**T.C.**
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KUAZİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ İÇİN İDENTİFİKASYON PROBLEMİNİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

**Arif SARIOĞLAN**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**
**Prof.Dr. Gabil YAGUB**

**AĞUSTOS 2016**
**KARS**

**T.C.**
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# KUAZİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ İÇİN İDENTİFİKASYON PROBLEMİNİN SONLU FARK YAKLAŞIMI

**Arif SARIOĞLAN**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**
**Prof.Dr. Gabil YAGUB**

**AĞUSTOS 2016**
**KARS**

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi **Arif SARIOĞLAN**'ın **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı **"Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin İdentifikasyon Probleminin Sonlu Fark Yaklaşımı"** adlı bu çalışma, yapılan tez çalışması sınav sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy …birliği……… ile kabul edilmiştir.

03/08/2016

| | **Adı Soyadı** | **İmza** |
|---|---|---|
| **Başkan** | : Prof. Dr. Gabil YAGUB | ……… |
| **Üye** | : Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY | ……… |
| **Üye** | : Yrd. Doç. Dr. Yusuf KOÇAK | ……… |

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …. /…. /2016 gün ve …. /…………………. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

# ÖNSÖZ

Kuazi optiğin durgun denklemi için identifikasyon probleminin sonlu fark yaklaşımını ele alan bu araştırma, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak yazılmıştır.

Bu araştırma kapsamında Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin İdentifikasyon Problemi oluşturularak problem sonlu fark yaklaşımı ile ele alınmıştır.

Bu çalışma esnasında bana yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen, eşsiz ve derin bilgisiyle matematiğe gönül vermiş değerli bilim insanı Kafkas Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dekanı ve Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Gabil YAGUB'a ve Fen Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

KARS-2016 ARİF SARIOĞLAN

**İÇİNDEKİLER**

# ÖZET

Tez kapsamında kuazi optiğin durgun denklemi için bir identifikasyon probleminin sonlu fark yaklaşımı ele alındı. Bu amaçla ilk önce Materyal ve Yöntem bölümünün 3.1 alt bölümünde kuazi optiğin durgun denklemi için bir identifikasyon problemi tanımlandı. 3.2 alt bölümünde ise söz konusu problem sonlu farklar yöntemi uygulanarak diskrit aynısı elde edildi.

Araştırma Bulguları bölümünün 4.1 alt bölümünde fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi ispatlandı. 4.2 alt bölümünde fark şemasının hatası değerlendirildi. 4.3 bölümünde sonlu farklar yönteminin fonksiyonele göre yakınsaklığı incelendi.

Son olarak tartışmalar ve sonuçlar bölümünde elde edilen sonuçların önceki çalışmalardan farklılığı ve önemi vurgulandı.

**2016, 38 sayfa**



**Anahtar Kelimeler:** Kuazi optiğin durgun denklemi, identifikasyon problemi, sonlu farklar yöntemi

## ABSTRACT

In this thesis, the finite difference method of an identification problem for stationary equation of the quasi optic is considered. For this purpose, firstly, in the subsection 3.1 of material and method section, the identification problem for stationary equation of quasi optic is defined. In the subsection 3.2, the considered identification problem is discretized by using the finite difference method.

In the subsection 4.1 of research findings section, the stability estimation for solution of difference scheme is proved. In the subsection 4.2, the error of difference scheme is evaluated. In the section 4.3, the convergences according to the functional of finite difference approximations is studied.

Finally, in the section of discussions and outcomes, it is emphasised the difference and the importance from previous studies of the obtained results.

**2016, 38 pages**

**Keywords:** Stationary equation of quasi optic, İdentification problem, The finite difference method

# SİMGELER DİZİNİ

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan temel simgelerin gösterimlerine yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
| $\forall$ | : Herhangi bir |
| $\overset{\circ}{\forall}$ | : Hemen hemen her yerde |
| $i=\sqrt{-1}$ | : Sanal birim |
| $B$ | : Banach Uzayı |
| $H$ | : Hilbert Uzayı |
| $\Omega=(0,l)x(0,L)$ | : Verilen bölge (Açık dikdörtgen) |
| $\overline{\Omega}=[0,l]x[0,L]$ | : Verilen bölge (Kapalı dikdörtgen) |
| $\tau$ | : Bir $z$ değişkeninin adımı |
| $h$ | : Bir $x$ değişkeninin adımı |
| $\mathrm{I}_n([\vartheta]_n)$ | : Fonksiyonelin diskrit aynısı |
| $\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}=\dfrac{\phi_{jk}-\phi_{jk-1}}{\tau}$ | : $z$ değişkeninin sol farkı |
| $\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}=\dfrac{\phi_{jk}-\phi_{j-1k}}{h}$ | : $x$ değişkeninin sol farkı |
| $\delta_{x}\phi_{jk}=\dfrac{\phi_{j+1k}-\phi_{jk}}{h}$ | : $x$ değişkeninin sağ farkı |
| $\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk}=\dfrac{\delta_x\phi_{jk}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}}{h}$ | : $x$ değşkeninin ikinci mertebeden fark |

# 1. GİRİŞ

Optimal kontrol teorisi, matematiğin gerek teorik gerekse de uygulama alanının önemli bir bölümünü oluşturan varyasyon hesabı bölümlerinin başında yer almaktadır. "Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar "[1-3]. İdentifikasyon problemleri ise ters problemlerin varyasyon konulması olup optimal kontrol teorisinin problem türlerinden biri sayılabilir.

Kuazi optiğin durgun denklemi aslında kompleks potansiyelli Schrödinger denkleminin bir biçimidir. Bilindiği gibi durgun olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol ve identifikasyon problemleri [4-28] çalışmalarında incelenmiştir. Ancak denklemin katsayılarında yer alan kontroller $z$ değişkenine bağlı olduğunda hem optimal kontrol, hem de identifikasyon problemlerinin sonlu farklı yöntemleri önceki çalışmalarda çok az incelenmiştir.

Bu çalışma kapsamında kuazi optiğin durgun denklemi ve onun nümerik çözümü için bir identifikasyon problemi ele alınmıştır. Kuazi optik denkleminin durgun ya da kompleks potansiyelli durgun olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol ve identifikasyon problemlerinin nümerik çözümü farklı biçimlerde [4-9,11-13,16-19,23,25,26,29] çalışmalarında daha önce incelenmiştir. Söylemek gerekir ki, bu problemin incelenmesinde kuazi optiğin durgun denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümüne uygulanan sonlu farklar yönteminin yakınsaklığına ait sonuçlar önemli rol oynamaktadır. Bu anlamda [30-34] çalışmalarında elde edilen sonuçlar önem taşımaktadır.

Oluşturulan identifikasyon problemi konulma açısından önceki problemlerden farklı olduğundan bu problemin incelenmesi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşır.

## 2. ÖN BİLGİLER (KURAMSAL TEMELLER)

Bu bölümde tez içerisinde geçen bazı kavramların açıklamalarına yer verilmiştir.

**Tanım 2.1:** $L_2(0,\ell)$ bir hilbert uzayı olmak üzere, $(0,\ell)$ kümesi üzerinde sınırlı, ölçülebilir olan mutlak değerinin karesiyle integrallenebilen fonksiyonlar uzayını göstermektedir. $L_2(0,\ell)$ uzayı üzerinde iç çarpım

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)v(x)dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $L_2(0,\ell)$ uzayı üzerinde norm

$$\|v\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle v,v\rangle} < +\infty$$

olarak tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.2:** $L_2(\Omega)$ bir hilbert uzayı olmak üzere, $\Omega$ bölgesi üzerinde ölçülebilir olan mutlak değerinin karesiyle integrallenebilen fonksiyonların uzayı gösterilmektedir. $L_2(\Omega)$ uzayı üzerinde iç çarpım

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,z)\overline{\phi}(x,z)dxdz$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $L_2(\Omega)$ uzayı üzerinde norm

$$\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle}_{L_2(\Omega)} < +\infty$$

olarak tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.3:** $L_\infty(0,\ell)$ bir banach uzayı olmak üzere, $(0,\ell)$ kümesi sınırlı ölçülebilir olan fonksiyonlar uzayını göstermektedir. $L_\infty(0,\ell)$ uzayı üzerinde norm

$$\|v\|_{L_\infty(0,\ell)} = vrai\max_{x\in(0,\ell)}|v(x)| = \inf\left\{a : a\geq 0, \overset{\circ}{\forall}\, x\in(0,\ell)\ için\ |v(x)|\leq a\right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.4:** $W_2^1(0,\ell)$ bir Sobolev uzayı olmak üzere, bu uzaydaki herhangi bir $x$ elemanı için kendisi ve onun $x$' e göre birinci mertebeden türevleri $L_2(0,\ell)$ Lebesque uzayının fonksiyonlar uzayını ifade eder. $W_2^1(0,\ell)$ uzayı bir Hilbert uzayı da olup, $W_2^1(0,\ell)$'da iç çarpım

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,\ell)} = \int_0^\ell \left( u(x)\bar{v}(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}(x)}{\partial x} \right) dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $W_2^1(0,\ell)$ uzayında norm

$$\|v\|_{W_2^1(0,\ell)} = \sqrt{\langle v,v\rangle_{W_2^1(0,\ell)}} < +\infty$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$ için

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell) \subset W_2^1(0,\ell)$$

olup bu uzayda 0 ve $\ell$ elemanları için değeri 0'dır.

