T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TELİN TİTREŞİM DENKLEMİ İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİN İYİ KONULMASI VE ONUN ÇÖZÜM ALGORİTMASI

AYSUN POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. GABİL YAGUB

AĞUSTOS - 2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi **Aysun Polat** ın **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmalığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "**Telin Titreşim Denklemi İçin Bir Optimal Kontrol Problemin İyi Konulması ve Onun Çözüm Algoritması**'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

24/08/2016

Adı ve Soyadı: **İmza**

Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Üye :Yrd. Doç. Dr. Gökçe Dilek KÜÇÜK

Üye :Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun … /… /2016 gün ve …………sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…………………..

EnstitüMüdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada Telin titreşim Denklemi için bir optimal kontrol probleminin iyi konulması ve onun çözüm algoritması ele alınmıştır. Ele alınan optimal kontrol probleminin varlık ve tekliği, amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve çözüm için varyasyon eşitsizliği biçiminde bir gerek ve yeter şart elde edilmiştir.

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışman hocama şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2016 AYSUN POLAT

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, Telin Titreşim Denklemi için Bir Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Çözüm Algoritması ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir bilgi verildikten sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan optimal kontrol probleminin oluşturulması için gerekli olan sınır değer problemi, amaç fonksiyoneli ve olası kontroller kümesi verilmiştir. Bu çalışmada olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Dördüncü bölümde, ilk olarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş, amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu elde edilmiş ve gradyenti bulunmuştur. Son olarak optimal kontrol probleminin çözümü için gradyent yöntemi verilmiştir. Beşinci bölümde ise bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2016, 35 Sayfa

Anahtar kelimeler: Telin titreşim denklemi, Optimal kontrol, Amaç fonksiyoneli, Ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı.

ABSTRACT

In this thesis well posed of an optimal control problem for wave equation and its solutions algorithm is considered. In the first chapter, after giving a general information about the optimal control theory, in the second chapter,some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter, a boundary-value problem, the cost functional and the set of problem controls required for the constitution of the considered optimal control problem is given. In this thesis, the set of problem control is a space of measurable square integrable functions. In the fourth chapter, firstly, the existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem is shown, secondly, Frechet differentiability of the cost functional and its gradient is obtained and its obtained, gradient method for solution of optimal control problem is given. In the fifth chapter, it is emphasized that this thesis is different from the previous studies.

2016, 35 Pages

Keywords: Wave equation , Optimal control, Cost functional, The space of measurable square integrable functions.

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Herhangi
$\in$	Eleman
$\exists$	Öyle ki
$x \in X$	$x.X$ 'in elemanıdır
$\subset$	Alt küme
$\leq$	Tam sıralama bağıntısı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayıla kümesi
$l > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$\left(X, \lVert . \rVert\right)$	Normlu uzay
$\left(X, \langle .,. \rangle\right)$	İç çarpım uzayı
$\rightarrow$	Yakınsama
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\lVert X \rVert$	X ' in normu
$\Omega = (0,l) \times (0,T)$	Verilen bölge

1.GİRİŞ

Telin titreşim denklemiyle tanımlanan sistemler için optimal kontrol problemleri dağılmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemlerinden olup titreşim ve dalga süreçlerinin öğrenilmesi zamanı ortaya çıkar. Bu nedenle bu tür problemlerin incelenmesi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır. Bu tez çalışması telin titreşim denklemi için bir optimal kontrol probleminin öğrenilmesi üzerinedir. Çalışmada amaç tanımlanan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini incelemek amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu ispatlamak ve fonksiyonelin gradyentinden yararlanarak problemin çözümü için gerek ve yeterli şart elde etmektir. Bunların yanı sıra söz konusu optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma oluşturmaktır.

Söylemek gerekir ki telin titreşim denklemi veya dalga denklemleri için optimal kontrol problemleri önceden çeşitli yazarlarca incelenmiş problemin iyi konulması ve çözümü için gerek ve yeterli şartlara ait çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında incelenen problem kullanılan amaç fonksiyoneli açısından ciddi bir biçimde bir önceki çalışmalardan farklılık oluşturmaktadır.

Söylemek gerekir ki tezde incelenen (1)-(4) biçiminde optimal kontrol problemleri $\beta \leq 0$ için önceden $[2-22]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu optimal kontrol probleminde $\beta > 0$ olduğundan bu problemi incelemek bilimsel önem arz etmektedir. Çünkü $\alpha = 0$ olduğunda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli konveks fonksiyonel olamamaktadır. Diğer taraftan bir önceki çalışmalardan farklı olarak burada olası kontroller kümesinin karesel integrallenen fonksiyonlar uzayı olmasıdır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan uzayların ve Sobolev uzaylarının tanımları verilmiştir.

3. bölümde Telin Titreşim denklemi için bir optimal kontrol problemi göz önüne alınmıştır. Bu problemin oluşturulması için gerekli olan şartlar, sınır değer problemi, amaç fonksiyoneli ve olası kontroller kümesi verilmiştir.

4. bölümde ele alınan optimal kontrol probleminin iyiy konulması araştırılmıştır. Bu amaçla 4.1. bölümünde optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

4.2. bölümünde amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca amaç fonksiyonelinin gradyenti için bir formül elde edilmiştir.

4.3. bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeterli şart elde edilmiştir.

4.4. bölümünde ise optimal kontrol probleminin çözümü için gradyent yöntemi incelenmiştir.

Son olarak, 5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: K reel veya kompleks sayılar cismi, X K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\|a.x\| = |a|\|x\|$,

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan

$\|.\|: X \to \mathbb{R}_+, x \to \|x\|$

dönüşümüne X lineer uzayı üzerinde norm denir.

Üzerinde bir norm tanımlanan X lineer uzayına normlu lineer uzay denir.

Tanım 2.2: X bir normlu lineer uzay olsun.

$(x_n) \subset X, n = 1,2,...$ dizisi ‘‘$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ ve\ \ \forall n > n_\varepsilon$ için

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.’’ koşulunu sağlıyorsa, (x_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisidir denir.

