T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISI GEÇİRGENLİK DENKLEMİ İÇİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİNİN YAKINSAKLIĞI

SEVİNÇ NAYKİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. GABİL YAGUB

AĞUSTOS-2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi **Sevinç NAYKİ** nin **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı **"Isı Geçirgenlik Denklemi İçin Sonlu Farklar Yönteminin Yakınsaklığı"** adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmenliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir. 24/ 08/ 2016

Adı ve Soyadı:	**İmza**
Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Gökçe Dilek KÜÇÜK	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../2016 gün ve ..../.... Sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada ısı geçirgenlik denklemi için sonlu farklar yönteminin yakınsaklığı ele alınmıştır. İlk önce ele alınan ısı geçirgenlik denklemi için II. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanmış ve problemin diskritleştirilmesi oluşturulmuştur. Sınır değer problemi için farklar şeması oluşturulmuş ve bu farklar şemasının kararlılığı için kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimlerden yararlanarak farklar şemasının hatası değerlendirilmiş, sonlu farklar yönteminin yakınsaklığını gösteren kestirimler elde edilmiştir. Ele alınan sınır değer problemlerinin nümerik çözüm algoritması oluşturulmuştur.

Tez çalışmamda planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşturulmasında ilgi ve desteğini esirgemeyen derin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmesiyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışman hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda benden yardımlarını desteğini ve bilgisini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve ayrıca tezin hazırlanma sürecinde manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2016 Sevinç NAYKİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, ısı geçirgenlik denklemi için sonlu farklar yönteminin yakınsaklığı ele alınmıştır. İlk bölümde ısı geçirgenlik denklemi için sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verildikten sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise ısı geçirgenlik denklemi için II. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanır ve bu problemin bir fark şeması oluşturulur. Dördüncü bölümde ise fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilir ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. Başka bir deyişle sonlu farklar yönteminin kesinliği belirlenmiştir. Son olarak başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözüm algoritması elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2016, 27 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Isı Geçirgenlik Denklemi, Sınır Değer Problemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Fark Şeması, Kararlılık, Yakınsama.

ABSTRACT

In this thesis, the convergence of the finite differences method for heat equation is considered. In the first chapter, after the information about the finite difference method for heat conductivity equation is in formed, in the second chapter, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter,the second type initial boundary value problem for heat equation, is desenibed and a differance scheme for this problem is constituted. In the fourth chapter, a stability estimation for the solution of the difference scheme is obtained and by using this estimation, the error of difference scheme is evaluated. In other words, the precision of the finite difference method is determined. Finally, a numerical solution algorithm of the initial-boundary value problem is obtained. In fifth chapter, it is emphasized that this thesis is different from the former works.

2016, 27 Pages

Keywords: Heat equation, Boundary value problem, Finite difference method, Difference scheme, Stability, Convergence.

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen
$\exists$	Öyleki
$\ell > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$x \in [0, \ell]$	Bağımsız değişken
$t \in [0, T]$	Bağımsız değişken
$\tau > 0$	t değişkenine göre adım
$h > 0$	x değişkenine göre adım
[….]	Kaynak numarası sayfa
$\Omega = (0, \ell) \times (0, T)$	Verilen bölge
$\delta_{\bar{t}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j\kappa} - \phi_{j\kappa-1}\right) / \tau$,	t 'ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j\kappa} - \phi_{j-1\kappa}\right) / h$	x 'e göre sol fark
$\delta_{x}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j+1\kappa} - \phi_{j\kappa}\right) / h$	x 'e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j+1\kappa} - 2\phi_{j\kappa} + \phi_{j-1\kappa}\right) / h^2$	x 'e göre 2. mertebeden fark

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi ısı geçirgenlik denklemi için konulan başlangıç sınır değer problemleri ısı, difüzyon gibi süreçlerin öğrenilmesi durumunda ortaya çıkmıştır [1-5]. Bu nedenle ısı geçirgenlik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerin nümerik çözümü hem teorik hem de pratik açıdan önem taşımaktadır. Söylemek gerekir ki ısı geçirgenlik denklemi için başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözümü ve onlar için sonlu farklar yönteminin yakınsaklığı ilk önce farklı yazarlarca incelenmiştir [2,4-7]. Bu tez çalışmasında incelenen ısı geçirgenlik denklemi için II. çeşit sınır değer problemleri verilerin farklı şartları sağlaması açısından önceki çalışmalardan farklıdır. Bu nedenle bu tez çalışmasında incelenen problem araştırma açısından önem arz etmektedir. Söylemek gerekir ki kısmi türevli diferansiyel denklemler için benzer sorular önceki [6-14] çalışmalarda incelenmiştir.

Diferansiyel denklemler için konulan problemlerin nümerik çözümünü yapmak için kullanılan çözüm yöntemlerinden biri sonlu farklar yöntemidir. Sonlu farklar yöntemi ile verilen diferansiyel denklemler, sonlu fark şemalarıyla değiştirilir. Bu değişim onlara karşılık gelen nümerik diferansiyelleme ya da sonlu fark formülleriyle değiştirilir. Bu nedenle nümerik diferansiyel formüllerini bilmek pratik açıdan çok önemlidir.

Sonlu farklar yöntemini bir başlangıç sınır değer probleminin çözümüne uygulamak için belli aşamalardan geçmemiz gerekir:

1. Verilen başlangıç sınır değer probleminin çözümünün tanımladığı bölge uygun bir ağa dönüştürülür.
2. İnşa edilen ağ üzerinden tanımlanan ağ fonksiyonları ilk problemin verilerine dönüştürülür.
3. Başlangıç sınır değer problemini oluşturan denklem ve başlangıç sınır değer şartları sonlu farklar şemasına dönüştürülerek cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

Bu aşamalar gerçekleştirildikten sonra elde edilen fark şemasının çözümü ile verilen başlangıç sınır değer probleminin çözümü arasındaki ilişki inşa edilmeye çalışılıyor ki söz konusu çalışmalarda sonlu farklar yönteminin yakınsaklığı ile ilgili soruların cevaplandırılmasına ait olan çalışmalar sürdürülüyor.

