant subjects of topology. Because, uniform structure is used as a good medium in studying topological spaces.

In this study, by studying soft uniform spaces, and by identifying soft uniform open mappings required theorems were proved.

2016, 61 pages

Keywords: Soft set, Soft topological space, Soft entourage, Soft uniform structure, Soft uniform space, Soft uniform continuous function, Soft uniform open function

SİMGELER DİZİNİ

X : Herhangi bir evrensel küme

$P(X)$: X 'in kuvvet kümesi

E : Parametreler Kümesi

A : E parametreler kümesinin boş olmayan alt kümesi

(F, A) : Herhangi bir soft küme

$({}^{Y}F, E)$: Y alt uzayında (F, E) nin soft alt kümesi

(X, τ, E) : X üzerinde bir soft topolojik uzay

$\overline{(F, E)}$: (F, E) kümesinin soft kapanışı

$(F, E)^{\circ}$: (F, E) kümesinin soft içi

(x_e, E) : Soft nokta

$SS(X, E)$: X üzerinde tüm soft kümelerin ailesi

$(X, \tilde{d}, E)$: Soft metrik uzay

$B(\mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ nin boştan farklı sınırlı tüm alt kümelerinin bir ailesi

$\mathbb{R}(e)^*$: Negatif olmayan tüm soft reel sayılar kümesi

$D_{(X,E)}$: Tüm soft civarlar kümesi

$\tilde{\mathcal{U}}_M$: Soft düzgün alt küme

$(M, \tilde{\mathcal{U}}_M, E)$: Soft düzgün alt uzay

1. GİRİŞ

Sosyal bilimlerde, fen bilimlerinde, mühendislik ve tıptaki birçok problemin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yeterli olamayabilmektedir. Bu problemler genellikle karar verme ile ilgilidir. Son yıllarda geliştirilmiş olan bulanık(fuzzy) kümeler teorisi, sezgisel bulanık(intuitionistik fuzzy) kümeler teorisi, kaba(rough) kümeler teorisi, esnek(soft) kümeler teorisi, bulanık esnek(fuzzy soft) kümeler teorisi bu karar verme problemlerinin çözümü için önemli derecede katkı sağlamıştır [16,19,26,34,36,54]. Bu teoriler matematiğin birçok alt dallarında araştırmacıların yoğun olarak çalışmış olduğu güncel konulardır.

Her teori kendine özgü problemleri çözse de bu teorilerden en önemlisi 1965 yılında Lotfi Zadeh tarafından geliştirilen bulanık(fuzzy) kümeler teorisidir [54]. Amerika'da yaşayan azeri asıllı L. Zadeh çalışmalarında fonksiyon kümesini [0,1] reel sayı aralığına genişleterek fuzzy mantık ve fuzzy kümeleri tanımladı. Fuzzy kümeler karar verme problemlerinde, sosyal bilimlerde, cebirde, geometride vb. gibi çok farklı alanlarda kullanılmıştır [39,50,54].

L. Zadeh'in fuzzy kümeler teorisi diğer teorilere kıyasla en dikkat çeken teori olmasına rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir fuzzy küme üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Molodtsov'a göre üyelik fonksiyonu oluşturulmasının çok fazla bireysel olmasından dolayı, herbir durum için bir üyelik fonksiyonu oluşturulması zorluğuyla karşılaşılır. Molodtsov bu nedenle bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç olduğunu düşünerek 1999 yılında soft küme teorisini matematiksel bir araç olarak ortaya atmıştır [38]. Molodtsov soft küme teorisini kullanarak matematiğin farklı alanlarında başarılı çalışmalar yapmıştır [39]. Daha sonraları Molodtsov'un dışında birçok araştırmacı soft küme teorisi üzerine farklı çalışmalar yapmıştır [11,12,14,15,21,23,24,25.35,37,49,56].

Cebirde soft küme teorisini 2007 yılında ilk Aktaş ve Çağman kullanarak, soft grup kavramını tanımlamışlardır [3]. Daha sonra soft modül ve soft halka kavramları farklı araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır [1,18,29,30,46,47,52]. Topolojide soft küme teorisi ilk defa 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından tanımlanmış ve ayırma aksiyomları araştırılmıştır [51].

Topolojinin temel kavramlarından biri olan soft nokta kavramı üzerine farkı çalışmalar yapılmıştır [5,51,55]. Ancak bu çalışmalarda bir yetersizlik mevcuttur. Bayramov ve Gündüz (Aras) [20] çalışmasında soft nokta için yeni bir tanım vererek bu yetersizlikleri ortadan kaldırmıştır.

Maji ve arkadaşları fuzzy soft kümeleri tanımlamışlar [34] ve daha sonra farklı araştırmacılar tarafından fuzzy soft kümeler ile ilgili çalışmalar yapılmıştır [2,10,42,43,53]. Fuzzy soft yapısını cebirde ilk olarak 2008 yılında Jing-liang ve arkadaşları tanımlamıştır [28]. Bayramov ve Gündüz(Aras) 2010 yılında soft ve fuzzy soft gruplar kategorisinde yaptıkları çalışmalar ile izomorfizma hakkında teoremleri ispatlamışlardır [8]. Yine 2011 yılında Bayramov ve Gündüz(Aras) fuzzy soft modül ve intuitionistic fuzzy soft modüller üzerinde yaptıkları çalışmalarla katkıda bulunmuşlardır [9,22]. Ayrıca Öztürk T. Y. doktora tezinde soft ve fuzzy soft modüllerin homoloji modülleri üzerine önemli çalışmalar yaparak cebirsel topoloji alanında bu konunun ilerlemesine yardımcı olmuştur [43].

Günümüzde soft küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine olan çalışmalar neticesinde soft küme teorisi hızlı bir gelişim göstermektedir.

Tezin özet kısmında da belirtildiği üzere düzgün uzaylar topolojinin en önemli konularından biridir. Düzgün uzay yapısı, verilen herhangi bir X kümesinin $X \times X$ kartezyen çarpım kümesi üzerindeki belirli şartları sağlayan bir filtredir. Düzgün uzaylar metrik uzaylara benzer ancak düzgün uzaylar metrik uzaylardan daha geniştir. Örneğin bazı topolojik uzaylar üzerinde düzgün süreklilik kavramı tanımlanamamaktadır. Ancak düzgün süreklilik kavramı metrik uzaylardan daha genel olan düzgün yapılar üzerine genişletilebilir. Her düzgün uzay bir topolojik uzaya dönüştürülebileceğinden düzgün uzaylar ile topolojik uzaylar arasında önemli bir bağlantı vardır.

Tezin kuramsal temeller bölümünde topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve düzgün uzaylar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş bu uzaylar üzerindeki işlemler sunulmuştur.

Tezin materyal ve yöntem kısmında soft (esnek) kümeler ve soft topolojik uzaylar ile ilgili önemli tanım ve teoremler sunulmuştur.

Tezin araştırma bulguları kısmında soft düzgün uzaylar üzerinde bazı tanımlar verilip konunun daha iyi anlaşılabilmesi için birçok örnek sunulmuştur. Ayrıca soft düzgün açık fonksiyon tanımlanarak gerekli teoremler ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve teoremler sunulacaktır.

2.1. Bazı Topolojik Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [7] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^X$ in bir alt ailesi olsun. τ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa :

a) $X, \varnothing \in \tau$,

b) $\forall A' \subset A$ alt kümesi için $\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha \in \tau$,

c) τ da alınan her sonlu sayıda elemanın arakesiti τ ya aittir.

τ ya X kümesi üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine topolojik uzay, τ nun her U_α elemanına açık küme denir.

Örnek 2.1.1. [7] $X \neq \varnothing$ kümesinde $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ ailesi bir topolojidir. Bu topolojiye indiskret topoloji denir.

Örnek 2.1.2. [7] $X \neq \varnothing$ kümesinde $\tau_1 = 2^X$ kuvvet kümesi bir topolojidir. τ_1 topolojisine diskret topoloji denir.

Tanım 2.1.2. [7] $X \neq \varnothing$ boş küme τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_1 e τ_2 den daha kaba topoloji veya τ_2 ye $\tau_1$den daha ince topoloji denir. X üzerinde topolojilerin içinde en ince topoloji diskret, en kaba topoloji indiskret topolojidir.

Tanım 2.1.3. [7] (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun. Eğer B nin tümleyeni $\overline{B} = X \setminus B$ açık ise B kümesine bu uzayda kapalıdır denir.

Tanım 2.1.4. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $x \in A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $x \in U \subset A$ sağlanacak şekilde $U \in \tau$ varsa A kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.

Tanım 2.1.5. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer A kümesi M kümesinin her noktasının bir komşuluğu ise A kümesine M kümesinin komşuluğu denir.

Tanım 2.1.6. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunun A ile arakesiti boş değilse; bu x noktasına A kümesinin değme noktası (kapanış noktası) denir.

Teorem 2.1.1. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir alt küme olsun.

A açıktır $\Leftrightarrow \forall x \in A$ için A kümesi x noktasının bir komşuluğudur.

Teorem 2.1.2. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun.

B kapalıdır $\Leftrightarrow$ B kümesinin her değme noktası B ye aittir.

Tanım 2.1.7. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta olsun. $\mathcal{U}(x)$ ile x noktasının bütün komşuluklar ailesini gösterelim. $\mathcal{U}(x)$ ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Her $A \in \mathcal{U}(x)$ için $x \in A$ dır ;

2) $A \in \mathcal{U}(x)$, $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{U}(x)$ tir ;

3) $A, B \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{U}(x)$ tir ;

4) $A \in \mathcal{U}(x)$ için $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset A$ ve $\forall y \in U$ için $U \in \mathcal{U}(y)$ dir.

Teorem 2.1.3. [7] $X \neq \varnothing$ kümesinin her $x \in X$ elemanına X in alt kümeler ailesi $\tilde{U}(x)$ karşılık gelsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın :

1) $\forall A \in \tilde{U}(x) \Rightarrow x \in A$,

2) $A \in \tilde{U}(x), \quad A \subset B \Rightarrow B \in \tilde{U}(x),$

3) $A, B \in \tilde{U}(x) \Rightarrow A \bigcap B \in \tilde{U}(x),$

4) $A \in \tilde{U}(x)$ $\exists U \in \tilde{U}(x),\ U \subset A$ ve $\forall y \in U$ için $U \in \tilde{U}(y)$

O zaman $\tau = \left\{ U : \forall x \in U \ için\ U \in \tilde{U}(x) \right\}$ ailesi X de bir topolojidir ve $\tilde{U}(x)$ ailesi bu topolojiiye göre x noktasının komşuluklar ailesidir.

Tanım 2.1.8. [7] (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir küme olsun. A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve A^c ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. [7] (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir alt küme ve $x \in A$ bir nokta olsun. Eğer x in uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve $Int(A)$ veya $\overset{0}{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. [7] (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset \tau$ bir alt aile olsun. Eğer her açık küme B nin bazı elemanlarının birleşimi olarak gösterilebiliyorsa bu B ailesine τ topolojisinin bir tabanıdır denir.

Teorem 2.1.4. [7] (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset \tau$ olsun.

a) B ailesi τ nun tabanıdır $\Leftrightarrow \forall G \in \tau$ ve $\forall x \in G$ için $x \in B_x \subset G$ sağlanacak şekilde $B_x \in B$ bulunabilir.

b) $B = \{B_i\}_{i \in I}$ ailesi τ nun tabanı ise her $B_{i_1}, B_{i_2} \in B$ ve her $x \in B_{i_1} \bigcap B_{i_2}$ için $x \in B_{i_3} \subset B_{i_1} \bigcap B_{i_2}$ koşulunu sağlayan $B_{i_3} \in B$ vardır.

Teorem 2.1.5. [7] $X \neq \varnothing$ bir küme, $B = \{B_i\}_{i \in I}$ X in alt kümeler ailesi olsun. Eğer,

a) $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = X$ **;**

b) Her $B_{i_1}, B_{i_2} \in B$ ve her $x \in B_{i_1} \cap B_{i_2}$ için $x \in B_{i_3} \subset B_{i_1} \cap B_{i_2}$ sağlanacak şekilde $B_{i_3} \in B$ vardır

koşulları sağlanırsa $\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I' \subset I \right\}$ ailesi X de bir topolojidir ve B ailesi bu topolojinin bir tabanıdır.

Tanım 2.1.11. [7] Eğer x noktasının her $U \in \mathcal{U}(x)$ komşuluğu için $x \in V \subset U$ koşulunu sağlayan $V \in \tilde{B}(x)$ varsa $\tilde{B}(x)$ ailesine (X, τ) topolojik uzayında x noktasının bir komşuluk tabanı denir.

2.2. Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. [7] $(X, \tau), (Y, \tau')$ iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

a) Eğer $y_0 = f(x_0)$ noktasının her V_{y_0} komşuluğu için $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$ olacak şekilde x_0 noktasının en az bir U_{x_0} komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

b) Eğer f fonksiyonuna her $x \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X de süreklidir denir.

Teorem 2.2.1. [7] (X, τ), (Y, τ') iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $f : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir ;

b) Her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dur;

c) Y nin her elemanının ters görüntüsü X de açıktır;

d) Y nin tabanının her elemanının ters görüntüsü X de açıktır;

e) X de $\{\mathcal{U}(x)\}_{x\in X}$, Y de $\{\mathcal{U}'(y)\}_{y\in Y}$ şeklinde x ve y noktalarının öyle komşuluklar ailesi mevcuttur ki her $x\in X$ ve $V\in\mathcal{U}'(f(x))$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde $U\in\mathcal{U}(x)$ vardır;

f) Y de kapalı B kümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi X de kapalıdır;

g) Her $A\subset X$ için $f(A^c)\subset(f(A))^c$ dır;

h) Her $B\subset Y$ için $(f^{-1}(B))^c\subset f^{-1}(B^c)$ dir;

ı) Her $B\subset Y$ için $f^{-1}(IntB)\subset Intf^{-1}(B)$ dir.

Teorem 2.2.2. [7] (X,τ), (Y,τ'), (Z,τ'') topolojik uzaylar olsun. Eğer $f:X\to Y$ $g:Y\to Z$ fonksiyonları sürekli ise $g\circ f:X\to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Tanım 2.2.2. [7] (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $U\in\tau$ için $f(U)\in\tau'$ ise f fonksiyonuna açık fonksiyon,

b) Eğer her kapalı $A\subset X$ kümesi için $f(A)$ kümesi Y de kapalı ise f fonksiyonuna kapalı fonksiyon adı verilir.

Uyarı 2.2.1. [7]: Bir fonksiyonun sürekli, açık veya kapalı olması birbirinden bağımsızdır.

Örnek 2.2.1. [7] X de τ_0,τ_1 sırasıyla indiskret, diskret topoloji olmak üzere, $1_X:(X,\tau_0)\to(X,\tau_1)$ fonksiyonu hem açık, hem de kapalıdır, fakat sürekli değildir.

Teorem 2.2.3. [7] (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) f açıktır $\Leftrightarrow$ Her $A\subset X$ için $f(IntA)\subset Intf(A)$ dır.

b) f kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $B\subset X$ için $(f(B))^c\subset f(B^c)$ dir.

Tanım 2.2.3. [7] (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyonu için,

1) f bire-bir ve örtendir

2) f süreklidir,

3) f^{-1} süreklidir.

koşulları sağlanırsa bu fonksiyona bu uzaylar arasında bir homeomorfizma denir. Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizma varsa bu uzaylara homeomorf uzaylar denir.

2.3. Filtreler

Tanım 2.3.1. [7] a) $X \neq \varnothing$ bir küme olsun. Eğer $\Phi \subset 2^X$ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa,

F1) $\varnothing \notin \Phi$ **,**

F2) $F_1, F_2 \in \Phi \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \Phi$

F3) $F \in \Phi,\ F \subset F' \Rightarrow F' \in \Phi$

Φ ailesine filtre denir.

b) Φ bir filtre ve $\Phi_1 \subset \Phi$ olsun. Eğer her $F \in \Phi$ için $F_1 \subset F$ olacak şekilde $F_1 \in \Phi_1$ varsa bu Φ alt ailesine Φ filtresinin bir tabanı denir.

c) Φ bir filtre olsun. Eğer $\Phi \subset \Phi'$ koşulunu sağlayan her Φ' filtresi için $\Phi = \Phi'$ ise Φ ye bir ultrafiltre denir.

d) Φ **,** Φ' iki filtre ve $\Phi \subset \Phi'$ ise Φ' filtresi Φ den daha incedir denir.