Tanım 2.3: Her Cauchy dizisi yakınsak olan normlu lineer uzaya tam uzay denir.

Tam normlu lineer uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.4: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.5: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0,l)}}.$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6: $W_2^1(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilimş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x)}{\partial x} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.7: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}} .$$

Tanım 2.8: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x' e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ 'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right] dxdt$$

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}} .$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşit olur.

Tanım 2.9: $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı elemanlarının ve onların t ve z değişkenlerine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ 'dan olan fonksiyonların Sobolev uzayı olup Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi\phi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right] dxdtdz$$

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}} < \infty \, .$$

$$W_2^{2,1,1}(\Omega) = W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları $(0, l)$ aralığının uçlarında sıfıra dönüşür.

Tanım 2.10 : X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E deyse E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.11: $\{x_n\}$, H hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.12: $\{x_n\}$, $\{X, \| \ \|\}$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.13: f konveks bir X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)y$$

oluyorsa f ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.14: $\left(X, \| \ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.15: X ve Y normlu uzaylar olsun . Eğer,

i) X, Y nin bir alt vektör uzayı ve

ii) Her $x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I : X \to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse ,

X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir. Yani, $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|Ix\|_Y \le M\|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.

Tanım 2.16: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $|f(t)| \le M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Tanım 2.17: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left(J'(u), h\right)_B + o(h,u)$ şartını sağlayan $J(u) \in B^*$ elemanı varsa , bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.18 (Cauchy Bunjakovskii Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}\,dxd\tau\right| \le \left(\int_\Omega |u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$ eşitsizliği geçerlidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Optimal Kontrol Problemin Konulması

Bu bölümde telin titreşim denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada kontroller karesel integrallenebilir fonksiyonlar olup olası kontroller kümesi $L_2(\Omega)$ uzayıdır.

Farz edelim ki $l, t > 0$ verilmiş sayılar $x \in [0,l], t \in [0,T]$, $\Omega = (0,l) \times (0,T)$ olsun.

$$J_\alpha(v) = -\beta \int_\Omega |u(x,t;v) - y(x,t)|^2 dxdt + \alpha \|v\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (1)$$

Fonksiyonelinin $V \equiv L_2(\Omega)$ kümesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v(x,t), (x,t) \in \Omega \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), x \in (0,l) \quad (3)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t \in (0,T) \quad (4)$$

şartları altında minimumu bulmak gerekir.

Burada

$$y \in L_2(\Omega), \quad \varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \quad \varphi_1 \in L_2(0,l) \quad (5)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. $\beta > 0, \alpha > 0$ verilmiş sayılardır.

$\forall \zeta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ $\forall v \in V$ için (2)-(4) şartlarından $u = u(x,t) \equiv u(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi telin titreşim denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Bu problemin çözümü dendiğinde $\zeta(x,T) = 0$ şartını sağlayan $\forall \zeta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]dxdt = \int_{\Omega} v(x,t)\zeta(x,t)dxdt + \int_0^l \varphi_1(x)\zeta(x,o)dx \tag{6}$$

integral özdeşliğini

$$u(x,0) = \varphi_0(x), x \in (0,l) \tag{7}$$

başlangıç şartını sağlayan ve $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $u = u(x,t) \equiv u(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

$[2-22]$ çalışmalarından bildiğimize göre (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin verdiğimiz tanım anlamında çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Bu kaynaklara dayanarak söyleyebiliriz ki (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin kabullendiğimiz şartlar altında $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan genelleştirilmiş çözümü vardır tektir ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}} \le c_0(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{11}(0,l)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)} + \|v\|^2_{L_2(\Omega)}) \tag{8}$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti φ_0, φ_1 'den bağımsız sabittir.

(2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün $u \in L_2(\Omega)$ şartını sağlamasından amaç fonksiyonelinin anlamı olduğu açıktır. Bu nedenle (1)-(4) optimal kontrol problemi belli bir anlama sahiptir.

Söylemek gerekir ki (1)-(4) biçiminde optimal kontrol problemleri $\beta \leq 0$ için önceden $[23-24]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu optimal kontrol probleminde $\beta > 0$ olduğundan bu problemi incelemek bilimsel önem arz etmektedir. Çünkü $\alpha = 0$ olduğunda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli konveks fonksiyonel olamamaktadır. Diğer taraftan bir önceki çalışmalardan farklı olarak burada olası kontroller kümesinin karesel integrallenen fonksiyonlar uzayı olmasıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı Ve Tekliği

Bu bölümde (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. Farz edelim ki $\varphi_0(x), \varphi_1(x), y(x)$ fonksiyonları (5) şartlarını sağlasın. Bunun yanı sıra $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ sabitleri için

$$\alpha - 2\beta c_0 > 0 \tag{9}$$

şartı sağlansın.

Burada c_0 sabiti (8) kestiriminde yer alan sabittir. Bu taktirde (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümü vardır ,tektir ve aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left\| v^m - v^* \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{2}{\alpha - 2\beta c_0} \left(J_\alpha(v^m) - J_{\alpha^*} \right). \tag{10}$$

Burada $v^* \in V$ (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümü, $\{v^m\}$ herhangi minimalleştirici dizidir.

$$J_{\alpha^*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v) \quad \text{dir.}$$

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin formülünden $v \in V$ için $J_\alpha(v) < +\infty$ yani;

$$-\beta \left\| u - y \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha \left\| v \right\|^2_{L_2(\Omega)} < +\infty \qquad \text{dur.}$$

Bu durumda

$$\inf_{v \in V} J_\alpha(v) < +\infty \quad \text{olur.}$$

Bu nedenle öyle bir $M > 0$ sabiti ve $\{v^m\} \in V$ dizisi bulmak mümkün ki

$$\inf_{v\in V} J_\alpha(v) = \lim_{m\to\infty}(v^m) < +\infty \tag{11}$$

$$J_\alpha(v^m) = -\beta\left\|u_m - y\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le M \tag{12}$$

şartları sağlansın.