**Tanım 2.5:** $W_2^2(0,\ell)$ bir Sobolev uzayı olmak üzere, bu uzaydaki herhangi bir $x$ elemanı için kendisi ve onun $x$' e göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$ Lebesque uzayının fonksiyonlar uzayını ifade eder. $W_2^2(0,\ell)$ uzayı bir Hilbert uzayı da olup, $W_2^2(0,\ell)$'da iç çarpım

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,\ell)} = \int_0^\ell \left( u(x)\bar{v}(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{v}(x)}{\partial x^2} \right) dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $W_2^2(0,\ell)$ uzayında norm

$$\|v\|_{W_2^2(0,\ell)} = \sqrt{\langle v,v\rangle_{W_2^2(0,\ell)}} < +\infty$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\ell)$ için

$$\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\ell) \subset W_2^2(0,\ell)$$

olup bu uzayda 0 ve $\ell$ elemanları için değeri 0'dır.

**Tanım 2.6:** $W_2^{0,1}(\Omega)$ bir Hilbert uzayı olmak üzere, bu uzaydaki herhangi bir $z$ elemanı için birinci mertebeden kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan bir fonksiyonlar uzayıdır. $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( \psi(x,z)\bar{\phi}(x,z) + \frac{\partial \psi(x,z)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x,z)}{\partial z} \right) dxdz$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayında norm

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}} < +\infty$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $\overset{\circ}{W}{}_2^{2}(\Omega)$ için

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(\Omega) \subset W_2^{0,1}(\Omega)$$

olup bu uzayda $\Omega$ bölgesinin sınırlarında değeri 0'dır.

**Tanım 2.7:** "$D \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ verildiğinde $|z| < \sigma$ şartını sağlayan tüm $z$ 'ler için $1 \le p < \infty$ iken $\| f(x+z) - f(x) \|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekide bir $\sigma$>0 sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna $L_p$ normu anlamında süreklidir denir."[35]

**Teorem 2.8:** "$1 \le p < \infty$ iken $L_p(D)$ ' den olan her fonksiyon $L_p$ normu anlamında süreklidir."[35]

**Teorem 2.9:** **"**(Fubini Teoremi) $Q_n$, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı bir bölgesi ve $Q_m$, $\mathbb{R}^m$ nin sınırlı bir bölgesi olmak üzere $Q_n \times Q_m$ bölgesinde $f(x,y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Farz edelim ki $f(x,y)$ fonksiyonu $Q_{n+m} = Q_n \times Q_m$ bölgesinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x,y)$ fonksiyonu hemen hemen $x \in Q_n$ için $y \in Q_m$ 'ye göre hemen hemen her yerde integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\int_{Q_n} f(x,y)dx \text{ ve } \int_{Q_m} f(x,y)dy$$

fonksiyonları sırasıyla $x$ 'e ve $y$ 'ye göre integrallenebilir olup

$$\int_{Q_{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f(x,y)dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_n} f(x,y)dx$$

eşitliği geçerlidir."[35]

**Lemma 2.10 : "**(Gronwall lemmasının ayrık aynısı) Eğer $a \geq 0, b \geq 0$ olmak üzere

$$\varphi_j,\ j = \overline{0, N} \text{ ve } 0 \leq \varphi_0 \leq a\ ,$$

$$0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b\sum_{m=0}^{j}\varphi_m \qquad , \quad j = \overline{0, N-1}$$

şartlarını sağlıyorsa bu takdirde;

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j\ , \quad j = \overline{0, N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b\sum_{m=j}^{N-1}\varphi_m \quad j = \overline{0, N-1}\ , 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a$$

şartları sağlanıyorsa bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1} \quad , \ j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir."[36]

**Teorem 2.11 : "**(Cauchy$-$Bunyakovsky Eşitsizliği) $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}dxd\tau\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dxd\tau\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v|^2\, dxd\tau\right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir."[37]

**Teorem 2.12 : "**($\varepsilon-$Cauchy Eşitsizliği) Keyfi $a, b$ sayıları ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir."[37]

## 3. MATERYAL VE YÖNTEM

### 3.1 Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin İdentifikasyon Probleminin Oluşturulması

Bu bölümde kuazi optiğin durgun denklemi için identifikasyon problemini oluşturalım. "Kuazi optiğin durgun denklemi lineer olmayan optikte ortaya çıkan durgun ışık demetlerinin dağılması sürecini ifade eden bir denklemdir" [3]. Bu denklemin katsayıları olan kırılma ve absorbe(soğurma) katsayıları kuazi optiğin durgun denklemi için identifikasyon problemlerinde aranan fonksiyonlar rolünü oynayan fiziksel araçlardır. Bu fiziksel araçlar aşağıdaki denklemde $\vartheta_0(z)$ ve $\vartheta_1(z)$ olarak ifade edilmiştir. Şimdi identifikasyon problemi tanımlayalım. İdentifikasyon problemi

$$J(\vartheta) = \int_0^{\ell} \left|\psi(x,L) - y(x)\right|^2 dx \tag{1}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \Big\{ \vartheta = \vartheta(z) : \vartheta(z) = (\vartheta_0(z), \vartheta_1(z)), \vartheta_p \in L_2(0,L), \left|\vartheta_0(z)\right| \le b_0,$$
$$0 \le \vartheta_1(z) \le b_1, \left|\frac{d\vartheta_p(z)}{dz}\right| \le d_p,\ p = 0,1\ ,\ \overset{\circ}{\forall} z \in (0,L) \Big\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + \vartheta_0(z)\psi + i\vartheta_1(z)\psi = f(x,z)\ ,\ (x,z) \in \Omega \tag{2}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(\mathrm{x})\ ,\ x \in (0,\ell) \tag{3}$$

$$\psi(0,z) = \psi(l,z) = 0\ ,\ z \in (0,\ell) \tag{4}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir.

Burada $i = \sqrt{-1}, \ell > 0, L > 0, a_0 > 0, b_0 > 0, b_1 > 0, d_0 > 0,\ d_1 > 0$ verilen sayılar ve $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup aşağıdaki şartı sağlar.

$$0 < \mu_0 \le a(x) \le \mu_1\ ,\ \overset{\circ}{\forall} x \in (0,\ell). \tag{5}$$

Burada $\mu_0, \mu_1 > 0$ herhangi sabitlerdir.

$y(x), \varphi(x), f(x,z)$ ise verilen fonksiyonlar olup,

$$y \in W_2^1(0,\ell) \tag{6}$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\ell) \tag{7}$$

$$f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{8}$$

şartlarını sağlar.

### 3.2 Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin İdentifikasyon Probleminin Diskritleştirilmesi

Şimdi (1)-(4) identifikasyon problemini diskritleştirelim. Yani bu problemin sonlu farklı aynısını oluşturalım.Bunun için öncelikle $\overline{\Omega} = [0,\ell]x[0,L]$ bölgesini

$$\left\{(x_j, z_k)_n\right\},\ n = 1,2,3,\ldots,\ x_j = jh - \frac{h}{2}, j = \overline{1, M-1}\ ,\ k = \overline{0,N}\ ,\ h = \frac{1}{M-1}$$

$$z_k = k\tau,\ \tau = \frac{1}{N},\ x_0 = x_1 - \frac{h}{2} = 0,\ \ x_M = x_{M-1} + \frac{h}{2} = \ell$$

biçiminde bir ağa dönüştürelim.Burada $M, N$ verilen pozitif sayılardır. Problemde yer alan türevlerin sonlu fark karşılıklarını aşağıdaki biçimde gösterelim:

$$\delta_{\bar{z}}\phi_{jk} = \frac{\phi_{jk} - \phi_{jk-1}}{\tau}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = \frac{\phi_{jk} - \phi_{j-1k}}{h}$$

$$\delta_{x}\phi_{jk} = \frac{\phi_{j+1k} - \phi_{jk}}{h}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{1k} = \delta_x\phi_{0k} = \frac{\phi_{1k} - \phi_{0k}}{h/2}$$

$$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk} = \frac{\delta_x\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk}}{h}$$

$\phi_{jk}$, $\left\{(x_j, z_k)_n\right\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan bir ağ fonksiyonunu göstermektedir.

Şimdi (1)-(4) problemine karşılık oluşturduğumuz $\phi_{jk}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki şartlar altında bulunması problemine bakalım.

Her bir $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\mathrm{I}_n\left([\vartheta]_n\right) = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jN} - y_j\right|^2 \tag{9}$$

fonksiyonunun

$$\mathrm{V}_n \equiv \Big\{[\vartheta]_n : [\vartheta]_n = \left([\vartheta_0]_n, [\vartheta_1]_n\right), \left[\vartheta_p\right] = \left(\vartheta_{p1}, \vartheta_{p2}, \ldots, \vartheta_{pN}\right), \left|\vartheta_{pk}\right| \leq b_0 \ ,$$
$$0 \leq \vartheta_{1k} \leq b_1, k = \overline{1, N} \ , \left|\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\right| \leq d_p \ , p = 0,1 \ , \ k = \overline{2, N}\Big\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar{z}}\phi_{jk} + a_0\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk} - a_j\phi_{jk} +_{0k} \phi_{jk} + i_{1k}\phi_{jk} = f_{jk} \ , \ \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \tag{10}$$

$$\phi_{j0} = \varphi_j \ , \ j = \overline{0, M}, \tag{11}$$

$$\phi_{0k} = \phi_{Mk} = 0 \ , \ k = \overline{1, N}, \tag{12}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemi olarak oluşturabiliriz. Yukarıdaki (10) denkleminde yer alan $a_j, y_j, \varphi_j, f_{jk}$ ağ fonksiyonları

$$a_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} a(x)\,dx \ , \ j = \overline{1, M-1}, \tag{13}$$

$$y_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} y(x)\,dx \ , \ j = \overline{1, M-1}, \tag{14}$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \varphi(x)\,dx \ , \ j = \overline{1, M-1} \ , \varphi_0 = 0 \ , \ \ \varphi_M = 0 \tag{15}$$

$$f_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} f(x, z)\,dxdz \ , \ j = \overline{1, M-1} \ , \ k = \overline{1, N} \tag{16}$$

olarak tanımlanmaktadırlar.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 4.1 Fark Şemasının Çözümü İçin Kararlılık Kestirimi

(1)-(4) Kuazi optiğin durgun denklemi için identifikasyon probleminin sonlu fark yaklaşımını inceleyelim. (9)-(12) fark şeması için kararlılık kestirimini elde etmeye çalışalım.