Açıktır ki $\Phi_1 \subset \Phi$ ailesinin Φ filtresinin tabanı olması için gerek ve yeter koşul her $A_1, A_2 \in \Phi_1$ için $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ sağlanacak şekilde $A_3 \in \Phi_1$ bulunmasıdır.

Örnek 2.3.1. [7] (X, τ) topolojik uzayında her $x \in X$ noktasının $\mathcal{U}(x)$ komşuluklar ailesi bir filtredir.

2.4. Alt Uzaylar

(X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir küme olsun. $\tau_A=\{U\bigcap A:U\in\tau\}$ ailesi için

a) $\bigcup_{\alpha}(U_\alpha\cap A)=\left(\bigcup_{\alpha}U_\alpha\right)\bigcap A\in\tau_A,$

b) $(U_1\cap A)\bigcap(U_2\cap A)=(U_1\bigcap U_2)\bigcap A\in\tau_A$

koşulları sağlandığında τ_A ailesi A üzerinde bir topolojidir. [7]

Tanım 2.4.1. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir küme ve $\tau_A=\{U\bigcap A:U\in\tau\}$ ailesi A kümesi üzerinde bir topoloji olsun.

a) (A,τ_A) çiftine (X,τ) uzayının bir alt uzayı, τ_A topolojisine alt uzay topolojisi denir.

b) Her (X,τ) topolojik uzayı ve (A,τ_A) alt uzayı için $i_A(x)=x$ formülü ile tanımlanan $i_A:A\to X$ fonksiyonuna gömme fonksiyonu denir.

$i_A^{-1}(U)=U\bigcap A\in\tau_A$ olduğundan i_A fonksiyonu süreklidir. Açıktır ki τ_A topolojisi A kümesinde $i_A:A\to X$ fonksiyonundan üretilen topolojiye eşittir.

Tanım 2.4.2. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $M\subset X$ bir alt uzay olsun.

a) $A\subset M$ kümesi (M,τ_M) de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A=M\bigcap F$ sağlanacak şekilde kapalı $F\subset X$ kümesi vardır.

b) Eğer $A^c_{\tau_M}$ kümesi A nın M alt uzayında kapanışı ise $A^c_{\tau_M}=A^c\bigcap M$ dir.

Tanım 2.4.3. [7] (X,τ), (Y,τ') iki topolojşk uzay, $M\subset X$ bir alt uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. $f\circ i_M:M\to Y$ fonksiyonuna f fonksiyonunun M alt uzayına daraltılması denir ve $f\big|_M:M\to Y$ ile gösterilir.

2.5. Topolojik Toplam

(X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ise $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Alt uzaylar topolojisinin tanımından her $\alpha\in A$ ve $U\subset X$ açık (kapalı) küme için $U\cap X_\alpha$ kümesi X_α da açıktır (kapalıdır).

Tanım 2.5.1. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Eğer,

$U\subset X$ kümesi X de açıktır (kapalıdır) $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in A$ için $U\cap X_\alpha$ kümesi X_α da açıktır (kapalıdır).

koşulu sağlanırsa X uzayına $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzayların serbest birleşimi denir.

Eğer (X,τ) uzayı $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylarının serbest birleşimi ve $B\subset X$ kümesi açık veya kapalı ise (B,τ_B) alt uzayı $\{B\cap X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylarının serbest birleşimidir.

Teorem 2.5.1. [7] (X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Eğer

a) Her $\alpha\in A$ için X_α kümesi X de açık, veya

b) Her $\alpha\in A$ için X_α kümesi X de kapalı ve $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesi yerel sonlu aile ise

X uzayı $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylar ailesinin serbest birleşimidir.

Teorem 2.5.2. [7] $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzaylar ailesi ve $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ olsun. Eğer her $\alpha_1,\alpha_2\in A$ için $X_{\alpha_1}\cap X_{\alpha_2}$ kümesi $(X_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1})$ ve $(X_{\alpha_2},\tau_{\alpha_2})$ uzaylarında açık (kapalı) ise X uzayı $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ uzaylarının serbest birleşimidir ve her X_α kümesi X de açıktır (kapalıdır).

Eğer $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesinde her $\alpha_1,\alpha_2\in A$ için $X_{\alpha_1}\bigcap X_{\alpha_2}=\varnothing$ ise $X=\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ uzayı $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesinin serbest birleşimidir.

Tanım 2.5.2. [7] $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzaylar ailesi ve her $\alpha_1,\alpha_2\in A$ için $X_{\alpha_1}\bigcap X_{\alpha_2}=\varnothing$ ise (X_α,τ_α) uzayların serbest birleşimine bu uzayların topolojik toplamı denir ve $X=\bigoplus\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ ile gösterilir.

2.6. Topolojik Çarpım

$\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. Şimdi $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ kümesinde tüm $p_\alpha:\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha\to X_\alpha$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan topolojiyi tanımlayalım.

İndis kümesi A dan keyfi $\alpha_1,...,\alpha_n$ şeklinde sonlu tane eleman ele alalım. $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ çarpım kümesinde $X_{\alpha_1},...,X_{\alpha_n}$ kümelerinin yerine uygun $U_{\alpha_1},...,U_{\alpha_n}$ açık kümelerini, $\alpha\notin\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ olduğunda ise X_α kümesinin kendisini yazalım. Bu kümeyi

$$U_{\alpha_1}\times...\times U_{\alpha_n}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}X_\alpha$$

ile gösterelim ve $U_{\alpha_1},...,U_{\alpha_n}$ tabanlı silindir adını verelim.

Lemma 2.6.1. [7]

$$B=\left\{U_{\alpha_1},...,U_{\alpha_n}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}X_\alpha:(\alpha_1,...,\alpha_n)\text{ sonlu }U_{\alpha_1}\in\tau_{\alpha_1},...,U_{\alpha_n}\in\tau_{\alpha_n}\right\}$$ ailesi $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ çarpım kümesinde topolojinin bir tabanıdır.

Tanım 2.6.1. [7] $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ çarpım kümesinde

$$B=\left\{U_{\alpha_1}\times\ldots\times U_{\alpha_n}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}X_\alpha:(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\text{ sonlu } U_{\alpha_1}\in\tau_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}\in\tau_{\alpha_n}\right\}$$

tabanından üretilen topolojiye çarpım topolojisi veya Tychonoff topolojisi , $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ kümesine bu topoloji ise birlikte topolojik çarpım denir.

2.7. Metrik Uzaylar

Tanım 2.7.1. [7] $X\neq\varnothing$ bir küme, $\rho: X\times X\to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

a) $\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, $\left[\rho(x,y)\geq 0,\ x=y\Rightarrow\rho(x,y)=0\right]$

b) $\forall x,y\in X$, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (simetri)

c) $\forall x,y,z\in X$, $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşulları sağlanırsa ρ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik [sözde metrik veya pseudometrik] , (X,ρ) ikilisine ise bir metrik [sözde metrik veya pseudometrik] uzay denir.

Örnek 2.7.1 [7] R doğrusunda $\rho(x,y)=|x-y|$ ile tanımlanan ρ fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 2.7.2. [7] (X,ρ) bir metrik uzay, $x\in X$ ve $r>0$ olsun.

$$B(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)<r\},$$

$$IB(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)\leq r\}\ \text{ ve}$$

$$S(x,r)=\{y\in X:\rho(x,r)=r\}$$

kümelerine sırasıyla x merkezli r yarıçaplı açık küre, kapalı küre ve küre yüzeyi veya sphera denir.

Teorem 2.7.1. [7] (X,ρ) bir metrik uzay olsun. $B=\{B(x,r_x):x\in X, r_x>0\}$ açık küreler ailesi için topolojinin tabanının koşulları sağlanır.

Örnek 2.7.2. [7] R doğrusunda $\rho(x,y)=|x-y|$ metriğinden üretilen topolojiye doğal topoloji denir ve τ_e ile gösterilir.

Tanım 2.7.3. [7] (X,ρ) bir metrik uzay, $A\subset X$ ve $x\in A$ olsun. Eğer $x\in B(x,r)\subset A$ koşulunu sağlayan $B(x,r)$ küresi bulunabiliyorsa A kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.

Tanım 2.7.4. [7] (X,ρ) bir metrik uzay, $A\subset X$ ve $x\in X$ olsun. Eğer her $B(x,r)$ açık küresi ile A nın arakesiti boştan farklı ise x noktasına A kümesinin değme noktası denir.

Tanım 2.7.5. [7] (X,ρ) bir metrik uzay, $A,B\subset X$ iki küme olsun.

a) $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y):x\in A, y\in B\}$, $\rho(A,\emptyset)=\rho(B,\emptyset)=1$ sayısına A ile B kümeleri arasındaki uzaklık denir. Eğer $A=\{x\}$ tek noktalı küme ise $\rho(A,B)=\rho(x,B)$ ile gösterilir.

b) $\delta(A)=\sup\{\rho(x,y):x,y\in A\}$ sayısına A kümesinin çapı denir.

Tanım 2.7.6. [7] (X,ρ), (Y,ρ') iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Eğer her $B(f(x_0),\varepsilon)$ küresi için $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$ koşulunu sağlayan $B(x_0,\delta)$ küresi varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.7.7. [36] $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ metrik uzayları ve bir $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Her $\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ reel sayısı $\rho_1(x,y)<\delta$ özelliğini sağlayan her $x,y\in X$ için $\rho_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

Buna denk olarak her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı her $x \in X$ için $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$ olacak şekilde varsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

2.8. Düzgün Yapı Ve Düzgün Uzaylar

Tanım 2.8.1. [7] a) A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere $A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ biçiminde sıralı ikililerin kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

b) X bir küme ise $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ kümesine $X \times X$ in köşegeni denir.

c) $A \subset X \times X$ bir alt küme ise $A^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in A\}$ ile tanımlanır. Eğer $A = A^{-1}$ ise A kümesine simetriktir denir.

d) $A, B \subset X \times X$ ise

$$A \circ B = \{(x,y) : \exists z \in X, (x,z) \in A, (z,y) \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

e) $n = 1, 2, \ldots$ için $A^1 = A$ ve $A^n = A^{n-1} \circ A$ dır.

Tanım 2.8.2. [7] X bir küme ve $V \subset X \times X$ olsun. Eğer $\Delta \subset V$ ve $V = V^{-1}$ ise V kümesine köşegenin civarı denir. Δ köşegeninin tüm civarlarını D_X ile gösterelim.

Tanım 2.8.3. [7] X bir küme $A \subset X, V \in D_X$ ve $x, y \in X$ olsun.

a) Eğer $(x,y) \in V$ ise x ve y noktaları arasındaki uzaklık V den küçüktür denir ve $|x - y| < V$ ile gösterilir. Aksi durumda $|x - y| \geq V$ yazılır.

b) Eğer $A \times A \subset V$ ise A kümesinin çapı V den küçüktür denir ve $\delta(A) < V$ ile gösterilir.

Her $x, y, z \in X$ ve her $V, V_1, V_2 \in D_X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $|x-x| < V$ dir ;

2) $|x-y| < V \Leftrightarrow |y-x| < V$ dir ;

3) Eğer $|x-y| < V_1, |y-z| < V_2$ ise $|x-z| < V_1 \circ V_2$ dir.

Tanım 2.8.4. [7] X bir küme, $x_0 \in X$ bir nokta ve $V \in D_X$ olmak üzere $B(x_0, V) = \{x \in X : |x_0 - x| < V\}$ kümesine x_0 merkezli, V yarıçaplı küre denir. Her $A \subset X$ için $B(A,V) = \bigcup_{x \in A} B(x,V)$ ile tanımlanır.

Tanım 2.8.5. [7] X bir küme $\mathcal{U} \subset D_X$ alt aile olsun. Eğer $\mathcal{U}$ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu $\mathcal{U}$ ailesine düzgün yapı , $(X, \mathcal{U})$ ikilisine ise düzgün uzay denir.

a) $V \in \mathcal{U}$, $V \subset W \in D_X$ ise $W \in \mathcal{U}$ dur ,

b) Eğer $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ ise $V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{U}$ dur,

c) Her $V \in \mathcal{U}$ için $W^2 \subset V$ olacak şekilde $W \in \mathcal{U}$ vardır.

d) $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \Delta$ dır.

Uyarı 2.8.1. [7] Tanım 2.8.5 in d) şıkkını sağlayan yapıya Hausdorff düzgün yapısı adı verilir.

Tanım 2.8.6. [7] $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay , $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ bir alt aile olsun. Eğer her $V \in \mathcal{U}$ için $W \subset V$ sağlanacak şekilde bir $W \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{U}$ düzgün yapısının bir tabanıdır denir.

X kümesinde $\mathcal{U}$ düzgün yapısının her $\mathcal{B}$ tabanı aşağıdaki özelliklere sahiptir :

a) Her $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ için $V \subset V_1 \bigcap V_2$ koşulunu sağlayan $V \in \mathcal{B}$ vardır ;

b) Her $V \in \mathcal{B}$ için $W^2 \subset V$ sağlanacak şekilde $W \in \mathcal{B}$ vardır.

c) $\bigcap \mathcal{B} = \Delta$ dır.

Teorem 2.8.1. [7] X bir küme ve $\mathcal{B}$, $X \times X$ in aşağıdaki koşulları sağlayan alt kümeler ailesi ise ,

a) $B = \mathcal{B} \Rightarrow \Delta \subset B$,

b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$,

c) $B = \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} : C \circ C \subset B$,

d) $B = \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} : C^{-1} \subset B$,

e) $\bigcap \mathcal{B} = \Delta$

o zaman $\mathcal{B}$ ailesi X üzerindeki bir düzgün yapının tabanıdır.

İspat: $\mathcal{V} = \{V \subset X \times X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ öyleki } \mathcal{B} \subset V\}$ ailesi X üzerinde bir düzgün yapıdır ve $\mathcal{B}$ ailesi bu düzgün yapının bir tabanıdır.

Teorem 2.8.2. [7] $(X, \mathcal{V})$ bir düzgün uzay ise

$\tau = \{G \subset X : \forall x \in G \text{ için } B(x,V) \subset G \text{ sağlanacak şekilde } \exists \mathrm{V} \in \mathcal{V}\}$ ailesi X kümesinde bir topolojidir. X kümesi bu topoloji ile birlikte bir T_1- uzayıdır. Bu τ topolojisine $\mathcal{V}$ düzgün yapısından üretilen topoloji denir.

İspat. τ ailesinin bir topoloji olduğunu gösterelim. $G_\alpha \in \tau$ ve $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $x \in G_{\alpha_0}$ dır. τ nun tanımından $B(x,V) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ sağlanacak şekilde $V \in \mathcal{V}$ vardır, yani $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$ dur.

$G_1, G_2 \in \tau$ ve $G_1 \bigcap G_2$ olsun. τ nun tanımından $B(x,V_1) \subset G_1$ ve $B(x,V_2) \subset G_2$ sağlanacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ vardır. Buradan $V = V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{V}$ ve $B(x,V) = B(x,V_1) \bigcap B(x,V_2) \subset G_1 \bigcap G_2$ olduğundan $G_1 \bigcap G_2 \in \tau$ dur.

Şimdi bu (X,τ) uzayının bir T_1- uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için her $x\in X$ noktası için $G=X\setminus\{x\}$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $y\in G$ için $x\neq y$ olduğundan $\exists V\in\mathcal{U}:|x-y|\geq V$ yazılabilir. Bu durumda $B(y,V)\subset G$ olduğundan $G\in\tau$ dur.

Teorem 2.8.3. [7] $(X,\mathcal{U})$ bir düzgün uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve τ , X de $\mathcal{U}$ dan üretilen düzgün topoloji ise $B=\{x\in X:\exists V\in\mathcal{U}$ öyleki $B(x,V)\subset A\}$ kümesi $IntA$ ya eşittir.

İspat. Açıktır ki her açık $G\subset A$ kümesi B ye aittir. İspatı tamamlamak için B nin açık olduğunu gösterelim. Her $x\in B$ için $B(x,V)\subset A$ olacak şekilde $V\in\mathcal{U}$ yu $W^2\subset V$ koşulu altında seçelim. Bu durumda her $y\in B(x,W)$ için $B(y,W)\subset B(x,V)\subset A$ yazılabilir. O halde $B(x,W)\subset B$ dir ve dolayısıyla B açıktır.

