T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

Sibel KAYA KINA

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

Eylül-2016

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

Sibel KAYA KINA

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

Eylül-2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Sibel KAYA KINA' nın Doç. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bi-Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .birliği..... ile kabul edilmiştir.

01/09/2016

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan	**: Doç. Dr. İsa YILDIRIM**	....
Üye	**:Doç. Dr. Erhan DENİZ**	....
Üye	**:Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2016 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL
Enstitü Müdürü V.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e ve çalışmam esnasında, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Sibel KAYA KINA Kars - 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Faber polinomları kullanılarak kompleks mertebeden genelleştirilmiş bi-subordinasyon fonksiyonların genel katsayısı için bir üst sınır bulunmuştur. Daha sonra aynı fonksiyonlar için Fekete-Szegö problemi çözülmüştür. Ayrıca parametrelerin özel durumlarında bi-ünivalent fonksiyonların özel alt sınıfları için üst sınırlar verilmiştir.

2016, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bi-ünivalent fonksiyon, Bi-konveks fonksiyon, Bi-yıldızıl fonksiyon, Faber polinomu, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, firstly an upper bound for general coefficient of the generalized bi-subordinate functions of complex order by using Faber polynomial is obtained. Later, the Fekete-Szegö problem is solved for the same functions. Morever, upper bounds for special subclasses of bi-univalent functions in special cases of parameters are given.

2016, 85 pages

Keywords: Bi-univalent function, Bi-convex function, Bi-yıldızıl function, Faber polynomial, Subordination.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
U	$\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	Sayma sayılar kümesi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{A}$	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ z \in U \right\}$ kümesi
$\mathcal{S}$	$\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U$ için f ünivalent$\}$ kümesi
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^{*}$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^{*}(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\alpha -$ Mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform olarak dönüştüren fonksiyonun varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim disk de tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f\in\mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır (Literatürde Koebe-Çeyrek Teoremi olarak bilinir).

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z\in U$ olmak üzere $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n=2,3,...$ için $|a_n|\le n$ tahmini uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1985 yılına kadar bu tahmin sadece a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 katsayıları için sağlanabilirken 1985 yılında Branges tarafından tüm a_n değerleri için ispatlanmıştır. Bu aşamalar

$n=2$ için	$\|a_2\|\le 2$	Bieberbach (1916)
$n=3$ için	$\|a_3\|\le 3$	Löwner (1923)
$n=4$ için	$\|a_4\|\le 4$	Garabedian ve Schiffer (1955)
$n=5$ için	$\|a_5\|\le 5$	Pederson ve Schiffer (1972)
$n=6$ için	$\|a_6\|\le 6$	Pederson ve Ozawa (1968-1969)
Tüm n'ler için	$\|a_n\|\le n$	L. De Branges (1985)

şeklindedir. Unutulmamalıdır ki, katsayı problemini en önemli kılan sebep katsayının fonksiyonun geometrisi üzerindeki rolüdür. Örneğin ikinci katsayı kullanılarak, yukarıda da bahsedilen Koebe-çeyrek teoremi, büyüme (growth) ve genişleme (distorsiyon) teoremleri ispatlanır.

1985 yılında elde edilen bu çözüm ünivalent fonksiyonlar teorisini zenginleştirmiştir ve beraberinde birçok yeni problemin ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Bu problemlerden biri ünivalent fonksiyonların alt sınıflarının özelliklerini araştırmak olmuştur. Bu alt sınıfların en önemlilerinden biri yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$, diğeride konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ dir.

Ele alınan problemlerden bir diğeride hem kendisi hemde tersi ünivalent olan yani kısaca bi-ünivalent fonksiyonların belirttiği serinin katsayıları için kesin bir üst sınır bulmaktır. Bu problemle ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin [27] tarafından yapılmıştır. Lewin çalışmasında Grunsky eşitsizliğini kullanarak her $f, f^{-1} \in \mathcal{S}$ için $|a_2| \leq 1.51$ olduğu ispatlamıştır. Yalnız bu üst sınır kesin değildir. 1979 yılında Brannan ve Clunie [7] $|a_2| \leq \sqrt{2}$ bularak Lewin'in sonucunu iyileştirmiştir. Netanyahu 1968 yılında [31] $\max|a_2| = 4/3$ olarak ispatlamıştır. Styer ve Wright [41] çalışmasında Netanyahu'nun bu çalışmasından yola çıkarak $|a_2| > 4/3$ eşitsizliğini sağlayan bi-ünivalent fonksiyonların var olduğuna dair bazı örnekler vermiştir. Bundan sonraki yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların katsayıları üzerine çalışmalar hız kazanarak bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için katsayı problemi çalışılmıştır. Bu aşamada da ilk çalışma Kedzierawski [25] tarafından 1985 yılında yapılmıştır. Kedzierawski çalışmasında

$$|a_2| \leq \begin{cases} 1.5894; & f, f^{-1} \in \mathcal{S} \\ 2; & f, f^{-1} \in \mathcal{S}^* \\ 1.507; & f \in \mathcal{S}^*,\ f^{-1} \in \mathcal{S} \\ 1.224; & f \in \mathcal{C},\ f^{-1} \in \mathcal{S} \end{cases}$$

kesin olmayan sınırları elde etmiştir. Aynı yılda Taha [44] daha iyi bir sınır olarak $|a_2| \leq 1.485$ olduğu ispatlamıştır.

Daha sonra 1986 yılında Brannan ve Taha'nın güçlü bi-yıldızıl, α - mertebeden bi-yıldızıl ve α - mertebeden bi-konveks fonksiyonlar için a_2 ve a_3 için kesin olmayan üst sınırlarını verdiğini görüyoruz. Özellikle 2010 yılından sonra bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıflara ait fonksiyonlar için a_2, a_3 ve a_4 katsayılarının kesin olmayan üst sınırlarını bulma problemi oldukça hız kazanmıştır. Öyle ki; bu ilk iki katsayı ile ilgili üst sınırlar 2010 yılında Srivastava, Mishra ve Gochhayat'ın [37] çalışmasıyla başlamış, 2011 yılında Frasin ve Aouf [16], 2012 yılında; Ali, Lee, Ravichandran ve Supramaniam [4], Xu, Gui ve Srivastava [47], Xu, Xiao ve Srivastava [48] ve Li and Wang [28], 2013 yılında; Deniz [13], Çağlar, Orhan ve Yağmur [12], Kumar, Kumar ve Ravichandran [26], Srivastava, Bulut, Çağlar ve Yağmur [38], Bulut [9], Crişan [11], Magesh ve Yamini [29], Tang, Deng ve Li [45], Murugusundaramoorthy, Magesh ve Prameela [30], Prema ve Keerthi [35] and Srutha ve Chinthamani [43] ile devam ederek ve materyal ve yöntem bölümünde de sunulan 2014-2016 yılları arasında yapılan birçok çalışmayla halen güncelliğini korumaktadır. Bu çalışmaların tamamında bulunan üst sınırlar kesin değildir. Dolayısıyla bi-ünivalent fonksiyonların katsayı problemi ile ilgili iki açık problem göze çarpmaktadır. Bunlardan biri her $n \in \mathbb{N}$ için genel a_n katsayılarının üst sınırını bulmak diğeride kesin üst sınır bulmaktır. Her iki problemde bugüne kadar çözülememiştir. Yalnız Jahangiri ve Hamidi [22] 2013 yılında yaptığı çalışmada bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı için Faber polinomlarının katsayılarının özelliklerini kullanarak $k \in \{2,3,...,n-1\}$ için $a_k = 0$ olması durumunda a_n için kesin olmayan üst sınır bulmuştur. Bununla açık problem olarak bildiğimiz genel a_n katsayılarının üst sınırını bulmak kısmende olsa çözüme kavuşmuştur. Bu çalışmadan sonra bu konu üzerine 2014 yılında; Hamidi ve Jahangiri [18,19], Bulut [10] ve Jahangiri, Hamidi ve Halim [24], 2015 yılında; Jahangiri ve Hamidi [23] ve Hamidi ve Jahangiri [20] ve 2016 yılında ise; Hamidi ve Jahangiri [21] ve Deniz ve arkadaşlarının [14] çalışmalarını görmekteyiz.

Tezin kuramsal Temeller başlığı altında tezde kullanılacak temel tanım ve bilgiler sunuldu. Materyal ve yöntem kısmında ise bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları için katsayı problemi ile ilgili bugüne kadar yapılan çalışmaların bir özeti verildi. Bulgular kısmında ise ilk defa bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu. Bu kavramlar Ponnusamy ve Silverman'ın [34] kitabından alınmıştır.

Tanım 2.1.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) olarak adlandırılır.

$\overline{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir. Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bu S kümesine bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferensiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [34].

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U\left(z_0, r\right)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferensiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [34].

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar [34].

Teorem 2.2.1 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir [34].

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir [34].

Teorem 2.2.2 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{3/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur [34].

Tanım 2.2.3 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir [34].

Teorem 2.2.3 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir [34].

Tanım 2.2.4 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir [34].

Tanım 2.2.5 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A bölgesinde meromorf fonksiyon denir [34].

Teorem 2.2.4 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz [34].

Sonuç 2.2.1: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır [34].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.1 (Schwarz lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ ile sağlanır [9].

Teorem 2.2.5 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz [34].

Sonuç 2.2.2: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ bu bölgede sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır [34].

Tanım 2.2.6 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [15].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.6: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [15].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0.$ Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.1: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.6 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.7 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir [15].

Örneğin $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur

Teorem 2.2.7: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.8 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [15].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in U) \tag{2.3}$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \right\}$$

şeklinde gösterilir [15,17,33].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \dfrac{1+i}{2} \in U$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \dots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme: $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n r^{n-1}z^n, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0\in U$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(U)$ olsun. Bu durumda,

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+..., \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir [15].

Tanım 2.3.2 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [15].

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z),\ z\in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [15].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.4 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in\mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [15,33].

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde $f\in\mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}^*\Rightarrow|a_n|\le n$ değerlendirmesi doğrudur [33,17].

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

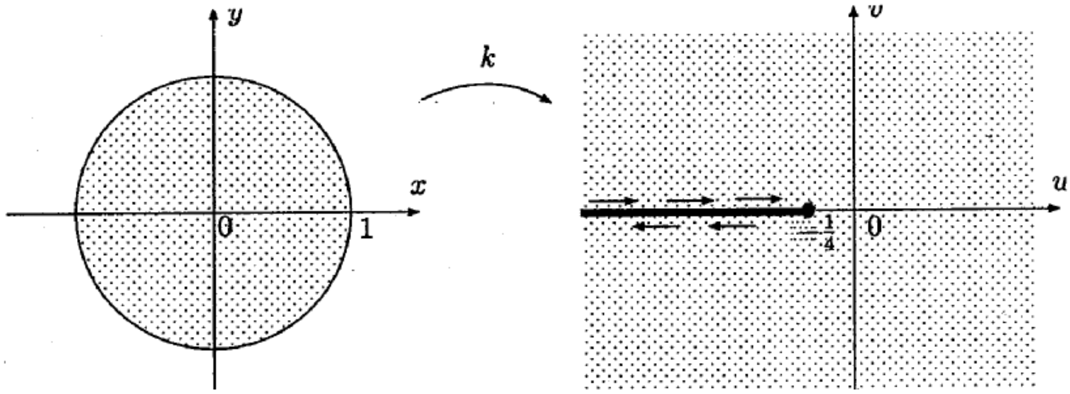
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu,

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}\left[g(z) - 1\right]$$

biçiminde yazılarak U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n \in \mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 2.3.6 kullanılarak da $z = re^{i\theta}$ ve $(0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\geq\frac{1+r}{1-r}>0$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in U$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in U$ olmak üzere $f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha-1\right]$ fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in\mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [15,33].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.3: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde $f\in\mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_n|\leq1$ değerlendirmesi doğrudur [17,33].

Örneğin; $f(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1}\in\mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\ge\frac{1-r^2}{1+r^2}>0\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2 ve 2.3.3 ün bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.4 (Alexander Teoremi): $f\in\mathcal{A}$ ve $z\in U$ olmak üzere, $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f\in\mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g\in\mathcal{S}^*$ olmasıdır [15,17,33].

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan subordinasyon ve Hadamard çarpım kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.6: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir [15].

Eğer g ünivalent ise $f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(U)\subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\le|f'(0)|$ ve $g(U_r)\subset f(U_r)$ dir [15].

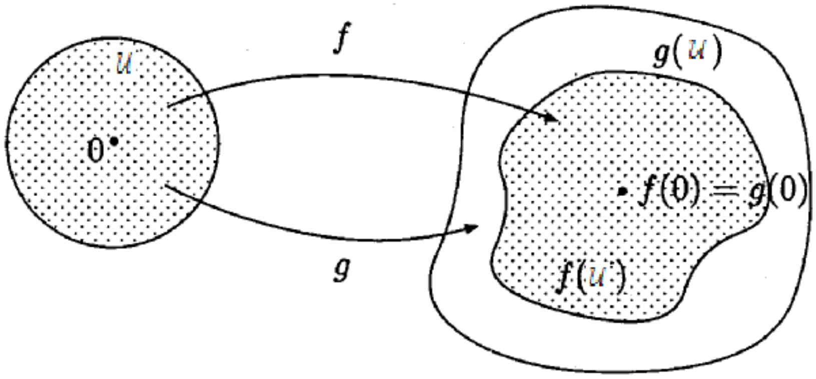
Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\le r}|f(z)| \le \max_{|z|\le r}|g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \iff p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \phi(z) \in \Omega \iff \phi(z) \prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.2: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.7: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları,

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $"*"$ Hadamard çarpımını gösterir [15].