Bu bahsedilen bilgiler bu tez çalışmasında sonlu farklar yönteminin kullanılmasında bize yardımcı olmuştur.

Tezin ilerleyen kısımlarında ilk olarak, kuramsal temeller bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan L_p uzayları ve Sobolev uzaylarının yanı sıra bir sonraki bölümde kullanacağımız bazı kavramların tanımları verilmiştir.

Materyal ve yöntem bölümünde, ısı geçirgenlik denklemi için II. çeşit sınır değer problemi tanımlanıp bu probleme ait fark şeması oluşturulmuştur.

Araştırma bulguları bölümünde ise II. çeşit sınır değer problemine ait fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiş ve kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlanmıştır. Ele alınan sınır değer probleminin nümerik çözüm algoritması oluşturulmuştur.

Son olarak, tartışma ve sonuç bölümünde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya konulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vericeğiz:

Tanım 2.1: “ K reel veya kompleks sayılar cismi, X K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ ise her $a \in K$ için”

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

2. $\|ax\| = |a|\|x\|,$

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan

$\|.\| : X \to \mathbb{R}, \ x \to \|x\|$

“dönüşümüne X lineer uzayı üzerinde norm denir. Üzerinde bir norm tanımlanan X lineer uzayına normlu lineer uzay denir”.

Tanım 2.2: “ X bir normlu lineer uzay olsun”.

$(x_n) \subset X, \ n = 1, 2, ...$ dizisi "$\forall \varepsilon > 0, \ \forall p \in \mathbb{N}$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ için

$$\|x_{n+p} - x_n\| \le \varepsilon$$

“olacak şekilde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Koşulunu sağlıyorsa, (x_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisidir denir”.

Tanım 2.3: “Her Cauchy dizisine yakınsak olan normlu lineer uzaya tam uzay denir. Tam normlu lineer uzaya Banach uzayı denir”.

Tanım 2.4: “ X bir lineer uzay olsun. X üzerinde “:

i. $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \ge 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

"koşullarını sağlayan $\langle . , .\rangle\, X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne iç çarpım denir. İç çarpım tanımlanan reel lineer uzaya da Euclid (ya da iç çarpım) uzayı denir"

Tanım 2.5: " X bir kompleks lineer uzay olsun. X üzerinde ":

i. $\forall x \in X$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in X$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

"koşullarını sağlayan $\langle . , .\rangle\, X \times X \to \mathbb{C}$ dönüşümüne iç çarpım, $\left(X, \langle . , .\rangle\right)$ ikilisine de üniter (ya da iç çarpım uzayı) uzay denir".

"Tam Euclid ve tam üniter uzaylara Hilbert uzayı denir".

Tanım 2.6: [2] **"** $L_2(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm"

$$\langle u, v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)\bar{v}(x)\,dx$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L_2(0,\ell)}}$$

"şeklinde bulunmaktadır".

Tanım 2.7: [2] “ $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm”

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t)\phi(x,t)\,dxdt$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.8: [2] ” $W_2^1(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$ uzayında olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır”:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^1(0,\ell)} = \int_0^{\ell}\left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x)}{\partial x}\right)dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,\ell)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^1(0,\ell)}}.$$

” $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayı $W_2^1(0,\ell)$uzayının alt uzayı olup, $(0,\ell)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır”.

Tanım 2.9: [2] **“** $W_2^2(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır”:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^2(0,\ell)} = \int_0^{\ell}\left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x)}{\partial x^2}\right)dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,\ell)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^2(0,\ell)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell) \equiv W_2^2(0,\ell) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell).$$

Tanım 2.10: [2] "$W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlı $\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlayan $\psi(x,t)$ fonksiyonlardır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır".

$$\langle\psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial t}\right]dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

Lemma 2.1: [9] (Bramble-Hilbert Lemması). D bölgesi E_n Euclid uzayının $d>0$ çapına sahip açık, konveks sınırlı bir bölgesi olsun. Ayrıca,

$$g(u)\in W_2^m(D)\left(0<m=\bar{m}+\lambda,\ \bar{m}-\text{negatif olmayan tamsayı, }0<\lambda\le 1\right)$$

biçiminde lineer ve sınırlı bir fonksiyonel olsun.

Yani, $|g(u)|\le C\left(\sum_{j=0}^{m}d^{2j}|u|_{j,D}^2+d^{2m}|u|_{m,D}^2\right)^{1/2}$ şartı sağlansın. Eğer $g(u)$ $\bar{m}$'nci dereceden polinomda sıfıra eşit ise, bu takdirde;

$|g(u)|\le C.\bar{C}.d^m|u|_{m,D}$ olacak şekilde $\bar{C}>0$ sayısı vardır. Burada $|u|_{m,D}$, $W_2^m(D)$'de yarı normdur.

Tanım 2.11: Farz edelim ki $u(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlanıp sürekli fonksiyon olsun. $u(x)$ fonksiyonunu ağ fonksiyonu oluşturmak için $[a,b]$ aralığında ona karşılık gelen ağ ile değiştirelim.

$$\bar{W}_h=\left\{x:x=x_i=a+ih,\ i=\overline{0,N}\right\},\ \ h=\frac{b-a}{N}$$

$$W_h=\left\{x:x=x_i=a+ih,\ i=\overline{1,N-1}\right\},$$

$$\overline{W}_h = W_h \cup \{x = a, \ \ x = b\}.$$

h'a ağın adımı denir. x_i noktalarına ağın düğüm noktaları denir. Düğüm noktalarında $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktalarındaki değerini $u(x) = u(x_i)$ ile gösterelim. $u(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olmadığından $u(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen

$$u_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)dx \ \ i = \overline{1,N} \ , \ u_i = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x)dx \ \ i = \overline{0,N-1}$$

formülleriyle tanımlanabilir. Bu formüllere Steklov anlamında $u(x)$ fonksiyonların $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ aralıklarında ortalaması denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Isı Geçirgenlik Denklemi İçin II. Çeşit Sınır Değer Probleminin Konulması

Burada $\ell, T > 0$ verilen sayılar, $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$, $\Omega = (0,\ell) \times (0,T)$ olsun.