Sonuç 2.8.1. [7] (X,τ) topolojik uzayının topolojisi $\mathcal{U}$ düzgün yapısından üretilsin. O halde her $x\in X$ ve her $A\subset X$ için

$$x\in A^c \Leftrightarrow \text{Her } V\in\mathcal{U} \text{ için } A\cap B(x,V)\neq\emptyset \text{ dır.}$$

Sonuç 2.8.2. [7] Eğer (X,τ) topolojik uzayının topolojisi $\mathcal{U}$ düzgün yapısından üretilen topoloji ise her $A\subset X$ ve $\delta(A)<V$ koşulunu sağlayan her $V\in\mathcal{U}$ için $\delta(A^c)<V^3$ tür.

İspat. Sonuç 2.8.1 den her $x,y\in A^c$ için $x'\in B(x,V)$ ve $y'\in B(y,V)$ sağlanacak şekilde $x',y'\in A$ bulunabilir. Buradan $|x-y|<V\circ V\circ V=V^3$ tür.

Örnek 2.8.1. [7] X kümesinde $\mathcal{U}=D_X$ ailesi bir düzgün yapıdır ve $B=\{\Delta\}$ ailesi bu yapının tabanıdır. $\mathcal{U}$ dan üretilen bu topoloji diskret topolojisidir. $(X,\mathcal{U})$ uzayına diskret düzgün uzay adı verilir.

Örnek 2.8.2. [7] R reel sayılar kümesinde her $\alpha > 0$ için $V_\alpha = \{(x,y) \in R \times R : |x-y| < \alpha\}$ olsun. $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha > 0}$ ailesi bir düzgün yapının tabanıdır.

Örnek 2.8.3. [7] $I = [0,1]$ olsun. $\mathcal{U} \subset D_X$ ailesi $V \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists G \subset I \times I$ açık küme ve $\Delta \subset G \subset V$ şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{U}$ nun bir düzgün yapı olduğu ve bu yapıdan üretilen topolojinin I kümesinin doğal topolojisi olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 2.8.4. [7] (X, ρ) bir metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$B_\rho(\varepsilon) = \{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

kümelerinin $\mathcal{B} = \{B_\rho(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ ailesi X üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır. Bu düzgün yapıya ρ metriği ile üretilen metrik düzgün yapı denir.

Eğer $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının düzgün yapısı bir metrik ile üretilebiliyorsa bu düzgün uzaya metriklenebilir düzgün uzay denir.

Tanım 2.8.7. [7] $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ρ, X de sözde metrik olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|x-y| < V$ için $\rho(x,y) < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ varsa ρ sözde metriğine $\mathcal{U}$ yapısına göre düzgündür denir.

Teorem 2.8.4. [7] Eğer ρ sözde metriği $\mathcal{U}$ düzgün yapısına göre düzgün ise $\rho : X \times X \to R$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ düzgün yapısından üretilen topolojide düzgün süreklidir.

İspat. $(x_0, y_0) \in X \times X$ bir nokta olsun. $\varepsilon > 0$ ve $V \in \mathcal{U}$ kümesini

$$|x-y| < V \text{ için } \rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

şeklinde seçelim. $IntB(x_0, V) \times IntB(y_0, V)$ kümesi (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğudur. O zaman her $(x,y) \in B(x_0, V) \times B(y_0, V)$ noktası için $|x_0 - x| < V$ ve $|y_0 - y| < V$ dir. Buradan

$$\left|\rho(x,y)-\rho(x_0,y_0)\right| \le \left|\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_0,y)-\rho(x_0,y_0)\right| =$$

$$=\rho(x,x_0)+\rho(y_0,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bulunur. Böylece $\rho : X\times X \to R$ bir sürekli fonksiyondur.

Tanım 2.8.8. [7] $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{U}')$ iki düzgün uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $V'\in\mathcal{U}'$ için $\exists V\in\mathcal{U}$: $\forall\left|x-y\right|<V$ için $\left|f(x)-f(y)\right|<V'$ sağlanıyor ise f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

b) Eğer f birebir, örten ve f ile f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de düzgün sürekli iseler f fonksiyonuna bir düzgün izomorfizma bu iki düzgün uzaya da izomorf uzaylar denir.

Önerme 2.8.1. [7] (X,ρ) ve (Y,ρ') iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon $\mathcal{U}_\rho$ ve $\mathcal{U}_{\rho'}$, ρ ve ρ' metriklerinden üretilen metrik düzgün yapılar olsun.

$f : (X,\mathcal{U}_\rho)\to(Y,\mathcal{U}_{\rho'})$ düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $f : (X,\rho)\to(Y,\rho')$ düzgün süreklidir.

İspat. Her $B_{\rho'}(\varepsilon)\in\mathcal{U}_{\rho'}$ için $\exists B_\rho(\delta)\in\mathcal{U}_\rho$ ö.k.

$$\forall\left|x-y\right|<B_\rho(\delta)\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|<B_{\rho'}(\varepsilon)\Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon>0 \text{ } için \text{ } \exists\delta>0 : \rho(x,y)<\delta\Rightarrow\rho'(f(x),f(y))<\varepsilon) \text{ dur.}$$

Teorem 2.8.5. [7] Her düzgün sürekli fonksiyon süreklidir.

İspat. $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{U}')$ iki düzgün uzay, $f : X\to Y$ düzgün sürekli bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. $B(f(x),V')$ $f(x)$ in düzgün topolojisinde herhangi bir komşuluk ise f düzgün sürekli olduğundan $V'\in\mathcal{U}'$ için

$$\exists V\in U : \ \forall\left|x-y\right|<V \text{ için } \left|f(x)-f(y)\right|<V'$$

sağlanır. Buradan $f(B(x,V)) \subset B(f(x),V')$ olduğu kolayca elde edilir, yani f fonksiyonu x noktasında süreklidir.

Not: Sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.8.5. [7] $f: R \to R,\ f(x) = x^2$ fonksiyonu R de süreklidir fakat düzgün sürekli değildir.

2.9. Düzgün Uzaylar Üzerinde İşlemler

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay, $M \subset X$ bir alt küme olsun. $\mathcal{U}_M = \{(M \times M \cap V : V \in \mathcal{U}\}$ ailesi için düzgün yapının koşulları sağlansın. [7]

Tanım 2.9.1. [7] $(M, \mathcal{U}_M)$ düzgün uzaya $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının alt uzayı denir.

τ, $\mathcal{U}$ düzgün yapısından üretilen düzgün topoloji, τ_M ise $\mathcal{U}_M$ düzgün yapısından üretilen topoloji ise τ_M topolojisi τ nun ürettiği alt uzay topolojisidir. Düzgün alt uzaylarda

$$i_M : (M, \mathcal{U}_M) \to (X, \mathcal{U}), \quad i_M(x) = x$$

şeklinde tanımlanan gömme dönüşümü düzgün süreklidir.

X bir küme, $\{(X_S, \mathcal{U}_S)\}_{s \in S}$ düzgün uzayların bir ailesi ve her $s \in S$ için $f_S : X \to X_S$ bir fonksiyon olsun.

$$\{(f_S \times f_S)^{-1}(V_S) \subset X \times X : V_S \in \mathcal{U}_S,\ s \in S\}$$

ailesinin tüm sonlu alt ailelerinin arakesitlerinden oluşan aile X kümesi üzerinde bir düzgün yapının alt tabanıdır. Bu düzgün yapıda her $f_S : X \to X_S$ fonksiyonu düzgün süreklidir. Bu düzgün yapıya $\{f_S : X \to X_S\}_{s \in S}$ fonksiyonlar ailesinden üretilen düzgün yapı denir.

$\{(X_S,\mathcal{U}_S)\}_{s\in S}$ düzgün uzayların bir ailesi olsun. S kümesinin herhangi sonlu $\{s_1,...,s_k\}$ alt kümesini seçelim ve $(\prod_{i=1}^{k} X_{S_i})\times\left(\prod X_S\right)$ kümesinin Δ köşegenini içeren

$$\left\{\left(\left\{x_{s_i}\right\},\left\{y_s\right\}\right):\left|x_{s_i}-y_{s_i}\right|<V_{s_i},\ i=1,...,k\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Böyle tanımlana kümeler ailesi için düzgün yapının tabanının koşulları sağlanır. Bu tabandan üretilen düzgün yapıya $\{\mathcal{U}_s\}_{s\in S}$ düzgün yapılarının çarpımı denir ve $\prod_{s\in S}\mathcal{U}_s$ ile gösterilir. $\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}\mathcal{U}_s\right)$ düzgün uzayına ise $\{(X_S,\mathcal{U}_S)\}_{s\in S}$ düzgün uzaylar ailesinin çarpımı denir.

Eğer her $s\in S$ için τ_s topolojisi $\mathcal{U}_s$ düzgün yapısından üretiliyorsa $\prod_{s\in S}X_s$ kümesinde $\prod_{s\in S}\mathcal{U}_s$ düzgün yapısından üretilen τ topolojiside $\{\tau_s\}_{s\in S}$ topolojilerinin çarpımına eşittir.

Açıktır ki, her $s\in S$ için $p_s:\prod X_s\to X_s$ projeksiyon dönüşümü $p_s:\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}\mathcal{U}_s\right)\to(X_s,\mathcal{U}_s)$ düzgün uzayların düzgün sürekli dönüşümüdür.

Teorem 2.9.1. [7] $(X,\mathcal{U})$ bir düzgün uzay, $\{(Y_S,\mathcal{U}_S)\}_{s\in S}$ düzgün uzayların bir ailesi ve $f:(X,\mathcal{U})\to(\prod_{s\in S}Y_s,\prod_{s\in S}\mathcal{U}_s)$ bir fonksiyon olsun.

f düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $s\in S$ için $p_s\circ f:(X,\mathcal{U})\to(Y_s,\mathcal{U}_s)$ düzgün süreklidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Soft Kümeler

Tanım 3.1.1. [38] X evrensel bir küme ve E parametrelerin kümesi olsun. $\mathcal{P}(X)$ kümesi X kümesinin kuvvet kümesi ve A kümesi E nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. (F,A) çifti $F:A\rightarrow\mathcal{P}(X)$ ile verilen dönüşümle X kümesi üzerinde bir soft küme olarak adlandırılır.

Başka bir deyişle X evrensel kümesi üzerinde bir soft küme, X in alt kümelerinin parametrelendirilmiş ailesinden oluşur. $\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)$ kümesi, (F,A) soft kümesinin keyfi ε yaklaşımlarının kümesidir.

Örnek 3.1.1. [38] X kümesi evlerin kümesi , E kümesi de parametrelerin kümesi olsun. (F,E) soft kümesi bay Y'in alacağı evlerin özelliklerini tarif eden bir küme olsun.

Şimdi bu örneği daha detaylı inceleyelim ;

$X=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ şeklinde altı tane evden oluşan evlerin kümesi ve E parametreler kümesi $e_1-pahalı$, $e_2-güzel$, $e_3-ahşap$, e_4-ucuz, $e_5-bahçeli$, olmak üzere $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ olsun. $F(e_i)$ nin anlamı e_i parametresini sağlayan evlerin kümesidir. Farz edelim ki;

$F(e_1)=\{h_2,h_4\}$, $F(e_2)=\{h_1,h_3\}$, $F(e_3)=\{h_2,h_4,h_5\}$, $F(e_4)=\{h_1,h_3,h_5\}$, $F(e_5)=\{h_1\}$

olsun. Dolayısıyla (F,E) soft kümesi,

$$(F,E)=\left\{\begin{array}{l}\left(pahalı\ ev,\{h_2,h_4\}\right),\left(güzel\ ev,\{h_1,h_3\}\right),\left(ahşap\ ev,\{h_2,h_4,h_5\}\right),\\ \left(ucuz\ ev,\{h_1,h_3,h_5\}\right),\left(bahçeli\ ev,\{h_1\}\right)\end{array}\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.2. [36] (F,A) ve (G,B), X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. (F,A) ve (G,B) soft kümeleri için;

i-) $A\subseteq B$ ve

ii-) Her $e\in A$ için $F(e)\subseteq G(e)$

koşulları sağlanırsa (F,A) ya (G,B) nin soft alt kümesi denir ve $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. [36] (F,A) ve (G,B), X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer $(F,A)\subseteq(G,B)$ ve $(G,B)\subseteq(F,A)$ ise $(F,A)=(G,B)$ olur.

Tanım 3.1.4. [36] (F,A), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer her $\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)=\varnothing$ ise (F,A) soft kümesine boş soft küme denir ve Φ_A olarak gösterilir.

Tanım 3.1.5. [36] X evrensel kümesi üzerinde (F,A) bir soft küme olsun. Eğer $\varepsilon\in A$ için $F(\varepsilon)=X$ ise (F,A) soft kümesine mutlak soft küme denir ve $\tilde{X}_A$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. [36] Eğer (F,A) ve (G,B), X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme ise "(F,A) ve (G,B)" işlemi $(F,A)\wedge(G,B)$ olarak gösterilir ve $(F,A)\wedge(G,B)$ $=(H,A\times B)$ olarak tanımlanır. Burada tüm $(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $H((\alpha,\beta))=F(\alpha)\cap G(\beta)$ dır.

Tanım 3.1.7. [36] Eğer (F,A) ve (G,B) X evrensel kümesi üzerinde iki soft küme ise "(F,A) veya (G,B)" işlemi $(F,A)\vee(G,B)$ olarak gösterilir ve $(F,A)\vee(G,B)$ $=(H,A\times B)$ olarak tanımlanır. Burada tüm $(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $H((\alpha,\beta))=F(\alpha)\cup G(\beta)$ dır.

Önerme 3.1.1. [4]

i-) $((F,A)\vee(G,B))^c=(F,A)^c\wedge(G,B)^c$

ii-) $((F,A)\wedge(G,B))^c=(F,A)^c\vee(G,B)^c$ şeklindedir.

Tanım 3.1.8. [36] X evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin birleşimi (H,C) soft kümesidir. Burada $C=A\cup B$ ve $\forall e\in C$ için

$$H(e)=\begin{cases} F(e) & \text{eğer } e\in A-B \text{ ise} \\ G(e) & \text{eğer } e\in B-A \text{ ise} \\ F(e)\cup G(e) & \text{eğer } e\in A\cap B \text{ ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Bu işlem $(F,A)\cup(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. [36] (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin X üzerinde kesişimi olan (H,C) kümesi $(F,A)\cap(G,B)$ ile tanımlanır. Burada $C=A\cap B$ ve $\forall e\in C$ için $H(e)=F(e)\cap G(e)$ dir.

Tanım 3.1.10. [51] (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin X evrensel kümesi üzerindeki farkı $(H,E)=(F,E)\setminus(G,E)$ olarak gösterilir ve tüm $e\in E$ için $H(e)=F(e)\setminus G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.11. [6] (F,A) ve (G,B) kümeleri sırasıyla X_1 ve X_2 üzerinde iki soft küme olsun. $(F,A)\times(G,B)$ kartezyen çarpımı $(F\times G)_{(A\times B)}$ ile tanımlansın. Bu durumda

$$\forall(e,k)\in A\times B \text{ için } (F\times G)_{(A\times B)}(e,k)=F(e)\times G(k)$$

şeklinde olur.

Bu tanıma göre $(F,A)\times(G,B)$ soft kümesi, $X_1\times X_2$ üzerinde bir soft kümedir ve parametre kümesi de $E_1\times E_2$ dir.

Tanım 3.1.12. [51] Y, X 'in boş olmayan alt kümesi olsun. $\forall\alpha\in E$, $Y(\alpha)=Y$ için X üzerinde (Y,E) soft kümesi $\tilde{Y}$ olarak gösterilir. Özellikle (X,E) soft kümesi, $\tilde{X}$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.13. [51] (F,A) soft kümesinin bağıl tümleyeni $(F,A)'=(F',A)$ şeklinde tanımlanır ve $(F,A)'$ olarak gösterilir. Burada $F':A\rightarrow\mathcal{P}(X)$, $\forall\alpha\in A$ için $F'(\alpha)=X-F(\alpha)$ olarak verilen bir dönüşümdür.

Önerme 3.1.2. [51] (F,E) ve (G,E), X üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda;

i-) $((F,E)\cup(G,E))'=(F,E)'\cap(G,E)'$

ii-) $((F,E)\cap(G,E))'=(F,E)'\cup(G,E)'$ olur.