Burada $u_m = u_m(x,t) \equiv u(x,t;v), v^m \in V$ 'ye karşılık gelen (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü $M > 0$ sabiti ise m'den bağımsızdır.

(8) kestiriminden yararlanarak $\{u_m(x,t)\}$ dizisi için aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|u_m\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_0\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} + \left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right). \tag{13}$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti m'den bağımsızdır ve (8)' de yer alan sabittir. (12) eşitsizliğinden yararlanırsak;

$$\alpha\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le M + \beta\left\|u_m - y\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{14}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafının ikinci terimi için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|u_m - y\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le 2\left\|u_m\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\left\|y\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Bu taktirde bu eşitsizliği (14) te dikkate alırsak

$$\alpha\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le M + 2\beta\left\|u_m\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta\left\|y\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{15}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimi (13) eşitsizliğinin yardımıyla değerlendirirsek;

$$\alpha\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le M + 2\beta c_0\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)} + \left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,l)}\right) + 2\beta\left\|y\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta c_0\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{16}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Burada (9) şartını dikkate alırsak yani $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ olduğunu göz önünde bulundurursak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$(\alpha - 2\beta c_0)\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le M + 2\beta\|y\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta c_0(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)}).$$

Buradan da

$$\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_1, m = 1, 2, \ldots \ . \tag{17}$$

eşitsizliği bulunur ki c_1 sabiti aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha - 2\beta c_0}\left[M + 2\beta\|y\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\right] \ . \tag{18}$$

(17) eşitsizliğinde $\{v^m\}$ minimalleştirici dizisinin $L_2(\Omega)$ uzayından olan kapalı kümenin elemanı olduğu açıktır. Bu taktirde $\{v^m\}$ dizisinin $L_2(\Omega)$'dan olan zayıf kompakt kümenin elemanı olduğu görülür. Bu nedenle $\{v^m\}$ dizisinden $v \in V$'ye zayıf yakınsayan $\{v^{m_k}\}$ dizisini seçebiliriz. Genel olsun diye böyle alt diziyi yeniden v^m ile gösterelim. Bu taktirde $m \to \infty$ için

$$v^m \to v, L_2(\Omega)\text{' da zayıf} \tag{19}$$

limit bağıntısını yazabiliriz. (13)'den yararlanarak (17) eşitsizliğinden aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|u_m\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} \le c_2, m = 1, 2 \ldots . \tag{20}$$

Burada

$$c_2 = c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)} + c_1\right) \tag{21}$$

formülüyle tanımlanır ve m'den bağımsızdır.

Böylece $\{u_m\}$ dizisinin $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayından olan kapalı kümenin elemanı olduğu ortaya çıkar.

$W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı refleksif Banach uzayı olduğundan kapalı küme burada zayıf kompakttır. Bu nedenle $\{u_m\}$ dizisinden $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayında $u \in W_2^{1,1}(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Bu zayıf yakınsayan alt diziyi $\{u_m\}$ ile gösterelim.

Bu durum da $m \to \infty$ için

$$u_m \to u, \qquad L_2(\Omega) \text{'da zayıf} \tag{22}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad L_2(\Omega) \text{'da zayıf} \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad L_2(\Omega) \text{' da zayıf} \tag{24}$$

limit bağıntılarını yazabiliriz.

$u_m \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonu her bir $m = 1, 2, \ldots$ için (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğundan $\forall \zeta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ ve $\forall \zeta(x,T) = 0$ için aşağıdaki integral özdeşliğini:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial u_m}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dxdt = \int_\Omega v^m(x,t)\zeta(x,t)dxdt + \int_0^l \varphi_1(x)\zeta(x,0)dx \tag{25}$$

ve

$$u_m(x,0) = \varphi_0(x), x \in (0,l) \tag{26}$$

başlangıç şartını yazabiliriz.

(19)-(23)-(24) limit bağıntılarından yararlanırsak $m \to \infty$ için (25) te limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]dxdt=\int_{\Omega} v(x,t)\zeta(x,t)dxdt+\int_0^l \varphi_1(x)\zeta(x,0)dx\ . \qquad (27)$$

$u_m \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ olduğundan $u_m(.,0)\in L_2(0,l)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m\to\infty$ için

$$u_m(.,0)\to u(.,0), \quad L_2(0,l)\text{'de kuvvetli} \qquad (28)$$

limit bağıntısı yazılır.

Şimdi $u(x,t)$ limit fonksiyonunun $u(x,0)=\varphi_0(x)$ başlangıç şartını sağladığını kontrol edelim.

Bu amaçla aşağıdaki eşitsizliğe bakalım

$$\begin{aligned}\int_0^l \left(u(x,0)-\varphi_0(x)\right)^2 dx &\le 2\int_0^l \left(u_m(x,0)-u(x,0)\right)^2 dx\\ &+2\int_0^l \left(u_m(x,0)-\varphi_0(x)\right)^2 dx, m=1,2,...\ .\end{aligned} \qquad (29)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim (26) şartına göre sıfıra eşit olur. Bu durumda (28)'i dikkate alıp (29)'un her iki tarafında $m\to\infty$ için limite geçersek

$$\int_0^l \left(u(x,0)-\varphi_0(x)\right)^2 dx=0$$

olur. Buradan da $u(x,t)$ limit fonksiyonunun (7) başlangıç şartını sağladığı görülür.

Şimdi $u=u(x,t)$ limit fonksiyonunun $u(0,t)=u(l,t)=0$ şartlarını sağladığını gösterelim.

$\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $C^0\left[[0,l];L_2\left(0,T\right)\right]$ uzayına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$u_m(x,.) \to u(x,.), \quad L_2(0,T) \text{'de kuvvetli.} \tag{30}$$

Buradan da $x=0$ ve $x=l$ alırsak $m \to \infty$ için

$$u_m(0,.) \to u(0,.), \quad L_2(0,T) \text{'de kuvvetli} \tag{31}$$

$$u_m(l,.) \to u(l,.), \quad L_2(0,T) \text{ 'de kuvvetli} \tag{32}$$

limit bağıntıları yazılır.