Farz edelim ki $u = u(x,t)$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar sağlansın:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \upsilon(t)u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\ell) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \in (0,T). \tag{3}$$

Burada $b > 0$ yeteri kadar büyük sayı, $\upsilon = \upsilon(t)$ fonksiyonu ölçülebilir fonksiyon olup aşağıdaki şartları sağlasın:

$$0 < b_0 < \upsilon(t) \le b_1, \qquad \overset{0}{\forall} t \in (0,T). \tag{4}$$

$\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ verilen ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi \in W_2^1(0,\ell), \quad f \in L_2(\Omega), \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(\ell)}{dx} = 0. \tag{5}$$

Görüldüğü gibi (1)-(3) şartlarından $u = u(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi ısı geçirgenlik denklemi için 2. çeşit sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü denildiğinde $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan ve (1)-(3) şartlarını hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için sağlayan $u = u(x,t)$ fonksiyonunu anlayacağız. [1,2,4,5] çalışmasından bilindiği üzere verdiğimiz tanım anlamında (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm için:

$$\max \|u_x(.,t)\|_{L_2(0,\ell)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \right) \tag{6}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_0 > 0$ sabiti φ ve f 'den bağımsızdır.

3.2. Problemin Diskritleştirilmesi

(1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin diskritleştirmek için ilk önce Ω bölgesini aşağıdaki biçimde ağa dönüştürelim:

$$\left\{x_j, t_k\right\}, \quad x_j = jh - h/2, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad h = \ell/(M-1), \quad t_k = \kappa\tau, \quad \kappa = \overline{0, N}, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

Burada M, N verilen pozitif tam sayılardır. $x_1 - h/2 = 0$, $x_{M-1} + h/2 = \ell$ olduğu açıktır. Farz edelim ki $\phi_{j\kappa}$ tanımlanan ağda tanımlı fonksiyon olsun. Aşağıdaki gösterimleri kabul edelim:

$$\delta_{\bar{t}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j\kappa} - \phi_{j\kappa-1}\right)/\tau,$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j\kappa} - \phi_{j-1\kappa}\right)/h, \quad \delta_x\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j+1\kappa} - \phi_{j\kappa}\right)/h$$

$$\delta_{x\bar{x}}\phi_{j\kappa} = \left(\phi_{j+1\kappa} - 2\phi_{j\kappa} + \phi_{j-1\kappa}\right)/h^2.$$

Bu gösterimlerden yararlanarak (1)-(3) başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\delta_{\bar{t}}\phi_{j\kappa} - \delta_{x\bar{x}}\phi_{j\kappa} + b\phi_{j\kappa} + \upsilon_k\phi_{j\kappa} = f_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{1, N} \tag{7}$$

$$\phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \tag{8}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{1\kappa} = \delta_{\bar{x}}\phi_{M\kappa} = 0, \quad \kappa = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Burada

$$\upsilon_\kappa = \frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \upsilon(t)\,dt, \quad \kappa = \overline{1, N}, \tag{10}$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} \varphi(x)\,dx, \quad \text{j} = \overline{1, M-1}, \quad \varphi_0 = \varphi_1, \quad \varphi_M = \varphi_{M-1}, \tag{11}$$

$$f_{j\kappa} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_{j-h/2}}^{x_{j+h/2}} f(x,t)\,dx\,dt, \quad \text{j} = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{1, N}, \tag{12}$$

ağ fonksiyonlarıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Fark Şemasının Kararlılığı

Görüldüğü gibi (7)-(9) sistemi (1)-(3) başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır ve bu fark şemasının çözümü için değerlendirme elde etmeye çalışalım.

Teorem 4.1.1. (7)-(9) sisteminin çözümü için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{jm}\right)^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=2}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa}\right)^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}\right)^2$$

$$\leq c_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(f_{j\kappa}\right)^2\right),\qquad \forall m\in\{1,2,...,N\} \tag{13}$$

kestirim geçerlidir. Burada $c_1>0$ sabiti, τ ve h bağımsızdır.

İspat: (7)-(9) sistemi her bir κ için ve $\forall\eta_{j\kappa}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğine denk olduğu açıktır:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar{t}}\phi_{j\kappa}\eta_{j\kappa}+h\sum_{j=2}^{M-1}\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa}\delta_{\bar{x}}\eta_{j\kappa}+bh\sum_{j=1}^{M-1}\phi_{j\kappa}\eta_{j\kappa}$$

$$+h\sum_{j=1}^{M-1}\upsilon_{\kappa}\phi_{j\kappa}\eta_{j\kappa}=h\sum_{j=1}^{M-1}f_{j\kappa}\eta_{j\kappa}. \tag{14}$$

Burada $\eta_{j\kappa}=\tau\phi_{j\kappa}$ alırsak ve

$$\tau\delta_{\bar{t}}\phi_{j\kappa}\phi_{j\kappa}=\frac{1}{2}\left(\phi_{j\kappa}{}^2-\phi_{j\kappa-1}{}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\phi_{j\kappa}-\phi_{j\kappa-1}\right)^2 \tag{15}$$

eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}{}^2-\phi_{j\kappa-1}{}^2\right)+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}-\phi_{j\kappa-1}\right)^2+\tau h\sum_{j=2}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa}\right)^2$$

$$+\left(b+b_0\right)\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}\right)^2\leq\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{j\kappa}\phi_{j\kappa}\right|.$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını κ üzerinden $\kappa = 1$ den $\kappa = m \le N$ 'e kadar toplayıp $\phi_{j0} = \varphi_j$ şartlarını kullanalım. Bu takdirde aşağıdaki:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{jm}\right)^2 + h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa} - \phi_{j\kappa-1}\right)^2 + 2\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=2}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa}\right)^2$$

$$+2\left(b+b_0\right)\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}\right)^2 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\varphi_j\right)^2 + 2\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{j\kappa}\right|\left|\phi_{j\kappa}\right|$$

eşitsizliği elde ederiz.