Tanım 3.1.14. [31] $SS(X,E)$ ve $SS(Y,E')$ soft kümelerin aileleri olsun. $u:X\rightarrow Y$ ve $p:E\rightarrow E'$ dönüşümler olsun. $f_{pu}:SS(X,E)\rightarrow SS(Y,E')$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) (F,A), $SS(X,E)$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin görüntüsü $\forall\beta\in B$ için

$$f_{pu}(F)(\beta)=\begin{cases}\bigcup\limits_{x\in p^{-1}(\beta)\cap A} u(F(\alpha)), & p^{-1}(\beta)\cap A\neq\varnothing\\ \varnothing & \text{, aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde bir kümedir ve $f_{pu}(F,A)=(f_{pu}(F),p(A))$ ile gösterilir.

2) (G,C), $SS(Y,E')$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin ters görüntüsü $\forall\alpha\in D$ için

$$f_{pu}^{-1}(G)(\alpha)=\begin{cases}u^{-1}\left(G\left(p(\alpha)\right)\right), & p(\alpha)\in C\\ \varnothing & \text{, aksi taktirde}\end{cases}$$

şeklinde bir soft kümedir ve $f_{pu}^{-1}(G,C)=(f_{pu}^{-1}(G),p^{-1}(C))$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1. [31] $SS(X,E)$ ve $SS(Y,E')$ soft kümelerin aileleri olsun. $f_{pu}:SS(X,E)\rightarrow SS(Y,E')$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $f_{pu}(\Phi_E)=\Phi_{E'}$

b) $f_{pu}(X_E)\tilde{\subseteq} Y_{E'}$

c) $f_{pu}\left((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\right)=f_{pu}(F,A)\tilde{\cup} f_{pu}(G,B)$ burada $(F,A),(G,B)\in SS(X,E)$ dır.

Genel olarak; $f_{pu}\left(\tilde{\bigcup_i}(F_i,A_i)\right)=\tilde{\bigcup_i} f_{pu}(F_i,A_i)$ burada $(F_i,A)\in SS(X,E)$ dır.

d) Eğer $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ise, $f_{pu}(F,A)\tilde{\subseteq} f_{pu}(G,B)$ dır. Burada $(F,A),(G,A)\in SS(X,E)$ olur.

e) Eğer $(G,B)\tilde{\subseteq}(H,B)$ ise, $f_{pu}^{-1}((G,B))\tilde{\subseteq} f_{pu}^{-1}((H,B))$ dir. Burada $(G,B),(H,B)\in SS(Y,E')$ olur.

Eğer p ve u surjektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna surjektif denir. Eğer p ve u injektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna injektif denir.

3.2. Soft Topoloji Ve Soft Topolojik Uzaylar

X evrensel bir küme , E parametrelerin boş olmayan bir kümesi olsun.

Tanım 3.2.1. [51] τ, X üzerinde soft kümelerin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa;

i-) $\Phi,\tilde{X}\in\tau$ **,**

ii-) τ da herhangi sayıda soft kümelerin birleşimi τ ya aittir,

iii-) τ da herhangi iki soft kümenin kesişimi τ ya aittir

τ ya X üzerinde bir soft topoloji denir. (X,τ,E) üçlüsüne ise X üzerinde soft topolojik uzay denir.

Tanım 3.2.2. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Bu takdirde τ nun elemanlarına bu uzayda soft açık kümeler denir.

Tanım 3.2.3. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir küme olmak üzere eğer $(F,E)'$, τ ya ait ise (F,E) soft kümesine bu uzayda soft kapalı küme denir.

Önerme 3.2.1. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Bu durumda;

i-) $\Phi, \tilde{X}$ kümeleri soft kapalı kümelerdir.

ii-) Soft kapalı kümelerin herhangi sayıda soft kesişimi soft kapalı bir kümedir.

iii-) Herhangi iki soft kapalı kümenin birleşimi soft kapalı kümedir.

Tanım 3.2.4. [51] X evrensel bir küme, E parametrelerin kümesi ve $\tau=\{\Phi,\tilde{X}\}$ olsun. Bu durumda τ ya X kümesi üzerinde soft indiskret topoloji denir ve (X,τ,E) ye bir soft indiskret topolojik uzay denir.

Tanım 3.2.5. [51] X evrensel bir küme, E parametrelerin kümesi ve τ, X üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi olsun. Bu durumda τ ya soft diskret topoloji denir ve (X,τ,E) ye bir soft diskret topolojik uzay denir.

Önerme 3.2.2. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Burada her $\alpha \in E$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha) | (F,E) \in \tau\}$ ailesi X kümesinde bir topoloji tanımlar.

Örnek 3.2.1. [51] $X=\{c_1,c_2,c_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$\tau=\{\Phi, X, (D_1,E), (D_2,E), (D_3,E), (D_4,E)\}$ olsun. Burada X üzerindeki $(D_1,E), (D_2,E), (D_3,E), (D_4,E)$ soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$D_1(e_1)=\{c_2\} \quad , \qquad D_1(e_2)=\{c_1\},$$

$$D_2(e_1)=\{c_2,c_3\}, \qquad D_2(e_2)=\{c_1,c_2\},$$

$$D_3(e_1)=\{c_1,c_2\}, \qquad D_3(e_2)=X,$$

$$D_4(e_1)=\{c_1,c_2\}, \qquad D_4(e_2)=\{c_1,c_3\},$$

Bu durumda τ , X kümesinde bir soft topoloji tanımlar. Kolayca görülebilir ki

$\tau_{e_1}=\{\varnothing, X,\{c_2\},\{c_2,c_3\},\{c_1,c_2\}\}$ ve $\tau_{e_2}=\{\varnothing, X,\{c_1\},\{c_1,c_3\},\{c_1,c_2\}\}$

X üzerinde birer topolojidirler.

Örnek 3.2.2. [51] $X=\{c_1,c_2,c_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$\tau=\{\Phi, X,(D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),(D_4,E)\}$ olsun. Burada X üzerindeki

$(D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),(D_4,E)$ soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$D_1(e_1)=\{c_2\}, \qquad D_1(e_2)=\{c_1\},$$

$$D_2(e_1)=\{c_2,c_3\}, \qquad D_2(e_2)=\{c_1,c_2\},$$

$$D_3(e_1)=\{c_1,c_2\}, \qquad D_3(e_2)=\{c_1,c_2\},$$

$$D_4(e_1)=\{c_2\}, \qquad D_4(e_2)=\{c_1,c_3\},$$

Bu durumda τ , X ' de bir soft topoloji değildir. Çünkü $(D_2,E)\cup(D_3,E)=(G,E)$ dir. Burada $G(e_1)=X$ ve $G(e_2)=\{c_1,c_2\}$ dir. Yani $(G,E)\notin\tau$ dur. Ancak $\tau_{e_1}=\{\varnothing, X,\{c_2\},\{c_2,c_3\},\{c_1,c_2\}\}$ ve $\tau_{e_2}=\{\varnothing, X,\{c_1\},\{c_1,c_3\},\{c_1,c_2\}\}$ X üzerinde birer topolojidirler.

Önerme 3.2.3. [51] (X,τ_1,E) ve (X,τ_2,E) iki soft topolojik uzay olsun. Bu durumda $(X,\tau_1\cap\tau_2,E)$ bir soft topolojik uzaydır.

Örnek 3.2.3. [51] $X=\{c_1,c_2,c_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve

$\tau_1 = \left\{\Phi, X, (D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),(D_4,E)\right\}, \tau_2 = \left\{\Phi, X, (G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E)\right\}$

X üzerinde tanımlanan iki soft topoloji olsun. Burada X üzerindeki $(D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),(D_4,E)$, $(G_1,E),(G_2,E)$, (G_3,E), (G_4,E) soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_1(e_1) = \{c_2\} \ , \qquad D_1(e_2) = \{c_1\},$$

$$D_2(e_1) = \{c_2, c_3\}, \qquad D_2(e_2) = \{c_1, c_2\},$$

$$D_3(e_1) = \{c_1, c_2\}, \qquad D_3(e_2) = X,$$

$$D_4(e_1) = \{c_1, c_2\}, \qquad D_4(e_2) = \{c_1, c_3\},$$

$$G_1(e_1) = \{c_2\} \ , \qquad G_1(e_2) = \{c_1\},$$

$$G_2(e_1) = \{c_2, c_3\}, \qquad G_2(e_2) = \{c_1, c_2\},$$

$$G_3(e_1) = \{c_1, c_2\}, \qquad G_3(e_2) = \{c_1, c_2\},$$

$$G_4(e_1) = \{c_2\}, \qquad G_4(e_2) = \{c_1, c_3\},$$

Bu durumda

$$\tau = \tau_1 \cap \tau_2 = \left\{\Phi, X, (D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),(D_4,E),(G_3,E),(G_4,E)\right\}$$

elde edilir. Buradan $\tau_1 \cap \tau_2$ nin X üzerinde bir soft topoloji olduğu görülür. Ancak $(H,E) = (D_2,E) \cup (G_3,E)$ olarak kabul edilirse

$$H(e_1) = D_2(e_1) \cup G_3(e_1) = \{c_2, c_3\} \cup \{c_1, c_2\} = X$$

ve

$$H(e_2) = D_2(e_2) \cup G_3(e_2) = \{c_1, c_2\} \cup \{c_1, c_2\} = \{c_1, c_2\}$$

dir. O halde $(H,E)\notin\tau_1\cap\tau_2$ olur. Böylece $\tau_1\cup\tau_2$, X üzerinde bir soft topoloji değildir.

Tanım 3.2.6. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E) , X üzerinde bir soft küme olsun. O halde (F,E) nin soft kapanışı (F,E) yi içeren tüm soft kapalı kümelerin arakesitidir ve $\overline{(F,E)}$ olarak gösterilir.

Açıktır ki $\overline{(F,E)}$ soft kümesi (F,E) yi içeren en küçük soft kapalı kümedir.

Teorem 3.2.1. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay, (H,E) ve (G,E), X üzerinde soft kümeler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur ;

1) $\overline{\Phi}=\Phi$ *ve* $\overline{\tilde{X}}=\tilde{X}$

2) $(H,E)\tilde{\subset}\overline{(H,E)}$

3) (H,E) soft kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $(H,E)=\overline{(H,E)}$

4) $\overline{\overline{(H,E)}}=\overline{(H,E)}$

5) $(H,E)\tilde{\subset}(G,E)\Rightarrow\overline{(H,E)}\tilde{\subset}\overline{(G,E)}$

6) $\overline{(H,E)\cup(G,E)}=\overline{(H,E)}\cup\overline{(G,E)}$

7) $\overline{(H,E)\cap(G,E)}\tilde{\subset}\overline{(H,E)}\cap\overline{(G,E)}$

Tanım 3.2.7. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. $(\overline{F},E)$ soft kümesi $\forall\alpha\in E$ için $\overline{F}(\alpha)=\overline{F(\alpha)}$ olarak tanımlanır. Burada $\overline{F(\alpha)}$ her $\alpha\in E$ için τ_α da $F(\alpha)$ nın kapanışıdır.

Önerme 3.2.4. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman $(\overline{F},E)\tilde{\subseteq}\overline{(F,E)}$ olur.

Sonuç 3.2.1. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. O halde $(\overline{F},E)=\overline{(F,E)} \Leftrightarrow (\overline{F},E)' \in \tau$ olur.

Örnek 3.2.4. [51] $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=(e_1,e_2)$ ve

$\tau=\{\Phi, X,(D_1,E),(D_2,E),(D_3,E),...,(D_7,E),\}$ olsun. Burada;

$$D_1(e_1)=\{c_1,c_2\}\ ,\quad D_1(e_2)=\{c_1,c_2\}$$

$$D_2(e_1)=\{c_2\}\ ,\quad D_2(e_2)=\{c_1,c_3\}$$

$$D_3(e_1)=\{c_2,c_3\}\ ,\quad D_3(e_2)=\{c_1\}$$

$$D_4(e_1)=\{c_2\}\ ,\quad D_4(e_2)=\{c_1\}$$

$$D_5(e_1)=\{c_1,c_2\}\ ,\ D_5(e_2)=X$$

$$D_6(e_1)=X\ ,\quad D_6(e_2)=\{c_1,c_2\}$$

$$D_7(e_1)=\{c_2,c_3\},\quad D_7(e_2)=\{c_1,c_3\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman (X,τ,E) bir soft topolojik uzaydır. (D,E) *ve* (G,E) aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$D(e_1)=\{c_1,c_3\}\ ,\ D(e_2)=\varnothing$$

$$G(e_1)=\{c_2,c_3\},\ G(e_2)=\{c_1,c_2\}$$

Bu durumda $(D,E)\cap(G,E)=((D\cap G),E)$, $(D\cap G)(e_1)=\{c_3\}$, $(D\cap G)(e_2)=\varnothing$ olur. O halde $\overline{(D,E)}=\tilde{X}\cap(D_2,E)'\cap(D_4,E)'=(D_2,E)'$ ve $\overline{(G,E)}=\tilde{X}$ elde edilir. Yani $\overline{(D,E)}\cap\overline{(G,E)}=\overline{(D,E)}$ dir. Diğer taraftan

$$\overline{(D,E)\cap(G,E)} = \bigcap\left\{\tilde{X},(D_1,E)',(D_2,E)',(D_4,E)',(D_5,E)'\right\}$$
$$= (D_5,E)' \quad \text{dir.}$$

Yani $\overline{(D,E)\cap(G,E)} \,\tilde{\subset}\, \overline{(D,E)}\cap\overline{(G,E)}$ dir. Fakat

$\overline{(D,E)\cap(G,E)} \neq \overline{(D,E)}\cap\overline{(G,E)}$ olur. Daha sonra görürüz ki ;

$\tau_{e_1} = \left\{\varnothing, X, \{c_2\}, \{c_2,c_3\}, \{c_1,c_2\}\right\}$ ve $\tau_{e_1} = \left\{\varnothing, X, \{c_1\}, \{c_1,c_3\}, \{c_1,c_2\}\right\}$

Burada $(\bar{D},E)$, $\bar{D}(e_1) = \{c_1,c_3\}$, $\bar{D}(e_2) = \varnothing$ olur. Açıkça görülür ki

$(\bar{D},E) \,\tilde{\subset}\, \overline{(D,E)}$ dir. Fakat $\overline{(D,E)} \neq (\bar{D},E)$ dir.

Tanım 3.2.8. [25] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. (F,E) soft kümesinin içerdiği bütün soft açık kümelerin birleşimine (F,E)'nin soft içi denir ve $(F,E)^{\circ}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.2 [25] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay, (H,E) ve (G,E) X üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\Phi^{\circ} = \Phi$ ve $\tilde{X}^{\circ} = \tilde{X}$

2) $(H,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, (H,E)$

3) $((H,E)^{\circ})^{\circ} = (H,E)$

4) (H,E) bir soft açık kümedir $\Leftrightarrow$ $(H,E)^{\circ} = (H,E)$

5) $(H,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E) \Rightarrow (H,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, (G,E)$

6) $(H,E)^{\circ} \bigcap (G,E)^{\circ} = ((H,E)\bigcap(G,E))^{\circ}$

7) $(H,E)^{\circ} \bigcup (G,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, ((H,E)\bigcup(G,E))^{\circ}$ **.**

Tanım 3.2.9. [51] (F,E), X üzerinde bir soft küme ve Y, X ' in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda Y üzerinde (F,E) soft kümesinin soft alt kümesi $\forall\alpha\in E$ için ${}^{Y}F(\alpha)=Y\cap F(\alpha)$ şeklinde tanımlanır ve $({}^{Y}F,E)$ olarak gösterilir Başka bir deyişle $({}^{Y}F,E)=Y\cap(F,E)$ dir.

Tanım 3.2.10. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve Y, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $\tau_Y=\left\{({}^{Y}F,E)\middle|(F,E)\in\tau\right\}$, Y de soft alt topoloji olarak adlandırılır ve (Y,τ_Y,E) uzayına (X,τ,E)'nin bir soft alt uzayı denir.

Örnek 3.2.5. [51] Bir soft diskret topolojik uzayın herhangi bir soft alt uzayı bir soft diskret topolojik uzaydır.

Örnek 3.2.6. [51] Bir soft indiskret topolojik uzayın herhangi bir soft alt uzayı bir soft indiskret topolojik uzaydır.

Önerme 3.2.5. [51] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun ve Y, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. O halde $(Y,\tau_{\alpha Y})$, her $\alpha\in E$ için (X,τ_α) nın bir alt uzayıdır.