Tanım 2.3.8 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.3.9 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir [17].

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Özel olarak, $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere $\mathcal{S}^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(\beta) \subset \mathcal{C}$ dır.

Tanım 2.3.10: $\varphi : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)>0,\ \operatorname{Re}(\varphi(\mathrm{z}))>0$ koşullaını sağlasın. Ayrıca $\varphi(U)$da reel eksene göre simetrik olsun. Bu koşullarını sağlayan fonksiyonlar $\mathcal{W}$ sınıfındandır denilir.

Bu durumda $\varphi \in \mathcal{W}$ ise

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots \quad (z \in U,\ B_k \in \mathbb{C})$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir.

Aynı $\mathcal{W}$ sınıfı ile $\mathcal{P}$ sınıfı arasında yakından bir ilişki vardır. Öyle ki; $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ve $u, v : U \to U,\ u(0) = v(0) = 0$ fonksiyonları için

$$p_1(z) = \frac{1+u(\mathrm{z})}{1-u(\mathrm{z})} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

ve

$$p_2(z)=\frac{1+v(z)}{1-v(z)}=1+b_1z+b_2z^2+...$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$u(z)=\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}=\frac{c_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+...$$

ve

$$v(z)=\frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1}=\frac{b_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)z^2+...$$

yazılır. Böylece

$$\varphi(u(z))=1+\frac{B_1c_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}c_1^2B_2\right\}z^2+...$$

ve

$$\varphi(v(z))=1+\frac{B_1b_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}b_1^2B_2\right\}z^2+...$$

elde edilir [4].

Tanım 2.3.11 (Ma-Minda Yıldızıl Fonksiyon): $f\in\mathcal{A}$ ve $\varphi\in\mathcal{W}$ olsun. Her $z\in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denir. Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*[\varphi]$ ile gösterilir [4].

Özel durumda

$$\mathcal{S}^*\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=\mathcal{S}^*\text{ ve }\mathcal{S}^*\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=\mathcal{S}^*(\alpha)\ \ (0\le\alpha<1)$$

yazılır.

Tanım 2.3.12 (Ma-Minda Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. Her $z \in U$ için

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda konveks fonksiyon denir. Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}[\varphi]$ ile gösterilir [4].

Özel durumda

$$\mathcal{C}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=\mathcal{C} \text{ ve } \mathcal{C}\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=\mathcal{C}(\alpha) \ (0 \le \alpha < 1)$$

yazılır.

Tanım 2.3.13 ($\gamma-$Mertebeden Ma-Minda Yıldızıl Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C}/\{0\}$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona $\gamma-$kompleks mertebeden Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denilir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.3.14 ($\gamma-$Mertebeden Ma-Minda Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C}/\{0\}$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona $\gamma-$kompleks mertebeden Ma-Minda konveks fonksiyon denilir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir [14]

$\gamma-$kompleks mertebeden Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları arasında $\mathcal{C}[\gamma;\varphi] \subset \mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ bağıntısı mevcuttur. Bu sınıflar için γ nın özel durumlarında $\mathcal{S}^*[1;\varphi]=\mathcal{S}^*[\varphi]$ ve $\mathcal{C}[1;\varphi]=\mathcal{C}[\varphi]$ elde edilir.

Tanım 2.3.15 ($\mathcal{K}(\beta)$ sınıfı): $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu varsa bu durumda $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{K}(\beta)$ ile gösterilir [18].

Özel olarak $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$ sınıfına konvekse yakın fonksiyonların sınıfı, bu sınıfa ait fonksiyonlarada konvekse yakın fonksiyon denir.

Yukarıdaki sınıflar arasında

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

içerme bağıntısı vardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra bi-ünivalent fonksiyonların sınıfının belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı problemine ilişkin yapılan çalışmalar tarihi seyir içinde sunulmuştur.

3.1 Bi-ünivalent Fonksiyonların Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu başlık altında bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verildi.

Tanım 3.1.1: Hem kendisi hemde tersi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonun tersi f^{-1} ile gösterilirse

$$f^{-1}\left(f(z)\right)=z$$

yazılır. Diğer taraftan Koebe-çeyrek teoremine göre her U diskinin $f\in\mathcal{S}$ altında görüntüsü orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski ihtiva ettiğini biliyoruz. Böylece her $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu

$$f^{-1}\left(f(z)\right)=z,\quad \left(z\in U\right)$$

ve

$$f\left(f^{-1}(w)\right)=w,\quad \left(|w|<r_0\left(f\right), r_0\left(f\right)\geq\frac{1}{4}\right)$$

olacak şekilde f^{-1} tersine sahiptir.

Bu durumda $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}$ alınırsa, $f^{-1}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$ olacağı açıktır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(w)\right) &= f^{-1}(w) + a_2\left[f^{-1}(w)\right]^2 + a_3\left[f^{-1}(w)\right]^3 + \ldots \\
&= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n + a_2\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^2 + a_3\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^3 + \ldots \\
&= w + (a_2 + b_2)w^2 + (b_3 + 2a_2b_2 + a_3)w^3 + (b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2{}^2 + 3a_3b_2 + a_4)w^3 + \ldots \\
&= w
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. Buradan karşılıklı w nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse a_n ile b_n ler arasında

$$
\begin{aligned}
&a_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \\
&b_3 + 2a_2b_2 + a_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 2a_2^2 - a_3 \\
&b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2{}^2 + 3a_3b_2 + a_4 = 0 \Rightarrow b_4 = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4
\end{aligned}
$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Böylece

$$
f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right)w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)w^4 + \ldots
$$

olarak yazılır. Buradan $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$ olduğu görülmektedir. Yalnız şunu söylemekte fayda vardır her $f(z) \in \mathcal{S}$ için $f^{-1}(z) \in \mathcal{S}$ olmayabilir. Örneğin; $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n$ Koebe fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun tersi için son eşitlikteki f^{-1} in açılımı kullanılırsa

$$
f^{-1}(z) = z - 2z^2 + 5z^3 - 14z^4 + \ldots
$$

olduğu görülür. Yine $f(z) \in \mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n| \le n$ olduğu bilgisinden yola çıkarak $|a_n| \not\le n$ ise $f(z) \notin \mathcal{S}$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla Koebe fonksiyonun tersinin katsayılarına bakıldığında örneğin üçüncü katsayı için $|b_3| = 5 \not\le 3$ olduğundan $\mathcal{S}$ sınıfına ait olamaz. Bu durum diğer katsayılar içinde geçerlidir. Bundan dolayı kendisi ve tersi ünivalent fonksiyonları bir kategoride incelemek bir problem olarak karşımıza çıkar.

Bundan sonra $\mathcal{S}$ sınıfında bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıfını Σ ile göstereceğiz. Yani

$$
\Sigma = \left\{ f \in \mathcal{S} :\ \forall z \in U \text{ için } f^{-1}(z) \in \mathcal{S} \right\}
$$

şeklinde yazılır.

$\sum$ sınıfından fonksiyonlara örnek olarak

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z}$$

$$f_2(z) = -\log(1-z)$$

$$f_3(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonlarını verebiliriz.

Diğer taraftan,

$$g_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$g_2(z) = z - \frac{z^2}{2}$$

$$g_3(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonları $\sum$ sınıfına ait değildir.

3.2. Bi-ünivalent Fonksiyonların Bazı Altsınıfları için Katsayı Eşitsizlikleri

Bu başlık altında bi-ünivalent fonksiyonların sınıfının belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı problemine ilişkin yapılan çalışmalar tarihi seyir içinde verilmiştir. Bi-ünivalent fonksiyonların $\sum$ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı üzerine yapılan çalışmalar giriş bölümünde sunulmuştu. Şimdi $\sum$ sınıfının altsınıflarına ait fonksiyonlar için bulunan katsayı sınırları aşağıda verilecektir. Bu konuyla ilgili ilk çalışma 1986 yılında Brannan ve Taha'ya ait olup buldukları sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuçlara geçmeden önce ispatlarda sıkça kullanılan bir lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1: $p \in \mathcal{P}$ ve $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $|c_n| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile sağlanır [15].

Tanım 3.2.1: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in U,\, 0 < \alpha \le 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (w \in U,\, 0 < \alpha \le 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\alpha -$mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ ile gösterilir [8].

Teorem 3.2.1: f fonksiyonu $\mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le 2\alpha$$

eşitsizlikleri sağlanır [8].

Tanım 3.2.2: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta \quad (z \in U,\, 0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right) > \beta \quad (w \in U,\, 0 \le \beta < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\beta -$mertebeden bi-yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ ile gösterilir [8].

Teorem 3.2.2: f fonksiyonu $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{2(1-\beta)}$$

ve

$$|a_3| \le 2(1-\beta)$$

eşitsizlikleri sağlanır [8].

Tanım 3.2.3: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \quad (z \in U, 0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) > \beta \quad (w \in U, 0 \le \beta < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\beta-$mertebeden bi-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}_{\Sigma}(\beta)$ ile gösterilir [8].

Teorem 3.2.3: f fonksiyonu $\mathcal{C}_{\Sigma}(\beta)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{1-\beta} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le 1-\beta$$

eşitsizlikleri sağlanır [8].

Ünivalent fonksiyonları bi-ünivalent fonksiyonlardan ayıran özelliklerden biri de Alexander teoreminin (Teorem 2.3.4) sağlanmamasıdır. Örneğin $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu Tanım 3.2.3 deki eşitsizlikleri sağladığından $\mathcal{C}_{\Sigma}(0)$ sınıfına aittir. Fakat $zf'(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonsiyonu bi-ünivalent olmadığından $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(0)$ sınıfına ait değildir.

2010 yılında Srivastava ve arkadaşları [37] Brannan ve Taha'nın yukarıdaki düşüncesinden hareketle ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip türevi pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Tanım 3.2.4: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(f'(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(z \in U, 0 < \alpha \le 1\right)$$

ve

$$\left|\arg\left(g'(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(w \in U, 0 < \alpha \le 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu H_{Σ}^{α} $\left(0 < \alpha \le 1\right)$ sınıfındandır denir [37].

Aşağıdaki teorem H_Σ^α sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ hakkında kesin olmayan üst sınırlar hakkında bilgi verir.

Teorem 3.2.4: $f \in H_\Sigma^\alpha$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{\alpha(3\alpha+2)}{3}$$

dır [37].

İspat: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Bu durumda Tanım 3.2.4 de verilen argüman eşitsizliklerini aslında $Q(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ ve $L(w) = 1 + l_1 w + l_2 w^2 + \ldots$ olmak üzere

$$f'(z) = \left[Q(z)\right]^\alpha \text{ ve } g'(w) = \left[L(w)\right]^\alpha$$

olacak şekilde $\operatorname{Re} Q(z) > 0$ ve $\operatorname{Re} L(w) > 0$ veya diğer bir deyişle $Q, L \in \mathcal{P}$ şartlarını sağlayan fonksiyonlarının var olmasına denk olarak söyleyebiliriz. İlk önce $f'(z) = \left[Q(z)\right]^\alpha$ ifadesinde karşılıklı z nin aynı dereceden kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse

$$2a_2 = \alpha c_1 \tag{3.1}$$

ve

$$3a_3 = \alpha c_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}c_1^2 \tag{3.2}$$

bulunur. Diğer taraftan $g'(w) = \left[L(w)\right]^\alpha$ ifadesinde karşılıklı w nın aynı dereceden kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse de

$$-2a_2 = \alpha l_1 \tag{3.3}$$

ve

$$3(2a_2^2 - a_3) = \alpha l_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} l_1^2 \tag{3.4}$$

elde edilir.

Yukarıdaki (3.1) ve (3.3) eşitliklerinden

$$c_1 = -l_1 \quad \text{ve} \quad 8a_2^2 = \alpha^2(c_1^2 + l_1^2) \tag{3.5}$$

yazılır. Diğer yandan (3.2) ve (3.4) eşitliklerinden de

$$6a_2^2 - \left(\alpha c_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} c_1^2 \right) = \alpha l_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} l_1^2$$

bulunur. (3.5) eşitliğinin ikinci kısmı son eşitlikte yerine yazılırsa

$$6a_2^2 = \alpha(c_2^2 + l_2^2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(l_1^2 + c_1^2) = \alpha(c_2 + l_2) + \alpha(\alpha-1)\frac{4a_2^2}{\alpha^2}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2}{2(\alpha+2)}(c_2 + l_2)$$

olur. Son eşitlik için Lemma 3.2.1 yani $|c_2| \leq 2$ ve $|l_2| \leq 2$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|a_2| \leq \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}$$

eşitsizliği bulunur.

Teoremin ikinci sonucu olan $|a_3|$ ün sınırını bulmak için (3.2) ve (3.4) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$6a_3 - 6a_2^2 = \alpha c_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} c_1^2 - \left(\alpha l_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} l_1^2 \right)$$

bulunur. (3.5) deki a_2^2 nin değeri yerine yazılıp yine (3.5) deki $c_1^2 = l_1^2$ sonucu dikkate alınırsa

$$a_3 = \frac{1}{4}\alpha^2 c_1^2 + \frac{1}{6}\alpha\left(c_2 - l_2\right)$$

elde edilir. Son eşitlik için Lemma 3.2.1 yani $|c_1| \leq 2, |c_2| \leq 2$ ve $|l_2| \leq 2$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|a_3| \leq \frac{1}{4}\alpha^2 4 + \frac{1}{6}\alpha 4 = \frac{\alpha\left(3\alpha+2\right)}{3}$$

elde edilerek teorem ispatlanmış olur.