Diğer taraftan $u_m \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ olduğundan

$$u_m(0,t) = u_m(l,t) = 0, m = 1,2,... \tag{33}$$

şartları sağlanır.

Bu taktirde

$$\int_0^T |u(s,t)|^2 \, dt \le 2\int_0^T |u(s,t) - u_m(s,t)|^2 \, dt + 2\int_0^T |u_m(s,t)|^2 \, dt, \; s = 0, \; l, \; m = 1, 2, ... \tag{34}$$

eşitsizliğinden, (31)-(32) limit bağıntılarından ve (33) şartlarından yararlanarak limite geçersek aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\int_0^T |u(s,t)|^2 \, dt = 0, s = 0, l \; . \tag{35}$$

Buradan da limit fonksiyonunun sınır değer şartlarını sağladığı çıkar. Başka bir deyişle limit fonksiyonunun $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğu ispatlanır.

Bu limit fonksiyonunun (2)-(4) sınır değer probleminin (6) integral özdeşliğini ve (7) başlangıç şartını sağladığı açıktır. Bu limit fonksiyonu $\{v^m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v \in V$ 'ye karşılık gelen (2)-(4) sınır değer probleminin çözümüdür.

Yani; $u = u(x,t) \equiv u(x,t;v)$' dir.

Yukarıda $\{v^m\} \subset V$ dizisi $v \in V$'ye $L_2(\Omega)$'da zayıf yakınsadığında $\{u_m\} \subset \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ dizisi $u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$'ya zayıf yakınsar. $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ gömmesi kompakt olduğundan $\{u_m\}$ dizisi u'ya $L_2(\Omega)$'da kuvvetli yakınsar yani $m \to \infty$ için

$$u_m \to u, L_2(\Omega)\text{'da kuvvetli} \tag{36}$$

limit bağıntısı yazılır.

Şimdi

$$J_0(v) = -\beta \left\| u(.;v) - y \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{37}$$

fonksiyonelinin $L_2(\Omega)$ da v ye göre zayıf sürekli fonksiyonel olduğunu gösterelim.

$J_0(v)$ fonksiyoneli için (1) formülünden yararlanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J_0(v^m) - J_0(v) &= -\beta \left\| u(.;v^m) - y \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \beta \left\| u(.,v) - y \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= -\beta \int_\Omega 2\big(u(x,t;v) - y(x,t)\big)\big(u(x,t;v^m) - u(x,t;v)\big)\,dxdt \\ &\quad - \beta \int_\Omega \big(u(x,t;v^m) - u(x,t;v)\big)^2\,dxdt \end{aligned}$$

Cauchy Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left| J_0(v^m) - J_0(v) \right| \le 2\beta \left\| u - y \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| u^m - u \right\|_{L_2(\Omega)} + \beta \left\| u^m - u \right\|_{L_2(\Omega)}^2 .$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek ve (36) limit bağıntısından yararlanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\lim_{m \to \infty} J_0(v^m) = J_0(v) \tag{38}$$

Böylece $J_0(v)$ fonksiyonelinin $v \in V$ elemanı üzerinde zayıf sürekli olduğu çıkar.

Diğer taraftan $\alpha\|v\|^2_{L_2(\Omega)}$ fonksiyoneli alttan zayıf yarı sürekli olduğundan

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \alpha\|v\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \alpha\|v\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{39}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için olan formülden ve (38)-(39) bağıntılarından yararlanarak aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$J_{\alpha*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) \leq J_\alpha(v) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m)$$

$$\begin{aligned} &\leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_0(v^m) + \underline{\lim}_{m\to\infty} \alpha\left\|v^m\right\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*} \end{aligned}.$$

Buradan da

$$J_\alpha = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*}$$

olduğu ortaya çıkar. Böylece $v \in V$ ’nin (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir.

Şimdi kabullendiğimiz şartlar altında $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ sağlaması halinde kuvvetli konveks fonksiyonel olduğunu göstermeye çalışalım.

Yani; $\forall v_0, v_1 \in V \equiv L_2(\Omega),\ \ \forall \tau \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} J_\alpha(v_\tau) &= J_\alpha\left(\tau v_1 + (1-\tau)v_0\right) \\ &\leq \tau J_\alpha(v_1) + (1-\tau)J_\alpha(v_0) \\ &\quad -\eta\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{40}$$

şartını sağlayacak biçimde $\eta > 0$ sabitinin var olduğunu gösterelim.

(2)-(4) sınır değer probleminin $v_0 \in V$'ye karşılık gelen çözümünü $u_0 = u_0(x,t) \equiv u(x,t;v_1)$ ile gösterelim. Bu durumda (2) denkleminin lineer olmasından ve V kontrolünün denklemin sağ tarafında yer almasından yararlanırsak kolaylıkla,

$$\begin{aligned} u_\tau(x,t) &\equiv u(x,t;v_\tau) = u(x,t;\tau v_1 + (1-\tau)v_0) \\ &= \tau u(x,t;v_1) + (1-\tau)u(x,t;v_0) \\ &= \tau u_1(x,t) + (1-\tau)u_0(x,t) \end{aligned} \tag{41}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliği $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin v_τ elemanı üzerindeki değerinde dikkate alırsak ,

$$\begin{aligned} J_\alpha(v_\tau) &= -\beta\|u_\tau - y\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v_\tau\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= -\tau\beta\|u_1 - y\|^2_{L_2(\Omega)} - (1-\tau)\beta\|u_0 - y\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &+ \tau\alpha\|v_1\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-\tau)\alpha\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &- \alpha\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta\tau(1-\tau)\|u_1 - u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{42}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında yer alan sonuncu terimi değerlendirelim. Bu amaçla $\tilde{u} = u_1 - u_0$ ile gösterelim. Bu taktirde (2)-(4) şartlarını kullanırsak $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç sınır değer problemlerinin çözümü olduğu kolaylıkla görülür.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \tilde{v}(x,t), (x,t) \in \Omega \tag{43}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \frac{\partial \tilde{u}(x,0)}{\partial t} = 0, x \in (0,l) \tag{44}$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(l,t) = 0, t \in (0,T) \tag{45}$$

Burada $\tilde{v} = v_1 - v_0$' dır. Görüldüğü üzere (43)-(45) başlangıç sınır değer problemi (2)-(4) başlangıç sınır değer problemi tipinde bir problemdir. Bu nedenle (43)-(45) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_0 \|\tilde{v}\|^2_{L_2(\Omega)} . \tag{46}$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti (9) da yer alan sabittir. $u, \tilde{v}$ 'nın formülünü dikkate alırsak

$$\|u_1 - u_0\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_0 \|v_1 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{47}$$

elde edilir.