**Teorem 4.1.1:** Kabul edelim ki $f(x), \varphi(x)$ (5)-(8) şartlarını sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda (9)-(12) problemi için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le c_1\left(\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right) \quad , \; \forall m = \{1,2,3\ldots\} \tag{17}$$

eşitsizliğinin daima sağlanır. Bu kestirimde $c_1$ bir pozitif olmak sabit $m,h$ ve $\tau$'ya bağlı değildir.

**İspat:** Her bir $z = z_k$ için aşağıdaki eşitlik (10)'da ifade ettiğimiz denkleme denktir.

$$\begin{aligned} & h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} - h\sum_{j=1}^{M-1} a_0\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\delta_{\bar{x}}\overline{\eta}_{jk}\chi_j - h\sum_{j=1}^{M-1} a_j\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} + \\ & + h\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{0k}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} + i\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{1k}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} \quad , \; j = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan $\overline{\eta}_{jk}$ fonksiyonu, $\{(x_j, z_k)\}$ ağlar dizisi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olan $\eta_{jk}$ fonksiyonunun karmaşık eşleniğidir. $\eta_{jk}$ fonksiyonu, $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0 \quad , \quad k = \overline{1, N}$ şartını sağlar.

$$\chi_j = \begin{cases} 1, \; j = \overline{2, M-1} \\ \dfrac{1}{2}, \; j = \overline{1, M} \end{cases} \quad \text{'dır.}$$

Bu eşitlikte yer alan $\overline{\eta}_{jk}$ ağ fonksiyonunun yerine $\tau\overline{\phi}_{jk}$ alarak (18) özdeşliği üzerinden karmaşık eşleniğini taraf tarafa çıkarırsak

$$h\left(\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar z}\phi_{jk}\bar\phi_{jk}+\delta_{\bar z}\phi_{jk}\bar\phi_{jk}\right)+2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{1k}\phi_{jk}\bar\phi_{jk}\right)=2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(f_{jk}\bar\phi_{jk})\ \ ,j=\overline{1,M-1} \tag{19}$$

eşitliğine ulaşırız. Burada herhangi $k=1,2,\ldots,N$ için;

$$\tau\left(\delta_{z}\phi_{jk}\bar\phi_{jk}+\delta_{\bar z}\phi_{jk}\bar\phi_{jk}\right)=\left|\phi_{jk}\right|^2-\left|\phi_{jk-1}\right|^2+\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2 \tag{20}$$

olduğunu (19)'da kullanıp, $k$ üzerinden $k=1$ den $k=N$ 'ye kadar toplayıp (11) şartını dikkate alırsak

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{1k}\left|\phi_{jm}\right|\le\\&\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|^2\qquad ,\forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\}\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\vartheta_1(z)\ge 0$ , $\forall z\in\overset{\circ}{(0,L)}$ olduğunu göz önüne alarak, yukarıdaki eşitsizliğin sağında bulun toplam ifadesindeki ikinci toplam ifadesinde m. terimi ayrı yazıp, bu eşizliğe $\varepsilon-$Cauchy ve Cauchy$-$Bunyakovsky teoremlerini uygularsak

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2\\&+\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_j\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\quad\forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\}.\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu eşitsilikte yer alan $\varepsilon$ 'u $\varepsilon=1/2\tau$ alırsak

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\le 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2\\&+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2+2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\quad ,\forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\}\end{aligned} \tag{21}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Ayrıca (21) eşitsizliğinin sol kısmındaki ikinci toplam hiçbir zaman negatif olamayacağından

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2\quad ,\forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik üzerinden Gronwall lemmasını uygularsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\le c_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right)\ ,\forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\} \tag{22}$$

kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu kestirimi (21)' de dikkate alırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\le c_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right)$$

eşitsizliğiyle birlikte teoremin hükmüne ulaşırız.

## 4.2 Fark Şemasının Hatası

Elde ettiğimiz fark şemasının hatasını değerlendirmek için bir kestirim ispatlayalım. Bunun için (2)-(4) identifikasyon probleminin çözümü için

$$\psi_{jk}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,z)\,dxdz\ \ ,j=\overline{1,M-1}\,,\,k=\overline{1,N}\ , \tag{23}$$

$$\psi_{j0}=\varphi_j\ \ ,\ j=\overline{0,M}\ \ ,\ \psi_{0k}=\psi_{Mk}=0\ \ ,\ k=\overline{1,N}\,.$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $W_{jk}=\phi_{jk}-\psi_{jk}$ olacak şekilde farkını gösterelim. Bu durumda $W_{jk}$ ağ fonksiyonu için

$$i\delta_{\bar z}W_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}W_{jk}-a_jW_{jk}+\vartheta_{0k}W_{jk}+i\vartheta_{1k}W_{jk}=F_{jk}\ \ ,\ j=\overline{1,M-1}\,,\,k=\overline{1,N}, \tag{24}$$

denklemi üzerinde

$$W_{j0}=0\ \ ,\ j=\overline{1,M-1}\,,\,W_{0k}=W_{Mk}=0\ \ ,\ k=\overline{1,N}. \tag{25}$$

koşullarını sağladığını elde ederiz. Ayrıca

$$F_{jk}=f_{jk}-\left(i\delta_{\bar z}\psi_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk}-a_j\psi_{jk}+\vartheta_{0k}\psi_{jk}+i\vartheta_{1k}\psi_{jk}\right)\ \ ,j=\overline{1,M-1}\,,\,k=\overline{1,N} \tag{26}$$

biçiminde bir $F_{jk}$ fonksiyonu tanımlayalım. Burada $F_{jk}$ fonksiyonunu

$$F_{jk}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+\vartheta_0(z)\psi+i\vartheta_1(z)\psi\right)dxd-$$

$$-i\delta_{\bar z}\psi_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk}-a_j\psi_{jk}+\vartheta_{0k}\psi_{jk}+i\vartheta_{1k}\psi_{jk}\ \ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\,,\,k=\overline{1,N}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

**Teorem 4.2.1:** Kabul edelim ki $f(x,z),\ \varphi(x),\ a(x)$ için (5)-(8) koşullarını sağladığını göz önüne alalım. Ayrıca kabul edelim ki $h,\ \tau$ için $c_{min} \le \frac{\tau}{h} \le c_{max}$ eşitsizliğini gerçekleştirsin. Eşitsizlikteki $c_{min},\ c_{max}$ herhangi keyfi pozitif sabitler olup $\tau$ ve $h$ 'a bağımlı değildir. Bu takdirde (24)-(26) ‘nın çözümü için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}\right|^2 \le c_2\beta_{\tau h} \qquad \forall\ m\in\{1,2,\ldots,N\} \tag{27}$$

kestirimi geçerlidir.
Burada $c_2 > 0$ herhangi bir sabit sayı olup $h,m$ ve $\tau$ ’ya bağımlı değildir. Ayrıca $\beta_{\tau h} > 0,\ h\to 0,\ \tau\to 0$ için $\beta_{\tau h}\to 0$ sağlanır.

**İspat:** (24)-(26) problem üzerindeki $z = z_k$ için $\forall\ k\in\{1,2,\ldots,N\}$ ve herhangi bir $\eta_{jk}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğine denk olduğu açıktır.

$$h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar z}W_{jk}\bar\eta_{jk} - h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar x}W_{jk}\delta_{\bar x}\bar\eta_{jk}\chi_j - h\sum_{j=1}^{M-1}(a_j - \vartheta_{0k} - i\vartheta_{1k})W_{jk}\bar\eta_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1}F_{jk}\phi_{jk}\bar\eta_{jk} \tag{28}$$

(28) formülüyle ifade edilen $\eta_{jk}$, $\{(x_j,z_k)\}$ kümesi üzerinden belirlenmiş olup, $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0$ , $k = \overline{1,N}$ koşulu sağlanır. $\bar\eta_{jk}$ ise $\eta_{jk}$ ağ fonksiyonunun karmaşık eşleniğidir.

Yukarıdaki özdeşlikte $\bar\eta_{jk}$ ağ fonksiyonun yerine $\tau W_{jk}$ fonksiyonunu yazıp oluşan eşitsizlikten onun karmaşık eşitsizliğini çıkarırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|W_{jk}\right|^2 - \left|W_{jk-1}\right|^2 + \left|W_{jk} - W_{jk-1}\right|^2\right) + 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{1k}\left|W_{jk}\right|^2 = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(F_{jk},\overline{W}_{jk})$$

$\forall\ k = 1,2,\ldots,N$ için eşitliğini kolaylıkla elde edebiliriz.