Tanım 3.2.5: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) > \beta \quad \left(z \in U, 0 \le \beta < 1\right)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(g'(w)\right) > \beta \quad \left(w \in U, 0 \le \beta < 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $H_{\Sigma}(\beta)\left(0 \le \beta < 1\right)$ sınıfındandır denir [37].

Aşağıdaki teorem $H_{\Sigma}(\beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ hakkında kesin olmayan sınırları ihtiva eder.

Teorem 3.2.5: $f \in H_{\Sigma}(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le \frac{(1-\beta)(5-3\beta)}{3}$$

dır [37].

Frasin ve Aouf 2011 yılında Tanım 3.2.4 ve Tanım 3.2.5 deki sınıflarının bir parametreye bağlı genel halini tanımlayarak bu sınıflara ait fonksiyonların $|a_2|$ *ve* $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan sınırlarını elde etmişlerdir. Dolayısıyla bulununan sonuçlar aynı zamanda Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 i genelleştirir.

Tanım 3.2.6: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu $0 < \alpha \le 1$ ve $\lambda \ge 1$ olmak üzere her $w, z \in U$ için

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

şartlarını sağlıyorsa $f \in \Sigma$ fonksiyonu $SB_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ sınıfındandır denilir [16].

Teorem 3.2.6: $f \in SB_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2\alpha}{2\lambda+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır [16].

Yukarıdaki Teorem 3.2.6 da $\lambda=1$ alınırsa Srivastava ve arkadaşlarının Teorem 3.2.4 de buldukları sonuçlar elde edilir.

Tanım 3.2.7: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right) > \beta \quad \left(z \in U;\, 0 \le \beta < 1,\, \lambda \ge 1\right)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right) > \beta \quad \left(w \in U;\, 0 \le \beta < 1,\, \lambda \ge 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa $f \in \Sigma$ fonksiyonu $B_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denilir [16].

Teorem 3.2.7: $f \in B_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır [16].

Teorem 3.2.7 de $\lambda=1$ alınırsa Srivastava ve arkadaşlarının Teorem 3.2.5 de buldukları sonuçlar elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.7 de bulunan sonuçlar sırasıyla Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 de bulunan sonuçların genelleştirilmişidir.

Xu ve arkadaşları [47] 2012 yılında yaptıkları çalışmada Srivastava ve arkadaşlarının 2010 yılında yaptıkları çalışmayı (Teorem 3.2.4 ve 3.2.5) genelleştirmiş ve sonuçlarını iyileştirmiştir.

Tanım 3.2.8: $h, p : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları

$$\min\left\{\operatorname{Re}\left(h(z)\right), \operatorname{Re}\left(p(z)\right)\right\} > 0$$

ve

$$h(0) = p(0) = 1$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f \in \Sigma$ ve $g = f'$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in U$ için $f'(z) \in h(U)$ ve $g'(z) \in p(U)$ koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $H_\Sigma^{h,p}$ sınıfındandır denilir [47].

Teorem 3.2.8: $f \in H_\Sigma^{h,p}$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{|h''(0)| + |p''(0)|}{12}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{|h''(0)|}{6}$$

dır [47].

Eğer Tanım 3.2.8 de

$$h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \ldots \quad \left(z \in U,\, 0 < \alpha \le 1\right)$$

alınırsa Tanım 3.2.4 de ki H_Σ^α sınıfı,

$$h(z) = p(z) = \frac{1 + \left(1 - 2\beta\right) z}{1 - z} = 1 + 2(1-\beta) z + 2(1-\beta) z^2 + \ldots \quad \left(z \in U,\, 0 \le \beta < 1\right)$$

alınırsa da Tanım 3.2.5 deki $H_\Sigma\left(\beta\right)$ sınıfı elde edilir. Bu özel fonsiyonlarla ilgili sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.2.1: Eğer Teorem 3.2.8 de $h(z)=p(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ $\left(z\in U, 0<\alpha\leq 1\right)$ alınırsa

$$|a_2|\leq \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \quad \text{ve} \quad |a_3|\leq \frac{2}{3}\alpha^2$$

elde edilir.

Bu sonuçtaki $|a_2|$ *ve* $|a_3|$ için bulunan sonuçlar Teorem 3.2.4 dekine göre daha iyidir. Çünkü, Teorem 3.2.4 ve Sonuç 3.2.1 deki $|a_2|$ *ve* $|a_3|$ ün üst sınırları kıyaslandığına

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \leq \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}$$

ve

$$\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \frac{\alpha\left(3\alpha+2\right)}{3}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.2.2: Eğer Teorem 3.2.8 de $h(z)=p(z)=\frac{1+\left(1-2\beta\right)z}{1-z}$ alınırsa

$$|a_2|\leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3}} \quad \text{ve} \quad |a_3|\leq \frac{2(1-\beta)}{3}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2 de $|a_3|$ için bulunan sonuç Teorem 3.2.5 dekine göre daha iyidir. Çünkü kıyaslandığında

$$\frac{2(1-\beta)}{3}\leq \frac{\left(1-\beta\right)\left(5-3\beta\right)}{3}, \quad \left(0\leq \beta<1\right)$$

dır.

2010 yılında Srivastava ve arkadaşları [37] tarafından Teorem 3.2.4 ve 3.2.5 de bulunan sonuçların bir başka genelleştirmesinide 2012 yılında Ali ve arkadaşları [4] tarafından subordinasyon kullanarak verilmiştir. Bulunan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Tanım 3.2.9: $f \in \Sigma$, $\varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olmak üzere

$$f'(z) \prec \varphi(z)$$

ve

$$g'(w) \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $H_{\Sigma}[\varphi]$ sınıfındandır denilir [4].

Eğer Tanım 3.2.9 da

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots \quad \left(z \in U,\, 0 < \alpha \le 1\right)$$

alınırsa Tanım 3.2.4 de ki H_{Σ}^{α} sınıfı,

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \dots \quad \left(z \in U,\, 0 \le \beta < 1\right)$$

alınırsa da Tanım 3.2.5 deki $H_{\Sigma}(\beta)$ sınıfı elde edilir.

Teorem 3.2.9: $f \in H_{\Sigma}[\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3B_1^2 - 4B_2 + 4B_1\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le B_1\left(\frac{1}{3} + \frac{B_1}{4}\right)$$

dır [4].

Teorem 3.2.9 da

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \dots = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$$

fonksiyonu alınırsa yani $B_1 = 2\alpha$ ve $B_2 = 2\alpha^2$ alınırsa Teorem 3.2.4 deki sonuçlara,

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \dots = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots$$

fonksiyonu alınırsa yani $B_1 = B_2 = 2(1-\beta)$ alınırsa da Teorem 3.2.5 deki sonuçlara ulaşılır.

1986 yılında Brannan ve Taha [8] tarafından Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 de bulunan sonuçların bir genelleştirmesini 2012 yılında Ali ve arkadaşları [4] aynı makalede subordinasyon kullanarak vermiştir. Bulunan sonuçlar Teorem 3.2.10, 3.2.11 ve 3.2.12 olarak aşağıda sunulmuştur.

Tanım 3.2.10: $f \in \Sigma,\ \varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{\lambda z^2 f''(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\frac{w\mathrm{g}'(w)}{\mathrm{g}(w)} + \frac{\lambda w^2 \mathrm{g}''(w)}{\mathrm{g}(w)} \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $ST_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ sınıfındandır denilir [4].

Eğer Tanım 3.2.10 da $\lambda = 0$ ve

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \ldots \quad \left(z \in U,\ 0 < \alpha \leq 1\right)$$

alınırsa Tanım 3.2.1 de ki $\mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ sınıfı, $\lambda = 0$ ve

$$\varphi(z) = \frac{1+\left(1-2\beta\right)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \ldots \quad \left(z \in U,\ 0 \leq \beta < 1\right)$$

alınırsa da Tanım 3.2.2 deki $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ sınıfı elde edilir.

Teorem 3.2.10: $f \in ST_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|B_1^2(1+4\lambda) + (B_1 - B_2)(1+2\lambda)^2\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{B_1 + |B_2 - B_1|}{1+4\lambda}$$

dır [4].

Teorem 3.2.10 da $\lambda = 0$ ve

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \ldots = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

fonksiyonu yani $B_1 = 2\alpha$ ve $B_2 = 2\alpha^2$ alınırsa Teorem 3.2.1 deki sonuçlara, $\lambda = 0$ ve

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \ldots = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

fonksiyonu yani $B_1 = B_2 = 2(1-\beta)$ alınırsa da Teorem 3.2.2 deki sonuçlara ulaşılır.

Tanım 3.2.11: $f \in \Sigma$, $\varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$(1-\lambda)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) + \lambda\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right) + \lambda\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $M_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ sınıfındandır denilir [4].

Tanım 3.2.11 de λ ve φ nin özel durumları için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$M_{\Sigma}\left[0;\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right] = \mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$$

$$M_{\Sigma}\left[0;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right] = \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$$

$$M_{\Sigma}\left[1;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right] = \mathcal{C}_{\Sigma}(\beta).$$

Teorem 3.2.11: $f \in M_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{(1+\lambda)\left|B_1^2 + (1+\lambda)(B_1 - B_2)\right|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{B_1 + |B_2 - B_1|}{1+\lambda}$$

dır [4].

Teorem 3.2.11 de λ ve φ nin özel durumları için

$M_{\Sigma}\left[0;\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.1 in sonuçlarına,

$M_{\Sigma}\left[0;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.2 in sonuçlarına,

$M_{\Sigma}\left[1;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.3 ün sonuçlarına ulaşılır.

Tanım 3.2.12: $f \in \Sigma,\ \varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{1-\lambda} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)^{1-\lambda} \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $L_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ sınıfındandır denilir [4].

Teorem 3.2.12: $f \in L_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{2B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|2(\lambda^2-3\lambda+4)B_1^2+4(\lambda-2)^2(B_1-B_2)\right|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{2(3-2\lambda)(B_1+|B_1-B_2|)}{|(3-2\lambda)(\lambda^2-3\lambda+4)|}$$

dır [4].

Teorem 3.2.12 de λ ve φ nin özel durumları için

$L_{\Sigma}\left[0;\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.1 in sonuçlarına,

$L_{\Sigma}\left[0;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.2 nin sonuçlarına,

$L_{\Sigma}\left[1;\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right]$ alınırsa Teorem 3.2.3 ün sonuçlarına ulaşılır.

Li and Wang 2012 yılında Brannan ve Taha'nın $\mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ sınıfını genelleştirerek bu sınıfa ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için üst sınır bulmuşlardır.

Tanım 3.2.13: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\lambda\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0<\alpha\le 1,\ \lambda \ge 0,\ z\in U)$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\lambda\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0<\alpha\le 1,\ \lambda \ge 0,\ w\in U)$$

şartlarını sağlıyorsa $M_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ sınıfındandır denilir [28].

Teorem 3.2.13: $f(z) \in M_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(\alpha+1+\lambda-\alpha\lambda)}}$$

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{\alpha}{1+2\lambda}$$

dır [28].

2013 yılında Murugusundaramorthy ve arkadaşları Brannan ve Taha'nın daha önceden çalıştığı $\mathcal{SS}_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ ve $\mathcal{C}_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfının bir başka genelleştirmesini yaparak bu sınıfa ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için bir üst sınır bulmuşlardır.

Tanım 3.2.14: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(0<\alpha\le 1,\ 0\le\lambda<1,\ z\in U\right)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(0<\alpha\le 1,\ 0\le\lambda<1,\ w\in U\right)$$

şartlarını sağlıyorsa $G_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ sınıfındandır denilir [30].

Teorem 3.2.14: $f \in G_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}$$

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

dır [30].

Tanım 3.2.15: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right) > \beta, \quad (0 \le \beta < 1, 0 \le \lambda < 1, z \in U)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\right) > \beta, \quad (0 \le \beta < 1, 0 \le \lambda < 1, w \in U)$$

şartlarını sağlayan f fonksiyonu $N_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denilir [30]

Teorem 3.2.15: $f \in N_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{1-\lambda}$$

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{1-\lambda}$$

dır [30].

Teorem 3.2.14 ve Teorem 3.2.15 de $\lambda = 0$ yazılırsa aşağıdaki Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 deki sonuçlar elde edilir.

Çağlar ve arkadaşları 2013 yılında Tanım 3.2.6 ve Tanım 3.2.7 deki sınıfların genel halini tanımlayarak bu sınıflara ait fonksiyonların $|a_2|$ *ve* $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan sınırlarını elde etmişlerdir. Dolayısıyla bulunan sonuçlar aynı zamanda Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.7 nin genelleştirilmişi olur. Ayrıca aşağıda Teorem 3.2.17 de bulunan sonuçlar Teorem 3.2.7 de bulunan sonuçları iyileştirir.

Tanım 3.2.16: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z,w \in U$ için

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0\right)$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad \left(0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0\right)$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $SB_{\Sigma}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfındandır denilir [12].

Teorem 3.2.16 : $f \in SB_{\Sigma}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}} \text{ ve } |a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{2\alpha}{2\lambda+\mu}$$

dır [12].

Tanım 3.2.17: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z,w \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right) > \beta \quad \left(0\le\beta< 1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0\right)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right) > \beta \quad \left(0\le\beta< 1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0\right)$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonu $B_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfındandır denilir [12].