Bu eşitsizliği (42) de dikkate alırsak ve J_α fonksiyoneli için olan formülden yararlanırsak

$$\begin{aligned} J_\alpha(v_\tau) = J_\alpha\left(\tau v_1 + (1-\tau)v_0\right) \le \tau J_\alpha(v_1) + (1-\tau) J_\alpha(v_0) \\ -\alpha\tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta c_0 \tau(1-\tau)\|v_1 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{48}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ olduğundan $\eta = \alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı sağlanacaktır.

Buradan da $J_\alpha(v)$'nin $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı altında kuvvetli konveks fonksiyonel olduğu ispatlanır.

$J_\alpha(v)$ fonksiyoneli kuvvetli konveks fonksiyonel olduğundan aynı zamanda ciddi konveks fonksiyoneldir.

Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyonelini üstte ispatladığımıza göre $\{v\}$ kümesi üzerinde çözümü olduğundan bu çözümün tek olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümünün var olduğunu ve tek olduğunu ispatladık.

Şimdi (10) eşitsizliğini ispatlayalım. Bu amaçla (40) tan yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\eta\tau(1-\tau)\|v_1-v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \le -J_\alpha(\tau v_1+(1-\tau)v_o)+\tau J_\alpha(v_1)+(1-\tau)J_\alpha(v_0)\,. \tag{49}$$

Farz edelim ki $\{v_m\}\in V$ herhangi minimalleştirici dizi olsun ve $v^*\in V$ (1)-(4) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun . (49) da $\tau=\frac{1}{2}, v_1=v^m, v_o=v^*$ alalım.

Bu taktirde aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\frac{\eta}{4}\|v^m-v^*\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{2}J_\alpha(v^m)-\frac{1}{2}J_\alpha(v^*)\ .$$

Buradan da $J_\alpha(v^*)=\inf_{v\in V} J_\alpha(v)=J_{\alpha^*}$ olduğunu dikkate alıp her iki tarafını $\frac{4}{\eta}$' ye çarparsak (10) eşitsizliğinin gerçekliğini elde ederiz.

Böylece teorem ispatlanmıştır.

4.2. Amaç fonksiyonelinin Diferansiyellenebilirliği ve Onun Gradyenti

Farz edelim ki $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olsun.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=2\beta(u(x,t)-y(x,t)),(x,t)\in\Omega \tag{50}$$

$$\psi(x,T)=0,\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0, x\in(o,l) \tag{51}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, t\in(0,T) \tag{52}$$

Burada $u=u(x,t)$ (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür. (50)-(52) sınır değer problemine (1)-(4) optimal kontrol problemine karşılık gelen eşlenik problem denir.

(50)-(52) probleminin çözümü dendiğinde $\zeta_1(x,o)=0$ şartını sağlayan $\forall\zeta_1\in \overset{0}{W}{}^{1,1}_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right]dxdt=\int_{\Omega}2\beta(u-y)\zeta_1(x,t)dxdt \tag{53}$$

integral özdeşliğini

$$\psi(x,T)=0, x\in(0,l) \tag{54}$$

şartını sağlayan $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Buradan (50)-(52) sınır değer probleminin (2)-(4) başlangıç sınır değer problemi tipli bir problem olduğu görülür. Şimdi $\tau=T-t$ değişken dönüşümü yapalım. Bu taktirde $\tilde{\psi}(x,\tau)=\psi(x,T-\tau)$ gösterirsek aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini elde ederiz:

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}=2\beta(u(x,t)-y(x,t)),(x,\tau)\in\Omega \tag{55}$$

$$\tilde{\psi}(x,0)=0,\frac{\partial\tilde{\psi}(x,0)}{\partial\tau}=0, x\in(0,l) \tag{56}$$

$$\tilde{\psi}(0,\tau)=\tilde{\psi}(l,\tau)=0,\tau\in(0,T) \tag{57}$$

Görüldüğü üzere bu problem (2)-(4) problemine benzer problemdir. Şarta göre $y\in L_2(\Omega)$ ve $u\in L_2(\Omega)$ olduğundan $2\beta(u-y)\in L_2(\Omega)$ olur.

Bu şartı dikkate aldığımızda (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin kullandığımız düşüncelerden yola çıkarak hükmedebiliriz ki (50)-(52) sınır değer probleminin (53) integral özdeşliği ve (54) şartını sağlayan $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}\le c_3\|u-y\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{58}$$

Burada $c_3>0$ sabittir.

Şimdi (1) fonksiyonelinin $\forall v\in V$ üzerinde artışını bulalım. Bu amaçla $v\in V$'ye $v+\Delta v\in V$ olacak biçimde $\Delta v\in L_2(\Omega)$ artışını verelim ve (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ 'ye karşılık gelen çözümünü $u = u(x,t) \equiv u(x,t;v)$ ile $v + \Delta v \in V$ ' ye karşılık gelen çözümü ise $u_\Delta = u_\Delta(x,t) \equiv u_\Delta(x,t;v+\Delta v)$ ile gösterelim.

Bu durumda $\Delta u = \Delta u(x,t) \equiv u(x,t;v+\Delta v) - u(x,t;v)$ ile gösterirsek bu fonksiyonun aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır.