Buradan $\varepsilon > 0$ için

$$cd \le \frac{c^2\varepsilon}{2} + \frac{d^2}{2\varepsilon},$$

eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{jm}\right)^2 + 2\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=2}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{j\kappa}\right)^2 + 2\left(b+b_0\right)\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}\right)^2$$

$$\le h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\varphi_j\right)^2 + \varepsilon\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\phi_{j\kappa}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\tau h\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(f_{j\kappa}\right)^2.$$

Burada $\varepsilon = b + b_0$ alırsak $c_1 = \left(\dfrac{1}{b+b_0} + 1\right) \times \left(\min\left\{1, b+b_0\right\}\right)^{-1}$ ile gösterirsek (13) eşitsizliğinin geçerliliği olduğunu elde ederiz. Böylelikle teorem ispatlandı.

4.2. Fark Şemasının Hatasının Değerlendirilmesi

(7)-(9) fark şemasının hatasını değerlendirmek için (1)-(3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olan $u = u\left(x,t\right)$ fonksiyonunun $t = t_\kappa$ noktasındaki değerinin $\left[x_j - h/2, x_j + h/2\right]$ aralığı üzerinden Steklov anlamında ortalamasını yazalım

$$u_{j\kappa} = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} u\left(x, t_\kappa\right)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{1, N}$$

$$u_{0\kappa} = u_{1\kappa}, \quad u_{M\kappa} = u_{M-1\kappa}, \quad \kappa = \overline{1,N}, \ u_{j0} = \varphi_j \ , \ j = \overline{0,M} \ . \tag{16}$$

$z_{j\kappa}=\phi_{j\kappa}-u_{j\kappa}$ gösterirsek bu takdirde (7)-(9) sisteminden yararlanarak $z_{j\kappa}$ fonksiyonu için:

$$\delta_{\bar{t}} z_{j\kappa}-\delta_{x\bar{x}} z_{j\kappa}+b z_{j\kappa}+\upsilon_{\kappa} z_{j\kappa}=F_{j\kappa}, \quad j=\overline{1, M-1}, \quad \kappa=\overline{1.N} \tag{17}$$

$$z_{j0}=\varphi_{j}-u_{j0}=0 \quad j=\overline{0, M}, \tag{18}$$

$$\delta_{\bar{x}} z_{1\kappa}=\delta_{\bar{x}} z_{M\kappa}=0, \quad \kappa=\overline{1, N}, \tag{19}$$

sistemini elde ederiz. Burada

$$F_{j\kappa}=\delta_{x\bar{x}} u_{j\kappa}-b u_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa} u_{j\kappa}-\frac{1}{\tau h} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_{\kappa}} \int_{x_{j}-h/2}^{x_{j}+h/2}\left[\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}-b u-\upsilon(t) u\right] dx dt,$$

$$j=\overline{1, M-1}, \quad \kappa=\overline{1, N} \tag{20}$$

dir.

Teorem 4.2.1. Farz edelim ki $\tau>0,\ h>0$ adımları $c_{2} \leq \frac{\tau}{h^{2}} \leq c_{3}$ uyum şartlarını sağlasın. Burada $c_{2}, c_{3}>0$ sabitleri τ ve h dan bağımsız olan belirli sabitlerdir. Bu takdirde (17)-(19) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h \sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{jN}\right)^{2}+\tau h \sum_{\kappa=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^{2}+\tau h \sum_{\kappa=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_{x} z_{j\kappa}\right)^{2} \leq c_{4}\left(\tau+h^{2}\right). \tag{21}$$

Burada $c_{4}>0$ sabiti τ ve h dan bağımsızdır.

İspat: (17) sisteminin sağ tarafındaki $F_{j\kappa}$ ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{j\kappa}=\delta_{\bar{x}}\left[\delta_{x} u_{j\kappa}-\beta_{j\kappa}\right]+b\left[\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right]+\left[\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa} u_{j\kappa}\right]. \tag{22}$$

Burada

$$\beta_{j\kappa}=\frac{1}{\tau} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_{\kappa}} \frac{\partial u\left(x_{j}+h/2, t\right)}{\partial x} dt, \quad j=\overline{1, M-1}, \quad \kappa=\overline{1, N} \tag{23}$$

$$\gamma_{j\kappa}=\frac{1}{\tau h} \int_{t_{\kappa-1}}^{t_{\kappa}} \int_{x_{j}-h/2}^{x_{j}+h/2} u(x, t) dx dt, \quad j=\overline{1, M-1}, \quad \kappa=\overline{1, N} \tag{24}$$

$$\eta_{j\kappa} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \upsilon(t)u(x,t)dxdt, \qquad j=\overline{1,M-1}, \quad \kappa=\overline{1,N} \tag{25}$$

dir.

$F_{j\kappa}$ fonksiyonunun bu formülünü (17) ‘de dikkate alıp elde edilen eşitliğin her iki tarafını $\tau h z_{j\kappa}$’ya çarpıp $j=\overline{1,M-1}, \quad \kappa=\overline{1,N}$ üzerinden toplarsak

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar t} z_{j\kappa} z_{j\kappa} - \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{x\bar x} z_{j\kappa} z_{j\kappa} + b\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2 + \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\upsilon_\kappa\left(z_{j\kappa}\right)^2$$

$$= \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar x}\left[\delta_x u_{j\kappa} - \beta_{j\kappa}\right]z_{j\kappa} + b\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\gamma_{j\kappa} - u_{j\kappa}\right]z_{j\kappa}$$

$$+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left[\eta_{j\kappa} - \upsilon_\kappa u_{j\kappa}\right]z_{j\kappa} \tag{26}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\tau\delta_{\bar t} z_{j\kappa} z_{j\kappa} = \frac{1}{2}\left(z_{j\kappa}\right)^2 - \left(z_{j\kappa-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(z_{j\kappa} - z_{j\kappa-1}\right)^2$$

eşitliğin geçerli olduğu açıktır. Bu takdirde $z_{j0}=0, \ j=\overline{0,M}$ şartından yararlanırsak (26) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terimi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar t} z_{j\kappa} z_{j\kappa}\right) = \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{jN}\right)^2 + \frac{1}{2}h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa} - z_{j\kappa-1}\right)^2. \tag{27}$$