Teorem 3.2.17: $f \in B_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(\lambda+\mu)(\mu+2\lambda)}}, \frac{2(1-\beta)}{\lambda+\mu}\right\},$$

$$|a_3| \le \begin{cases} \min\left\{\dfrac{4(1-\beta)}{(\lambda+\mu)(\mu+2\lambda)}, \dfrac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+\mu)^2}+\dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu}\right\}, & 0\le\mu<1 \\ \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu}, & \mu\ge 1 \end{cases}$$

dır [12].

Srivastava ve arkadaşları [38] aynı yıl (2013) Tanım 3.2.16 ve 3.2.17 yi tek bir tanım altında vererek genelleştirmiştir. Buldukları sonuçlar Teorem 3.2.16 ve 3.2.17 deki sonuçların genelleştirilmişidir.

Tanım 3.2.18: $h, p : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları

$$\min\left\{\operatorname{Re}(h(z)), \operatorname{Re}(p(z))\right\} > 0$$

ve

$$h(0) = p(0) = 1$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f \in \Sigma$ ve $g = f'$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu $z, w \in U$ için $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \in h(U)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \in p(U)$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $N_{\Sigma}^{h,p}(\lambda, \mu)$ sınıfındandır denilir [38].

Teorem 3.2.18: $f \in N_{\Sigma}^{h,p}(\lambda, \mu)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{|h'(0)|^2 + |p'(0)|^2}{2(\lambda+\mu)^2}}, \sqrt{\frac{|h''(0)| + |p''(0)|}{2(\mu+1)(2\lambda+\mu)}}\right\}$$

ve

$$|a_3| \leq \min\left\{\frac{|h'(0)|^2 + |p'(0)|^2}{2(\lambda+\mu)^2} + \frac{|h''(0)| + |p''(0)|}{4(2\lambda+\mu)}, \frac{(3+\mu)|h''(0)| + |1-\mu||p''(0)|}{4(\mu+1)(2\lambda+\mu)}\right\}$$

dır [38].

Teorem 3.2.16 ve 3.2.17 de $\mu = 1$ alınırsa Frasin ve Aouf'un [16] sırasıyla Teorem 3.2.6 ve 3.2.7 deki sonuçlarına, $\lambda = \mu + 1 = 1$ alınırsa da Brannan ve Taha'nın [8] Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 deki sonuçlarına ulaşılır. Teorem 3.2.17 de $\mu = 1$ alınması durumunda

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(\lambda+1)(1+2\lambda)}}, \frac{2(1-\beta)}{\lambda+1}\right\}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

sonuçlar bulunur ki, bu sonuçların Teorem 3.2.7 de bulunan sonuçlardan daha iyi olduğu açıktır.

Kumar ve arkadaşları [26] 2013 yılında yukarıda tanımlanan bazı sınıfların genelleştirmelerini tanımlayarak bu sınıflara ait fonksiyonlar için ikinci ve üçüncü katsayılar için kesin olmayan üst sınırlar bulmuşlardır. Bulunan sınırlar daha önceden bulunan sonuçları genelleştirmesinin yanı sıra daha iyi sonuçlar vermesiyle daha çok önem arz eder.

Tanım 3.2.19: $f \in \Sigma$, $\varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \ge 0$ olmak üzere

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \prec \varphi(z)$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \prec \varphi(w)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $\Re_\Sigma(\lambda,\varphi)$ sınıfındandır denilir [26].

Teorem 3.2.19: $f \in \Re_\Sigma(\lambda,\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{B_1 + |B_1 - B_2|}{1+2\lambda}}$$

dır [26].

Dikkat edilirse $\Re_\Sigma(\lambda,\varphi)$ sınıfında $\varphi(z) = \dfrac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ alınırsa Frasin ve Aouf'un [16] Teorem 3.2.7 deki sonucu elde edilir.

Bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonların bir başka genelleştirmesini Kumar ve arkadaşları 2013 yılında [26] subordinasyon kullanarak aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 3.2.20: $f \in \Sigma,\ \varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{g(w)} \prec \varphi(w)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}[\varphi]$ sınıfındandır denilir [26].

Teorem 3.2.20: $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}[\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{B_1 + |B_2 - B_1|},\ \sqrt{\frac{B_1^2 + B_1 + |B_2 - B_1|}{2}},\ \frac{B_1\sqrt{B_1}}{B_1^2 + |B_1 - B_2|}\right\}$$

ve

$$|a_3| \leq \min\left\{B_1 + |B_2 - B_1|,\ \frac{B_1^2 + B_1 + |B_2 - B_1|}{2},\ R\right\}$$

dır. Burada

$$R := \frac{1}{4}\left(B_1 + 3B_1 \max\left\{1; \left|\frac{B_1 - 4B_2}{3B_1}\right|\right\}\right)$$

şeklindedir [26].

Tanım 3.2.21: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(\mathrm{z})$$

ve

$$1 + \frac{wg''(w)}{\mathrm{g}'(w)} \prec \varphi(w)$$

şartını sağlayan fonksiyonlar $\mathcal{C}_{\Sigma}[\varphi]$ sınıfındandır denilir [26].

Teorem 3.2.21: $f \in \mathcal{C}_{\Sigma}[\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{B_1^2 + B_1 + |B_2 - B_1|}{6}}, \frac{B_1}{2}\right\}$$

ve

$$|a_3| \leq \min\left\{\frac{B_1^2 + B_1 + |B_2 - B_1|}{6}, \frac{B_1(3B_1 + 2)}{12}\right\}.$$

dır [26].

Teorem 3.2.22: $f \in \Sigma$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{C}[\varphi]$ ve $f^{-1}(z) \prec \varphi(z)$ ise

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{3(B_1 + |B_2 - B_1|)}{8}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{5(B_1 + |B_2 - B_1|)}{12}$$

dır [26].

Teorem 3.2.23: $f \in \Sigma$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{S}^*[\varphi]$ ve $f^{-1}(z) \prec \varphi(z)$ ise

$$|a_2| \leq \frac{\sqrt{5(B_1 + |B_2 - B_1|)}}{3}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{7(B_1 + |B_2 - B_1|)}{9}$$

dır [26].

Teorem 3.2.24: $f \in \Sigma$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{S}^*[\varphi]$ ve $f^{-1} \in C[\varphi]$ ise

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{B_1 + |B_2 - B_1|}{2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{B_1 + |B_2 - B_1|}{2}$$

dır [26].

2013 yılında Tang ve arkadaşları [45] Frasin ve Aouf'un 2011 yılında yaptıkları çalışmayı (Teorem 3.2.6 ve 3.2.7) genelleştirerek aşağıdaki tanım ve bu tanıma bağlı sonuçları bulmuşlardır.

Tanım 3.2.22: $f \in \Sigma,\ \varphi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(z) \quad (\lambda \geq 1, \mu \geq 1, z \in U)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(w) \quad (\lambda \geq 1, \mu \geq 1, w \in U)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu $H_{\Sigma}^{\mu}(\lambda,\varphi)$ sınıfındandır denilir [45].

Teorem 3.2.25: $f \in H_{\Sigma}^{\mu}(\lambda,\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \min\left\{\frac{B_1}{\lambda+\mu}, \sqrt{\frac{2\left(B_1 + |B_2 - B_1|\right)}{(1+\mu)(2\lambda+\mu)}}\right\}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \min\left\{\dfrac{B_1}{2\lambda+\mu} + \dfrac{B_1^2}{(\lambda+\mu)^2}, \dfrac{2\left(B_1 + |B_2 - B_1|\right)}{(1+\mu)(2\lambda+\mu)}\right\}, & 0 \leq \mu < 1 \\ \dfrac{B_1}{2\lambda+\mu} + \dfrac{2|B_2 - B_1|}{(1+\mu)(2\lambda+\mu)}, & \mu \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir [45].

Tanım 3.2.23: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\{0\}$, $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)z^2 f''(z) + \lambda\mu z^3 f'''(z)}{(1-\lambda+\mu)f(z) + (\lambda-\mu)zf'(z) + \lambda\mu z^2 f''(z)} - 1\right) \prec \varphi(z)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{wg'(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)w^2 g''(w) + \lambda\mu w^3 g'''(w)}{(1-\lambda+\mu)g(w) + (\lambda-\mu)wg'(w) + \lambda\mu w^2 g''(w)} - 1\right) \prec \varphi(w)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonları $M_{\Sigma}^{\gamma}(\lambda,\mu,\varphi)$ sınıfındandır denilir [45]

Teorem 3.2.26: $f\in M_{\Sigma}^{\gamma}\left(\lambda,\mu,\varphi\right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{|\gamma|B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|\left[2\left(6\lambda\mu+2\lambda-2\mu+1\right)-\left(2\lambda\mu+\lambda-\mu+1\right)^2\right]B_1^2\gamma+2\left(2\lambda\mu+\lambda-\mu+1\right)^2\left(B_1-B_2\right)\right|}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{|\gamma|\left(B_1+|B_2-B_1|\right)}{\left|2\left[\left(6\lambda\mu+2\lambda-2\mu+1\right)-\left(2\lambda\mu+\lambda-\mu+1\right)^2\right]\right|}$$

elde edilir [45].

Magesh ve Yamini [29] güçlü bi-yıldızıl fonksiyonların bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların ikinci ve üçüncü katsayısı için kesin olmayan sonuçlar bulmuştur.

Tanım 3.2.24: $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $0<\alpha\le1,\ 0\le\lambda\le1$ ve her $z,w\in U$ için

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)+\left(2\lambda^2-\lambda\right)z^2f''(z)}{4\left(\lambda-\lambda^2\right)f(z)+\left(2\lambda^2-\lambda\right)zf'(z)+\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)f(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)+\left(2\lambda^2-\lambda\right)w^2g''(w)}{4\left(\lambda-\lambda^2\right)g(w)+\left(2\lambda^2-\lambda\right)wg'(w)+\left(2\lambda^2-3\lambda+1\right)g(w)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonları $S_{\Sigma}\left(\alpha,\lambda\right)$ sınıfındandır denilir [29].

$S_{\Sigma}\left(\alpha,\lambda\right)$ sınıfında $\lambda=0$ yazılırsa güçlü bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı elde edilir.

Teorem 3.2.27: $f\in S_{\Sigma}\left(\alpha,\lambda\right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha\left(1-2\lambda+25\lambda^2-44\lambda^3+20\lambda^4\right)+\left(1+3\lambda-2\lambda^2\right)^2}}$$

$$|a_3|\le\frac{\alpha}{1+2\lambda^2}+\frac{4\alpha^2}{\left(1+3\lambda-2\lambda^2\right)^2}$$

elde edilir [29].

Tanım 3.2.25: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \beta < 1$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z) + \left(2\lambda^2 - \lambda\right) z^2 f''(z)}{4\left(\lambda - \lambda^2\right) f(z) + \left(2\lambda^2 - \lambda\right) zf'(z) + \left(2\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) f(z)} \right) > \beta$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wg'(w) + \left(2\lambda^2 - \lambda\right) w^2 g''(w)}{4\left(\lambda - \lambda^2\right) g(w) + \left(2\lambda^2 - \lambda\right) wg'(w) + \left(2\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) g(w)} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonları $SM_{\Sigma}\left(\beta, \lambda\right)$ sınıfındandır denilir [29].

$SM_{\Sigma}\left(\beta, \lambda\right)$ sınıfında $\lambda = 0$ yazılırsa bi-yıldızıl, $\lambda = 1$ içinde bi-konveks fonksiyonların sınıfına indirgenir.

Teorem 3.2.28: $f \in SM_{\Sigma}\left(\beta, \lambda\right)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2\left(1-\beta\right)}{12\lambda^4 - 28\lambda^3 + 15\lambda^2 + 2\lambda + 1}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{2\left(1-\beta\right)}{12\lambda^4 - 28\lambda^3 + 15\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

elde edilir [29].

Tanım 3.2.26: $f \in \Sigma$, $\phi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$\frac{2\left[(1-\alpha) zf'(z) + \alpha z (zf'(z))'\right]}{(1-\alpha)(f(z) - f(-z)) + \alpha z (f'(z) + f'(-z))} \prec \phi(z)$$

ve

$$\frac{2\left[(1-\alpha) wg'(w) + \alpha w (wg'(w))'\right]}{(1-\alpha)(g(w) - g(-w)) + \alpha w (g'(w) + g'(-w))} \prec \phi(w)$$

şartını sağlayan f fonksiyonları $\mathcal{S}^*_{\mathcal{S},\Sigma}(\alpha, \phi)$ sınıfındandır denilir [11].

$\mathcal{S}^*_{\mathcal{S},\Sigma}(\alpha,\phi)$ sınıfında $\alpha=0$ alındığında simetrik noktalara göre bi-ünivalent Ma-Minda yıldızıl fonksiyon, $\alpha=1$ alındığında da simetrik noktalara göre bi-ünivalent Ma-Minda konveks fonksiyon denir [11].

Teorem 3.2.29: $f\in\mathcal{S}^*_{\mathcal{S},\Sigma}(\alpha,\phi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2\left|(1+2\alpha)B_1^2+2(1+\alpha)^2(B_1-B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3|\le\frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{1+2\alpha}+\frac{1}{2(1+\alpha)^2}B_1\right)$$

dır [11].

2013 yılında Deniz [13] Ma-Minda bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonların oluşturduğu sınıfın bir genelleştirmesini tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için ikinci ve üçüncü katsayıların kesin olmayan üst sınırlarını belirlemiştir.