(10) olarak ifade ettiğimiz eşitlikte $W_{jk}$ için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|W_{jk}\right|^2 - \left|W_{jk-1}\right|^2 + \left|W_{jk} - W_{jk-1}\right|^2\right) + 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\vartheta_{1k}\left|W_{jk}\right|^2 = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}(F_{jk},\overline{W}_{jk})$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, N$ için yazabiliriz. Bu eşitlikte $k$ üzerinden $k = 1$ ‘ den $k = m \le N$ ’ ye kadar toplayıp ve $W_{j0} = 0,\ j = \overline{0, M}$ , $\vartheta_{1k} > 0$ , $k = \overline{1, N}$ koşullarından faydalanarak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}\right|^2 \le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|W_{jk}\right| \qquad \forall\ k = 1, 2, \ldots, N$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Elde edilen bu eşitsizliğe $\varepsilon -$Cauchy ve Cauchy$-$Bunyakovsky bağıntılarını uygularsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|W_{jm}\right|^2\right) \le 2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}\right|^2 + 2(T+1)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2 \quad , \ \forall\ m \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Elde edilen bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygulayarak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}\right|^2 \le c_2\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2 \qquad , \qquad \forall\ m \in \{1, 2, \ldots, N\} \tag{29}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(26)’da ifade ettiğimiz $F_{jk}$ fonksiyonunu değerlendirelim. $F_{jk}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$F_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + \vartheta_0(z)\psi + i\vartheta_1(z)\psi\right)dxd -$$

$$-i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk} + a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk} - a_j\psi_{jk} + \vartheta_{0k}\psi_{jk} + i\vartheta_{1k}\psi_{jk} \quad , \quad j = \overline{1, M-1}\,,\, k = \overline{1, N} \tag{30}$$

(30) olarak ifade ettiğimiz $F_{jk}$ fonksiyonunu aşağıdaki biçimde parçalara ayırabiliriz.

$$F_{jk} = F_{jk}{}^1 + F_{jk}{}^2 + F_{jk}{}^3 + F_{jk}{}^4 + F_{jk}{}^5 \ , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N} \tag{31}$$

$$F_{jk}{}^1 = \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}dxdz - i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk} \tag{32}$$

$$F_{jk}{}^2 = \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdz - a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk} \tag{33}$$

$$F_{jk}{}^{3}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\psi dxdz+a_j\psi_{jk} \tag{34}$$

$$F_{jk}{}^{4}=-\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\vartheta_0(z)\psi dxdz-\vartheta_{0k}\psi_{jk} \tag{35}$$

$$F_{jk}{}^{5}=-\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}i\vartheta_1(z)\psi dxdz-i\vartheta_{1k}\psi_{jk} \tag{36}$$

Bu terimlerin her birini ayrı ayrı değerlendirelim. $\psi_{jk}$ için (23) eşitliğini, $F_{jk}{}^{1}$ için (32) eşitliğini kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$F_{jk}{}^{1}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}dxdz-i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}=\frac{i}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}dxdz-$$

$$-\frac{1}{\tau^2 h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,z)dxdz-\int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,z)dxdz\right)=\frac{i}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}dxdz-$$

$$\text{-}i\,\frac{1}{\tau^2 h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{z-r}^{z}\frac{\partial\psi(\theta,z)}{\partial\theta}d\theta dxdz=\;i\,\frac{1}{\tau^2 h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-r}^{0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\psi(x,z+\theta)}{\partial\theta}\right)d\theta dxdz\;,$$

$$,\;j=\overline{1,M-1},k=\overline{2,N}$$

Bu eşitlikten ve Cauchy – Bunyakovsky bağıntısından faydalanarak

$$\left|F_{jk}{}^{1}\right|\le i\,\frac{1}{\tau^2 h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{-r}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}-\frac{\partial\psi(x,z+\theta)}{\partial\theta}\right|^2 d\theta dxdz\quad,\;j=\overline{1,M-1},k=\overline{2,N} \tag{37}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$F_{j1}^{\ 1}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\,\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}\,dxdz-\frac{i}{\tau}\left(\psi_{j1}-\psi_{j0}\right)$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\,\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}\,dxdz-\frac{1}{\tau h}\left(\frac{1}{\tau}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(x,z)dxdz-\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi\left(x,z_0\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}dxdz-\frac{1}{\tau^2 h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi\left(\theta,z\right)}{\partial\theta}\,d\theta dxdz$$

olarak elde ederiz. Buradan

$$\left|F_{j1}^{\ 1}\right|^2=\frac{4}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi\left(x,z\right)}{\partial z}\right|^2 dxdz\quad,\quad j=\overline{1,M-1} \tag{38}$$

eşitliğini kolaylıkla elde edebiliriz.

$F_{jk}^{\ 2}\ ,j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$ için benzer şekilde değerlendirme yapabiliriz.

$$F_{jk}^{\ 2}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} a_0\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dxdz-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}$$

$$F_{jk}^{\ 2}=\frac{1}{\tau h^3}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_0^h\int_{-h}^0\left(\frac{\partial^2\psi\left(x,z\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi\left(x+\eta+\xi,z\right)}{\partial x^2}\right)d\eta d\xi dxdz\ \ ,\ j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}.$$

Bu eşitlik üzerinden Cauchy – Bunyakovsky bağıntısını uygulayarak

$$\left|F_{jk}^{\ 2}\right|^2\le\frac{a_0^{\ 2}}{\tau h^3}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_0^h\int_{-h}^0\left|\frac{\partial^2\psi\left(x,z\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi\left(x+\eta+\xi,z\right)}{\partial x^2}\right|^2 d\eta d\xi dxdz, j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N} \tag{39}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$F_{1k}^{\ 2}\ ,\ k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonu içinde benzer şekilde

$$F_{1k}{}^{2}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdz-\frac{a_0}{h}(\delta_{\bar{x}}\psi_{2k}-\delta_{\bar{x}}\psi_{1k})$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(\frac{\partial^2\psi\left(x_1+\frac{h}{2},z\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi\left(x_1-\frac{h}{2},z\right)}{\partial x^2}\right)dz$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}d\xi dx-2\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\frac{\partial\psi(\xi,z)}{\partial\xi}d\xi dx\right]dz$$

$$=-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\psi(\eta,z)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdz-\frac{2a_0}{\tau h^3}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x_1+\frac{h}{2}}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{x}\int_{x_1-\frac{h}{2}}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\eta,z)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdz$$

yazabiliriz. Bu eşitliğe Cauchy – Bunyakovsky bağıntısını uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left|F_{1k}{}^{2}\right|^2\le\frac{16a_0{}^2}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,z)}{\partial x^2}\right|^2dxdz\quad,\ k=\overline{1,N}\qquad(40)$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine benzer şekilde bu işlemleri $F_{M-1k}{}^{2}$ , $k=\overline{1,N}$ için uygulayarak

$$\left|F_{M-1k}{}^{2}\right|^2\le\frac{16a_0{}^2}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_{M-1}-\frac{h}{2}}^{x_{M+1}+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,z)}{\partial x^2}\right|^2dxdz\quad,\ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}\qquad(41)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $F_{jk}{}^{3}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (34) formülünün yardımıyla

$$F_{jk}{}^{3}=a_j\psi_{jk}-\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)\psi dxdz=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}(a_j\psi_{jk}-a(x)\psi(x,z))dxdz$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(a_j-a(x)\right)\psi_{jk}dxdz+\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)(\psi_{jk}-\psi(x,z))dxdz\quad,j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$$

olarak yazabiliriz. $a_j$ , $j=\overline{1,M-1}$ fonksiyonu $(x_j-\frac{h}{2},x_j+\frac{h}{2})$ açık aralığının bir ortalaması olduğu için bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral ifadesi 0'a eşit olur. Buradan

$$F_{jk}{}^3=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)(\psi_{jk}-\psi(x,z))dxdz \ , \ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N} \tag{42}$$

integraline ulaşırız.

Şimdi bu integral ifadesini değerlendirmek için $\psi_{jk}-\psi(x,z)$ farkına bakalım.

$$\psi_{jk}-\psi(x,z)=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(\xi,\theta)-\psi(x,z)\right)d\xi d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\int_x^{\xi}\frac{\partial\psi(\eta,\theta)}{\partial\theta}d\eta+\int_x^{\xi}\frac{\partial\psi(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]d\xi d\theta \ , \ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N} \tag{43}$$

Bu eşitsizliği (42) formülünde dikkate alırsak

$$\left|F_{jk}{}^3\right|^2\le\frac{2\mu_0{}^2h}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right|^2dxdz+\frac{2\mu_0{}^2\tau}{h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}\right|^2dxdz$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N} \tag{44}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $F_{jk}{}^4$, $j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonunu için benzer şekilde bir değerlendirme yapabiliriz. (35) formülünün yardımıyla

$$F_{jk}{}^4=\vartheta_{1k}\psi_{jk}-\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\vartheta_0(z)\psi(\mathrm{x,z})dxdz=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}(\vartheta_{0k}\psi_{jk}-\vartheta_{0k}(z)\psi(\mathrm{x,z})dxdz$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}(\vartheta_{0k}-\vartheta_{0k}(z)\psi_{jk}dxdz+\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\vartheta_0(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,z)\right)dxdz$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca $\vartheta_{0k}$ , $j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonları $\vartheta_0(z)$ için $(z_{k-1},z_k)$ kümesi üzerinden bir ortalamasına eşittir. Ayrıca yukarıdaki $F_{jk}{}^4$ için ifade ettiğimiz formülün sağ tarafındaki ilk integral ifadesinin değeri sıfırdır. Buradan

$$F_{jk}{}^4=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\vartheta_0(z)\big(\psi_{jk}-\psi(x,z)\big)dxdz\ \ ,\ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadelerden faydalanarak $F_{jk}{}^4$ , $j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$ ifadesini değerlendirelim.