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} = \Delta v(x,t), (x,t) \in \Omega \tag{59}$$

$$\Delta u(x,0) = 0, \frac{\partial \Delta u(x,0)}{\partial t} = 0, x \in (0,l) \tag{60}$$

$$\Delta u(0,t) = \Delta u(l,t) = 0, t \in (0,T) \tag{61}$$

(6) integral özdeşliğinde $\Delta u = \Delta u(x,t)$ fonksiyonu için $\zeta(x,T) = 0$ şartını sağlayan $\forall \zeta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ için geçerli olan aşağıdaki integral özdeşliğini

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \Delta u}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dxdt = \int_\Omega \Delta v \zeta(x,t) dxdt \tag{62}$$

ve

$$\Delta u(x,0) = 0, x \in (0,l) \tag{63}$$

başlangıç şartını yazabiliriz.

Bu $\Delta u = \Delta u(x,t)$ fonksiyonu için (8) kestirimine denk olarak

$$\|\Delta u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_0 \|\Delta v\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{64}$$

kestirimini elde edebiliriz. (1) fonksiyonelinin $v \in V$ üzerinde artışını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) &= -2\beta \int_\Omega \big(u(x,t) - y(x,t)\big) \Delta u(x,t) dxdt \\ &+ 2\alpha \int_\Omega u(x,t) \Delta v(x,t) dxdt - \beta \|\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha \|\Delta v\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} . \tag{65}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan birinci terimi dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla (53) integral özdeşliğinde $\zeta_1 = \Delta u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, (62) özdeşliğinde ise $\zeta = \psi \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ alalım.

Bu taktirde elde edilen eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$-2\beta\int_{\Omega}\left(u(x,t)-y(x,t)\right)\Delta u(x,t)dxdt = -\int \psi(x,t)\Delta v(x,t)dxdt \tag{66}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği (65) te dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_{\Omega}\left[-\psi(x,t)+2\alpha v(x,t)\right]\Delta v(x,t)dxdt + R\,. \tag{67}$$

Burada

$$R = -\beta\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{68}$$

dir. (64) kestiriminden yararlanırsak R kalanının kolaylıkla aşağıdaki biçimde bir miktar olduğunu

$$R = o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{69}$$

Yani; $\left\|\Delta v\right\|_{L_2(\Omega)}$ miktarına göre sonsuz küçük miktar olduğunu elde ederiz. Bu formülü (67) de dikkate alalım. Bu durumda fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_{\Omega}\left[-\psi(x,t)+2\alpha v(x,t)\right]dxdt + o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{70}$$

Fonksiyonellerin Frechet anlamda diferansiyellenebilirliğinin tanımından yararlanırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $V \equiv L_2(\Omega)$ üzerinde Frechet anlamda diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için

$$J_\alpha{}'(v) = -\psi(x,t) + 2\alpha v(x,t) \tag{71}$$

formülünün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Böylece aşağıdaki teoremi ispatladık.

Teorem 4.2.1. Farzedelim ki $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ fonksiyonları (5) şartlarını sağlasın. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamda diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (71) formülü geçerlidir.

4.3. Optimal Kontrol Problemlerinin Çözümü İçin Gerek ve Yeterli Şart

Bu alt bölümde $J_\alpha(v)$ fonksiyonlarının V kümesi üzerinde Frechet anlamda diferansiyellenebilir olmasından ve onun gradyentinden faydalanarak (1)-(4) optimal kontrol probleminin çözümünün gerek ve yeterli şartını elde edeceğiz.

Teorem 4.3.1. Farzedelim ki teorem 4.1.1. ve teorem 4.2.1. in şartları sağlansın $v^* \in V$ (1)-(4) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olması için

$$J_\alpha'(v^*) = -\psi^*(x,t) + 2\alpha v^*(x,t) = 0 \tag{72}$$

şartını sağlaması gerek ve yeterlidir. Burada $\psi^* = \psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$ fonksiyonu eşlenik problemlerin $v^* \in V$ ‘ye karşılık gelen çözümüdür.

İspat: Teorem 4.2.1. e göre $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamda diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğu ispatlandı ve onun gradyentinin formülü için (71) formülü ispatlandı.

Teorem 4.1.1. de fonksiyonelin sürekli olduğu ispatlandı. Şimdi gradyentin yani $J_\alpha'(v)$ nin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu nedenle $\forall v \in V$ ve $\|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ için

$$\|J_\alpha'(v+\Delta v) - J_\alpha'(v)\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \tag{73}$$

olduğunu gösterelim.

Gerçekten $J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)$ farkını (71) formülünden yararlanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J'_\alpha(v)=J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)=-\psi(x,t;v+\Delta v)+2\alpha(v(x,t)+\Delta v(x,t))\\ +\psi(x,t;v)-2\alpha v(x,t)=-\Delta\psi(x,t)+2\alpha\Delta v(x,t)\end{aligned} \tag{74}$$

Burada $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür.

$$\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}=2\beta\Delta u(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{75}$$

$$\Delta\psi(x,T)=0,\frac{\partial\Delta\psi(x,T)}{\partial t}=0,\quad x\in(0,l) \tag{76}$$

$$\Delta\psi(0,t)=\Delta\psi(l,t)=0,\quad \mathrm{t}\in\left(0,T\right) \tag{77}$$

Burada $\Delta u=\Delta u(x,t)$ (59)-(61) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür.

Görüldüğü üzere bu sınır değer problemi eşlenik sınır değer problemi biçiminde bir problemdir. Bu nedenle eşlenik problem için elde ettiğimiz kestrime denk olarak aşağıdaki kestrimi elde edebiliriz:

$$\|\Delta\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}\le c_4\|\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{78}$$

Şimdi (64) kestiriminden yararlanarak $\Delta\psi$ için aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}\le c_5\|\Delta v\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{79}$$

Burada $c_5>0$ sabiti Δv ' den bağımsızdır. (74) formülünden yararlanırsak

$$\left|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\right|\le\left|\Delta\psi(x,t)\right|+2\alpha\left|\Delta v(x,t)\right|$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının karesini alıp Ω üzerinden integrallemiş olursak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le 2\left\| \Delta\psi \right\|^2_{L_2(\Omega)} + 8\alpha^2 \left\| \Delta v \right\|^2_{L_2(\Omega)} \quad .$$

Burada (79) kestirimini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_6 \left\| \Delta v \right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{80}$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti Δv ' den bağımsızdır.