Tanım 3.2.27: $f\in\Sigma,\ \varphi\in\mathcal{W}$ ve $g=f^{-1}$olsun. $0\le\lambda\le1$ ve $\gamma\in\mathbb{C}/\{0\}$ olmak üzere her $z,w\in U$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)\prec\varphi(z)$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\prec\varphi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda tipli $\gamma-$mertebeden bi-$\lambda-$konveks ve bi-$\lambda-$yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_\Sigma(\lambda,\gamma;\varphi)$ ile gösterilir [13].

Aşağıdaki teorem $\mathcal{S}_\Sigma(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının kesin olmayan sınırlarını ihtiva eder.

Teorem 3.2.30: $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{|\gamma| B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|\gamma(1+2\lambda-\lambda^2)B_1^2+(1+\lambda)^2(B_1-B_2)\right|}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \leq \frac{|\gamma|\left(B_1+|B_1-B_2|\right)}{1+2\lambda-\lambda^2}$$

dır [13].

Tanım 3.2.28: $f \in \Sigma,\ g = f^{-1}$ ve α bir kompleks sayı olsun. Her $z, w \in U$ için

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1-\alpha}{f(z)} + \frac{\alpha}{zf'(z)}$$

ve

$$\frac{1}{G(w)} = \frac{1-\alpha}{g(w)} + \frac{\alpha}{wg'(w)}$$

şartlarını sağlayan F ve G fonksiyonları $\mathcal{S}_{\Sigma}[\varphi]$ sınıfına ait ise bu durumda $f \in \Sigma$ fonksiyonu $H\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfındandır denilir [13].

Teorem 3.2.31: $f \in H\mathcal{S}_{\Sigma}(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|(1+\alpha^2)B_1^2+(1+\alpha)^2(B_1-B_2)\right|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{(B_1/4)\left(\left|(\alpha+3)(\alpha+1)\right|+\left|\alpha^2-4\alpha-1\right|+(1+2\alpha)|B_2-B_1|\right)}{|1+2\alpha||\alpha^2+1|}$$

dır [13].

Tanım 3.2.29: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ ve $0 \leq \eta < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C}/\{0\}$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\gamma}(f'(z)+\eta z f''(z)-1) \prec \varphi(z)$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}(g'(w)+\eta w g''(w)-1) \prec \varphi(w)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $\Re_{\Sigma}(\eta,\gamma;\varphi)$ sınıfındandır denilir[13].

Teorem 3.2.32: $f \in \Re_{\Sigma}(\eta,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{|\gamma| B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3\gamma(1+2\eta)B_1^2 + 4(1+\eta)^2(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le |\gamma| B_1\left[\frac{|\gamma| B_1}{4(1+\eta)^2} + \frac{1}{3(1+2\eta)}\right]$$

dır [13].

Aynı $\Re_{\Sigma}(\eta,\gamma;\varphi)$ sınıfı için Teorem 3.2.32 deki sonuçları Srivastava ve arkadaşlarının (bkz. [40]) 2015 yılınındaki çalışmasında da görebiliriz.

Tanım 3.2.30: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ ve $0 \le \mu$ olsun. Bu durumda

$$\frac{z^{1-\mu} f'(z)}{[f(z)]^{1-\mu}} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\frac{w^{1-\mu} g'(w)}{[g(w)]^{1-\mu}} \prec \varphi(w)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $B_{\Sigma}[\mu;\varphi]$ sınıfındandır denilir ve bu fonksiyonlar Ma-Minda tipli bi-Bazilevic fonksiyon olarak adlandırılır [13].

Teorem 3.2.33: $f \in B_{\Sigma}[\mu;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\mu+1}\sqrt{\left|(\mu+2)B_1^2 + 2(1+\mu)(B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{2B_1 + 2|B_1 - B_2|}{(\mu+2)(\mu+1)}, & 0 \le \mu < 1 \\[2ex] \dfrac{(\mu+1)B_1 + 2|B_1 - B_2|}{(\mu+2)(\mu+1)}, & \mu \ge 1 \end{cases}$$

dır [13].

Singh 2013 yılında [36] çalışmasında simetrik noktalara göre bi-ünivalent fonksiyonların genel bir altsınıfını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayıları için birer üst sınır bulmuştur.

Tanım 3.2.31: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 < \alpha \leq 1, \lambda \geq 0$ ve $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$(1-\lambda)\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} + \lambda\frac{2(zf'(z))'}{(f(z)-f(-z))'} \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\alpha}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{2wg'(w)}{g(w)-g(-w)} + \lambda\frac{2(wg'(w))'}{(g(w)-g(-w))'} \prec \left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^{\alpha}$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $M_{\Sigma}^{\mathcal{S}}(\alpha,\lambda;A,B)$ sınıfındandır denilir [36].

Özel durumda $M_{\Sigma}^{\mathcal{S}}(1,0;1,-1) \equiv M_{\Sigma}^{\mathcal{S}}$ sınıfına simetrik noktalara göre bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı, $M_{\Sigma}^{\mathcal{S}}(1,1;1,-1) \equiv M_{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ sınıfına da simetrik noktalara göre bi-konveks fonksiyonların sınıfı denir.

Teorem 3.2.34: $f \in M_{\Sigma}^{\mathcal{S}}(\alpha,\lambda;A,B)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{\alpha\sqrt{A-B}}{\sqrt{2\left((1+\lambda)^2 - \alpha\lambda^2\right)}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\alpha^2(A-B)^2}{4(1+\lambda)^2} + \frac{\alpha(A-B)}{2(1+2\lambda)}$$

dır [36].

Yukarıdaki teoremde özel olarak $A = 1\, ve\ B = -1$ alınırsa

$$|a_2| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)^2 - \alpha\lambda^2}} \text{ ve } |a_3| \leq \frac{\alpha^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{\alpha}{1+2\lambda}$$

sonuçları bulunur.

Diğer çalışmalardaki ispat yöntemlerinden farklı olarak Peng ve Han 2014 yılında U birim diskinde analitik $u(0)=0$ ve her $z\in U$ için $|u(z)|<1$ koşulunu sağlayan fonksiyonların katsayılarına ilişkin bazı bağıntılar kullanarak Ali ve arkadaşlarının [4] 2012 de yaptıkları çalışmadaki sınıfları tekrar ele alarak onların buldukları sonuçlardan daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir. Peng ve Han çalışmasında U birim diskinde analitik $u(0)=0$ ve her $z\in U$ için $|u(\mathrm{z})|<1$ olmak üzere

$$u(z)=b_1z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$$

şeklindeki fonksiyonlar için

$$|b_1|\leq 1 \text{ ve } |b_2|\leq 1-|b_1|^2$$

eşitsizliklerini kullanmıştır.

Teorem 3.2.35: $f\in H_{\Sigma}[\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{4B_1+|3B_1^2-4B_2|}}$$

$$|a_3|\leq \begin{cases} (1-\dfrac{4}{3B_1})\dfrac{B_1^3}{4B_1|3B_1^2-4B_2|}+\dfrac{1}{3}B_1, & \mathrm{B}_1\geq \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3}B_1, & \mathrm{B}_1<\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

dır [32].

Teorem 3.2.36: $f\in \mathcal{S}T_{\Sigma}[\alpha;\varphi]$ ve $\alpha\geq 0$ olsun. Bu durumda

$$|a_2|\leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|(1+4\alpha)B_1^2-(1+2\alpha)^2B_2|+(1+2\alpha)^2B_1}}$$

$$|a_3|\leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{1+4\alpha}, & |B_2|\leq B_1 \\ \dfrac{|(1+4\alpha)B_1^2-(1+2\alpha)^2B_2|B_1+(1+2\alpha)^2B_1|B_2|}{(1+4\alpha)\left(|(1+4\alpha)B_1^2-(1+2\alpha)^2B_2|+(1+2\alpha)^2B_1\right)}, & |B_2|>B_1 \end{cases}$$

dır [32].

Teorem 3.2.37: $f \in M_{\Sigma}\left[\lambda;\varphi\right]$ ve $\lambda \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{(1+\lambda)\left|B_1^2-(1+\lambda)B_2\right|+(1+\lambda)^2 B_1}}$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{1+\lambda}, & |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{\left|B_1^2-(1+\lambda)B_2\right|B_1+(1+\lambda)^2 B_1|B_2|}{(1+\lambda)\left(\left|B_1^2-(1+\lambda)B_2\right|+(1+\lambda)B_1\right)}, & |B_2| > B_1 \end{cases}$$

dır [32].

Teorem 3.2.38: $f \in L_{\Sigma}\left[\lambda;\varphi\right]$ ve $0 \leq \lambda < \dfrac{3}{2}$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{2B_1}}{\sqrt{\left|\left(\lambda^2-3\lambda+4\right)B_1^2-2(2-\lambda)^2 B_2\right|+2(2-\lambda)^2 B_1}}$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{2B_1}{\lambda^2-3\lambda+4}, & |B_2| \leq B_1 \\ \dfrac{2\left|\left(\lambda^2-3\lambda+4\right)B_1^2-2(2-\lambda)^2 B_2\right|B_1+4(2-\lambda)^2 B_1|B_2|}{\left(\lambda^2-3\lambda+4\right)\left(\left|\left(\lambda^2-3\lambda+4\right)B_1^2-2(2-\lambda)^2 B_2\right|+2(2-\lambda)^2 B_1\right)}, & |B_2| > B_1 \end{cases}$$

dır [32].

Teorem 3.2.39: $f \in \Re_{\Sigma}(\lambda,\varphi)$ ve $0 \leq \lambda$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|(2\lambda+1)\mathrm{B}_1^2-(\lambda+1)^2 B_2\right|+(\lambda+1)^2 B_1}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2\lambda+1}, & B_1 \leq \dfrac{(\lambda+1)^2}{2\lambda+1} \\ \dfrac{\left|(2\lambda+1)B_1^2-(\lambda+1)^2 B_2\right|B_1+(2\lambda+1)^2 B_1^3}{(2\lambda+1)\left(\left|(2\lambda+1)B_1^2-(\lambda+1)^2 B_2\right|+(\lambda+1)^2 B_1\right)}, & B_1 > \dfrac{(\lambda+1)^2}{2\lambda+1} \end{cases}$$

dır [32].

2014 yılında Bansal ve Sokol [6] bi-ünivalent fonksiyonların belli bir altsınıfını çalışmıştır.

Tanım 3.2.32: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \gamma \le 1$ ve $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\gamma)\frac{f(z)}{z}+\gamma f'(z)-1\right] \prec \varphi(z) \quad (z \in U)$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[(1-\gamma)\frac{g(w)}{w}+\gamma g'(w)-1\right] \prec \varphi(w) \quad (w \in U)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar $\sum \mathcal{S}_{\gamma}^{\tau}(\varphi)$ sınıfındandır denilir [6].

Teorem 3.2.40: $f \in \sum \mathcal{S}_{\gamma}^{\tau}(\varphi)$ olmak üzere

$$|a_2| \le \frac{|\tau| B_1^{3/2}}{\sqrt{\left|\tau B_1^2 (1+2\gamma) + (1+\gamma)^2 (B_1 - B_2)\right|}}$$

ve

$$|a_3| \le B_1 |\tau| \left(\frac{1}{1+2\gamma} + \frac{B_1 |\tau|}{(1+\gamma)^2} \right)$$

dır [6].

2014 yılında Jahangiri ve arkadaşları [24] Srivastava ve arkadaşlarının 2010 yılında Tanım 3.2.5 de tanımladıkları sınıfın genel bir halini tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların katsayılarına ilişkin bazı sınırlar bulmuşlardır. Bulunan sınırlar Teorem 3.2.5 deki sınırlardan daha iyidir.

Tanım 3.2.33: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \alpha < 1$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right)^p > \alpha$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(g'(z)\right)^p > \alpha$$

şartlarını sağlayan f fonksiyonları $\mathcal{R}(p;\alpha)$ sınıfındandır denilir [24].

Teorem 3.2.41: $f \in \mathcal{R}(p;\alpha)$ olsun. $0 \le \alpha < 1$ ve $p \ge 2$ için

i) $|a_2| \le \dfrac{1-\alpha}{p}$

ii) $|a_3 - a_2^2| \le \dfrac{2(1-\alpha)}{3p}$

dir [24].

Teorem 3.2.42: $f \in \mathcal{R}(1;\alpha)$ olsun. $0 \le \alpha < 1$ için

i) $|a_2| \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1-\alpha)}{3}}, & 0 \le \alpha < \dfrac{1}{3} \\ 1-\alpha, & \dfrac{1}{3} \le \alpha < 1 \end{cases}$

ii) $|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-\alpha), & 0 \le \alpha < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3}(1-\alpha)(5-3\alpha), & \dfrac{1}{3} \le \alpha < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3}(1-\alpha-3|a_2|^2), & \dfrac{2}{3} \le \alpha < 1 \end{cases}$

iii) $|a_3 - a_2^2| \le \dfrac{2}{3}(1-\alpha) - |a_2|^2, \quad \dfrac{1}{3} \le \alpha < 1$

eşitsizlikleri doğrudur [24].

2015 yılında Sun ve arkadaşları [42] çift eşitsizliğe sahip bi-ünivalent analitik fonksiyonlar için ikinci ve üçüncü katsayıların kesin olmayan üst sınırını bulmuştur.