$\vartheta_0\in L_\infty(0,L)$ olduğunu dikkate alıp benzer şekilde Cauchy – Bunyakovsky bağıntısından faydalanarak

$$\left|F_{jk}{}^4\right|\le\frac{b_0}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\vartheta_0(z)\right|\left|\psi_{jk}-\psi(x,z)\right|dxdz\ \ ,\ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}\qquad(45)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Burada $\left|\vartheta_0(z)\right|\le b_0$ , $\forall z\in\overset{\circ}{(0,L)}$ olduğunu dikkate alırsak

$$\left|F_{jk}{}^4\right|\le\frac{b_0}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(x,z)-\psi_{jk}\right|dxdz\quad ,\ j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte (43) formülünü dikkate alırsak

$$\left|F_{jk}{}^4\right|\le\frac{2b_0{}^2}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right|^2dxdz+\frac{2b_0{}^2\tau}{h^2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}\right|^2dxdz$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N}\qquad(46)$$

eşitsizliğine ulaşırız.

$F_{jk}{}^{5}$ ağ fonksiyonunu değerlendirmek için (36) formülünün yardımıyla

$$F_{jk}{}^{5} = -i\vartheta_{1k}\psi_{jk} + \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} i\vartheta_1(z)\psi(\mathrm{x},\mathrm{z})dxdz = \frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(i\vartheta_{1k}\psi_{jk} - i\vartheta_1(z)\psi(x,z)\right)dxdz$$

$$= -\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\vartheta_{1k} - \vartheta_1(z)\right)\psi_{jk}dxdz - \frac{i}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi_{jk} - \psi(x,z)\right)dxdz\ ,\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu formülden yararlanarak $F_{jk}{}^{5}\ ,\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim.Burada kabullendiğimiz şartlardan $0 \le \vartheta_1(z) \le b_1$, $\forall z \in \overset{\circ}{(0,L)}$ ve (43) formülünü kullanırsak

$$\left|F_{jk}{}^{5}\right| \le \frac{2b_0{}^2 h}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right|^2 dxdz + \frac{2b_0{}^2\tau}{h^2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}\right|^2 dxdz$$

$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N} \tag{47}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Şimdi [35] çalışmasından bildiğimiz Fubini teoremine göre (36) formülünden

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial\psi(x,z+\theta)}{\partial z}\right|^2 dxdz\right)dz \tag{48}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Kuramsal temeller bölümünde yer alan 2.8 teoremine göre $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|\theta| \le \tau \le \delta$ için

$$\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial\psi(x,z+\theta)}{\partial z}\right|^2 dxdz\right)^{1/2} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle böyle $\tau$ 'lar için (48) formülünden

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^2 \le \omega_\tau^0$$

eşitsizliği yazılabilir. Eşitsizlikte yer alan $\omega_\tau{}^0 > 0$ ve $\tau \to 0$ için $\omega_\tau{}^0 \to 0$ 'a gider.

(38) formülünden

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^{2}\leq 4\int_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial\psi(.,z)}{\partial z}\right\|_{L_2(0,L)}dz\leq c_3\tau \tag{49}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu takdirde (48) ve (49) kestirimlerinin yardımıyla

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^{2}\leq\ \omega_{\tau}^{0}+c_3\tau \tag{50}$$

eşitsizliğine ulaşırız. (48) eşitsizliğinin elde edilmesine denk olarak (39) formülünden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|F_{jk}{}^{2}\right|^{2}\leq\omega_{h}^{1}\ . \tag{51}$$

Bu eşitsizlikte yer alan $\omega_h^1>0$ ve $h\to 0$ için $\omega_h^1\to 0$ ‘a gider.

(40) ve (41) eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^{2}\leq 16a_0{}^{2}\int_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial^2\psi(z,.)}{\partial z^2}\right\|_{L_2(0,L)}^{2}dz \tag{52}$$

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{M-1k}{}^{1}\right|^{2}\leq 16a_0{}^{2}\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2\psi(z,.)}{\partial z^2}\right\|_{L_2(0,L)}^{2}dz \tag{53}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Burada ölçülebilir fonksiyonlar için Lebesgue integralinin mutlak sürekliliğine göre $h\to 0$ için (52) ve (53) eşitsizliklerinin sağ tarafı 0’a yaklaşır. Yani;

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{1}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}{}^{1}\right|^{2}\leq\ \omega_h^2 \tag{54}$$

dir. (54) eşitsizliğinde yer alan $\omega_h^2>0$ , $h\to 0$ için $\omega_h^2\to 0$ olur. Bu takdirde (51) eşitsizliğinin yardımıyla;

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{2}\right|^{2}\leq\tilde{\omega}_{\tau}^{0} \tag{55}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\omega}_{\tau}^{0}=\omega_h^1+\omega_h^2$ ‘ dır.

Sonunda (44)-(47) formüllerinden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz;

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{3}\right|^{2} \le c_4(\tau^2+h^2) \tag{56}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{4}\right|^{2} \le c_5(\tau^2+h^2) \tag{57}$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}{}^{5}\right|^{2} \le c_6(\tau^2+h^2) \tag{58}$$

Böylelikle (50), (55), (56), (57), (58) eşitsizliklerini (30) eşitliğini kullanarak (31) formülünden

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}\right|^{2} \le c_7\left(\omega_\tau^0+\ \tilde{\omega}_\tau^0+\tau+h+\tau^2+h^2\right) \tag{59}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(59) eşitsizliğinde yer alan sabitler için $\beta_{\tau h}=\omega_\tau^0+\ \tilde{\omega}_\tau^0+\tau+h+\tau^2+h^2$ şeklinde gösterirsek ve $c_2=c_7$ için teoremi ispatlamış oluruz.

### 4.3. Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Şimdi fark yaklaşımlarının hatası için ispatlamış olduğumuz kararlılık kestiriminden faydalanarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını araştıralım. Bu amaçla öncelikle $J(\vartheta)$ ve $\mathrm{I}_n([\vartheta]_n$ fonksiyonellerinin farkını göz önüne alalım ve bu farkı kestirelim.

**Teorem 4.3.1:** $\forall\ \vartheta\in V$ ve $\forall\ [\vartheta]_n\in V_n$ için

$$\left|J(\vartheta)-\mathrm{I}_n\left([\vartheta]_n\right)\right|\le c_8\left(\sqrt{\beta_{\tau h}}+\left\|Q_n(\vartheta)-[\vartheta]_n\right\|\right) \tag{60}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_8>0$ sayısı $\tau$ ve $h$' a bağımlı değildir ve $\beta_{\tau h}>0$ , $h\to 0$ , $\tau\to 0$ için $\beta_{\tau h}\to 0$ olur.

**İspat:** $Q_n : V \to V_n$ , $Q_n(\vartheta) = (w_1, w_2, w_3, ..., w_{M-1})$ olarak bir $Q_n$ operatörünü tanımlayalım.

$$\left\| Q_n(\vartheta) - [\vartheta]_n \right\| = \left( \tau \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=1}^{N} \left| w_{pk} - \vartheta_{pk} \right|^2 \right)^{1/2} ,$$

$$w_{pk} = \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \vartheta_p(t)\, dt \ , \ k = \overline{1, N} \quad \text{'dir.}$$

(1)-(4) formüllerini kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$J(\vartheta) - \mathrm{I}_n\left([\vartheta]_n\right) = \int_0^l \left| \psi(z, L) - y(z) \right|^2 dz - h \sum_{j=1}^{M-1} \left| \phi_{jN} - y_j \right|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left( \left| \psi(z, L) - y(z) \right| + \left| \phi_{jN} - y_j \right| \right) \times \left( \left| \psi(z, L) - y(z) \right| - \left| \phi_{jN} - y_j \right| \right) dz$$

Burada $y \in W_2^1(0, l)$ olduğunu dikkate alırsak ve (16) kestirimini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left| J(\vartheta) - \mathrm{I}_n\left([\vartheta]_n\right) \right| \le c_9 \left[ \left( \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \psi(z, L) - \phi_{jN} \right|^2 dz \right)^{1/2} + \left( \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| y(z) - y_j \right|^2 dz \right)^{1/2} \right]$$

$$J_1 = \left( \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| \psi(z, L) - \phi_{jN} \right|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$J_2 = \left( \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left| y(z) - y_j \right|^2 dz \right)^{1/2}$$

olarak gösterelim. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left| J(\vartheta) - \mathrm{I}_n\left([\vartheta]_n\right) \right| \le c_9 \left( J_1 + J_2 \right) \tag{61}$$

şeklinde ifade edelim.Burada $c_9 > 0$ sayısı $\tau$ ve $h$ ‘ tan bağımsızdır.

$J_1$ için olan formülü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$J_1^{\,2}=\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}+\psi_{jN}-\phi_{jN}\right|^2 dz$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}\right|^2 dz+2h\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_{jN}-\phi_{jN}\right|^2 dz \tag{62}$$

(62) eşitsizliğini incelemek için yukarıdaki gösterimlere benzer şekilde

$$J_{11}=\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}\right|^2 dz$$

$$J_{12}=h\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi_{jN}-\phi_{jN}\right|^2 dz$$

olarak ifade edelim.