Buradan da kolaylıkla (73) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz.

Böylelikle $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olduğu ve bunun yanı sıra teorem 4.1.1.de ispatladığımıza göre $\alpha - 2\beta c_0 > 0$ şartı altında konveks fonksiyonel olduğu dahası kuvvetli konveks fonksiyonel olduğu açıktır. Bu nedenle bu şartları sağlayan konveks fonksiyonelin minimumu için V kümesi tüm $L_2(\Omega)$ uzayı olduğundan gerek ve yeterli şartı $J_\alpha(v^*) = 0$ biçiminde yazabiliriz.

Burada fonksiyonelin gradyenti için formülü dikkate alırsak teoremin hükmünü elde etmiş oluruz.

Böylece teorem ispatlanmış oldu.

4.4. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Gradyent Yöntemi

(1)-(4) optimal kontrol problemi sonsuz boyutlu şartsız optimizasyon problemi olduğundan onun nümerik çözümü için gradyent yönteminin şemasını aşağıdaki gibi yazabiliriz $[25,26]$:

$$v^{m+1} = v^m - \sigma_m J'_\alpha(v^m), m = 0,1,2,\dots. \tag{81}$$

Burada $J'_\alpha(v^m)$ fonksiyonelinin gradyentinin v^m üzerinde değeridir ve aşağıdaki formül ile bulunur:

$$J'_\alpha(v^m) = -\psi(x,t;v^m) + 2\alpha v^m(x,t). \tag{82}$$

$\sigma_m > 0$ ise yöntemin parametresi olup aşağıdaki şarttan seçilir:

$$J_\alpha(v^{m+1}) < J_\alpha(v^m)$$

iterasyon süreci

$$\left\| v^{m+1} - v^m \right\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon, \varepsilon > 0$$

şartı sağlanana kadar devam ettirilir. Burada $\varepsilon > 0$ önceden verilen sabittir. $\alpha > 0$ sabiti ise (9) şartından seçilen bir sabittir.

(1)-(4) optimal kontrol probleminin nümerik çözümünü bilgisayarda gerçekleştirmek için onun nümerik çözüm algoritmasını inşa etmeye çalışalım. Bu amaçla Ω bölgesini ağa dönüştürmeye çalışalım.

Farzedelim ki: $t_k = ku, k = \overline{0,N}, x_j = jh, j = \overline{0,m}, h = \dfrac{l}{m}, \tau = \dfrac{T}{N}$ olsun

Problemde yer alan integrali toplamla ve başlangıç sınır değer problemini fark şemasıyla değiştirirsek sonuçta aşağıdaki sonlu boyutlu ayrık optimal kontrol problemini elde ederiz:

$$\mathrm{I}_\alpha\left(\left[v\right]\right) = -\beta\tau h \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left| u_{jk} - y_{jk} \right|^2 + \alpha\tau h \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} v^2{}_{jk} \,. \tag{83}$$

$\mathrm{I}_\alpha\left(\left[v\right]\right)$ fonksiyonunun $W = L_{2,M}^N$ uzayında

$$\delta_{\bar{t}t} u_{jk} - \delta_{\bar{x}x} u_{jk+1} = v_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N-1} \tag{84}$$

$$u_{j0} = \varphi_{0j}, j = \overline{0, M}, \quad \delta_{\bar{t}} u_{j1} = \varphi_{1j}, j = \overline{1, M-1} \tag{85}$$

$$u_{ok} = u_{mk} = 0, \quad k = \overline{1, N} \tag{86}$$

şartları altında minimumu bulmak gerekir.

Burada

$$y_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j}^{x_{j+1}} y(x,t)dxdt, j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N-1}$$

$$\varphi_{mj} = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_m(x)dx, m=0,1,\ j=\overline{1,M-1}$$

$$\varphi_{00} = \varphi_{0m} = 0,\quad \delta_{\bar{t}t} u_{jk} = \frac{u_{jk+1} - 2u_{jk} + u_{jk-1}}{\tau^2}$$

$$\delta_{\bar{x}x} u_{jk+1} = \frac{u_{j+1k+1} - 2u_{jk+1} + u_{j+1k+1}}{h^2}$$

$L_{2,M}^N$ uzayı $L_2(\Omega)$ uzayının ayrık aynısı olup öyle bir $[v] = (v_{jk}),\ j=\overline{1,M-1}$ elemanlarından oluşur ki

$$\tau h = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} v^2{}_{jk} < \infty$$

olsun.

Fonksiyonelin gradyentinden yararlanarak (83) fonksiyonunun gradyenti için aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\mathrm{I}'_{\alpha,jk}([v]) = -\psi_{jk} + 2\alpha v_{jk},\quad j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N-1}\ . \tag{87}$$

Burada ψ_{jk}

$$\delta_{t\bar{t}}\psi_{jk} - \delta_{x\bar{x}}\psi_{jk-1} = 2\beta(u_{jk} - y_{jk}),\quad j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N-1} \tag{88}$$

$$\psi_{jN} = 0,\ j=\overline{0,M},\quad \delta_t\psi_{j0} = 0,\ j=\overline{1,M-1} \tag{89}$$

$$\psi_{0k} = \psi_{mk} = 0,\quad k=\overline{1,N} \tag{90}$$

sisteminin çözümüdür.

Burada

$$\delta_{t\bar{t}}\psi_{jk} = \frac{\psi_{jk+1} - 2\psi_{jk} + \psi_{jk-1}}{\tau^2},\quad \delta_{x\bar{x}}\psi_{jk-1} = \frac{\psi_{j+1k-1} - 2\psi_{jk-1} + \psi_{j-1k-1}}{h^2}$$

dir.