Tanım 3.2.34: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \alpha < 1 < \beta$ ve $\lambda \ge 0$ olmak üzere her $z, w \in U$ için

$$\alpha < \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda \frac{z^2 f''(z)}{f(z)} \right) < \beta$$

ve

$$\alpha < \operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} + \lambda \frac{z^2 g''(z)}{g(z)} \right) < \beta$$

şartını sağlayan f fonksiyonları $\mathcal{K}_\Sigma(\lambda;\alpha,\beta)$ sınıfındandır denilir [42].

Teorem 3.2.43: $f \in \mathcal{K}_{\Sigma}(\lambda;\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{|B_1|\sqrt{|B_1|}}{\sqrt{\left|(4\lambda+1)B_1^2+(2\lambda+1)^2(B_1-B_2)\right|}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le \frac{|B_1|+|B_1-B_2|}{4\lambda+1}$$

dır [42].

2015 yılında Xiong ve Liu [46], Tanım 3.2.12 de tanımlanan $L_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ sınıfının genel bir halini tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için ilk iki katsayının üst sınırını bulmuşlardır. Bulunan sonuçlar Teorem 3.2.12 de bulunan sonuçların genelleştirilmişidir.

Tanım 3.2.35: $f \in \Sigma$, $\varphi,\psi \in \mathcal{W}$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $\lambda \ge 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{1-\lambda} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)^{1-\lambda} \prec \psi(w)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar $L_{\Sigma}[\lambda;\varphi,\psi]$ sınıfındandır denilir [46].

Özel durumda $\varphi(z)=\psi(z)$ alınırsa Tanım 3.2.12 deki $L_{\Sigma}[\lambda;\varphi,\varphi]=L_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ sınıfı elde edilir.

Teorem 3.2.44: $f \in L_{\Sigma}[\lambda;\varphi,\psi]$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{A_1B_1\sqrt{2(A_1+B_1)}}{\sqrt{\left|2(\lambda^2-3\lambda+4)B_1^2A_1^2+2(\lambda-2)^2\left[A_1^2(B_1-B_2)+B_1^2(A_1-A_2)\right]\right|}}$$

$$|a_3| \le \frac{|\lambda^2-11\lambda+16|\left[B_1^2|A_2-A_1|+A_1^3\right]+|\lambda^2+5\lambda-8|A_1^2\left[B_1+|B_1-B_2|\right]}{\left|4A_1^2(3-2\lambda)(\lambda^2-3\lambda+4)\right|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\varphi(z)=1+A_1z+A_2z^2+\dots$ ve $\psi(z)=1+B_1z+B_2z^2+\dots$ $(A_1,B_1>0)$ şeklindedir [46].

Xiong ve Liu aynı çalışmasında bi-ünivalent fonksiyonların genel bir altsınıfını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların ilk iki katsayısı ile ilgili kesin olmayan sınırlar elde etmiştir. Elde edilen sınırlar Brannan ve Taha'nın sonuçlarının genelleştirilmişi olup aynı zamanda parametrelerin özel durumlarında Brannan ve Taha'nın sonuçlarından daha iyi sonuçlar elde edildiği görülebilir.

Tanım 3.2.36: $h, p : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları

$$\min\left\{\operatorname{Re}\left(h(z)\right), \operatorname{Re}\left(p(z)\right)\right\} > 0$$

ve

$$h(0) = p(0) = 1$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca $f \in \Sigma$ ve $g = f'$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu $z, w \in U$ için $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{1-\lambda} \in h(U)$$

ve

$$\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)^{1-\lambda} \in p(U)$$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $H_{\Sigma}^{h,p}(\lambda)$ sınıfındandır denilir [46].

Teorem 3.2.45: $f \in H_{\Sigma}^{h,p}(\lambda)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{|h''(0)| + |p''(0)|}{2\left|\lambda^2 - 3\lambda + 4\right|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \left|\frac{\lambda^2 - 11\lambda + 16}{2(\lambda^2 - 3\lambda + 4)}\right| |h''(0)| + \left|\frac{\lambda^2 + 5\lambda - 8}{2(\lambda^2 - 3\lambda + 4)}\right| |p''(0)|$$

dır [46].

Buraya kadar yapılan çalışmalardan görülüyor ki araştırmacılar bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıflarına ait fonksiyonlar için a_2 ve a_3 katsayılarının kesin olmayan üst sınırları üzerinde durmuşlardır. Giriş bölümünde de bahsedildiği üzere bi-ünivalent fonksiyonların genel a_n katsayısı için bir üst sınır henüz bulunamamıştır. Bu açık problem halen güncelliğini korumaktadır. Yalnız bu açık probleme ilk defa 2013 yılında Jahangiri ve Hamidi [21] kısmen de olsa bir cevap bulmuştur. Onlar ilk $n-1$ tane terimin sıfır olması durumunda $n.$katsayının yani a_n nin kesin olmayan bir üst sınırını Faber polinomlarını kullanarak elde etmişlerdir. 2006 yılında Airault and Bonali [2] $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının Faber polinomu seri açılımını kullanarak $g = f^{-1}$ fonksiyonunun seri açılımını

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}\left(a_2, a_3, ...\right) w^n \tag{3.6}$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada V_j ler $7 \le j \le n$ için $a_2, a_3, ...a_n$ değişkenli bir polinom olmak üzere K_{n-1}^{-n} ifadesi

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{-n} = {} & \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!} a_2^{n-1} + \frac{(-n)!}{\left(2(-n+1)\right)!(n-3)!} a_2^{n-3} a_3 \\ & + \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!} a_2^{n-4} a_4 \\ & + \frac{(-n)!}{\left(2(-n+2)\right)!(n-5)!} a_2^{n-5} \left[a_5 + (-n+2) a_3^2\right] \\ & + \frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!} a_2^{n-6} \left[a_6 + (-2n+5) a_3 a_4\right] + \sum_{j \ge 7} a_2^{n-j} V_j \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklindedir. Özel durumda ilk üç terim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_1^{-2} &= -a_2, \\ \frac{1}{3} K_2^{-3} &= 2a_2^2 - a_3, \\ \frac{1}{4} K_3^{-4} &= -\left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right) \end{aligned}$$

dır.

Genel durumda her $p \in \mathbb{N}$ için K_n^p nin açılımı (bkz [2])

$$K_n^p = pa_n + \frac{p(p-1)}{2} D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!} D_n^3 + ... + \frac{p!}{(p-n)!n!} D_n^n$$

şeklindedir. Burada $a_1 = 1$ ve $\mu_k \ (k = 1, 2, ..., n)$ lar $\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = p$, $\mu_1 + 2\mu_2 + ... + n\mu_n = n$ koşullarını sağlayan negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$D_n^p = D_n^p(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!(a_1)^{\mu_1} \ldots (a_n)^{\mu_n}}{\mu_1! \ldots \mu_n!} \quad \left(p \le n\right)$$

şeklindedir (bkz [1]). $D_n^n(a_1, a_2, ..., a_{s+n}) = a_1^n$ olduğu açıktır (bkz [1]).

Diğer taraftan

$$A_n = \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}\left(a_2, a_3, ..., a_n\right)$$

olsun. $0 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ koşulu altında $A_n = -a_n \ \left(n \ge 4\right)$ olduğunu şu şekilde görebiliriz. Burada analizden çok bilinen $n! = \Gamma\left(n+1\right)$ veya $\left(-n\right)! = \Gamma\left(1-n\right)$ ve $\Gamma\left(n+1\right) = n\Gamma\left(n\right)$ veya $\Gamma\left(-n+1\right) = (-n)\Gamma\left(-n\right)$ eşitlikleri kullanılacaktır. Böylece;

$n = 4$ için

$$A_4 = \frac{1}{4} K_3^{-4}\left(a_2, a_3, a_4\right) = \frac{1}{4}\left(-4\right)\left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)$$

olup $a_2 = a_3 = 0$ koşulu altında

$$A_4 = \frac{1}{4} K_3^{-4}\left(0, 0, a_4\right) = \frac{1}{4}\left(-4\right)\left(a_4\right) = -a_4,$$

$n = 5$ için

$$A_5 = \frac{1}{5} K_4^{-5}\left(a_2, a_3, a_4, a_5\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\left(-5\right)!}{\left(-9\right)!\left(4\right)!} a_2^4 + \frac{\left(-5\right)!}{\left(-8\right)!\left(2\right)!} a_2^2 a_3 + \frac{\left(-5\right)!}{\left(-7\right)!\left(1\right)!} a_2 a_4 + \frac{\left(-5\right)!}{\left(-6\right)!\left(0\right)!}\left[a_5 - 3a_3^2\right]\right]$$

olup $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ koşulu altında

$$A_5 = \frac{1}{5} K_4^{-5}\left(0, 0, 0, a_5\right) = \frac{1}{5} \frac{\left(-5\right)!}{\left(-6\right)!\left(0\right)!} a_5 = -a_5$$

olur. Bu durum bu şekilde devam ederse olduğu $A_n = -a_n \ \left(n \ge 4\right)$ olduğu görülür.

Yukarıda da bahsedildiği üzere ilk defa Jahangiri ve Hamidi 2013 yılında bi-ünivalent fonksiyonların belli bir altsınıfı için a_n katsayısının bir üst sınırını bulmuşlardır. Onlar yaptıkları çalışmada Frasin ve Aouf'un [16] 2011 yılında tanımladıkları $B_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfı için $|a_n|$ genel katsayısının kesin olmayan üst sınırını aşağıdaki şekilde bulmuştur.

Teorem 3.2.46: $f \in B_\Sigma(\beta,\lambda)$ $(0 \le \beta < 1,\ \lambda \ge 1)$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2(1-\beta)}{1+(n-1)\lambda} \quad (n \ge 4)$$

dır [22].

İspat: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklinde olsun. Bu durumda

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1+(n-1)\lambda\right)a_n z^{n-1} \tag{3.8}$$

ve $g = f^{-1}$ için

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1+(n-1)\lambda\right)b_n w^{n-1} \tag{3.9}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1+(n-1)\lambda\right) \times \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}\left(a_2, a_3, ..., a_n\right) w^{n-1}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $f \in B_\Sigma(\beta,\lambda)$ olduğundan tanım gereği $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ve $\operatorname{Re} q(w) > 0$ olacak şekilde $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ ve $q(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n$ fonksiyonları vardır ki bu durumda

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) = 1 + (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1\left(c_1, c_2, ..., \mathrm{c}_n\right) z^n \tag{3.10}$$

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) = 1 + (1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1\left(d_1, d_2, ..., d_n\right) w^n \tag{3.11}$$

yazılır. (3.8) ve (3.10) daki eşitliklerin sağ tarafları eşitlenirse

$$\left(1+\lambda(n-1)\right)a_n = (1-\alpha) K_{n-1}^1\left(c_1, c_2, ..., c_{n-1}\right),$$

ve benzer şekilde (3.9) ve (3.11) deki ifadelerin sağ tafları eşitlenirse

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(n-1\right)\lambda\right)K_{n-1}^{-n}\left(b_0,b_1,...,b_n\right)=\left(1-\alpha\right)K_{n-1}^{1}\left(d_1,\mathrm{d}_2,...,\mathrm{d}_{n-1}\right)$$

elde edilir. Hipotezden $2\le k\le n-1$ için $a_k=0$ olduğundan $b_n=-a_n$ ve böylece

$$\left(1+\lambda\left(n-1\right)\right)a_n=\left(1-\alpha\right)c_{n-1},$$

$$-\left(1+\lambda\left(n-1\right)\right)a_n=\left(1-\alpha\right)d_{n-1}$$

bulunur. Buradan Lemma 3.2.1 kullanılırsa

$$\left|a_n\right|\le\frac{(1-\alpha)\left|c_{n-1}\right|}{\left|1+(n-1)\lambda\right|}=\frac{(1-\alpha)\left|d_{n-1}\right|}{\left|1+(n-1)\lambda\right|}\le\frac{2(1-\alpha)}{1+(n-1)\lambda}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bulut aşağıdaki çalışmada, Çağlar ve arkadaşlarının Tanım 3.2.17 de tanımladığı $B_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfı için genel katsayı formülünü bulmuştur. Bu çalışma aynı zamanda Teorem 3.2.46 deki sonucun genelleştirilmişidir.

Teorem 3.2.48: $f\in B_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ ($\lambda\ge1,\ \mu\ge0,\ 0\le\alpha<1$) olsun. Eğer $2\le k\le n-1$ için $a_k=0$ ise bu durumda

$$\left|a_n\right|\le\frac{2\left(1-\alpha\right)}{\mu+\left[1+\lambda\left(n-1\right)\right]}\quad(n\ge4)$$

dır [10].

Teorem 3.2.45 de $\mu=1$ alınırsa Teorem 3.2.46 deki sonuç elde edilir.

Aşağıdaki çalışma Jahangiri ve arkadaşlarının Tanım 3.2.33 de tanımladığı $\mathcal{R}(p;\alpha)$ sınıfı için Teorem 3.2.41 ve 3.2.42 olarak yapılan çalışmanın devamıdır.

Teorem 3.2.48: $f\in\mathcal{R}(p;\alpha)$ olsun. Eğer $2\le k\le n-1$ için $a_k=0$ ise bu durumda

$$\left|a_n\right|\le\frac{2(1-\alpha)}{np}\quad\left(n\ge3\right)$$

dir [24].

Hamidi ve Jahangiri [18] 2014 yılında konvekse yakın fonksiyonlar için genel katsayı formülünü aşağıdaki şekilde bulmuştur.

Teorem 3.2.49: $f, f^{-1} \in \mathcal{K}(\beta)$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le 1 + \frac{2(1-\alpha)}{n} \quad (n \ge 4)$$

dır [18].