Teorem 3.2.3. [51] (Y,τ_Y,E), (X,τ,E) soft topolojik uzayının bir soft alt uzayı ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman;

1) (F,E), Y de soft açıktır $\Leftrightarrow$ Herhangi $(G,E)\in\tau$ için $(F,E)=\tilde{Y}\cap(G,E)$ dir.

2) (F,E), Y de soft kapalıdır $\Leftrightarrow X$ de herhangi (G,E) soft kapalı kümesi için $(F,E)=\tilde{Y}\cap(G,E)$ dir.

Tanım 3.2.11. [20] (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $e\in E$ için $F(e)=\{x\}$ ve her $e'\in E-\{e\}$ için $F(e')=\varnothing$ ise (F,E) soft kümesi bir soft nokta olarak adlandırılır ve (x_e,E) ile gösterilir. (x_e,E) soft noktası kısaca x_e ile gösterilir. X kümesi üzerindeki tüm soft noktaların kümesini $SS(X,E)$ ile gösterelim.

Tanım 3.2.12. [20] (x_e,E) ve $(y_{e'},E)$, X üzerinde iki soft nokta olsun. Eğer $x\neq y$ veya $e\neq e'$ ise noktalara farklı soft noktalar denir.

Tanım 3.2.13. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), (X,τ,E) üzerinde bir soft küme olsun. $(x_e,E)\in(G,E)\subset(F,E)$ olacak şekilde (G,E) soft açık kümesi bulunabiliyorsa (F,E) soft kümesine (x_e,E) soft noktasının bir soft komşuluğu denir.

Teorem 3.2.4. [20] (X,τ,E) soft topolojik uzayında (x_e,E) soft noktasının $U(x_e,E)$ soft komşuluk sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1) Eğer $(F,E)\in U(x_e,E)$ ise $(x_e,E)\in(F,E)$ dir,

2) Eğer $(F,E)\in U(x_e,E)$ ve $(F,E)\subset(G,E)$ ise $(G,E)\in U(x_e,E)$ dir,

3) Eğer $(F_1,E),(F_2,E)\in U(x_e,E)$ ise $(F_1,E)\bigcap(F_2,E)\in U(x_e,E)$ dir,

4) Eğer $(F,E)\in U(x_e,E)$ ise $(G,E)\in U(x_e,E)$ dir öyle ki herbir $(y_{e'},E)\in(G,E)$ için $(F,E)\in U(y_{e'},E)$ olur.

Tanım 3.2.14. [5] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay β, τ nun bir soft alt ailesi olsun. Eğer her soft açık küme β nın bazı elemanlarının birleşimi olarak gösterilebiliyorsa bu β ailesine τ için bir soft tabandır denir.

Tanım 3.2.15. [5] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay δ, τ nun bir soft alt ailesi olsun. Eğer δ soft alt ailesinin elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir soft taban oluşturuyorsa bu δ alt ailesine τ için bir soft alt tabandır denir.

Tanım 3.2.16. [5] $\{(\varphi_s,\psi_s):(X,\tau,E)\to(Y_s,\tau_s,E_s)\}_{s\in S}$ bir soft dönüşüm ailesi ve $\left\{(Y_s,\tau_s,E_s)\right\}_{s\in S}$ bir soft topolojik uzaylar ailesi olsun. Bu durumda $\delta=\left\{(\varphi_s,\psi_s)^{-1}_{s\in S}(F,E):(F,E)\in\tau_s, s\in S\right\}$ alt tabanından üretilen τ soft topolojisi, $\left\{(\varphi_s,\psi_s)\right\}_{s\in S}$ soft dönüşümler ailesi ile verilen soft topoloji (veya soft başlangıç topolojisi) olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.17. [45] $(X_s,\tau_s,E)_{s\in S}$ bir soft topolojik uzaylar ailesi olsun. $\left(\bigcup_{s\in S} X_s,\tau,E\right)$ soft topolojik uzayına $(X_s,\tau_s,E)_{s\in S}$ ailesinin soft topolojik toplamı denir ve $\bigoplus_{s\in S}\left(X_s,\tau_s,E\right)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.2.18. [5] (X_s,τ_s,E_s) bir soft topolojik uzaylar ailesi olsun. Bu durumda $\{(p_s,q_s)\}_{s\in S}$ ailesinden üretilen $X=\prod_{s\in S} X_s$ üzerinde soft başlangıç topolojisine, X üzerinde soft topolojik çarpım adı verilir. (Burada (p_s,q_s), $s\in S$ için $X\to X_s$ giden soft projeksiyon dönüşümdür.)

Soft topolojik çarpım $\prod_{s\in S}\tau_s$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.19 [14] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $B(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı sınırlı tüm alt kümelerinin bir ailesi ve E parametreler kümesi olsun. Bu durumda $F:E\to B(\mathbb{R})$ dönüşümü bir soft reel küme olarak adlandırılır. Eğer bir soft reel küme yalnızca bir soft kümeden oluşuyorsa o zaman soft reel sayı olarak adlandırılır ve $\tilde{r},\tilde{s},\tilde{t}$ vb. şekilde ifade edilir.

$\tilde{0},\tilde{1}$ soft reel sayılardır. Burada tüm $e\in E$ için sırasıyla $\overline{0}(e)=0$, $\overline{1}(e)=1$ dir.

Tanım 3.2.20. [15] $\mathbb{R}(e)^*$ ile negatif olmayan tüm soft reel sayılar kümesini ve $SS(X,E)$ ile de X kümesi üzerindeki tüm soft noktaların kümesini ifade edelim. Eğer $\tilde{d}$ aşağıdaki koşulları sağlarsa $\tilde{d}:SS(X,E)\times SS(X,E)\to\mathbb{R}(e)^*$ dönüşümüne (X,E) soft kümesi üzerinde soft metriktir denir.

1) $\forall\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2}\in SS(X,E)$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})\tilde{\geq}\tilde{0}$ dır.

2) $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})=\tilde{0}\Leftrightarrow\tilde{x}_{e_1}=\tilde{y}_{e_2}\in SS(X,E)$

3) $\forall\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2}\in SS(X,E)$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1},\tilde{y}_{e_2})=\tilde{d}(\tilde{y}_{e_2},\tilde{x}_{e_1})$ dır.

4) $\forall \tilde{x}_{e_1}, \tilde{y}_{e_2}, \tilde{z}_{e_3} \in SS(X,E)$ için $\tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}, \tilde{z}_{e_3}) \tilde{\leq} \tilde{d}(\tilde{x}_{e_1}, \tilde{y}_{e_2}) + \tilde{d}(\tilde{y}_{e_2}, \tilde{z}_{e_3})$ dır.

(X,E) soft kümesi $\tilde{d}$ soft metriği ile birlikte, soft metrik uzay olarak adlandırılır ve $(X,\tilde{d},E)$ ile ifade edilir.

Tanım 3.2.21. [20] (X,τ,E) ve (Y,τ',E) iki soft topolojik uzay, $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x)_e,E)$ nin herhangi (H,E) soft komşuluğu için $f((F,E))\subset(H,E)$ sağlanacak şekilde (x_e,E) nin bir (F,E) soft komşuluğu bulunabiliyorsa f dönüşümüne (x_e,E) de soft sürekli dönüşüm denir.

Eğer $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ soft dönüşümü her noktada sürekli ise f e soft sürekli dönüşüm denir.

Teorem 3.2.5. [23] (X,τ,E) ve (Y,τ',E) iki soft topolojik uzay, $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

a) $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ bir soft sürekli dönüşümdür,

b) Y üzerindeki her (G,E) soft açık kümesi için $f^{-1}((G,E))$, X üzerinde bir soft açık kümedir,

c) Y üzerindeki her (H,E) soft kapalı kümesi için $f^{-1}((H,E))$ X üzerinde bir soft kapalı kümedir,

d) X üzerinde her (F,E) soft kümesi için $f(\overline{(F,E)})\subset\overline{(f(F,E))}$ dir,

e) Y üzerinde her (G,E) soft kümesi için $\overline{(f^{-1}(G,E))}\subset f^{-1}(\overline{(G,E)})$ dir,

f) Y üzerinde her (G,E) soft kümesi için $f^{-1}((G,E)^{\circ})\subset(f^{-1}(G,E))^{\circ}$ dir.

3.3 Soft Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.3.1. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $(x_e,E)\neq(y_{e'},E)$ olsun. Eğer

$$(x_e, E) \in (F, E) \text{ ve } (y_{e'}, E) \notin (F, E) \text{ veya } (y_{e'}, E) \in (G, E) \text{ ve } (x_e, E) \notin (G, E)$$

olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) uzayına bir soft T_0-uzayı denir.

Tanım 3.3.2. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $(x_e,E) \neq (y_{e'},E)$ olsun. Eğer

$$(x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \notin (F, E) \text{ ve } (y_{e'}, E) \in (G, E),\ (x_e, E) \notin (G, E)$$

olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) uzayına bir soft T_1-uzayı denir.

Önerme 3.3.1. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun.

1) Eğer (X,τ,E) bir soft T_0-uzayı ise $\forall e \in E$ için (X,τ_e) bir soft T_0-uzayıdır.

2) Eğer (X,τ,E) bir soft T_1-uzayı ise $\forall e \in E$ için (X,τ_e) bir soft T_1-uzayıdır.

Tanım 3.3.3. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve $(x_e,E) \neq (y_{e'},E)$ olsun. Eğer

$$(x_e, E) \in (F, E),\ (y_{e'}, E) \in (F, E) \text{ ve } (F, E) \cap (G, E) = \Phi$$

olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) uzayına bir soft T_2-uzayı denir.

Önerme 3.3.2. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ,E) bir soft T_2-uzayı ise $\forall e \in E$ için (X,τ_e) bir soft T_2-uzayıdır.

Tanım 3.3.4. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde soft kapalı bir küme, $(x_e,E) \notin (F,E)$ olsun. Eğer

$$(x_e, E) \in (G_1, E), (F, E) \subset (G_2, E) \text{ ve } (G_1, E) \cap (G_2, E) = \Phi$$

olacak şekilde (G_1,E) ve (G_2,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) uzayına bir soft regüler uzay denir.

Tanım 3.3.5. [20] (X,τ,E) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ,E) bir soft regüler ve soft T_1-uzayı ise (X,τ,E) soft topolojik uzayına soft T_3-uzayı denir.

Tanım 3.3.6. [20] (X,τ,E), bir soft topolojik uzay olsun. (F,E) ve (G,E), X üzerinde iki soft kapalı küme ve $(F,E)\cap(G,E)=\Phi$ koşulu sağlansın. Eğer

$$(F,E)\subset(F_1,E),\ (G,E)\subset(F_2,E) \text{ ve } (F_1,E)\cap(F_2,E)=\Phi$$

olacak şekilde (F_1,E) ve (F_2,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) uzayına bir soft normal uzay denir.

(X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ,E) bir soft normal uzay ve soft T_1-uzayı ise (X,τ,E) soft topolojik uzayına soft T_4-uzayı denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda yaptığımız çalışma sonucunda ulaştığımız verilere yer verilmiştir.

4.1 Soft Düzgün Uzaylar

X evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun.

Tanım 4.1.1. **a)** Eğer (X,E) bir soft küme ise $\Delta_{(X,E)}=\{(x_e,x_e):x_e\in(X,E)\}$ kümesine $(X,E)\times(X,E)$ nin köşegeni denir. Burada $\Delta_{(X,E)}=(\Delta_X,\Delta_E)$ kümesi $((x,x),(e,e))=(x,x)_{(e,e)}=(x_e,x_e)$ olarak tanımlanır.

b) Eğer $\tilde{A}$ ile gösterilen $(A,E\times E)$ bir soft alt küme ve $(A,E\times E)\tilde{\subseteq}(X,E)\times(X,E)$ ise $\tilde{A}^{-1}=\left\{(y_{e'},x_e):(x_e,y_{e'})\in\tilde{A}\right\}$ ile tanımlanır. Eğer $\tilde{A}=\tilde{A}^{-1}$ ise $\tilde{A}$ soft kümesine soft simetrik denir.

c) Eğer $\tilde{A},\tilde{B}\tilde{\subseteq}(X,E)\times(X,E)$ soft alt kümeler ise

$$\tilde{A}\circ\tilde{B}=\left\{(x_e,y_{e'}):\exists z_{e''}\in(X,E),\ (x_e,z_{e''})\in\tilde{A},\ (z_{e''},y_{e'})\in\tilde{B}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

d) $n=1,2,...$ için $\tilde{A}^1=\tilde{A}$ ve $\tilde{A}^n=\tilde{A}^{n-1}\circ\tilde{A}$ dır.

Örnek 4.1.1. $X=\left\{x^1,x^2,x^3\right\}$ herhangi bir küme ve $E=\left\{e_1,e_2\right\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda $SS(X,E)$ soft kümesi aşağıdaki soft noktalardan oluşur.

$$\left\{x^1_{e_1},x^1_{e_2},x^2_{e_1},x^2_{e_2},x^3_{e_1},x^3_{e_2}\right\}$$

Böylece bu soft kümenin $\Delta_{(X,E)}$ soft köşegeni

$$\Delta_{(X,E)}=\left\{(x^1_{e_1},x^1_{e_1}),(x^1_{e_2},x^1_{e_2}),(x^2_{e_1},x^2_{e_1}),(x^2_{e_2},x^2_{e_2}),(x^3_{e_1},x^3_{e_1}),(x^3_{e_2},x^3_{e_2})\right\}$$ dir.

Önerme 4.1.1. Eğer $e_0 \in E$ sabit bir parametre ise (X,E) soft kümesinin $\left\{x_{e_0} : x \in X\right\}$ bir soft kümesini elde edebiliriz. X kümesi ve $\left\{x_{e_0} : x \in X\right\}$ soft alt kümesi arasında birebir ve örten bir dönüşüm olduğu açıktır. Böylece $\left\{x_{e_0} : x \in X\right\}$ soft alt kümesini X kümesi gibi dikkate alabiliriz.

Önerme 4.1.2. Her $e \in E$ için $(\Delta_{(X,E)})_e = \left\{(x_e^i, x_e^i) : x^i \in X\right\} = \Delta_X$ olsun. Bu durumda (X,E) soft kümesinin köşegeni, X evrensel kümesinin E parametreler kümesi üzerinde parametrizelendirilmiş köşegenlerinin bir ailesidir. Yani $\Delta_{(X,E)} = \bigcup_{e \in E} (\Delta_X)_e$ dir.

(X,E) bir soft küme ve $(V, E \times E) \tilde{\subseteq} (X,E) \times (X,E)$ bir soft küme olsun. Bu durumda $V : E \times E \to P(X \times X)$ olarak ifade edilir ve $(V, E \times E)$ soft kümesi $\tilde{V}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.2. Eğer $\Delta_{(X,E)} \tilde{\subseteq} \tilde{V}$ ve $\tilde{V} = \tilde{V}^{-1}$ ise $\tilde{V}$ soft kümesine soft köşegenin soft civarı denir.

$\Delta_{(X,E)}$ soft köşegeninin tüm soft civarlarını $D_{(X,E)}$ ile gösterelim.

Örnek 4.1.2. Örnek 4.1.1 e göre $\tilde{V}$ soft civarlarına aşağıdaki gibi örnek verebiliriz.

$$\tilde{V}_1 = \left\{\Delta_{(X,E)}, (x_{e_1}^1, x_{e_2}^2), (x_{e_2}^2, x_{e_1}^1)\right\}$$

$$\tilde{V}_2 = \left\{\Delta_{(X,E)}, (x_{e_1}^1, x_{e_1}^2), (x_{e_1}^2, x_{e_1}^1)\right\}$$

$$\tilde{V}_3 = \left\{\Delta_{(X,E)}, (x_{e_1}^1, x_{e_1}^2), (x_{e_1}^2, x_{e_1}^1), (x_{e_2}^2, x_{e_2}^3), (x_{e_2}^3, x_{e_2}^2)\right\}$$

$$\ldots$$

Önerme 4.1.3. Her $(e,e) \in E \times E$ için $\left(\tilde{V}_i\right)_{(e,e)}$ kümesi , X kümesinin köşegeninin bir civarıdır.