Şimdi (83)-(86) ayrık optimal kontrol probleminin çözümü için gradyent yönteminin şemasını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$v_{jk}^{m+1} = v_{jk}^{m} - \sigma_m \mathrm{I}'_{\alpha,\, jk}\left(\left[v^m\right]\right),\ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N-1}, m = 0,1,2,.... \tag{91}$$

Burada $\sigma_m > 0$ parametresi

$$\mathrm{I}_{\alpha}\left(\left[v^{m+1}\right]\right) < \mathrm{I}_{\alpha}\left(\left[v^{m}\right]\right)$$

şartından seçilir. $\mathrm{I}'_{\alpha,\, jk}\left(\left[v\right]\right)$ ise (87) formülüyle bulunur. Gradyent yöntemini uygulamak için her bir adımda (84)-(86) ve (88)-(90) cebirsel denklemler sistemi $[29,30]$ çalışmalarından bildiğimiz kovalama yöntemiyle bulunur.

İterasyon süreci

$$\left(\tau h \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left(v_{jk}^{m+1} - v_{jk}^{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon$$

şartını sağlayıncaya kadar devam ettirilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan başlangıç sınır değer problemleri konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem taşır.

Bu tezde Telin Titreşim denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözüm algoritması inşa edilmiş ve bu amaçla gradyent yöntemi uygulanmıştır. Ayrıca bu tezdeki optimal kontrol probleminde $\beta > 0$ olduğundan problemi incelemek bilimsel önem arz etmektedir. Çünkü $\alpha = 0$ olduğunda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli konveks fonksiyonel olamamaktadır. Diğer taraftan bir önceki çalışmalardan farklı olarak burada olası kontroller kümesinin karesel integrallenen fonksiyonlar uzayı olmasıdır. Yani diğer çalışmalara nazaran daha geniş bir alanda çalışılmıştır. Bu nedenle bu tezde elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Aksoy, E. Lineer olmayan Schrödinger Denklemi için bir optimal kontrol problemi. Yüksek lisans tezi. Temmuz 2014.

[2] Guliyev, H.F. Hiperbolik tip denklemlerin katsayılarıyla optimal kontrol problemleri. Izv. Vuzov, Mathematic 1985. (3), 39-44.

[3] Guliyev, H. F. Dağılmış parametreli sistemlerin kontrolüne ait bir problem hakkında. ‘‘ Otomotik ve Telimekanik’’, 1996. (1), 180-185.

[4] Baundoin, L., Kavian, O., Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differantial Equations,,2005, 216, 188-222

[5] Butkovskiy, A. G., Samoilenko Yu. İ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Nauka, 256 s, Moscow. (Rusça)

[6] Egorov, Yu. V., 1963. Optimal kontrolün bazı problemleri. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik Dergisi, 3(5), 887-904. (Rusça)

[7] İskenderov, A. D., Tagiev. R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrollerle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

[8] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Ya., 1989. A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential. Soviet Math. Dokl., 38 (3), 637-641.

[9] İskenderov, A. D., Yagubov, G. Ya., 1989. Lineer olmayan kuantum mekanik sistemlerin optimal kontrolü. Otomotik ve Telemekanik, 12, 27-38. (Rusça)

[10] İskenderov, A. D., 2001. Durgun olmayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunması. Matematik Modellemenin ve optimal kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36. (Rusça)

[11] Lurye, K. A., 1975. Matematiksel Fiziğin Problemlerinde Optimal Kontrol. Nauka, 478 s, Moskova. (Rusça)

[12] Plotnikov, V. İ., 1976. Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eşlenik problem hakkında. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamaları, 10 (4), 95-96. (Rusça)

[13] Yagubov, G. Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

[14] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1975. Introductory real analysis. Dover Pub., 403 s, New york.

[15] Sokolowski, J., 1978. Remarks on existence of optimization problems for partial differantial equations of parabolic type. Control and Cybernetics, 7 (2), 47-61.

[16] Yagubov, G. Ya., Musayeva, M. A., 1997. Lineer olmayan Schrödinger Denklemi için İdentifikasyon Problemi Hakkında. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1961-1698. (Rusça)

[17] Yagubov, G. Ya., Gashimov S. A., 2008. About a problem of optimal control in unlimited time dependent potential in the nonlinear nonstationary Schrödinger equation. Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences series of Phys. Tech. And Math. Sciences, Informatics and control problems, vol. XXVIII, No:6, pp. 19-24 (Rusça)

[18] Yegorov, A. İ., 1978. Isı ve difüzyon süreçlerinin optimal kontrolü. Nauka, 463 s, Moskova. (Rusça)

[19] Yetişkin, H., Subaşı, M., 2010. On the optimal control problem for Schrödinger equation with complex potential. Applied Mathematics and Computation, 216 (7), pp. 1896-1902.

[20] Yıldız, B., Yagubov, G. Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of computational and applied marhematics, vol 88, 275-287.

[21] Yıldız, B., Subaşı, M., 2001. On the optimal control problem for linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 121, 373-381.

[22] Yıldırım Aksoy, N., Yıldız, B. And Yetişkin, H., 2012. Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathematical Sciences, Vol 122, Number 3, 469-484.

[23] Ladyzenskaja, O. A. Matematiksel fiziğin denklemleri için sınır değer problemleri. Moscow, 1975.

[24] Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differantial equations. Springer-Verlag, Berlin –Heidelberg, 400 s, New york

[25] İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.

[26] Vasilyev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodları. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

[27] Steven L. H., Ju M., Sung-Dae Y. Numerical Shooting Methods For Optimal Boundary Control and Exact Boundary Control Of 1-D Wave Equations. International Journal of Numerical Analysıs and Modeling. 13, (1), 122-144.

[28] Karl K., Stefan H. R. A Gautsch time-stepping approach to optimal control of the wave equation. Applied Numerical Mathematics 90. (2015). 55-76

[29] Samarskiy, A. A., ‘‘ Fark Şemaları Teorisi’’ M: Nauka, 1997. (Rusça)

[30] Samarskiy, A. A., Gulin, A. V., ‘‘Sayısal Yöntemler’’ M: Nauka, 1989. (Rusça)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Adı Soyadı	: Aysun POLAT
Doğum Yeri	: KARS
Doğum Tarihi	: 23.06.1989
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise	: Alparslan Lisesi, 2003-2006
Lisans	: Kafkas Üniversitesi, 2010-2014
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi, 2014-2016