$W_{jN}=\psi_{jN}-\phi_{jN}$ olduğundan (27) kestirimine göre,

$$J_{12}\leq c_{10}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}}+\left\|Q_n(\vartheta)-[\vartheta]_n\right\|^2\right) \tag{63}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{10}>0$ sayısı $\tau$ ve $h$'a bağımlı değildir.

$J_{11}$ için olan formülü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\psi(z,L)-\psi_{jN}=\psi(z,L)-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\psi(\xi,\theta)\,d\xi d\theta=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(z,L)-\psi(\xi,\theta)\right)d\xi d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\psi(z,L)-\psi(z,\theta)+\psi(z,\theta)-\psi(\xi,\theta)\right)d\xi d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\int_{\theta}^{t_N}\frac{\partial\psi(z,\eta)}{\partial\eta}d\eta+\int_{\xi}^{t_N}\frac{\partial\psi(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}d\gamma\right)d\xi d\theta$$

Buradan da

$$\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}\right| \le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left(\int_{\theta}^{t_N}\frac{\partial\psi(z,\eta)}{\partial\eta}d\theta+\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\frac{\partial\psi(\gamma,\eta)}{\partial\gamma}d\gamma\right)d\xi d\theta$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\left|\frac{\partial\psi(z,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta d\theta+\frac{1}{\tau}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\theta\right.$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy – Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}\right| \le \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(z,\eta)}{\partial\eta}\right|d\xi d\theta\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bu eşitsizliği $J_1$ için olan formülde dikkate alırsak;

$$J_1 = 2\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\psi(z,L)-\psi_{jN}\right|^2 dz$$

$$\le 4\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left[\frac{\tau}{h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(z,\eta)}{\partial\eta}\right|d\xi d\eta+\frac{\tau}{h}\int_{t_{N-1}}^{t_N}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}\right|d\gamma d\theta\right]dz$$

$$\le 4\tau^2 max_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+4h^2 max_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan da

$$J_1 \le c_{11}\left(\tau^2+h^2\right) \tag{64}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur. Bu eşitsizlikte $c_{11}>0$ sayısı $\tau$ ve $h$ ‘ a bağlı değildir.

Şimdi $J_2$ terimini kestirelim. $y_j$ için olan formülü ve $y\in W_2^1(0,l)$ olduğu göz önüne alınırsak;

$$J_2^{\,2} = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| y(z) - y_j \right|^2 d = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left( y(z) - y(\xi) \right) d\xi \right|^2 dz$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{\xi}^{x} \frac{\partial y(\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi \right|^2 dx \le \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} [\frac{1}{h} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial y(\eta)}{\partial \eta} \right| d\eta d\xi]^2 dz$$

$$\le h^2 \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial y(z)}{\partial z} \right|^2 dz$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$J_2^{\,2} \le c_{12} h^2 \tag{65}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Bu eşitsizlikte $c_{12} > 0$ sayısı $\tau$ ve $h$ ‘ a bağlı değildir.

Böylece (63)-(65) eşitsizliklerini kullanarak $\beta_{\tau h}$ için olan ifadeyi dikkate alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını ispatlayalım. Bu amaçla iki yardımcı lemma ispatlayalım.

**Lemma 4.3.2:** Kabul edelim ki Teorem 3’ün koşulları gerçekleşmiş olsun. Ayrıca $Q_n$ operatörünü için

$$Q_n : V \to V_n \quad , \; Q_n(\vartheta) = \left( w_{01}, w_{02}, w_{03}, \ldots . w_{0N}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots . w_{1N} \right) \; , \; w = \left( w_0, w_1 \right)$$

olsun. Bu takdirde $Q_n(\vartheta) \in V_n$ olduğu ve

$$\left| J(\vartheta) - \mathrm{I}_n\left( Q_n(\vartheta) \right) \right| \le c_{13} \sqrt{\beta_{\tau h}} \tag{66}$$

kestirimi $\forall \; n = 1, 2, 3, \ldots$ için geçerlidir.

**İspat:** Varsayalım ki $\vartheta \in V$ herhangi bir kontol olsun. Bu kontrol üzerinde

$$Q_n(\vartheta) = \left( w_{01}, w_{02}, w_{03}, \ldots . w_{0N}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, \ldots . w_{1N} \right) \; , \; w = \left( w_0, w_1 \right)$$

$$w_{pk}=\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_p(t)\,dt \quad , \text{ p=0,1 }, \; k=\overline{1,N} \qquad \text{‘dir.}$$

tanımlamalarını dikkate alalım. Bu formülü kullanarak

$$w_{0k}=\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_0(t)\,dt \geq -\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}b_0dt=-b_0 \quad , \; k=\overline{1,N} \tag{67}$$

$$w_{0k}=\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_0(t)\,dt \leq \frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}b_0dt=b_0 \quad , \; k=\overline{1,N} \tag{68}$$

eşitsizlikleri şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizliklerden,

$$-b_0\leq w_{0k}\leq b_0 \quad , \; k=\overline{1,N}$$

elde edilir. Yani

$$|w_{0k}|\leq b_0 \quad , \; k=\overline{1,N}$$

’dir. Aynı şekilde

$$0\leq w_{1k}\leq b_1 \quad , \; k=\overline{1,N}$$

elde ederiz. Buradan kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\delta_{\bar{z}}w_{pk}=\frac{w_{pk}-w_{pk-1}}{\tau}=\left[\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_p(t)\,dt-\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}}\vartheta_p(t)\,dt\right]=\frac{1}{\tau^2}\left[\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_p(t)\,dt-\int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}}\vartheta_p(t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\left[\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_p(t)-\vartheta_p(t-\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{\tau^2}\left[\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(\int_{t-\tau}^{\tau}\frac{dv_p(\xi)}{\partial\xi}\partial\xi\right)dt\right] \quad , \; p=0{,}1 \; , k=\overline{2,N} \tag{69}$$

eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\left|\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\right|\leq\frac{1}{\tau^2}\left[\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(\int_{t-\tau}^{\tau}\left|\frac{dv_p(\xi)}{d\xi}\right|d\xi\right)dt\right]\leq\frac{1}{\tau^2}\left[\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(\int_{t-\tau}^{\tau}b_pd\xi\right)d\tau\right]\leq\frac{\tau^2}{\tau^2}d_p=d_p \; , p=0{,}1 \; ,k=\overline{2,N} \; ,$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan da;

$$\left|\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\right|\leq d_p \quad , \; p=0{,}1 \quad k=\overline{2,N}$$

eşitsizliğini buluruz. Ayrıca $V_n$ kümesi için olan tanımı kullanırsak $Q_n(\vartheta)\in V_n$ olur. Bu takdirde $[\vartheta]_n\in V_n$ diskrit kontrolünü alıp teorem 4.3.1’ i ispatlamış olursak Lemma’nın geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

Kabul edelim ki $P_n$ operatörü aşağıdaki formülle tanımlanmış olsun.

$$P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)=\tilde{\vartheta}(z)=\left(\tilde{\vartheta}_0(z),\tilde{\vartheta}_1(z)\right) \tag{70}$$

Burada

$$\tilde{\vartheta}_p(z)=\begin{cases}\vartheta_{pk}+\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\left(z-z_k\right) \ , \ z_{k-1}\le z\le z_k, k=\overline{2,N} \\ \vartheta_{p1} \qquad , \ 0=\ z_0\le z\le z_1\end{cases} \quad , \ p=0,1\text{‘dir.} \tag{71}$$

**Lemma 4.3.3:** Kabul edelim ki Teorem 3’ün koşulları sağlansın. Ayrıca $P_n$ operatörü (70)’de ifade ettiğimiz gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde

$$P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\in V \quad \text{ve} \quad \left|J\left(P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right)-I_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right|\le c_{14}\sqrt{\beta_{\tau h}} \tag{72}$$

kestirimi geçerlidir.

**İspat:** Kabul edelim ki , $\forall\ \left[\vartheta\right]_n\in V_n$ olsun. Ayrıca $P_n$ operatörü için $P_n:V_n\to V$ şeklinde olsun.Burada $\forall\ \left[\vartheta\right]_n\in V_n$ için $P_n=P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)$ operatörü (70)-(71) şeklinde ifade etmiştik. Ayrıca

$$-b_0\le\vartheta_{0k}\le b_0 \quad , \quad k=\overline{1,N} \ \text{‘dir} \tag{73}$$

Bu eşitsizliği (68) de kullanırsak

$$\tilde{\vartheta}_0\ (z)=\vartheta_{01} \ \ , \ \ z_0\le z\le z_1$$

elde ederiz. Bu durumda

$$-b_0\le\tilde{\vartheta}_0\ (z)\le b_0 \ \ , \ \ 0=z_0\le z\le z_1 \tag{74}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi $z_0\le z\le z_1$ , $k=\overline{2,N}$ için (70)-(71)’ den aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\tilde{\vartheta}_0\left(\mathrm{z}\right)=\vartheta_{0k}+\delta_{\bar{z}}\vartheta_{0k}(z-z_k)=(1-\frac{z-z_k}{\tau})\vartheta_{0k}+\frac{z-z_k}{\tau}\vartheta_{0k-1} \ , \ z_0\le z\le z_1 \ , \ k=\overline{2,N} \tag{75}$$

Eğer $\alpha_k=\alpha_k(z)=\dfrac{z-z_k}{\tau}$ olarak eşitlersek $\forall\ z\in\left[z_{k-1},z_k\right]$ için $\alpha_k=\alpha_k(z)\in\left[0,1\right]$ olur.