Kısmi toplam formülünden yararlanırsak ve (19) şartını dikkate alırsak bu takdirde (26) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terimi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\overline{x}x} z_{j\kappa} z_{j\kappa} = -\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_x z_{j\kappa}\right)^2. \tag{28}$$

Aynı biçimde kısmi toplam formülünden yararlanırsak (26) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi de

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\delta_{\bar x}\left(\delta_x u_{j\kappa} - \beta_{j\kappa}\right)z_{j\kappa} = -\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_x u_{j\kappa} - \beta_{j\kappa}\right)\delta_x z_{j\kappa}$$

$$+\left(\delta_x u_{M-1\kappa} - \beta_{M-1\kappa}\right)z_{M-1\kappa} - \left(\delta_x u_{0\kappa} - \beta_{0\kappa}\right)z_{0\kappa} \tag{29}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\beta_{j\kappa}$ için olan formülden ve (3) sınır değer şartından yararlanırsak

$$\beta_{0\kappa} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \frac{\partial u\left(x_0 + \frac{h}{2}, t\right)}{\partial x} dt = \frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} dt = 0, \quad \kappa = \overline{1,N}$$

$$\beta_{M-1\kappa} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \frac{\partial u\left(x_{M-1} + \frac{h}{2}, t\right)}{\partial x} dt = \frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} dt = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan $u_{j\kappa}$ için olan formülü kullanıp $u_{0\kappa} = u_{1\kappa}$, $u_{M\kappa} = u_{M-1\kappa}$ şartlarından yararlanırsak

$$\delta_x u_{M-1\kappa} = 0, \quad \delta_x u_{0\kappa} = 0$$

eşitliklerini yazabiliriz. Buradan da,

$$\left(\delta_x u_{M-1\kappa} - \beta_{M-1\kappa}\right) = 0, \quad \left(\delta_x u_{0\kappa} - \beta_{0\kappa}\right) = 0$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu eşitlikleri (29) da dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\tau h \sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} \delta_{\bar{x}}\left(\delta_x u_{j\kappa} - \beta_{j\kappa}\right) z_{j\kappa} = -\tau h \sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_x u_{j\kappa} - \beta_{j\kappa}\right)\delta_x z_{j\kappa}. \tag{30}$$

(27), (28), (30) eşitliklerini kullanıp (26) eşitliğinden yararlanırsak

$$\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{jN}\right)^2 + \left(b + b_0\right)\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2 + \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x z_{j\kappa}\right)^2$$

$$\leq \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|\left(\beta_{j\kappa} - \delta_x u_{j\kappa}\right)\delta_x z_{j\kappa}\right| + b\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\left(\gamma_{j\kappa} - u_{j\kappa}\right) z_{j\kappa}\right|$$

$$+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\left(\eta_{j\kappa} - \upsilon_\kappa u_{j\kappa}\right) z_{j\kappa}\right| \tag{31}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan terimlerin $\varepsilon > 0$ için

$$cd \leq \frac{c^2\varepsilon}{2} + \frac{d^2}{2\varepsilon}$$

eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|\left(\beta_{j\kappa}-\delta_x u_{j\kappa}\right)\delta_x z_{j\kappa}\right| \le \frac{1}{2}\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|\beta_{j\kappa}-\delta_x u_{j\kappa}\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|\delta_x z_{j\kappa}\right|^2, \tag{32}$$

$$b\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)z_{j\kappa}\right| \le \frac{b\tau h}{2\varepsilon}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)^2$$

$$+\frac{\varepsilon b\tau h}{2}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2, \tag{33}$$

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa} u_{j\kappa}\right)z_{j\kappa}\right| \le \frac{\tau h}{2\varepsilon}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa} u_{j\kappa}\right)^2$$

$$+\frac{\varepsilon\tau h}{2}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2. \tag{34}$$

(32)-(34) eşitsizlikleri (31)'in sağ tarafında dikkate alınır ve $\varepsilon=\left(b+b_0\right)/\left(b+1\right)$ seçilirse bu takdirde

$$\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{jN}\right)^2+\frac{1}{2}\left(b+b_0\right)\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2+\frac{1}{2}\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_x z_{j\kappa}\right)^2$$

$$\le \frac{1}{2}\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\beta_{j\kappa}-\delta_x u_{j\kappa}\right)^2+\frac{b\left(b+1\right)\tau h}{2\left(b+b_0\right)}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)^2$$

$$+\frac{\left(b+1\right)\tau h}{2\left(b+b_0\right)}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa} u_{j\kappa}\right)^2 \tag{35}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$c_5=\min\left\{1,b+b_0\right\}$$

$$c_6=\max\left\{1,\frac{b\left(b+1\right)}{b+b_0},\frac{\left(b+1\right)}{b+b_0}\right\}$$

$$c_7=\frac{c_6}{c_5}$$

gösterirsek (35) 'den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{jN}\right)^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(z_{j\kappa}\right)^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_x z_{j\kappa}\right)^2$$

$$\leq c_7\left[\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\beta_{j\kappa}-\delta_x u_{j\kappa}\right)^2+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)^2\right.$$

$$\left.+\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_\kappa u_{j\kappa}\right)^2\right]. \qquad (36)$$

Şimdi bu eşitsizliğin sağ tarafındaki her bir terimi değerlendirmeye çalışalım. İlk önce sağ taraftaki ikinci terimi değerlendirelim. Bu nedenle $u_{j\kappa}$ ve $\gamma_{j\kappa}$ için olan formüllerden yararlanırsak aşağıdaki bu bağıntıyı yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)^2=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t)dxdt-\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t_\kappa)dx\right)^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(x,t)-u(x,t_\kappa)\right)dxdt\right)^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\frac{\partial u(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma dxdt\right)^2$$

$$\leq\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left|\frac{\partial u(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|d\sigma dxdt\right)^2$$

$$\leq\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\frac{\tau}{h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$=\tau^2\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$=\tau^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Böylelikle