Hamidi ve Jahangiri [19] 2015 yılında Ali ve arkadaşlarının 2012 yılında Tanım 3.2.10, 3.2.11 ve 3.2.12 de tanımladıkları sınıfları ve Deniz'in [13] 2013 yılında Tanım 3.2.19 da tanımladığı bir sınıfın özel bir durumu için genel katsayı formülünü aşağıdaki şekilde bulmuştur.

Teorem 3.2.50: $f \in \Re(0,\gamma;\varphi)$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2|\gamma|}{n} \quad (n \ge 3)$$

dir [20].

Teorem 3.2.51: $f \in ST_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2}{(n-1)(\lambda n+1)} \quad (n \ge 3)$$

dir [20].

Teorem 3.2.52: $f \in L_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2}{(n-1)(n(1-\lambda)+\lambda)} \quad (n \ge 3)$$

dir [20].

Teorem 3.2.53: $f \in M_{\Sigma}[\lambda;\varphi]$ olsun. Eğer $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2}{(n-1)((n-1)\lambda+1)} \quad (n \ge 3)$$

dir [20].

2015 yılında Srivastava ve arkadaşları [39] aşağıdaki sınıfı tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonların genel katsayı formülünü bulmuştur.

Tanım 3.2.37: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. $0 \le \alpha < 1,\ \lambda \ge 0$ ve her $z, w \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(f'(z) + \lambda z f''(z) \right) > \alpha$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(g'(w) + \lambda w g''(w) \right) > \alpha$$

şartını sağlayan f fonksiyonları $N_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda)}$ sınıfındandır denilir [39].

Teorem 3.1.54: $f \in N_{\Sigma}^{(\alpha,\lambda)}$ ve $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ olsun. Bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2(1-\alpha)}{n\left[1+\lambda(n-1)\right]} \quad (n \ge 3)$$

dır [39].

Hamidi ve Jahangiri [20] 2016 yılında Tanım 3.2.20 teki tanımın özel bir haline ait fonksiyonların genel katsayı formülünü bulmuştur.

Teorem 3.2.55: $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}\left[\dfrac{1+Az}{1+Bz}\right],\ -1 \le B < A \le 1$ olsun. Bu durumda

$$|a_n| \le \frac{A-B}{n-1}, \quad \left(a_k = 0;\ 2 \le k \le n-1\right)$$

dır [21].

2016 yılında Altınkaya ve Yalçın [5] Tanım 3.2.22 de tanımlanan $H_{\Sigma}^{\mu}(\lambda,\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonların belirttiği serinin genel katsayısı için bir üst sınır bulmuştur.

Teorem 3.2.56: $f \in H_{\Sigma}^{\mu}(\lambda,\varphi)$ ve $2 \le k \le n-1$ için $a_k = 0$ olsun. Bu durumda

$$|a_n| \le \frac{2}{\mu + (n-1)\lambda}, \quad n \ge 4$$

dır [5].

4. BULGULAR:

Çalışmanın temel amacı yukarıda Tanım 3.2.27 da tanımladığımız $\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfında tanımlanmış fonksiyonların genel katsayısı için bir üst sınır elde etmek olacaktır. Teoremin ispatı daha önce yapılan çalışmaların ispatındaki yol izlenerek yapılacaktır.

Teorem 4.1: $f\in\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\rho_n z^n$ $\left(0\le\lambda\le 1,\ \gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$ olsun. Eğer $2\le m\le n-1$ için $\rho_m=0$ ise

$$|\rho_n|\le\frac{|\gamma|B_1}{(n-1)\left(1+\lambda(n-1)\right)}$$

dir [14].

İspat. İlk olarak

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\rho_n z^n$$

ve $0\le\lambda\le 1$ olmak üzere

$$\Lambda\left(f(z)\right)=\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)$$

olsun. Bu durumda

$$f\in\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\left(f(z)\right)}{\Lambda\left(f(z)\right)}-1\right)\prec\varphi(z)$$

$$g=f^{-1}\in\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\left(g(w)\right)}{\Lambda\left(g(w)\right)}-1\right)\prec\varphi(w)$$

yazılır.

Diğer taraftan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\rho_n z^n$ için

$$\Lambda\left(f(z)\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\lambda(n-1)\right)\rho_n z^n=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

elde edilir. Şimdi Faber polinomial açılımını $\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındaki fonksiyonların seri açılımına uygularsak (bkz. [2] ve [3])

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\left(f(z)\right)}{\Lambda\left(f(z)\right)}-1\right)=1-\frac{1}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}(a_2,a_3,a_4,...,a_n)z^{n-1}\tag{4.1}$$

bulunur. Burada,

$$A(i_1,i_2,...,i_{n-1}) := (-1)^{(n-1)+2i_1+...+ni_{n-1}} \frac{i_1+i_2+...+i_{n-1}-1)!(n-1)}{(i_1!).(i_2!)...(i_{n-1}!)}$$

olmak üzere

$$F_{n-1}(a_2,a_3,a_4,...,a_n) = \sum_{i_1+2i_2+...+(n-1)i_{n-1}=n-1} A(i_1,i_2,...,i_{n-1})\left(a_2^{i_1}a_3^{i_2}...a_n^{i_{n-1}}\right)$$

şeklindedir. Özel durumda $F_{n-1}(a_2,a_3,a_4,...,a_n)$ in ilk 5 terimleri

$$\begin{aligned}
F_1 &= -a_2, \\
F_2 &= a_2^2 - 2a_3, \\
F_3 &= -a_2^3 + 3a_2a_3 - 3a_4, \\
F_4 &= a_2^4 - 4a_2^2a_3 + 4a_2a_4 + 2a_2^3 - 4a_5, \\
F_5 &= -a_2^5 + 5a_2^3a_3 + 5a_2^2a_4 - 5\left(a_3^2 - a_5\right)a_2 + 5a_3a_4 - 5a_6
\end{aligned}$$

şeklinde olur. (4.1) deki aynı düşünceyle $g = f^{-1}$ fonksiyonunun katsayıları

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2,a_3,...,a_n)w^n = w + \sum_{n=2}^{\infty} \tau_n w^n$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
K_{n-1}^{-n} &= \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!}a_2^{n-1} \\
&+ \frac{(-n)!}{(2(-n+1))!(n-3)!}a_2^{n-3}a_3 \\
&+ \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!}a_2^{n-4}a_4 \\
&+ \frac{(-n)!}{(2(-n+2))!(n-5)!}a_2^{n-5}\left[a_5 + (-n+2)a_3^2\right] \\
&+ \frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!}a_2^{n-6}\left[a_6 + (-2n+5)a_3a_4\right] \\
&+ \sum_{j\geq 7} a_2^{n-j}V_j
\end{aligned}$$

ve $7 \leq j \leq n$ için V_j ler $a_2,a_3,...a_n$ değişkenli polinomlardır. Böylece $b_n = (1+\lambda(n-1))\tau_n$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\left(g(w)\right)}{\Lambda\left(g(w)\right)}-1\right)=1-\frac{1}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}\left(b_2,b_3,b_4,...,b_n\right)w^{n-1} \tag{4.2}$$

yazılır. f ve $g=f^{-1}$ fonksiyonları $\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfından olduğundan subordinasyonun tanımı gereğince

$$u(z)=c_1z+c_2z^2+...c_nz^n+...,\quad \left|u(z)\right|<1,\ z\in U$$

ve

$$v(w)=d_1w+d_2w^2+...d_nw^n+...,\quad \left|v(w)\right|<1,\ w\in U$$

fonksiyonları vardır. Böylece

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z\Lambda'\left(f(z)\right)}{\Lambda\left(f(z)\right)}-1\right)=\varphi\left(u(z)\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}B_1K_n^{-1}\left(c_1,c_2,...,c_nB_1,B_2,...,B_n\right)z^n \tag{4.3}$$

ve

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{w\Lambda'\left(g(w)\right)}{\Lambda\left(g(w)\right)}-1\right)=\varphi\left(v(w)\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}B_1K_n^{-1}\left(d_1,d_2,...,d_nB_1,B_2,...,B_n\right)w^n \tag{4.4}$$

yazılır.

Genel olarak, $K_n^p:=K_n^p\left(k_1,k_2,...,k_n,B_1,B_2,...,B_n\right)$ katsayıları

$$\begin{aligned}K_n^p&=\frac{p!}{(p-n)!n!}k_1^n\frac{B_n}{B_1}+\frac{p!}{(p-n+1)!(n-2)!}k_1^{n-2}\frac{B_{n-1}}{B_1}\\&+\frac{p!}{(p-n+2)!(n-4)!}k_1^{n-3}\frac{B_{n-2}}{B_1}\\&+\frac{p!}{(p-n+3)!(n-4)!}k_1^{n-4}\left[k_4\frac{B_{n-3}}{B_1}+\frac{p-n+3}{2}k_2^2\frac{B_{n-2}}{B_1}\right]\\&+\frac{p!}{(p-n+4)!(n-5)!}k_1^{n-5}\left[k_5\frac{B_{n-4}}{B_1}+(p-n+4)k_2k_3\frac{B_{n-3}}{B_1}+\sum_{j\geq 6}k_1^{n-j}X_j\right]\end{aligned}$$

şeklinde olup burada X_j ler, j. dereceden $k_2,k_3,...,k_n$ değişkenli polinomlardır (bkz. [1] ve [2]).

$u(z)$ ve $v(w)$ Schwarz fonksiyonları olduğundan $\left|c_n\right|\leq 1$ ve $\left|d_n\right|\leq 1$dır (bkz. [15]). (4.1) ve (4.3) ifadeleri eşitlenirse

$$\frac{1}{\gamma}F_{n-1}\left(a_2,a_3,a_4,...,a_n\right)=B_1K_n^{-1}\left(c_1,c_2,...,c_n,B_1,B_2,...,B_n\right) \tag{4.5}$$

ve $2\leq m\leq n-1$ için $a_m=0$ koşulu altında

$$-\frac{1}{\gamma}(n-1)a_n = -\frac{1}{\gamma}(n-1)\big(1+\lambda(n-1)\big)\rho_n = -B_1 c_{n-1} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Benzer olarak (4.2) ve (4.4) karşılıklı eşitlenirse

$$\frac{1}{\gamma}F_{n-1}(b_2,b_3,b_4,...,b_n) = B_1 K_{n-1}^{-1}(d_1,d_2,...,d_{n-1},B_1,B_2,...,B_n) \tag{4.7}$$

ve $2 \le m \le n-1$ için $a_m = 0$ koşulu altında

$$-\frac{1}{\gamma}(n-1)b_n = -B_1 d_{n-1}$$

bulunur.

Son olarak $2 \le m \le n-1$ için $a_m = 0$ olduğundan $b_n = -a_n$ olup dolayısıyla

$$\frac{1}{\gamma}(n-1)a_n = \frac{1}{\gamma}(n-1)\big(1+\lambda(n-1)\big)\rho_n = -B_1 d_{n-1} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Dolayısıyla (4.6) veya (4.8) denklemlerinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa genel formülü elde ederiz.

Teorem 4.1 de $\lambda = 0$ alınırsa kompleks mertebeden Ma-Minda tipli bi-yıldızıl fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1: $f, f^{-1} \in \mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|\rho_n| \le \frac{|\gamma| B_1}{n-1}, \quad \rho_m = 0;\ 2 \le m \le n-1$$

dır [14].

Sonuç 4.1 de $\gamma = 1$ ve $\varphi(z) = (1+Az)/(1+Bz) = 1+(A-B)z - B(A-B)z^2 + ...$ alınırsa Hamidi ve Jahangiri'nin [21] çalışmasındaki bulduğu sonuç elde edilir.

Teorem 4.1 de $\lambda = 1$ alınırsa kompleks mertebeden Ma-Minda tipli bi-konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2: $f, f^{-1} \in \mathcal{C}[\gamma;\varphi]$ olsun. Bu durumda

$$|\rho_n| \le \frac{|\gamma| B_1}{n(n-1)}, \quad \rho_m = 0;\ 2 \le m \le n-1$$

dır [14].

Aşağıdaki lemma ana sonuçlarımızdan biri olan Teorem 4.2 nin ispatında önemli bir yere sahiptir.

Lemma 4.1. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $-\infty < \alpha < \infty$ için

$$|p_2 - \alpha p_1^2| \le \begin{cases} 2 - \alpha |p_1|^2; & \alpha < 1/2, \\ 2 - (1-\alpha)|p_1|^2; & \alpha \ge 1/2 \end{cases}$$

dır [15].

Tanım 2.3.4 den sonraki paragraftan $\mathcal{P}$ sınıfı ile Ω sınıfı arasındaki ilişkiyi bir daha hatırlayacak olursak, yani

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z) \in \Omega \tag{4.9}$$

Lemma 4.1 i aşağıdaki şekilde de yazabiliriz. $p(z) \in \mathcal{P}$ ve $\phi(z) \in \Omega$ fonksiyonları sırasıyla

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

ve

$$\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n z^n$$

şeklinde olsun. (4.9) daki eşitlikten z nin aynı dereceden kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırılırsa $p_1 = 2\phi_1$ ve $p_2 = 2(\phi_2 + \phi_1^2)$ olduğu kolayca görülür. Bu durumda (4.9) eşitsizliği $\eta = 1 - 2\alpha$ olmak üzere

$$|\phi_2 + \eta\phi_1^2| \le \begin{cases} 1 - (1-\eta)|\phi_1|^2; & \eta > 0, \\ 1 - (1+\eta)|\phi_1|^2; & \eta \le 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

elde edilir.