(73) şartından yararlanırsak (75) 'den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\tilde{\vartheta}_0(z) = \left(1-\alpha_k(z)\right)\vartheta_{0k} + \alpha_k(z)\vartheta_{0k-1} \le \left(1-\alpha_k(z)\right)b_0 + \alpha_k(z)b_0 \le b_0 \quad ,$$

$$z_{k-1} \le z \le z_k \;,\; k = \overline{2,N} \;. \tag{76}$$

Buradan da kolaylıkla

$$\tilde{\vartheta}_0(z) = \left(1-\alpha_k(z)\right)\vartheta_{0k} + \alpha_k(z)\vartheta_{0k-1} \ge \left(1-\alpha_k(z)\right)\left(-b_0\right) + \alpha_k(z)\left(-b_0\right) = -b_0 \quad ,$$

$$z_{k-1} \le z \le z_k \;,\; k = \overline{2,N} \;, \tag{77}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Böylelikle (70),(72) ve (73)'ü birleştirirse

$$-b_0 \le \tilde{\vartheta}_0(z) \le b_0 \quad , \; z \in (0,L) \tag{78}$$

eşitsizliğini buluruz.

Aynı şekilde

$$0 \le \tilde{\vartheta}_1(z) \le b_1 \quad , \; z \in (0,L) \tag{79}$$

eşitsizliğini elde ederiz

$\tilde{\vartheta}_0(z)$ fonksiyonu için genelleştirilmiş türevin tanımını kullanırsak;

$$\frac{d\tilde{\vartheta}_p(z)}{dz} = \begin{cases} \delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}, & z_{k-1} \le z \le z_k \\ 0 & ,0 = z_0 \le z \le z_1 \end{cases} \quad , \quad p = 0,1, \quad k = \overline{2,N} \tag{80}$$

eşitliğini buluruz. Gerçekten $\forall \; g \in [0,L]$ , $g(0) = g(L) = 0$ için

$$=\sum_{k=2}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}(\vartheta_{pk}+\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}\left(z-z_k\right)\frac{dg\left(\mathrm{z}\right)}{dz}dz+\int_{z_0}^{z_1}\vartheta_{p1}\left(\mathrm{z}\right)\frac{dg\left(\mathrm{z}\right)}{dz}dz$$

$$=-\sum_{k=2}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}g\left(\mathrm{z}\right)dz+\sum_{k=2}^{N}(\vartheta_{pk}+\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}\left(z-z_k\right)g\left(\mathrm{z}\right))\Bigg|_{z=z_{k-1}}^{z=z_k}$$

$$-\int_{z_0}^{z_1}0g\left(\mathrm{z}\right)dz=+g\left(\mathrm{z}\right)\Bigg|_{z=z_0=0}^{z=z_1}$$

$$-\sum_{k=2}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}g\left(\mathrm{z}\right)dz-\int_{z_0}^{z_1}0g\left(\mathrm{z}\right)dz+\sum_{k=2}^{N}\left[\vartheta_{pk}g\left(z_k\right)-\vartheta_{pk-1}g\left(z_{k-1}\right)\right]+\vartheta_{p1}g\left(z_1\right)$$

$$=-\sum_{k=2}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}g\left(\mathrm{z}\right)dz-\int_{z_0}^{z_1}0g\left(\mathrm{z}\right)dz+\vartheta_{p1}g\left(z_0\right)\qquad p=0,1,\quad k=\overline{2,N}$$

$g\left(z_N\right)=g(L)=0$ , $g(z_0)=g(0)=0$ olduğundan;

$$\int_0^L\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)\frac{dg\left(\mathrm{z}\right)}{dz}=-\sum_{k=2}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}g\left(\mathrm{z}\right)dz-\int_{z_0}^{z_1}0g\left(\mathrm{z}\right)dz\quad ,\ p=0,1$$

formülünden (80) formülünü elde ederiz.

$$\frac{d\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)}{dz}=0\qquad ,p=0,1\ ,\ \ z_0\le z\le z_1\qquad \text{olduğundan}$$

$$\left|\frac{d\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)}{dz}\right|\le d_p\quad ,p=(0,1)\ \ ,\ z\in\left[z_0,z_1\right]\quad \text{‘dir.}\qquad (81)$$

Diğer taraftan,

$$\frac{d\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)}{dz}=\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}\quad ,\quad z_{k-1}\le z\le z_k\ \ ,\ k=\overline{2,N}\ \ ,\ \ p=(0,1)$$

olduğundan

$$\left|\frac{d\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)}{dz}\right|=\left|\delta_{\bar z}\vartheta_{pk}\right|\le d_p\quad ,p=(0,1)\ ,\ z\in\left[z_{k-1},z_k\right]\ \ ,\ \ k=\overline{2,N}\qquad (82)$$

(80) ve (81) eşitsizliklerini birleştirelim.

$$\left|\frac{d\tilde{\vartheta}_p\left(\mathrm{z}\right)}{dz}\right|\le d_p\ \ ,\ z\in\left[0,L\right]\ \ ,\ p=(0,1)\qquad (83)$$

buluruz. Böylelikle (78), (79) ve (83) bağıntılarından faydalanarak $V$ kümesinin tanımına göre $\tilde{\vartheta} \in V$ ' dir. Yani

$$\tilde{\vartheta}(\mathrm{z}) = P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right) \in V \quad , \quad \forall \quad \left[\vartheta\right]_n \in V_n \tag{84}$$

Buradaki $\vartheta \in V$ kontrolünün yerine $\tilde{\vartheta}(\mathrm{z}) = P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right) \in V$ kontrolünü alıp teorem 4.3.1'i ispatlamış olursak

$$\left| J\left(P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right) - \mathrm{I}_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right| \le c_{16}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \left\| Q_n\left(P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right) - \left[\vartheta\right]_n\right\|\right) \tag{85}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\left\| Q_n\left(P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right) - \left[\vartheta\right]_n\right\|$ normuna bakalım.

$$\left\| Q_n\left(P_n\left(\left[\vartheta\right]_n\right)\right) - \left[\vartheta\right]_n\right\|^2 = \left\| Q_n\left(\tilde{\vartheta}\right) - \left[\vartheta\right]_n\right\|^2 = \tau \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=1}^{N}\left|\tilde{\vartheta}_{pk} - \vartheta_{pk}\right|^2$$

$$= \tau \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\vartheta_p\left(z\right)dz - \vartheta_{pk}\right|^2$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}(\vartheta_{pk} + \delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\left(z - z_k\right))dz - \vartheta_{pk}\right|^2 + \tau\left|\frac{1}{\tau}\int_{z_0}^{z_1}\vartheta_{p1}dz - \vartheta_{p1}\right|\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\left(z - z_k\right)dz\right|^2\right) = \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left(z - z_k\right)dz\right|^2\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}\left|\frac{\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}}{\tau}\left(\frac{\left(z - z_k\right)^2}{2}\right)\right|_{z = z_{k-1}}^{z = z_k}\right|^2\right) = \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}\left|\delta_{\bar{z}}\vartheta_{pk}\tau\right|^2\right) \le \sum_{p=0}^{1}\tau\left(\sum_{k=2}^{N}d_p^{\,2}\frac{\tau^2}{4}\right)$$

$$= \frac{L(d_0^{\,2} + d_1^{\,2})\tau^2}{4}$$

Bu bağıntıdan ve (85)' de elde ettğimiz kestirimden teoremin ispatını elde ederiz.

Sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını göstermek için [36] çalışmasından bildiğimiz yöntemi kullanarak göstermeye çalışalım.

**Teorem 4.3.4:** Kabul edelim ki yukarıda ispatladığımız Lemma1 ve Lemma2'nin şartları sağlanmış olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\vartheta^* \in V$ elemanı (1)-(4) probleminin bir çözümü ve $[\vartheta]_n^* \in V_n$ elemanı (8)-(11) probleminin bir çözümü olsun. Yani

$$J_* = \inf_{\vartheta \in V} J(\vartheta) = J(\vartheta^*), \qquad I_{n*} = \inf_{\vartheta \in V} I_n([\vartheta]_n) = I_n\left([\vartheta]_n^*\right)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde (1)-(4) probleminin sonlu farklı aynısı olan (8)-(11) problemi, (1)-(4) probleminin yaklaşımıdır. Yani

$$\lim_{n \to \infty} I_{n*} = J_*$$

şartı sağlanır ve

$$|I_{n*} - J_*| \le c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \tag{86}$$

eşitsizliği $n = 1, 2, 3, ...$ için geçerlidir.