Örnek 4.1.3. Örnek 4.1.2 ye göre $\tilde{V}_i$ soft köşegen civarlarının herbir i için (e_i, e_i) parametrelerine göre soft daralmasının bazı örnekleri aşağıdaki gibidir.

$$\left(\tilde{V}_1\right)_{(e_1,e_1)} = \left(\tilde{V}_1\right)_{(e_2,e_2)} = \{\Delta_X\}$$

$$\left(\tilde{V}_2\right)_{(e_1,e_1)} = \left\{\Delta_X, (x^1,x^2), (x^2,x^1)\right\},\ \left(\tilde{V}_2\right)_{(e_2,e_2)} = \{\Delta_X\}$$

$$\left(\tilde{V}_3\right)_{(e_1,e_1)} = \left\{\Delta_X, (x^1,x^2), (x^2,x^1)\right\},\ \left(\tilde{V}_3\right)_{(e_2,e_2)} = \left\{\Delta_X, (x^2,x^3), (x^3,x^2)\right\}$$

....

Tanım 4.1.3. (X,E) bir soft küme, $(F,E)\tilde{\subseteq}(X,E)$ bir soft alt küme, $\tilde{V}\in D_{(X,E)}$ bir soft civar ve $x_e, y_{e'} \in SS(X,E)$ soft noktalar olsun.

a) Eğer $(x_e, y_{e'}) \in \tilde{V}$ ise x_e ve $y_{e'}$ noktaları arasındaki uzaklık $\tilde{V}$ dan daha küçüktür denir ve $|x_e, y_{e'}| \tilde{<} \tilde{V}$ ile gösterilir. Aksi durumda $|x_e, y_{e'}| \tilde{\geq} \tilde{V}$ yazılır.

b) Eğer $(F,E)\times(F,E)\tilde{\subseteq}\tilde{V}$ ise (F,E) soft kümesinin çapı $\tilde{V}$ den daha küçüktür denir ve $\delta((F,E)) \tilde{<} \tilde{V}$ ile gösterilir.

Her $x_e, y_{e'}, z_{e''} \in (X,E)$ soft noktaları ve $\tilde{V}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \in D_{(X,E)}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $|x_e - x_e| \tilde{<} \tilde{V}$

2) $|x_e - y_{e'}| \tilde{<} \tilde{V} \Leftrightarrow |y_{e'} - x_e| \tilde{<} \tilde{V}$

3) Eğer $|x_e - y_{e'}| \tilde{<} \tilde{V}_1$, $|y_{e'} - z_{e''}| \tilde{<} \tilde{V}_2$ ise $|x_e - z_{e''}| \tilde{<} \tilde{V}_1 \circ \tilde{V}_2$ dir.

Tanım 4.1.4. (X,E) bir soft küme, $x_e^0 \in SS(X,E)$ bir soft nokta ve $\tilde{V} \in D_{(X,E)}$ olmak üzere $B(x_e^0,\tilde{V}) = \left\{ y_{e'} \in (X,E) : \left| x_e^0 - y_{e'} \right| \tilde{<} \tilde{V} \right\}$ kümesine soft x_e^0 merkezli, $\tilde{V}$ yarıçaplı küre denir. Her $(F,E) \tilde{\subseteq} (X,E)$ için $B\left((F,E),\tilde{V}\right) = \bigcup_{x_e \in (F,E)} B\left(x_e,\tilde{V}\right)$ ile tanımlanır.

Tanım 4.1.5. (X,E) bir soft küme ve $\tilde{\mathcal{U}} \tilde{\subseteq} D_{(X,E)}$ bir soft alt aile olsun. Eğer $\tilde{\mathcal{U}}$ soft ailesi için,

a) Eğer $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}$ ve $\tilde{V} \tilde{\subseteq} \tilde{W} \in D_{(X,E)}$ ise $\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ dir;

b) Eğer $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \in \tilde{\mathcal{U}}$ ise $\tilde{V}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{V}_2 \in \tilde{\mathcal{U}}$ dir;

c) Her $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}$ için $\tilde{W}^2 \tilde{\subseteq} \tilde{V}$ sağlanacak şekilde $\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ vardır;

d) $\bigcap_{\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}} \tilde{V} = \Delta_{(X,E)}$ dir;

koşulları sağlanırsa bu $\tilde{\mathcal{U}}$ ailesine soft düzgün yapı , $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ üçlüsüne ise soft düzgün uzay denir.

Önerme 4.1.4. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay olsun. Bu durumda Tanım 4.1.5 in c) aksiyomu ile aşağıdaki aksiyom birbirine denktir.

c') Her $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}$ için $\tilde{W} \circ \tilde{W}^{-1} \tilde{\subseteq} \tilde{V}$ sağlanacak şekilde $\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ vardır.

İspat. Eğer $\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ ise $\tilde{W}$ bir soft köşegen civarıdır ve $\tilde{W} = \tilde{W}^{-1}$ dir. Bu nedenle $\tilde{W} \circ \tilde{W}^{-1} \tilde{\subseteq} \tilde{V}$ dir.

Tersine eğer c') sağlanırsa $\tilde{W}^{-1} = \Delta_{(X,E)} \circ \tilde{W}^{-1} \subset \tilde{W} \circ \tilde{W}^{-1} \subset \tilde{V}$ olur. Dolayısıyla $\tilde{W} \tilde{\subseteq} \tilde{V}^{-1} \in \tilde{\mathcal{U}}$ dir. Şimdi $\tilde{W}' = \tilde{W} \bigcap \tilde{W}^{-1}$ olsun. Bu durumda $\tilde{W}' \in \tilde{\mathcal{U}}$ dir ve $\tilde{W}' \circ W' \subset \tilde{W}' \circ \tilde{W}^{-1} \subset \tilde{V}$ elde edilir.

Önerme 4.1.5. Her $(e,e)\in E\times E$ için $\tilde{\mathcal{U}}_{(e,e)}$ ailesi X kümesinin sıradan bir düzgün yapısıdır.

Dolayısıyla soft düzgün uzaylar sıradan düzgün uzayların parametrelendirilmiş bir ailesidir.

Tanım 4.1.6. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay olsun. Bu durumda ;

a) Eğer soft köşegenin her soft civarı $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısının elemanı ise $\tilde{\mathcal{U}}$ ye soft diskret düzgün yapı ve $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ uzayına soft diskret düzgün uzay adı verilir.

b) Eğer $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısı sadece $(X,E)\times(X,E)$ soft civarından ibaret ise $\tilde{\mathcal{U}}$ ye soft indiskret düzgün yapı ve $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ uzayına soft indiskret düzgün uzay adı verilir.

Tanım 4.1.7. (X,E) soft kümesi üzerinde $\tilde{\mathcal{U}}_1$ ve $\tilde{\mathcal{U}}_2$ iki soft düzgün yapı olsun. Eğer $\tilde{\mathcal{U}}_2$ nin her soft köşegen civarı $\tilde{\mathcal{U}}_1$ de bir soft köşegen civarı ise $\tilde{\mathcal{U}}_1$ e $\tilde{\mathcal{U}}_2$ den daha incedir(veya $\tilde{\mathcal{U}}_2$ ye $\tilde{\mathcal{U}}_1$ den daha kabadır) denir.

Eğer $\tilde{\mathcal{U}}_1$ soft yapısı $\tilde{\mathcal{U}}_2$ den daha ince ve $\tilde{\mathcal{U}}_2$ den farklı ise $\tilde{\mathcal{U}}_1$ e kesinlikle $\tilde{\mathcal{U}}_2$ den daha incedir veya $\tilde{\mathcal{U}}_2$ ye kesinlikle $\tilde{\mathcal{U}}_1$ den daha kabadır denir.

Eğer iki soft yapıdan biri diğerinden daha ince ise bu soft yapılar karşılaştırılabilirdir denir.

Örnek 4.1.4. 1) Soft diskret düzgün yapı, (X,E) soft kümesi üzerindeki en ince soft düzgün yapıdır.

2) Soft indiskret düzgün yapı, (X,E) soft kümesi üzerindeki en kaba soft düzgün yapıdır.

Tanım 4.1.8. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay ve $\tilde{\Gamma}\tilde{\subseteq}\tilde{\mathcal{U}}$ bir soft alt aile olsun. Eğer her $\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}$ için $\tilde{W}\tilde{\subseteq}\tilde{V}$ sağlanacak şekilde bir $\tilde{W}\in\tilde{\Gamma}$ varsa bu $\tilde{\Gamma}$ ailesine $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısının bir soft tabanı denir.

(X,E) soft kümesinde $\tilde{\mathcal{U}}$ düzgün soft yapısının her $\tilde{\Gamma}$ soft tabanı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) Her $\tilde{V}_1,\tilde{V}_2 \in \tilde{\Gamma}$ için $\tilde{V} \tilde{\subseteq} \tilde{V}_1 \tilde{\bigcap} \tilde{V}_2$ koşulunu sağlayan $\tilde{V} \in \tilde{\Gamma}$,

b) Her $\tilde{V} \in \tilde{\Gamma}$ için $\tilde{W}^2 \tilde{\subseteq} \tilde{V}$ sağlanacak şekilde $\tilde{W} \in \tilde{\Gamma}$,

c) $\tilde{\bigcap}\tilde{\Gamma} = \Delta_{(X,E)}$ dir.

Teorem 4.1.1. (X,E) bir soft küme ve $\tilde{\Gamma}$, $(X,E)\times(X,E)$ nin soft alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\tilde{\Gamma}$ soft ailesi için

a) $\tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta_{(X,E)} \tilde{\subseteq} \tilde{B}$,

b) $\tilde{B}_1,\tilde{B}_2 \in \tilde{\Gamma} \Rightarrow \exists \tilde{B}_3 \in \tilde{\Gamma} : \tilde{B}_3 \tilde{\subseteq} \tilde{B}_1 \bigcap \tilde{B}_2$,

c) $\tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{\Gamma} \Rightarrow \exists \tilde{C} \in \tilde{\Gamma} : \tilde{C} \circ \tilde{C} \tilde{\subseteq} \tilde{B}$,

d) $\tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{\Gamma} \Rightarrow \exists \tilde{C} \in \tilde{\Gamma} : \tilde{C}^{-1} \tilde{\subseteq} \tilde{B}$,

e) $\tilde{\bigcap}\tilde{\Gamma} = \Delta_{(X,E)}$

koşulları sağlanırsa $\tilde{\Gamma}$ soft ailesi (X,E) üzerindeki bir soft düzgün yapının bir soft tabanıdır.

İspat. $\tilde{\mathcal{U}} = \left\{\tilde{V} \tilde{\subseteq} (X,E)\times(X,E) : \exists \tilde{B} \in \tilde{\Gamma} \text{ öyleki } \tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{V}\right\}$ soft ailesi (X,E) soft kümesi üzerinde bir soft düzgün yapıdır ve $\tilde{\Gamma}$ soft ailesi bu soft düzgün yapının bir soft tabanıdır.

Teorem 4.1.2. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay ise,

$$\tilde{\tau} = \left\{(G,E) \tilde{\subseteq} (X,E) : \forall x_e \in (G,E) \text{ için } B(x_e,\tilde{V}) \tilde{\subseteq} (G,E) \text{ öyleki } \exists \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}\right\}$$

ailesi (X,E) soft kümesi üzerinde bir soft topolojidir. (X,E) soft kümesi bu topoloji ile birlikte bir soft T_1- uzayıdır. Bu $\tilde{\tau}$ soft topolojisine $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısından üretilen soft düzgün topoloji adı verilir.

İspat. $\tilde{\tau}$ ailesinin bir soft topoloji olduğunu gösterelim. $(G_\alpha,E)\in\tilde{\tau}$ soft açık küme ve $x_e\in\tilde{\bigcup\limits_\alpha}(G_\alpha,E)$ herhangi bir soft nokta olsun. Bu durumda $x_e\in(G_{\alpha_0},E)$ dır. $\tilde{\tau}$ nun tanımından $B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subseteq}(G_{\alpha_0},E)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcup\limits_\alpha}(G_\alpha,E)$ sağlanacak şekilde $\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}$ vardır, yani $\tilde{\bigcup\limits_\alpha}G_\alpha\in\tilde{\tau}$ dur.

$(G_1,E),(G_2,E)\in\tilde{\tau}$ ve $x_e\in(G_1,E)\bigcap(G_2,E)$ olsun. $\tilde{\tau}$ nun tanımından $B(x_e,\tilde{V}_1)\tilde{\subseteq}(G_1,E)$ ve $B(x_e,\tilde{V}_2)\tilde{\subseteq}(G_2,E)$ sağlanacak şekilde $\tilde{V}_1,\tilde{V}_2\in\tilde{\mathcal{U}}$ vardır. O halde $\tilde{V}=\tilde{V}_1\bigcap\tilde{V}_2\in\tilde{\mathcal{U}}$ ve $B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subseteq}B(x_e,\tilde{V}_1)\bigcap B(x_e,\tilde{V}_2)\tilde{\subseteq}(G_1,E)\bigcap(G_2,E)$ olduğundan $(G_1,E)\bigcap(G_2,E)\in\tilde{\tau}$ elde edilir.

Şimdi bu $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayının bir soft T_1- uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için her $x_e\in(X,E)$ soft noktası için $(G,E)=(X,E)\setminus\{x_e\}$ kümesinin soft açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $y_{e'}\in(G,E)$ için $x_e\neq y_{e'}$ olduğundan

$$\exists\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}:|x_e-y_{e'}|\tilde{>}\tilde{V}$$

yazılabilir. Sonuç olarak $B(y_{e'},\tilde{V})\tilde{\subseteq}(G,E)$ olduğundan $(G,E)\in\tilde{\tau}$ elde edilir.

Örnek 4.1.5. (X,E) soft kümesi üzerinde $\tilde{\mathcal{U}}_1$ ve $\tilde{\mathcal{U}}_2$ iki soft düzgün yapı ve varsayalım ki $\tilde{\mathcal{U}}_1$, $\tilde{\mathcal{U}}_2$ den daha ince olsun. Bu durumda $\tilde{\mathcal{U}}_1$ ile verilen soft topoloji $\tilde{\mathcal{U}}_2$ ile verilen soft topolojiden daha incedir.

Örnek 4.1.6. $X=\mathbb{R}$ ve $E=\{1,2\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. Bu durumda her $x_e,y_{e'}\in(X,E)$ için $\tilde{d}(x_e,y_{e'})=|e-e'|+|x-y|$ soft fonksiyonu (X,E) soft kümesi üzerinde bir soft metriktir. Gerçekten de;

d1) $\tilde{d}(x_e, y_{e'}) = |e-e'| + |x-y| \geq 0,$

d2) $\tilde{d}(x_e, y_{e'}) = 0 \Leftrightarrow |e-e'| + |x-y| = 0 \Leftrightarrow |e-e'| = 0$ ve $|x-y| = 0 \Leftrightarrow e = e'$ ve $x = y,$

d3) $\tilde{d}(x_e, y_{e'}) = |e-e'| + |x-y| = |e'-e| + |y-x| = \tilde{d}(y_{e'}, x_e)$,

d4) $\tilde{d}(x_e, y_{e'}) \leq \tilde{d}(x_e, z_{e''}) + \tilde{d}(z_{e''}, y_{e'})$.

Burada parametrelere göre iki durum söz konusudur;

a) Her $e = e' \neq e''$ için

$$|x-y| \leq 1 + |x-z| + |z-y| + 1$$

üçgen eşitsizliği sağlanır.

b) Her $e \neq e' = e''$ için

$$1 + |x-y| \leq 1 + |x-z| + |z-y|$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece $\tilde{d}(x_e, y_{e'})$ soft fonksiyonunun bir soft metrik olduğu görülür. Bu durumda her $\alpha > 0$ için $\tilde{V}_\alpha = \left\{(x_e, y_{e'}) \in (\mathbb{R}, E) \times (\mathbb{R}, E) : \tilde{d}(x_e, y_{e'}) \tilde{<} \alpha\right\}$ olsun. Böylece $\tilde{\Gamma} = \left\{\tilde{V}_\alpha\right\}_{\alpha > 0}$ soft ailesi, soft düzgün yapının bir soft tabanı olur.

Burada $\left\{\left\{\tilde{V}_\alpha\right\}_{e_1}\right\}_{\alpha > 0}$ ve $\left\{\left\{\tilde{V}_\alpha\right\}_{e_2}\right\}_{\alpha > 0}$ ailelerinden her biri X kümesi üzerinde normal düzgün yapının bir tabanıdır.

Önerme 4.1.5. $(X, \tilde{\mathcal{U}}, E)$ bir soft düzgün uzay ve $\tilde{\tau}$ bu düzgün uzaydan üretilmiş olan bir soft topoloji olsun. $\tilde{\tau}_e$ topolojisi her $e \in E$ için $\tilde{\mathcal{U}}_e$ soft düzgün yapısından üretilmiş olan bir topolojidir.