Şimdi (4.10) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.2: $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n z^n$ $\left(0 \le \lambda \le 1, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$ olsun. Bu durumda

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}; & B_1 \ge |B_2| \\ \dfrac{|\gamma B_2|}{2(1+2\lambda)}; & B_1 < |B_2| \end{cases}$$

dır [14].

İspat: (4.5) ve (4.7) eşitliklerinde; $n = 2$ alınırsa

$$\rho_2 = \frac{\gamma B_1 c_1}{1+\lambda} \text{ ve } \rho_2 = -\frac{\gamma B_1 d_1}{1+\lambda} \tag{4.11}$$

ve $n = 3$ alınırsa da

$$\frac{2(1+2\lambda)\rho_3 - (1+\lambda)^2 \rho_2^2}{\gamma} = B_1 c_2 + B_2 c_1^2 \tag{4.12}$$

ve

$$\frac{-2(1+2\lambda)\rho + (3+6\lambda-\lambda^2)^2 \rho_2^2}{\gamma} = B_1 d_2 + B_2 d_1^2 \tag{4.13}$$

eşitlikleri yazılır. Böylece (4.11) eşitliklerinden $c_1 = -d_1$ elde edilir. Diğer taraftan (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden de $B_1 > 0$ durumu göz önünde de bulundurulursa

$$\rho_3 - \rho_2^2 = \frac{\gamma B_1}{4(1+2\lambda)}\left[\left(c_2 + \frac{B_2}{B_1}c_1^2\right) - \left(d_2 + \frac{B_2}{B_1}d_1^2\right)\right] \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \le \frac{|\gamma| B_1}{4(1+2\lambda)}\left[\left|c_2 + \frac{B_2}{B_1}c_1^2\right| + \left|d_2 + \frac{B_2}{B_1}d_1^2\right|\right] \tag{4.15}$$

elde edilir.

Şimdi (4.15) eşitsizliğini $B_1 > 0$ ve B_2 nin durumlarına göre çözelim.

Hal 1. $B_2 \leq 0$ olsun. Bu durumda (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki parantezin içine (4.10) eşitsizliği uygulanıp ve $\eta = B_2/B_1$ alınırsa

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{4(1+2\lambda)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_1 + B_2}{B_1} \right) |c_1|^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{B_1 + B_2}{B_1} \right) |d_1|^2 \right] \right\} \qquad (4.16)$$

elde edilir.

Hal 1.1. Eğer $B_1 + B_2 \geq 0$ ise, bu durumda (4.16) eşitizliğinden

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}$$

bulunur.

Hal 1.2. Eğer $B_1 + B_2 < 0$ ise, bu durumda (4.16) eşitizliğinin sağ tarafı maksimum değerini $|c_1| = |d_1| = 1$ için alır ve böylece

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{4(1+2\lambda)} \left\{ 2 \left[1 - \left(\frac{B_1 + B_2}{B_1} \right) \right] \right\} = -\frac{|\gamma| B_2}{2(1+2\lambda)}$$

elde edilir.

Hal 2. $B_2 > 0$ olsun. Bu durumda (4.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki parantezin içine (4.10) eşitsizliği uygulanıp ve $\eta = B_2/B_1$ alınırsa

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{4(1+2\lambda)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_1 - B_2}{B_1} \right) |c_1|^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{B_1 - B_2}{B_1} \right) |d_1|^2 \right] \right\}$$

elde edilir.

Hal 2.1. Eğer $B_1 - B_2 \geq 0$ ise, bu durumda (4.16) eşitizliğinden

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}$$

bulunur.

Hal 2.2. Eğer $B_1 - B_2 < 0$ ise, bu durumda (4.16) eşitizliğinin sağ tarafı maksimum değerini $|c_1| = |d_1| = 1$ için alır ve böylece

$$\left|\rho_3 - \rho_2^2\right| \leq \frac{|\gamma| B_1}{4(1+2\lambda)} \left\{ 2 \left[1 - \left(\frac{B_1 - B_2}{B_1} \right) \right] \right\} = \frac{|\gamma| B_2}{2(1+2\lambda)}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak bi-ünivalent fonksiyonların tanım ve özelliklerini verdik. Daha sonra literatür olarak bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için yapılan katsayı eşitsizliklerini verdik.

Bizde bu çalışmada Deniz [13] tarafından Tanım 3.2.27 de tanımlanan Ma-Minda tipli $\gamma-$mertebeden bi-$\lambda-$konveks ve bi-$\lambda-$yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfını ele aldık. Bu sınıf için Deniz [13] çalışmasında a_2 ve a_3 katsayılarının birer üst sınırını elde etmişti. Biz ise bu sınıfın genel a_n katsayısı için bir üst sınır formülü elde ettik. Yapılan çalışma (bkz. [14]) makale olarak yayımlanması için bir dergiye sunuldu. Bulunan sonuç son zamanlarda yapılan Hamidi ve Jahangiri'nin [20] sonucunun genelleştirilmesi olup ayrıca bu sonuç literatür kısmında verilen bir çok sonucun genel halidir. Bu çalışmadan yola çıkarak bazı araştırmacılar bi-ünivalent fonksiyonlar teorisinde ele alınan birçok problemi $\mathcal{S}_{\Sigma}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için yapabilir. Örneğin; bu sınıf için Fekete-Szegö ve Hankel determinantı problemi ele alınabilir. Hatta dördüncü ve daha üst katsayılar için sınırlar bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Airault, H., 2008 “Remarks on Faber polynomials” Int. Math. Forum 3(9-12) 449-456.

[2] Airault, H. and Bonali, A. 2006 “Differential calculus on the Faber polynomials” Bull. Sci. Math. 130 (3) 179-222.

[3] Airault, H. and Ren. J., 2002 “An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions” Bull. Sci. Math. 126 (5) 179-222.

[4] Ali, R.M., Lee, S. K., Ravichandran, V. and Supramaniam, S., 2012 “Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions” Applied Mathematics Letters, 25, no. 3, pp. 344-351.

[5] Altınkaya, Ş. and Yalçın, S., 2016 “Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions” Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 61(1), 37-44.

[6] Bansal, D. and Sokol, J., 2014 “Coefficient bound for a new class of analytic and bi-univalent functions” J. Fract. Calc. Appl. 5, no. 1, 122-128.

[7] Brannan, D. A. and Clunie, J. G., (Eds.), 1980 “Aspect of Contemporary Complex Analysis” (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham; July 1-20,1979), Academic Press, New York and London.

[8] Brannan, D. A. and Taha, T. S., 1986 “On some classes of bi-univalent functions” Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 31, no. 2, 70-77.

[9] Bulut, S., 2013 “Coefficient estimates for a class of analytic and bi-univalent functions” Novi Sad J. Math. Vol. 43, No. 2, pp. 59-65.

[10] Bulut, S., 2014 “Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions” C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352, 479-484.

[11] Crişan, O., 2013 “Coefficient estimates for certain subclasses of bi-univalent functions” Gen. Math. Ntes, Vol. 16, No. 2, pp. 93-102.

[12] Çağlar, M., Orhan, H. and Yağmur, N., 2013 “Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions” Filomat 27(7), 1165-1171.

[13] Deniz, E., 2013 “Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions” Journal of Classical Analysis, 2(1), 49-60.

[14] Deniz, E., Jahangiri, J. M., Kına, S. K. and Hamidi, S. G., 2016 "Faber polynomial coefficients for generalized bi-subordinate functions of complex order" (yayımlanması için bir dergiye sunuldu).

[15] Duren, P. L., 1983 " Univalent functions" Springer Verlag. New York Inc.

[16] Frasin, B.A. and Aouf, M.K., 2011 "New subclasses of bi-univalent functions" Applied Mathematics Letters, 24(9), pp. 1569-1573.

[17] Goodman, A. W., 1983 "Univalent Functions" I. Mariner Publishing Company., 245, Tapma, Florida.

[18] Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2014 "Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions" C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 352 (1), 17-20.

[19] Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2014 "Unpredictability of the coefficients of *m*-fold symmetric bi-starlike functions" International Journal of Mathematics Vol. 25(7), 1450064 (8 pages).

[20] Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2015 "Faber polynomial coefficient estimates for bi-univalent functions defined by subordinations" Bull. Iran. Math. Soc. 41(5) 1103-1119.

[21] Hamidi, S. G. and Jahangiri, J.M., 2016 "Faber polynomial coefficient of bi-subordinate functions" C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 354 (4), 365-370.

[22] Jahangiri, J.M. and Hamidi, S.G., 2013 "Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions" International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 190560, 4 pages.

[23] Jahangiri, J.M. and Hamidi, S.G., 2015 "Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi- Bazilevic functions" Mat. Vesnik 67(2) 123-129.

[24] Jahangiri, J.M., Hamidi, S.G. and Halim, S. A., 2014 "Coefficient of bi-univalent functions with positive real part derivatives" Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37(3), 633–640.

[25] Kedzierawski, A.W., 1985 "Some remarks on bi-univalent functions" Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 39, 77-81.

[26] Kumar, S. S., Kumar, V. and Ravichandran, V., 2013 "Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions" Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences 29(4), 487-504.

[27] Lewin, M., 1967 “On a coefficient problem for bi-univalent functions” Proc. Amer. Math. Soc. 18, 63-68.

[28] Li, X. and Wang, A., 2012 “Two new subclasses of bi-univalent functions” International Mathematical Forum, 7(30), pp. 1495-1504.

[29] Magesh, N. and Yamini, J., 2013 “Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions” International Mathematical Forum, 8(27), pp. 1337-1344.

[30] Murugusundaramoorthy, G., Magesh, N. and Prameela, V., 2013 “Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions” Abstract and Applied Analysis Vol. 2013, Article ID 573017, 3 Pages

[31] Netanyahu, E., 1969 “The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$” Arc. Rational Mech. Anal. 32, 100-112.

[32] Peng, Z. and Han, Q., 2014 “On the Coefficients of several classes of bi-univalent functions” Acta Mathematica Scientia 34B(1):228-240.

[33] Pommerenke, Ch. 1975 “Univalent Functions”, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[34] Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006 “Complex Vriables With Applications” Birkhäuser. Boston.

[35] Prema, S. and Keerthi, S, B., 2013 “Coefficient bounds for certain subclasses of analytic functions” J. Math. Anal. 4(1), 22-27.

[36] Singh, G., 2013 “Coefficient estimates for bi-univalent functions with respect to symmetric points” J. Nonlinear Funct. Anal. (2003), pp. 1-9.

[37] Srivastava, H. M., Mishra, A. K. and Gochhayat, P., 2010 “Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions” Appl. Math. Letters, 23(10), 1188-1192.

[38] Srivastava, H. M., Bulut, S., Çağlar, M. and Yağmur N., 2013 “Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions” Filomat 27(5), pp. 831-842.

[39] Srivastava, H.M., Eker, S. S. and Ali, R. M., 2015 “Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions” Filomat 29(8), 1839-1845.

[40] Srivastava, H.M. and Bansal, D., 2015 “Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions” J. Egyptian Math. Soc. 23, no. 2, 242-246.

[41] Styer, D. and Wright, D. J., 1981 “Results on bi-univalent functions” Proceedings of the American Mathematical Society, 82(2), 243-248.

[42] Sun, Y., Jiang, Y. and Rasila, A., 2015 “Coefficient estimates for certain subclasses of analytic and bi-univalent functions” Filomat 29(2), 351-360.

[43] Srutha, K. and Chinthamani, S., 2013 “Certain coefficient estimates for bi-univalent Sakaguchi type functions” Aust. J. Math. Anal. Appl. 10(1), Art. 1, pp. 1-7.

[44] Tan, D. L., 1984 “Coefficient estimates for bi-univalent functions” Chinese Ann. Math. Ser. A 5 no. 5, 559–568.

[45] Tang, H., Deng, G. and Li, S., 2013 “Coefficient estimates for new subclasses of Ma-Minda bi-univalent functions” J. Inequal. Appl., 2013:317, 10 pp.

[46] Xiong, L. and Liu, X., 2015 “Some extensions of coefficient problems for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions” Filomat 39(7), 1645-1650.

[47] Xu, Q., Gui, Y. and Srivastava, H.M., 2012 “Coefficient estimates for a certain subclasses of analytic and bi-univalent functions” Appl. Math. Lett. 25(6), 990-994.

[48] Xu, Q., Xiao, H. and Srivastava, H.M., 2012 “A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and coefficient estimate problems” Appl. Math. Comput. 218(23), 11461-11465.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Sibel KAYA KINA

Doğum Yeri: Kars

Doğum Tarihi: 12. 08. 1985

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: M. Hüsnü Özyeğin Anadolu Lisesi - 2004

Lisans: Atatürk Üniveristesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği - 2009

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl Yayınları (SCI ve diğer):

2010 yılında Kars Susuz 100. Yıl YİBO'da göreve başladım. 2010-2014 yılları arasında Kars Kazım Karabekir Ortaokulunda ve 2015-2016 Eğitim Öğretim Döneminde Kars Merkez Fevzi Paşa Orta Okulunda görev yaptım. 2015 yılından bu yana Balıkesir Gönen Karşıyaka 100.Yıl Ortaokulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

Yayınlar :

Deniz, E., Jahangiri, J. M., Kına, S. K. and Hamidi, S. G., 2016 "Faber polynomial coefficients for generalized bi-subordinate functions of complex order" (yayımlanması için bir dergiye sunuldu).