**İspat :** Bu teoremin ispatında [36] çalışmasındaki yöntemden yararlanacağız. Teoremde ifade edildiğine göre $\vartheta^* \in V$ kontrolü (1)-(4) probleminin bir çözümüdür. Lemma1' in şartı sağlandığında

$$Q_n\left(\vartheta^*\right) \in V_n \quad \text{ve} \quad \left|I_n\left(Q_n\left(\vartheta^*\right)\right) - J\left(\vartheta^*\right)\right| \le c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots \text{ 'dir.}$$

Bu takdirde bu kestirimden faydalanarak

$$I_{n*} \le I_n\left(Q_n\left(\vartheta^*\right)\right) \le J\left(\vartheta^*\right) + c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} = J_* + c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

kestirimini elde edebiliriz. Bu kestirimden de

$$I_{n*} - J_* \le c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \qquad , \; n = 1, 2, 3, \ldots \text{ 'dir.} \tag{87}$$

Teoremde kabul ettiğimiz (8)-(11) probleminin bir çözümü $[\vartheta]_n^* \in V_n$ olsun.Bu durumda lemma2' ye göre $P_n\left([\vartheta]_n^*\right) \in V$ 'dir. Ayrıca

$$\left|J\left(P_n\left([\vartheta]_n^*\right)\right) - I_n\left([\vartheta]_n^*\right)\right| \le c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

eşitsizliği $n = 1, 2, 3, \ldots$ için sağlanır. Buradan aşağıdaki da

$$J_* \le J\left(P_n\left([\vartheta]_n^*\right)\right) \le I_n\left([\vartheta]_n^*\right) + c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} = I_{n*} + c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots \text{'dir}$$

Buna göre sonuncu eşitsizlikten

$$I_{n*} - J_* \geq -c_{17}\sqrt{\beta_{\tau h}} \tag{88}$$

eşitsizliğinin $n = 1, 2, 3, \ldots$ için sağlanmış olduğunu buluruz. (87) ve (88) eşitsizliklerinin yardımıyla (86) eşitsizliğinin daima sağlanacağını söyleyebiliriz. Burada

$\tau = \tau_n$ , $h = h_n$ ile gösterip ve $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$,

$\beta_{\tau h}$ bağıntısı üzerinden (88) de $n \to \infty$ için limiti hesaplarsak teoremin ispatını elde ederiz.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma kapsamında kuazi optiğin durgun denklemi için bilinmeyen $\vartheta_0(z)$ ve $\vartheta_1(z)$ katsayılarının bulunmasına ait olan bir ters problemin varyasyon tanımı olan bir identifikasyon problemi ele alındı.

Söylemek gerekir ki kuazi optiğin durgun denklemi için identifikasyon problemleri önceden farklı araştırmacılar tarafından [4-9,11-13,16-19,23,25,26,29] çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmaların çoğunda aranan katsayılar $x$ değişkenine bağlı olmuştur. Problemde denklemin katsayıları $\vartheta_0$ ve $\vartheta_1$ fonksiyonları $z$ değişkeninin fonksiyonu olması durumunda identifikasyon problemleri az incelenmiştir. Benzer problem bir optimal kontrol problemi olarak [29] çalışmasında ele alınmış ve burada da kontroller $z$ değişkeninin fonksiyonları olup kendisi ve türevleri karesel integrallenebilir fonksiyonlar sınıfından ve fonksiyonlar lions fonksiyoneli biçimindedir. Fonksiyonlar sınıfı geniş olmasına rağmen kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu fark yaklaşımı ve fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ek şartlar altında ispatlanabilmiştir.

Bu çalışmada aranan fonksiyonlar ve onların türevleri ölçülebilir sınırlı foksiyonlar sınıfından seçilse de sonlu fark yaklaşımlarının yakınsaklığının ispatı için fazla ek şartlar kullanılmamıştır. Diğer taraftan bu çalışmada incelenen problem konulma açısından bir önceki çalışmalardan ciddi bir biçimde farklılık oluşturmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada elde edilen sonuçlar gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem taşımaktadır. Bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar önceki çalışma sonuçlarıyla örtüşmez.

## 6. KAYNAKLAR

[1] Butkovskiy, A.G., Samoilenko Y.I., ‘‘ Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü’’ , M.Nauka-1984-S. 256, Moscow. (Rusça)

[2] Landau, L.D., Lifşhitz, E.M., ‘‘Kuantum Mekaniği’’, Cilt 3-m-1963-s. 702 (Rusça).

[3] Vorontsov, M.A., Shmalgauzen, V.I., ‘‘ Adaptiv optiğin prensipleri’’, Nauka-1984, 336 s, Moskova. (Rusça).

[4] Aksoy, N.Y., Yagubov, G., and Yıldız, B. (2012) ‘‘The finite difference approximations of the optimal control problem for non-linear Schrodinger equation’’, Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol, No. 3, pp. 158-183

[5] Yetiskin, H., “Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Farklar Yaklaşımı”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

[6] Deveci, E., “Schrödinger Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Farklar Yöntemi İle Çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.

[7] Iskenderov A.D., Yagubov G.Y., Ibrahimov N.S., “About an estimate of convergence of difference approximations by the functional in the identification problem for the non stationary equation of quasi optics”, Abstracts of the XIX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2012), pp.118-120. Mukachevo, Ukraine, April 23-27 2012.

[8] Mahmudov, N.M., “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. 1997, (Rusça).

[9] Ibrahimov N.S., “The convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics”, Scientific Proceedings of the Azerbaijan SSR. tehn. Univ. Ser. Basic Sciences, № 4, p.54-60. 2010, (Rusça).

[10] Yagub G., Ibrahimov N.S., Yildirim Aksoy, N., Deveci O., “The solution with difference method of on optimal control problem for nonstationary quasi-optics

equation", Abstracts of the XXI International Conference Problems of Decision Making under, Uncertainties (PDMU-2013), Skhidnytsia, Ukraine, pp.68-71. May 13-17 , 2013.

[11] Toyoğlu, F., Yagubov, G., ‘‘Numerical solution of an optimal control problem governed by two dimensional Schrödinger equation’’. Applied and Computation Mathematics. Vol.4, No. 2, pp. 30-38. doi:10.11648/j. acm. 20150402.11

[12] Yagubov, G.Ya., "Kuazi Lineer Schrodinger Denklemi'nin Katsayısı ile Optimal Kontrol", Bilimler Doktoru Tezi, 318 s., Kiev, 1994,(Rusça).

[13] Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., "On an optimal control problem", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 88, pp. 275–287. 1997.

[14] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., ‘‘Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi’’, DAN SSSR-1988-c.303-No:5- s.1044-1048 (Rusça)

[15] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Museyeva, M.A.,‘‘Kuantum Potansiyellerinin İdentifikasyonu’’, Bakü, Çaşıoğlu Yayıncılık, 2012, 552 s (Rusça).

[16] Mahmudov, N.M., ‘‘Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü’’, Azerbaycan Bilimleri Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri -1997-c. 7. s. 392 (Rusça).

[17] Patapov, M.M., Razgulin, A.V., Şameeva, T.Y., ‘‘Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyon’’, Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernatik)1987. No:1-s. 8-13 (Rusça).

[18] Silla, N.,‘‘Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü’’, Doktora tezi, Bakü, 1991.

[19] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü’’, Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri:Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt:16, No:1-2, S.46-51 (Rusça).

[20] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., ‘‘Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü’’, Otomatik ve Telemekanik. 1989, no:12-s. 27-38 (Rusça).

[21] İskenderov, A.D., ‘‘Durgun Olmayan Schrödinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması’’, Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri, Bakü, 2001- s. 6-36 (Rusça).

[22] İskenderov, A.D., Mahmudov, N.M., ‘‘Kuantum Mekanik Sistemler İçin Lions Kriterli Optimal Kontrol’’,AMEA’nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-1995, c.16, No:5-6-30-35 (Rusça).

[23] Razguin, A.V., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları’’, Moskova Devlet Üniversitesi nin Haberleri. Seri:15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1998 No:2 s.28-33 (Rusça)

[24] Yagubov, G.YA., Museyeva, M.A., ‘‘Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin İdendifikasyon Problemi Hakkında Diferansiyel Denklemler’’, 1997, c.33, No:12 s.1691-1698 (Rusça)

[25] İbrahimov, N.S. ,”A numerical method for solving the problem of identification of linear time-dependent equation of quasi optics”, Journal of Computational and Applied Mathematics , Kiev. Zap them. Shevchenko, No:2(101),p.44-59.2010 (Rusça)

[26] İbrahimov, N.S. ,”On the order of accuracy of the difference method for solving initial value problems for the non-stationary equation of quasi optics”, Journal of Qafqaz University Mathematics and Computer Science, Vol 1, No:31 , p.55-68. 2011, (Rusça)

[27] Dın Nıo Hao, Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü / Optimatik ve Telemekanik. 1986, no 2,s.1420 (Rusça)

[28] Koçak,Y.,”Kuazi optiğin durgun denklemi için bir optimal kontrol probleminin çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010

[29] Koçak,Y.,”Quasi optiğin durgun denklemi için lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ve onun nümerik çözümü”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013

[30] Buyankara,M., “Durgun Kuazi-Optik Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Probleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü ve Yakınsaklığı”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.

[31] Senger, O., “Lineer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, , Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.
[32] Vargün, M., ”Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümü” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.
[33] Demirci, Z., ”Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013.
[34] Çelik, D., ”Kompleks Potansiyelli Lineer Schrödinger Denklemi Ġçin BaĢlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2014.
[35] Mikhailov,V.P 1983. ”Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler” Nauka,424 s. Moskova.
[36] Vasilyev, F.P., ‘‘ Extremal Problemlerin Çözüm Metodları’’, M.Nauka 1981-s.400 (Rusça)
[37] Ladyzenskaja, O. A. , Solonnikov, V. A. , Ural’ceva, N. N. , 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc.,646 s, ABD.(ing)

# ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Arif SARIOĞLAN
Doğum Yeri : Feke/ADANA
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise : Feke LİSESİ(2002)

Lisans : Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü(2008)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Uygulamalı Matematik

Çalıştığı kurumlar:

Antalya Final Dergisi Dershaneleri(2008)

Feke Lisesi(2009)

EGM (2010-2016)