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\gamma_{j\kappa}-u_{j\kappa}\right)^2\le\tau^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{37}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi (36) da yer alan sağ taraftaki üçüncü terimi değerlendirelim. $\upsilon_\kappa, u_{j\kappa}, z_{j\kappa}$ için olan formülünden yararlanılırsa

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\upsilon(t)u(x,t)-\upsilon_\kappa u_{j\kappa}\right)dxdt\right)^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[u_{j\kappa}\left(\upsilon(t)-\upsilon_\kappa\right)+\upsilon(t)\left(u(x,t)-u_{j\kappa}\right)\right]dxdt\right)^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\upsilon(t)\left(u(x,t)-u_{j\kappa}\right)\right]dxdt\right)^2 \tag{38}$$

eşitliği elde edilir. $u(x,t)-u_{j\kappa}$ farkına bakalım. $u_{j\kappa}$ için olan formülü göz önüne alırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$u(x,t)-\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(\xi,t_\kappa)dx=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(x,t)-u(\xi,t_\kappa)\right)d\xi$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(x,t)-u(\xi,t)+u(\xi,t)-u(\xi,t_\kappa)\right)d\xi$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{\xi}^{x}\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial\eta}d\eta d\xi+\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\frac{\partial u(\xi,\theta)}{\partial\theta}d\theta d\xi.$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|u(x,t)-u_{j\kappa}\right|\le\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{\xi}^{x}\left|\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial\eta}\right|d\eta d\xi+\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\left|\frac{\partial u(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right|d\theta d\xi$$

$$\le\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(\eta,t)}{\partial\eta}\right|d\eta d\xi+\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left|\frac{\partial u(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right|d\theta d\xi.$$

Bu eşitsizlikten yararlanarak (38) eşitsizliğinden

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa}u_{j\kappa}\right)^2 \le b_1^2\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{h}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|dxdt\right.$$

$$\left.+\frac{\tau}{\tau h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|dxdt\right)^2 \le b_1^2\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\frac{2h}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right.$$

$$\left.+\frac{2\tau}{h}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right) = 2b_1^2\left(\tau^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+h^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle buradan da aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\eta_{j\kappa}-\upsilon_{\kappa}u_{j\kappa}\right)^2 \le 2b_1^2\left(\tau^2+h^2\right)\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right). \tag{39}$$

Şimdi (36)'nın sağ tarafında yer alan birinci terimi değerlendirelim. $\beta_{j\kappa}$ ve $u_{j\kappa}$ için olan formüller göz önüne alınırsa

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_x u_{j\kappa}-\beta_{j\kappa}\right)^2 = \tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left[\frac{1}{h}\left(u_{j+1\kappa}-u_{j\kappa}\right)-\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\frac{\partial u\left(x_j+h/2,t\right)}{\partial x}dt\right]^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left[\frac{1}{h^2}\left(\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}u(x,t_\kappa)dx-\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t_\kappa)dx\right)-\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\frac{\partial u\left(x_j+h/2,t\right)}{\partial x}dt\right]^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left\{\frac{1}{\tau h^2}\left[\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left(u(x,t_\kappa)-u(x,t)\right)dxdt-\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left(u(x,t_\kappa)-u(x,t)\right)dxdt\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\tau h^2}\left(\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}u(x,t)dxdt-\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t)dxdt\right)-\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\frac{\partial u\left(x_j+h/2,t\right)}{\partial x}dt\right\}^2$$

$$=\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{F_{j\kappa}^1+F_{j\kappa}^2\right\}^2 \tag{40}$$

(40) sistemi elde edilir. Burada

$$F_{j\kappa}^{1}=\frac{1}{\tau h^2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt-\frac{1}{\tau h^2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt=$$

$$=\frac{1}{\tau h^2}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t}^{t_\kappa}\left(\frac{\partial u(x+h,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}\right)d\theta dxdt \tag{41}$$

$$F_{j\kappa}^{2}=\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left[\frac{1}{h^2}\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}u(x,t)dx-\frac{1}{h^2}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}u(x,t)dx-\frac{\partial u\left(x_j+h/2,t\right)}{\partial x}\right]dt. \tag{42}$$

dir.

$F_{j\kappa}^{1}$ için olan formülden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left(F_{j\kappa}^{1}\right)^2\le\frac{\tau^2}{h^2}\left\|\frac{\partial u(x+h,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{43}$$

$F_{j\kappa}^{2}$ için olan formülden yararlanılarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{j\kappa}^{2}=-\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\rho_{jt}(u)dt,\quad j=\overline{1,M-2},\quad \kappa=\overline{1,N}. \tag{44}$$

Burada

$$\rho_{jt}(u)=\frac{\partial u\left(x_j+h/2,t\right)}{\partial x}-\frac{1}{h^2}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(x+h,t)-u(x,t)\right)dx \tag{45}$$

dir.

Her bir tespit olunmuş t için $\rho_{jt}(u)$ u 'ya nazaran lineer fonksiyoneldir. Burada x değişkenini ξ ile x_j değişkenini ise x ile gösterelim. Bu durumda $\rho_{jt}(u)$ fonksiyonelini de $\tilde{\rho}_t(u)$ ile gösterirsek

$$\tilde{\rho}_t(u)=\frac{\partial u\left(x+h/2,t\right)}{\partial\xi}-\frac{1}{h^2}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(u(\xi+h,t)-u(\xi,t)\right)d\xi \tag{46}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\xi=x+sh$ alırsak aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\tilde{\rho}_t(\tilde{u}) = \frac{1}{h}\frac{\partial \tilde{u}(0,5;t)}{\partial s} - \frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\left(\tilde{u}(s+1,t) - \tilde{u}(s,t)\right)ds. \qquad (47)$$

Burada $\tilde{u}(s,t) = u(x+sh,t)$ dir.