Teorem 4.1.3. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay , $(F,E)\times(F,E)$ bir soft alt küme ve $\tilde{\tau}$, (X,E) soft kümesi üzerinde $\tilde{\mathcal{U}}$ dan üretilen bir soft düzgün topoloji ise ;

$$\tilde{B}=\left\{x_e \in (X,E): \exists \tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}} \text{ öyleki } B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subseteq}(F,E)\right\}$$

soft kümesi $Int(F,E)$ ye eşittir.

İspat : Açıktır ki $(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ soft açık kümesi $\tilde{B}$ ya aittir. İspatı tamamlamak için $\tilde{B}$ nın açık olduğunu gösterelim. Her $x_e\in\tilde{B}$ için $B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak şekilde $\exists\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}$ vardır. $\tilde{W}^2\in\tilde{V}$ olmak üzere $\tilde{W}\in\tilde{\mathcal{U}}$ olsun. Bu durumda her $y_{e'}\in B(x_e,\tilde{W})$ için

$$B(y_{e'},\tilde{W})\tilde{\subseteq}B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subseteq}(F,E)$$

olur. O halde $B(x_e,\tilde{V})\tilde{\subset}\tilde{B}$ ve $\tilde{B}$ soft açıktır.

Sonuç 4.1.1. $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayının topolojisi $\tilde{\mathcal{U}}$ düzgün soft yapısından üretilmiş olsun. O halde her $x_e\in(X,E)$ ve her $(F,E)\tilde{\subseteq}(X,E)$ için

$$x_e\in(F,E)^c \Leftrightarrow \text{Her } \tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}} \text{ için } (F,E)\tilde{\cap}B(x_e,\tilde{V})\neq\varnothing \text{ dır.}$$

Sonuç 4.1.2. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayının topolojisi $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısından üretilen topoloji ise her $(F,E)\tilde{\subseteq}(X,E)$ ve $\delta(F,E)\tilde{<}\tilde{V}$ koşulunu sağlayan her $\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}$ için $\delta((F,E)^c)\tilde{<}\tilde{V}^3$ tür.

İspat. Sonuç 4.1.1 e göre, her $x_{e_1},x_{e_2}\in(F,E)^c$ için $x'_{e'_1}\in B(x_{e_1},\tilde{V})$ ve $y'_{e'_2}\in B(x_{e_2},\tilde{V})$ sağlanacak şekilde $x'_{e'_1},y'_{e'_2}\in(F,E)$ bulunabilir. Buradan $\left|x_{e_1}-y_{e_2}\right|\tilde{<}\tilde{V}\circ\tilde{V}\circ\tilde{V}=\tilde{V}^3$ tür.

Teorem 4.1.4. $(X,\tilde{\mho},E)$ bir soft düzgün uzay ve $\tilde{M}$, $(X,E)\times(X,E)$ nin bir soft alt kümesi olsun. Eğer $\tilde{V}\circ\tilde{M}\circ\tilde{V}$, $(X,E)\times(X,E)$ soft çarpım uzayında $\tilde{M}$ nin bir soft komşuluğu ise $\tilde{M}$ nın soft kapanışı

$$\tilde{M}^c = \tilde{\bigcap_{\tilde{V}\in\tilde{\mho}}}\tilde{V}\circ\tilde{M}\circ\tilde{V}$$

formülü ile tanımlanır.

İspat. $\tilde{V}$, $\tilde{\mho}$ nın bir soft köşegen civarı olsun. $(x_e,y_{e'})\in\tilde{V}\circ\tilde{M}\circ\tilde{V}$ bağıntısı $(x_e,p_{e''})\in\tilde{V}$ ve $(q_{e'''},y_{e'})\in\tilde{V}$ olacak şekilde $\tilde{M}$ nin bir $(p_{e''},q_{e'''})$ elemanının var olduğu anlamına gelir. Başka bir deyişle $x_e\tilde{\in}B(p_{e'',\tilde{V}})$ ve $y_{e'}\in B(q_{e'''},\tilde{V})$ dir. Yani $(x_e,y_{e'})\in B(p_{e''},\tilde{V})\times B(q_{e'''},\tilde{V})$ dir. $B(p_{e''},\tilde{V})\times B(q_{e'''},(X,E)\times(X,E))$, $(X,E)\times(X,E)$ üzerinde $(p_{e''},q_{e'''})$ nın bir soft komşuluğu olduğundan teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

$(x_e,p_{e''})\tilde{\in}\tilde{V}$, $(y_{e'},q_{e'''})\in\tilde{V}$ bağıntıları $p_{e''}\in B(x_e,\tilde{V})$, $q_{e'''}\in B(y_{e'},V)$ veya $(p_{e''},q_{e'''})\in B(x_e,\tilde{V})\times B(y_{e'},\tilde{V})$ şeklinde de yazılabilir. $B(x_e,\tilde{V})\times B(y_{e'},\tilde{V})$ kümesi $(X,E)\times(X,E)$ üzerinde $(x_e,y_{e'})$ nın soft komşuluklarının bir soft tabanını oluşturur. Eğer $\tilde{V}_1,\tilde{V}_2$ herhangi iki soft köşegen civarı ise daima bir $\tilde{V}\tilde{\subseteq}\tilde{V}_1\tilde{\bigcap}\tilde{V}_2$ soft civarı vardır. Dolayısıyla $B(x_e,\tilde{V})\times B(y_{e'},\tilde{V})\tilde{\subset}B(x_e,\tilde{V}_1)\times B(y_{e'},\tilde{V}_2)$ dir. Bu yüzden herbir $\tilde{V}\in\tilde{\mho}$ için $B(x_e,\tilde{V})\times B(y_{e'},\tilde{V})$, $\tilde{M}$ ye denktir ancak ve ancak $(x_e,y_{e'})\tilde{\in}\tilde{M}^c$ dir.

Önerme 4.1.6. $(X,\tilde{\mho},E)$ bir soft düzgün uzay olsun. $\tilde{\mho}$ soft civarların soft içi(soft kapanışı), soft civarların bir soft tabanını oluşturur.

İspat. $\tilde{V}$, $\tilde{\mho}$ soft köşegeninin herhangi bir soft civarı olsun. Bu durumda $\tilde{W}^3\tilde{\subseteq}\tilde{V}$ olacak şekilde bir $\tilde{W}$ soft köşegen civarı vardır. $\tilde{W}^3$, $\tilde{W}$ nin bir soft komşuluğu olduğundan ve $(X,E)\times(X,E)$ üzerinde $\tilde{V}$ nin soft içi $\tilde{W}$ yı içerir bu yüzden bir soft köşegen civarıdır. Ayrıca Teorem 4.1.4 den $\tilde{W}\tilde{\subset}\tilde{W}^3\tilde{\subseteq}\tilde{W}^3\subset\tilde{V}$ sağlandığından $\tilde{V}$ bir soft civarın kapanışını içerir.

4.2. Soft Düzgün Sürekli Dönüşümler

$(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ iki düzgün soft uzay ve $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ birebir ve örten bir fonksiyon çifti olsun.

Tanım 4.2.1. a) Eğer her $\tilde{V}'\in\tilde{\mathcal{U}}'$ için;

$$\exists\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}:\forall\left|x_{e_1}^1-x_{e_2}^2\right|\tilde{<}\tilde{V} \text{ için } \left|f(x_{g(e_1)}^1)-f(x_{g(e_2)}^2)\right|\tilde{<}\tilde{V}'$$

sağlanıyorsa (f,g) soft fonksiyonuna soft düzgün süreklidir denir.

b) Eğer (f,g) bir soft bire-bir, örten ve (f,g) ile $(f,g)^{-1}$ soft fonksiyonlarının her ikisi de soft düzgün sürekli ise (f,g) soft fonksiyonuna bir soft düzgün izomorfizma, bu iki soft düzgün uzaya da soft düzgün izomorf uzaylar denir.

Teorem 4.2.1. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ iki soft düzgün uzay ve $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ bir fonksiyon çifti olsun. Eğer her soft köşegen civarı $\tilde{V}'\in\tilde{\mathcal{U}}$ için $((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')\in\tilde{\mathcal{U}}$ ise (f,g) soft düzgün sürekli bir fonksiyondur.

İspat. Varsayalım ki (f,g) düzgün sürekli bir fonksiyon ve $\tilde{V}'\in\tilde{\mathcal{U}}'$ olsun. $((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')\in\tilde{\mathcal{U}}$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $(x_e,y_{e'})\in((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')$ dir. Yani $\left|x_e-y_{e'}\right|\tilde{<}((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')$ dir. (f,g) bir soft düzgün sürekli fonksiyon ve $\left|f(x)_{g(e)}-f(y)_{g(e')}\right|\tilde{\leq}\tilde{V}'$ olduğundan $\left|x_e-y_e\right|\tilde{<}\tilde{V}$ olacak şekilde $\tilde{\mathcal{U}}$ nın bir soft köşegen civarı $\tilde{V}$ vardır.

Tersine her $\tilde{V}'\in\tilde{\mathcal{U}}'$ soft köşegen civarı için $((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')\in\tilde{\mathcal{U}}$ bir soft köşegen civarı olsun. Farz edelim ki X üzerindeki herbir $x_e,y_{e'}$ soft noktaları için $\left|f(x)_{g(e)}-f(y)_{g(e')}\right|\tilde{\leq}\tilde{V}'$, $\tilde{\mathcal{U}}'$ nın bir soft köşegen civarıdır. Bu durumda

$\left|x_e - y_{e'}\right| \tilde{<} f^{-1}(\tilde{V}')$, $\tilde{\mathcal{U}}$ nin bir soft köşegen civarıdır. Yani (f,g) soft düzgün sürekli bir foksiyondur.

Önerme 4.2.1. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ ve $(Z,\tilde{\mathcal{U}}'',E'')$ soft düzgün uzaylar olsun. Eğer $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ ve $(\varphi,k):(Y,E')\to(Z,E'')$ iki soft düzgün sürekli fonksiyon ise $(f,g)\circ(\varphi,k)=(f\circ\varphi, g\circ k):(X,E)\to(Z,E'')$ bileşkesi de soft düzgün süreklidir.

Teorem 4.2.2. Her soft düzgün sürekli fonksiyon soft süreklidir.

İspat. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ iki düzgün soft uzay, $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ bir soft düzgün sürekli fonksiyon ve $x^1_{e_1}\in(X,E)$ herhangi bir soft nokta olsun. Eğer $B(f(x^1_{g(e_1)}),\tilde{V}')$, $f(x^1_{g(e_1)})$ in soft düzgün topolojisinde herhangi bir soft komşuluğu ise (f,g) soft düzgün sürekli olduğundan $\tilde{V}'\in\tilde{\mathcal{U}}'$ için

$$\exists\tilde{V}\in\tilde{\mathcal{U}}:\forall\left|x^1_{e_1}-x^2_{e_2}\right|\tilde{<}\tilde{V} \text{ için } \left|f\left(x^1_{g(e_1)}\right)-f\left(x^2_{g(e_2)}\right)\right|\tilde{<}\tilde{V}'$$

sağlanır. Buradan $(f,g)\left(B\left(x^1_{e_1},\tilde{V}\right)\right)\tilde{\subseteq}B\left(f\left(x^1_{g(e_1)}\right),\tilde{V}'\right)$ olduğu kolayca elde edilir. Yani (f,g) soft fonksiyonu $x^1_{e_1}$ soft noktasında soft süreklidir.

Önerme 4.2.2. $(f,g):(X,\tilde{\mathcal{U}},E)\to(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ soft düzgün uzayların soft düzgün sürekli bir fonksiyonu olsun.

$$f:\left(X,(\tilde{\mathcal{U}})_e\right)\to\left(Y,(\tilde{\mathcal{U}}')_{g(e)}\right)$$

fonksiyonu her $e\in E$ için düzgün süreklidir.

4.3. Soft Düzgün Açık Dönüşümler

$(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ iki soft düzgün uzay ve $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ birebir ve örten bir fonksiyon çifti olsun.

Tanım 4.3.1. Eğer $\tilde{\mathcal{U}}$ nın her $\tilde{V}$ soft civarı ve $x_e \in SS(X,E)$ için $B(f(x)_{g(e)},\tilde{V}') \tilde{\subseteq} (f,g)(B(x_e,\tilde{V}))$ olacak şekilde $\tilde{\mathcal{U}}'$ nın bir $\tilde{V}'$ soft köşegen civarı varsa (f,g) ye bir soft düzgün açık fonksiyon denir.

Örnek 4.3.1. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay ve $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E)$ bir soft diskret düzgün uzay olsun. O halde $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ daima soft düzgün açık fonksiyondur.

Bir soft birebir fonksiyon soft düzgün açıktır ancak ve ancak bu fonksiyonun tersi soft düzgün süreklidir.

Önerme 4.3.1. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ ve $(Z,\tilde{\mathcal{U}}'',E'')$ soft düzgün uzaylar olmak üzere $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ soft düzgün sürekli örten bir fonksiyon ve $(\varphi,k):(Y,E')\to(Z,E'')$ da herhangi bir soft fonksiyon olsun. Eğer $(f\circ\varphi,g\circ k):(X,E)\to(Z,E)$ soft düzgün açık ise (φ,k) da soft düzgün açıktır.

İspat. $\tilde{V}'$, $\tilde{\mathcal{U}}'$ nın herhangi bir soft civarı olsun. O halde $\tilde{V}=((f,g)\times(f,g))^{-1}(\tilde{V}')$, $\tilde{\mathcal{U}}$ nın bir soft civarıdır. Eğer $(f\circ\mathcal{U},g\circ k)$ soft düzgün açık ise her $x_e \in SS(X,E)$ için

$$B(\varphi(f(x))_{K(g(e))},\tilde{V}'') \tilde{\subseteq} (f\circ\varphi,g\circ k)(B(x_e,\tilde{V}))$$

olacak şekilde $\tilde{\mathcal{U}}''$ nın $\tilde{V}''$ soft civarı vardır. Bu durumda her $y_{e'} \in SS(Y,E')$ için

$$B(\varphi(Y)_{K(e')},\tilde{V}'') \tilde{\subseteq} (\varphi,g)(B(y_{e'},\tilde{V}'))$$

sağlanır ve bu yüzden (φ,k) soft düzgün açıktır.

Önerme 4.3.2. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ ve $(Z,\tilde{\mathcal{U}}'',E'')$ soft düzgün uzaylar olmak üzere $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ bir soft fonksiyon ve $(\varphi,k):(Y,E')\to(Z,E'')$ soft düzgün sürekli birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer $(f\circ\varphi,g\circ k)$ soft düzgün açık ise (f,g) soft fonksiyonu da soft düzgün açıktır.

İspat. $\tilde{V}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ nın herhangi soft civarı olsun. Eğer $(f\circ\varphi,g\circ k)$ soft düzgün açık ise her $x_e\in SS(X,E)$ soft noktası için

$$B(\varphi(f(x))_{K(g(e))},\tilde{V}'')\tilde{\subseteq}(f\circ\varphi,g\circ k)(B(x_e,\tilde{V}))$$

olacak şekilde $\tilde{\mathcal{U}}''$ nın bir soft $\tilde{V}''$ civarı vardır. $\tilde{V}'=((\varphi,k)\times(\varphi,k))^{-1}(\tilde{V}'')$, $\tilde{\mathcal{U}}'$ nın bir soft civarıdır. (φ,k) soft düzgün sürekli olduğundan Farz edelim ki $y^1_{e'_1}\in B(f(x)_{g(e)},\tilde{V}')$ olsun. O halde

$$\varphi(y^1)_{K(e'_1)}\in B(\varphi(f(x))_{K(g(e))'},\tilde{V}'')\tilde{\subseteq}(f\circ\varphi,g\circ k)(B(x_e,\tilde{V}))$$

ve $x^1_{e_1}\tilde{\in}B(x_e,\tilde{V})$ için $\varphi(y^1)_{k(e'_1)}=\varphi(f(x^1))_{k(g(e_1))}$ dir. (φ,k) birebir olduğundan $y'_{e'_1}=f(x')_{g(e_1)}$ dir ve dolayısıyla $y'_{e'_1}\tilde{\in}(f,g)(B(x,\tilde{V}))$ dir. Böylece $B(f(x)_{g(e)},\tilde{V}')\tilde{\subseteq}(f,g)(B(x_e,\tilde{V}))$ sağlanır ve dolayısıyla (f,g) soft düzgün açıktır.