Kontrol etmek mümkün ki $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})$ fonksiyoneli $\tilde{u}(s,t) = as^2 + bs + c$ üç terimlisinden sıfıra dönüşür. Burada a, b, c sabitlerdir. $\tilde{u} = as^2 + bs + c$ olup $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})$'yi (47) formülü ile bulursak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\tilde{\rho}_t(\tilde{u}) = \frac{1}{h}(2as+b)\Big|_{s=0,5} - \frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\left[a(s+1)^2 + b(s+1) + c - as^2 - bs - c\right]ds$$

$$= \frac{1}{h}(a+b) - \frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\left[2as + (a+b)\right]ds = \frac{1}{h}(a+b) - \frac{1}{h}\left[as^2\Big|_{-0,5}^{0,5} + (a+b)s\Big|_{-0,5}^{0,5}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(a+b) - \frac{1}{h}\left[(a+b)0,5 - (a+b)(-0,5)\right]$$

$$= \frac{1}{h}(a+b) - \frac{1}{h}(a+b) = \frac{1}{h}\left[a+b-a-b\right] = 0.$$

Böylelikle

$$\tilde{\rho}_t(\tilde{u}) = \tilde{\rho}_t\left(as^2 + bs + c\right) = 0$$

dır.

Diğer taraftan $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})$ fonksiyonelinin $W_2^2(-0,5;0,5)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})$ için (47) formülünden yararlanırsak

$$\left|\tilde{\rho}_t(\tilde{u})\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\int_{s}^{s+1}\left(\frac{\partial \tilde{u}(0,5;t)}{\partial \sigma} - \frac{\partial \tilde{u}(\sigma,t)}{\partial \sigma}\right)d\sigma ds\right| \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\int_{s}^{s+1}\int_{\sigma}^{0,5}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(\theta,t)}{\partial \theta^2}\right|d\theta d\sigma ds \le \frac{1}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\int_{-0,5}^{1,5}\int_{-0,5}^{0,5}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(\theta,t)}{\partial \theta^2}\right|d\theta d\sigma ds$$

$$= \frac{2}{h}\int_{-0,5}^{0,5}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(\theta,t)}{\partial \theta^2}\right|d\theta \le \frac{2}{h}\left(\int_{-0,5}^{0,5}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(s,t)}{\partial s^2}\right|^2 ds\right)^{1/2} = \frac{2}{h}\|\tilde{u}\|_{W_2^2(-0,5;0,5)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylelikle

$$\left|\tilde{\rho}_t(\tilde{u})\right| \le \frac{2}{h}\|\tilde{u}\|_{W_2^2(-0,5;0,5)} \tag{48}$$

dir.

Bu eşitsizlikten $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})=0$ şartından $\tilde{\rho}_t(\tilde{u})$ fonksiyonelini [9] çalışmasından bildiğimiz Bramble-Hilbert lemmasından tüm şartların sağlandığını görebiliriz. Bu durumda lemmanın hükmüne göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\tilde{\rho}_t(\tilde{u})\right| \le c_8 h^{-1}\left\|\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2}\right\|_{L_2(-0,5;0,5)} = c_8 h^{-1}\left(\int_{-0,5}^{0,5}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(s,t)}{\partial s^2}\right|^2 ds\right)^{1/2}. \tag{49}$$

Buradan ilk gösterimlere dönersek

$$\tilde{\rho}_t(\tilde{u}) \le \frac{c_8}{h}\left(h^3\int_{x-0,5h}^{x+0,5h}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi,t)}{\partial \xi^2}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} = c_8 h^{1/2}\left(\int_{x-0,5h}^{x+0,5h}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi,t)}{\partial \xi^2}\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

elde edilir. Burada x'i x_j ile ξ'i x ile değiştirirsek ve $\tilde{\rho}_t(u)$'yı da $\rho_{jt}(u)$ ile değiştirirsek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\rho_{jt}(u)\right| \le c_8 h^{1/2}\left(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{50}$$

Bu eşitsizlik (44) de dikkate alınırsa

$$\left|F_{j\kappa}^2\right|^2 \le \left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left|\rho_{jt}(u)\right|dt\right)^2 \le \left(\frac{h^{1/2}}{\tau}c_8\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\left(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2} dt\right)^2$$

$$\le \left(\frac{h^{1/2}}{\tau^{1/2}}c_8\left(\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right)^2 = c_8^2\frac{h}{\tau}\int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını τh'a çarpıp j ve κ üzerinden toplarsak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|F_{j\kappa}^{2}\right|^{2}\le c_{9}h^{2}\left\|\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2} \tag{51}$$

Burada $c_9>0$ sabiti τ ve h'dan bağımsızdır. Böylelikle $F_{j\kappa}^{1}$ ve $F_{j\kappa}^{2}$ için olan (43) ve (51) eşitsizliklerinden ve uyum şartından yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\tau h\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left(\delta_{x}u_{j\kappa}-\beta_{j\kappa}\right)^{2}\le c_{10}\left(h^{2}\left\|\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}+\tau\left\|\frac{\partial u\left(x+h,t\right)}{\partial t}-\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}\right). \tag{52}$$

Burada $c_{10}>0$ sabiti τ ve h'dan bağımsızdır. Şimdi (37), (39), (52) eşitsizlikleri ve (6) kestiriminden yararlanırsak bu durumda (36) denkleminde (21) kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 4.2.1 ispatlandı.

Görüldüğü gibi bu teoremle farklar şemasının hatası değerlendirilmiş olup başka bir deyişle sonlu farklar yönteminin kesinliği belirlenmiş oldu.

4.3. Problemin Nümerik Çözüm Algoritması

(1)-(3) başlangıç sınır değer problemini çözmek için (7)-(9) farklar şemasından yararlanarak nümerik çözüm algoritmasını kurmak mümkündür. Bu nedenle tekrar (7)-(9) farklar şemasını inceleyelim. 2. Bölümde yer alan gösterimlerden yararlanarak fark şemasını aşağıdaki 3 köşegenli cebirsel denklemler biçiminde yazabiliriz:

$$A_{j\kappa}^{1}\phi_{j+1\kappa}-C_{j\kappa}\phi_{j\kappa}+\beta_{j\kappa}\phi_{j-1\kappa}=-F_{j\kappa},\qquad j=\overline{1,M-1},\quad \kappa=\overline{1,N} \tag{53}$$

$$\phi_{0\kappa}=x_{1\kappa}\phi_{1\kappa}+\upsilon_{1\kappa},\qquad \kappa=\overline{1,N} \tag{54}$$

$$\phi_{M\kappa}=x_{2\kappa}\phi_{M-1\kappa}+\upsilon_{2\kappa},\qquad \kappa=\overline{1,N}. \tag{55}$$

Burada

$$A_{j\kappa}=-\frac{\tau}{h^{2}},\quad \beta_{j\kappa}=-\frac{\tau}{h^{2}},\quad C_{j\kappa}=\tau b+\tau\upsilon_{\kappa}-\frac{2\tau}{h^{2}}-1$$

$$F_{j\kappa} = -\tau f_{j\kappa} + \phi_{j\kappa-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{1, N} \tag{56}$$

$$x_{1\kappa} = 1, \quad x_{2\kappa} = 1, \quad \upsilon_{1\kappa} = 0, \quad \upsilon_{2\kappa} = 0 \quad \kappa = \overline{1, N} \tag{57}$$

$$\phi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M} \tag{58}$$

dir. (53)-(55) sistemini çözmek için [6,7] çalışmasından bildiğimiz kovma yöntemini uygulayalım. Bu takdirde (53)-(55) sisteminin çözümünü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\phi_{j\kappa} = \alpha_{j+1}^{\kappa} \phi_{j+1\kappa} + \beta_{j+1}^{\kappa}, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad \kappa = \overline{1, N} \tag{59}$$

$$\phi_{M\kappa} = \frac{\upsilon_{2\kappa} + x_{2\kappa} \beta_M^{\kappa}}{1 - x_{2\kappa} \alpha_M^{\kappa}}, \quad \kappa = \overline{1, N}. \tag{60}$$

Burada $\alpha_j^{\kappa}, \ \beta_j^{\kappa}$ katsayıları kovma katsayıları olarak adlandırılır ve aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\alpha_{j+1}^{\kappa} = \frac{\beta_{jk}}{C_{j\kappa} - \alpha_j^{\kappa} A_{j\kappa}} \qquad \alpha_1^{\kappa} = x_{1\kappa}, \tag{61}$$

$$\beta_{j+1}^{\kappa} = \frac{A_{jk} \beta_j^{\kappa} + F_{j\kappa}}{C_j - \alpha_j^{\kappa} A_{j\kappa}}, \quad \beta_1^{\kappa} = \upsilon_{1\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, N}, \quad \mathrm{j} = \overline{1, M-1}. \tag{62}$$

Böylelikle (59)-(62) yineleme formüllerinin yardımıyla (7)-(9) farklar şemasını çözüm algoritmasını inşa etmiş olduk.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında ısı geçirgenlik denklemi için sonlu farklar yönteminin yakınsaklığı ele alınmıştır. Tezde ele alınan başlangıç sınır değer problemleri için incelenen farklar şemasının kararlılığı ve hatası önceki çalışmalardaki problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşır.

Bu tezde ısı geçirgenlik denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümüne kovma yöntemi uygulanmış ve çözüm algoritması elde edilmiştir. Tezde elde edilen araştırma bulguları, önceki yazarların çalışmalarındaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez. Dolayısıyla önceki çalışmalara göre daha günceldir.

6. KAYNAKLAR

[1] Tikhonov, A. N., Samarskiy, A. D., “Matematiksel Fiziğin Denklemleri” M: Nauka, 1977. (Rusça)

[2] Ladijenskaya, O. A., “Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri” M: Nauka, 1973. (Rusça)

[3] Mikhaylov, V. P., “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler” M: Nauka, 1983. (Rusça)

[4] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural’ceva, N. N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow. (Rusça)

[5] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural’ceva, N. N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc., 646 s, ABD. (ing.)

[6] Samarskiy, A. A., “Fark Şemaları Teorisi” M: Nauka, 1977. (Rusça)

[7] Samarskiy, A. A., Gulin, A. V., “Sayısal Yöntemler” M: Nauka, 1989. (Rusça)

[8] Samarskiy, A. A., Andreev, VB., “Eliptik Denklem için Fark Metotları”, Moskova, Nauka, 1976, (Rusça).

[9] Samarskiy, A. A., Lazorov, R. D., Makarov, V. L., “Genelleştirilmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler için Fark Şemaları”, s. 296, Moskova, Vıssaya Skola, 1987, (Rusça).

[10] Senger, O., “Leneer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, 53 s. Kars, 2006.

[11] Yagub G., Ibrahimov N. S., Yıldırım Aksoy, N., Deveci, Ö., The solution with difference method of on optimal control problem for nonstationary quasi-optics equation”, Abstracts of the XXI International Conference Problems of Decision Making under, Uncertainties (PDMU-2013), Skhidnytsia, Ukraine, pp. 68-71. May 13-17, 2013.

[12] Vargün, M., “Schrödinger Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 40 s. 2013.

[13] Demirci, Z., “Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 44 s. 2013.

[14] Aksoy, E., “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Bir Optimal Kontrol Problemi” Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 42 s. 2014

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Adı Soyadı : Sevinç NAYKİ

Doğum Yeri : KARS

Doğum Tarihi : 26.04.1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı):

Lise : Alparslan Lisesi, 2003-2006

Lisans : Kafkas Üniversitesi, 2007-2011

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi, 2014-2016

Çalıştığı Kurumlar:

Selim Şehit Teğmen Gökhan Yaşartürk Çok Programlı Anadolu Lisesi (2013-2016)

Kars Cumhuriyet Anadolu Lisesi (2016-…)