Önerme 4.3.3. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$, $(Y,\tilde{\mathcal{U}}',E')$ ve $(Z,\tilde{\mathcal{U}}'',E'')$ soft düzgün uzaylar olmak üzere $(f,g):(X,E)\to(Y,E')$ ve $(\mathcal{U},k):(Y,E')\to(Z,E'')$ iki soft fonksiyon olsun. Varsayalım ki (f,g) soft düzgün açık örten fonksiyondur. Eğer $(f\circ\varphi,g\circ\varphi)$ soft düzgün sürekli ise (φ,k) da soft düzgün süreklidir.

İspat. Farz edelim ki $(f\circ\varphi,g\circ k)$ soft düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\tilde{V}''$, $\tilde{\mathcal{U}}''$ nın bir soft civarı ise $\tilde{V}=((f\circ\varphi,g\circ k)\times(f\circ\varphi,g\circ k))^{-1}(\tilde{V}'')$, $\tilde{\mathcal{U}}$ nın soft köşegen civarıdır. (f,g) soft düzgün açık olduğundan her $x_e\in SS(X,E)$ için

$$B(f(x)_{g(e)},\tilde{V}')\tilde{\subseteq}(f,g)(B(x_e,\tilde{V}))$$

olacak şekilde $\tilde{\mathcal{U}}'$ nın $\tilde{V}'$ soft civarı vardır. $x^1_{e_1} \in SS(X,E)$ için $f(x^1)_{g(e_1)} \tilde{\in} B(f(x)_{g(e_2)}, \tilde{V}')$ ise $x^2_{e_2} \tilde{\in} B(x_e, \tilde{V})$ için $f(x^1)_{g(e_1)} = f(x^2)_{g(e_2)}$ dir ve dolayısıyla $(\varphi(f(x))_{k(g(e))}, \varphi(f(x^2))_{k(g(e_2))}) \tilde{\in} \tilde{V}''$ dir. $\varphi(f(x^1))_{k(g(e_1))} = \varphi(f(x^2))_{k(g(e_2))}$ olduğundan (φ, k) soft düzgün süreklidir.

Sonuç 4.3.1. Soft düzgün uzaylar bir kategori oluşturur ve bu kategori sıradan düzgün uzaylar kategorisinin bir genelleştirmesidir.

4.4 Soft Düzgün Uzaylar Üzerinde İşlemler

$(X, \tilde{\mathcal{U}}, E)$ bir soft düzgün uzay, $(M,E) \tilde{\subseteq} (X,E)$ bir soft alt küme olsun.

$$\tilde{\mathcal{U}}_{(M,E)} = \left\{(M \times M, E \times E) \tilde{\bigcap} (V, E \times E) : (V, E \times E) \in \tilde{\mathcal{U}}\right\}$$

ailesi için soft düzgün yapının koşulları sağlanır. $\tilde{\mathcal{U}}_{(M,E)}$ soft ailesi $\tilde{\mathcal{U}}_M$ ile gösterilir.

Tanım 4.4.1. $(M, \tilde{\mathcal{U}}_M, E)$ soft düzgün uzayına $(X, \tilde{\mathcal{U}}, E)$ soft düzgün uzayının alt uzayı denir.

Eğer $\tilde{\tau}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ soft düzgün yapısından üretilen soft düzgün topoloji ise ve $\tilde{\tau}_M$, $\tilde{\mathcal{U}}_M$ soft düzgün yapısından üretilen soft düzgün topoloji ise $\tilde{\tau}_M$ soft topolojisi $\tilde{\tau}$ topolojisinin soft alt uzay topolojisidir. Soft düzgün alt uzaylarda

$$(i_M, 1_E) : (M, \tilde{\mathcal{U}}_M, E) \to (X, \tilde{\mathcal{U}}, E), \; (i_M, 1_E)(x_e) = x_e ,$$

şeklinde tanımlanan soft gömme dönüşümü soft düzgün süreklidir.

(X,E) bir soft küme, $\left\{\left(X_s, \tilde{\mathcal{U}}_s, E_s\right)\right\}_{s \in S}$ soft düzgün uzayların bir ailesi ve her $s \in S$ için $(f_s, g_s) : (X,E) \to (X_s, E_s)$ bir soft fonksiyon olsun.

$$\left\{(f_s \times f_s, g_s \times g_s)^{-1}(\tilde{V}_s) \tilde{\subseteq} (X \times X, E \times E) : \tilde{V}_s \in \tilde{\mathcal{U}}_s, s \in S\right\},$$

$$(f_s\times f_s, g_s\times g_s)^{-1}(x_e, y_{e'}) = \left\{\begin{matrix} (a_\alpha, b_\alpha) : (a,b)\in (f_s\times f_s)^{-1}(x,y), \\ (\alpha,\beta)\in (g_s\times g_s)^{-1}(e,e') \end{matrix}\right\}$$

soft ailesinin tüm sonlu soft alt ailelerinin arakesitlerinden oluşan aile (X,E) soft kümesi üzerinde bir soft düzgün yapının soft alt tabanıdır. Bu soft düzgün yapıda her $(f_s, g_s):(X,E)\to(X_s,E_s)$ soft fonksiyonu soft düzgün süreklidir. Bu soft düzgün yapıya $\{(f_s,g_s):(X,E)\to(X_s,E_s)\}_{s\in S}$ soft fonksiyonlar ailesinden üretilen soft düzgün yapı denir.

$\left\{\left(X_s,\tilde{\mathcal{U}}_s,E_s\right)\right\}_{s\in S}$ soft düzgün uzayların bir ailesi olsun. S kümesinin herhangi sonlu $\{s_1,\dots,s_k\}$ alt kümesini seçelim ve $\left(\prod_{i=1}^{k}X_{s_i},\prod_{i=1}^{k}E_{s_i}\right)\times\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}E_s\right)$ kümesinin soft köşegenini içeren

$$\left\{\left(\{x^{s_i}_{e_{s_i}}\},\{y^{s}_{e_s}\}\right) : \left|x^{s_i}_{e_{s_i}} - y^{s}_{e_s}\right| \tilde{<} \tilde{V}_{s_i},\ i=\overline{1,k}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Böyle tanımlanan kümeler ailesi için soft düzgün yapının tabanının koşulları sağlanır. Bu tabandan üretilen soft düzgün yapıya $\left\{\tilde{\mathcal{U}}_s\right\}_{s\in S}$ soft düzgün yapılarının çarpımı denir ve $\prod_{s\in S}\tilde{\mathcal{U}}_s$ ile gösterilir. $\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}\tilde{\mathcal{U}}_s,\prod_{s\in S}E_s\right)$ soft düzgün uzayına ise $\left\{\left(X_s,\tilde{\mathcal{U}}_s,E_s\right)\right\}_{s\in S}$ soft düzgün uzaylar ailesinin çarpımı denir.

Önerme 4.4.1. Eğer her $s\in S$ için $\tilde{\tau}_s$ soft topolojisi $\tilde{\mathcal{U}}_s$ soft düzgün yapısından üretiliyor ise $\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}E_s\right)$ soft kümesinde, $\prod_{s\in S}\tilde{\mathcal{U}}_s$ soft düzgün yapısından üretilen $\tilde{\tau}$ soft topolojiside $\{\tilde{\tau}_s\}_{s\in S}$ soft topolojilerinin çarpımına eşittir.

Açıktır ki, her $s\in S$ için $(p_s,q_s):\left(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}\tilde{\mathcal{U}}_s,\prod_{s\in S}E_s\right)\to(X_s,\tilde{\mathcal{U}}_s,E_s)$ soft projeksiyon dönüşümü soft düzgün süreklidir.

Teorem 4.4.1. $(X,\tilde{\mathcal{U}},E)$ bir soft düzgün uzay , $\left\{\left(Y_s,\tilde{\mathcal{U}}_s,E_s\right)\right\}$ soft düzgün uzayların bir ailesi ve $(f,g):(X,\tilde{\mathcal{U}},E)\rightarrow\left(\prod_{s\in S}Y_s,\prod_{s\in S}\tilde{\mathcal{U}}_s,\prod_{s\in S}E_s\right)$ bir soft fonksiyon olsun.

(f,g) soft düzgün sürekli bir fonksiyondur $\Leftrightarrow$ Her $s\in S$ için $(p_s\circ f_s\circ g_s):(X,\tilde{\mathcal{U}},E)\rightarrow(Y_s,\tilde{\mathcal{U}}_s,E_s)$ soft düzgün süreklidir.

KAYNAKLAR

[1] Acar U., Koyuncu F., Tanay B., “Soft sets and soft rings”, Comput. Math. Appl. 59, (2010), 3458-3463

[2] Ahmad B., Kharal A., “On fuzzy soft sets”, Adv. Fuzzy Syst., 6, (2009), doi:10.1155/2009/586507

[3] Aktaş H., Çağman N., “Soft sets and soft group”, Information Science, 177, (2007), 2726-2735

[4] Ali M. I., Feng F., Liu X. Y., Min W. K., Shabir M., “On some new operations in soft set theory”, Computers and Math. with Appl., 57, (2009) 1547-1553.

[5] Aygünoğlu A., Aygün H., “Some notes on soft topological spaces”, Neurall Comput. Applic., 21, (2011), 113-119.

[6] Babitha KV., Sunil JJ., “Soft Set Relations and Functions”, Comput. Math. Appl. 60 (2010), 1840-1849.

[7] Bayramov S., Gündüz (Aras) C., “Genel Topoloji”, ISBN:975-436-056-1, Çağlayan Basımevi, İstanbul, (2004).

[8] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “On isomorphism theorems of fuzzy soft groups” ICMS, Bolu, Turkey, (2010), 23-27

[9] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “Intuitionistic fuzzy soft topological spaces”, TWMS, J. Pure and Appl, Math. (2014), V5, No 5, 66-79

[10] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “Some results on fuzzy soft topological spaces”, Numerical and Soft Computing Methods for Characteristic Value Problems of ODE and ODEs Systems, 2013

[11] Chen D, Tsong E.E.C., et al., “The parametrization reduction of soft sets and its applications”, Comput. Math. Appl., 49, (2005), 757-763

[12] Çağman N., Karataş S., Enginoğlu E., “Soft Topology”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 351-358

[13] Çetkin V, Aygün H., “Uniformity structure in the context of soft set”, Ann Fuzzy Math. Inf., 6,(2013), 69-76

[14] Das. S., Samanta SK., “Soft real sets, soft real numbers and their properties”, J Fuzzy Math., 20, (2012), 551-576

[15] Das. S., Samanta SK., “Soft metric” Ann. Fuzzy Math. Infor., 6, (2013), 77-94

[16] Dubois D., Prade H., and Pawlak Z., "Rough sets" Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, (1991)
[17] Egelking R., "General Topology", Polish Scientifiz Publishers, Warszawa, 1997
[18] Feng F., Jun Y. B., Zhao X., "Soft semirings", Comput. Math. Appl., 56, (2008), 2621-2628
[19] Feng F., Li C. X., Davvaz B., Ali M. I., "Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach" Soft Comput., 14, (2010), 267-275
[20] Gunduz(Aras) C., Bayramov S., "Soft locally compact and soft paracompact spaces", Journal of Mathematics and System Science, Vol. 3, (2013) ,122-130
[21] Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., "Fuzzy soft modules", International Mathematical Forum, 6(11), (2011), 517-527
[22] Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., "Intuitionistic fuzzy soft modules", Comput. Math. Appl., 62, (2011), 2480-2486
[23] Gunduz (Aras) C., Sonmez A., Çakallı H., "On soft Mappings", Comput. Math. Appl. 60(9), 2013
[24] Hazra H., Majumdar P., Samanta S. K., "Soft Topology", Fuzzy Inf. Eng. 1, (2012), 105-115
[25] Hussain S., Ahmad B., "Some properties of soft topological spaces", Comput. Math. Appl., 62, (2011), 4058-4067
[26] Iwinski T., "Algebraic approach to rough sets" Bull. Polish Acad. Sci. Math., 35, (1987), 673-683
[27] James I. M., "Introduction to uniform spaces", ISBN:0-521-38620-9, Cambridge University Press, USA, 1990
[28] Jing-liang L., Rui-xia Y., Bing-xue Y., "Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups" Chinese Control and Decision Conference, (2008), 2626-2629
[29] Jun Y. B., "Soft BCK/BCI-Algebras", Comput. Math. Appl., 56(5), (2008), 1408-1413
[30] Jun Y. B., Park C. H., "Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-Algebras", Inform Sci., 178(11), (2008), 2466-2475
[31] Kharal A., Ahmad B., "Mapping of soft classes", to appear in New Math. Nat. Comput.

[32] Koçak M., “Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri”, ISBN:978-975-6428-82-5, Nisan Kitapevi Yayınları, Eskişehir, 2015

[33] Kong Z., Wong L., Li S., “The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm”, J. Comput. Appl. Math., 56, (2008), 3029-3037

[34] Maji P. K., Bismas R., Roy A. T., “Fuzzy soft sets”, Journal of Fuzzy Mathematics 9(3), (2001), 589-602

[35] Maji P. K., Bismas R., Roy A. T., “An application of soft sets in a decision making problem”, Comput. Math. Appl., 44, (2002), 1077-1083

[36] Maji P. K., Bismas R., Roy A. R., “Soft set theory”, Comput. Math. Appl., 45 (2003) 555-562.

[37] Min W. K., “A note on soft topological spaces”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 3524-3528

[38] Molodtsov D., “Soft set theory – first results”, Comput. Math. Appl., 37 (1999) 19-31.

[39] Molodtsov D., Leonov V. Y., Kovkov D. V., “Soft sets technique and its application”, Nechetkie Sistemy Myagkie Vychisleniya, 1(1), (2006), 8-39

[40] Negoita C. V., Ralescu D. A., “Applications of fuzzy subsets to system analysis”, The Journal of Symbolic Logic, v44, no.2, (1979), 284-286

[41] Pie D., Miao D., “From soft sets to information Systems”, Granular computing, IEEE Inter. Conf., 2, (2005), 617-621

[42] Roy A. R., Maji P. K., “ A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems”, Journal of Computational and Applied Math., 203, (2007), 412-418.

[43] Ozturk T. Y., “Soft ve fuzzy soft modüllerin homoloji modülleri”, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013

[44] Ozturk T. Y., “A new approach to soft uniform spaces”, Turk J. Math. (2015), DOI:10.3906/mat-1506-98

[45] Ozturk T.Y., Bayramov S., “Soft Topology on Function Spaces”, arXiv:1403.2873, 13 pages, (2014)

[46] Ozturk T.Y., Bayramov S., “Category of chain complexes of soft modules”, International Mathematical Forum, 7, (2012), 981-992

[47] Ozturk T. Y., Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., “Inverse and direct systems of soft modules”, Ann. Fuzzy Math. Infor., 5, (2013), 73-85

[48] Ozturk T. Y., Yolcu A., "On soft uniform spaces", Eastern Anatolian Journal of Science, Vol.II, 1, (2016), 7-13

[49] Shabir H., Bashir A., "Some properties of soft topological spaces", Comput. Math. Appl. 62, (2011), 4058-4067

[50] Shabir M., Irfan Ali M., "Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups", New Math. Nat. Comput., 5, (2009), 599-615

[51] Shabir M., Naz M., "On soft topological spaces", Comput. Math. Appl., 61, (2011) 1786-1799.

[52] Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., " Soft sets and soft modules", Lecture Nothes in Comput. Sci. 5009, (2008), 403-409

[53] Tanay B., Kandemir M. B., "Topological structure of fuzzy soft sets", Comput. Math. Appl. 61, (2011), 2952-2956

[54] Zadeh L. A., "Fuzzy Sets", Information and Control 8 (1965) 338-353

[55] Zorlutuna İ., Akdağ M., Min W. K., Atmaca S., "Remarks on soft topological spaces", Annals of fuzzy Mathematics and Informatics 3(2), (2012), 171-185

[56] Zou Y., Xiao Z. "Data analysis approaches of soft sets under incomplete information", Knowl.-Based Syst., 21, (2008), 941-945

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	**:**	Adem YOLCU
Doğum Yeri	**:**	Sarıkamış/KARS
Doğum Tarihi	**:**	02.07.1992
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-posta	**:**	yolcu.adem@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Lise	**:** Sarıkamış Ş.B.B.K Anadolu Lisesi, 2006-2010
Lisans	**:** Kars Kafkas Üniversitesi, 2010-2014
Yüksek Lisans	**:** Kars Kafkas Üniversitesi, 2014-