T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

FABER POLİNOMLARI YARDIMIYLA CAUCHY ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

İSMAİL ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

DOÇ.DR. NİZAMİ MUSTAFA

OCAK -2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi İsmail ÖZTÜRK'ün Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Faber Polinomları Yardımıyla Cauchy Çekirdekli Singüler Integral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonucunda Jüri tarafından lisansüstü eğitim yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

29/01/2016

Adı ve Soyadı	İmza
Başkan : Doç. Dr. Erhan DENİZ	
Üye : Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat İbrahim YAZAR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulunun ....../....../...... gün ve ..../........ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

FABER POLİNOMLARI YARDIMIYLA SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

İsmail ÖZTÜRK

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

ÖZET

Bu tez çalışması "Faber Polinomları Yardımıyla Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü" konusu üzerine hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmasında γ Lyapunov eğrisi üzerinde tanımlı

$$Su \equiv a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{u(x)}{x-t}dx + \int_{\gamma} K(t,x)u(x)dx = f(t), \quad t \in \gamma$$

denkleminin yaklaşık çözümüne Faber polinomları uygulanmıştır.

2016, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Faber polinomları, Singüler integral denklemler.

THE APPROXIMATE SOLUTION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH CAUCHY KERNEL BY USING FABER POLYNOMIALS

İsmail ÖZTÜRK
M. Sc. Thesis
The Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ABSTRACT

In this thesis "The Approximate Solution of Singular Integral Equations with Cauchy Kernel by Using Faber Polynomials" is studied.

In this study, Faber polynomials are applied to the

$$Su \equiv a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{u(x)}{x-t}dx + \int_\gamma K(t,x)u(x)dx = f(t), \quad t \in \gamma$$

equation which is defined on γ Lyapunov contour.

2016, 55 pages

Key Words: Faber polynomials, Singular integral equations.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerini, bilgilerini, yardımlarını ve katkılarını benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' ya (Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi), Doç. Dr. Erhan DENİZ'e (Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi) ve her zaman yanımda olan, maddi manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Kars–2016 İsmail ÖZTÜRK

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
i	Sanal Birim
$H_{\alpha}(X)$	X de Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi
$KH_{\alpha}(X)$	X kümesinde K katsayılı α üssü ile Hölder sınıfı
$KH_{\alpha}^{(n)}(X)$	X kümesinde n . mertebeden türevi K katsayılı ve α üssü ile Hölder sınıfından olan fonksiyonların kümesi
$C(X)$	X kümesinde sürekli fonksiyonların kümesi
$\arg(z)$	z nin argümanı
$\mathrm{Re}(z)$	z nin reel kısmı
$\mathrm{Im}(z)$	z nin sanal kısmı

1.GİRİŞ

Yıllardan beri singüler integral denklemlerin genel teorisindeki hızlı gelişim, sınır değer problemlerinde, elastisite, plastik, termoelastisite, viskoelastisite, viskoplastisite, kırılma mekaniği, akışkanlar mekaniği teorisindeki çok sayıda uygulamaları ve matematiksel fiziğin diğer birçok alanlarında matematikçilerin ve mühendislerin singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne direk olarak dikkatini çekmiştir.

Şimdiye kadar yapılan birçok çalışma, nümerik şemaların temel tanımlarıyla, yaklaşım metodlarının ve algoritmaların karşılaştırılmasıyla ve onların singüler integral denklemlerin nümerik çözümüne uygulamalarıyla alakalıdır. Son zamanlarda E.G. Ladopoulos [1-7], E.G Ladopolous, V.A Zisis,D. Kravvaritis [8], D. Elliott [9], A.C. Kaya, F. Erdoğan [10,11], R.P. Gilbert, R. Magnanini [12], M.A. Goldberg [13], M. Heinlein, S. Mukherjee, O. Richmond [14], G.C. Hsiao, P. Kopp, W.L. Wendland [15], V.V. İvanov [16], S. Prossdorf [17], R.P. Srivastav, E. Venturino [18], E.N. Theotokoglou, G.J. Tsamasphyros [19], E. Venturino [20], N. Mustafa, M. Çağlar [21], N. Mustafa [22], N. Mustafa, H. Khalilov [23], N. Mustafa [24] singüler integral denklemlerin birkaç tür yaklaşımları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmalar, çözümlerin kararlılığını belirleme, kesine yakın yaklaşık çözümlerin yakınsamasının ispatı, yakınsama oranı, en iyi yakınsama metotları ve düzgün eğriler üzerinde tanımlanan singüler integral denklemler için hata tahmininin pratik olarak belirlenmesi üzerinedir. Bunlara ilaveten, bu tez çalışmasında Faber polinomlarını kullanarak Lyapunov eğriler üzerinde singüler integral denklemlerin nümerik çözümü için bazı yaklaşım metotları incelenmiştir. Ele alınan singüler integral denklemler Banach uzayında tanımlanır ve nümerik çözüm için aranan fonksiyonun Faber-Laurent açılımı kullanılır.

Bu çalışmada genel bir yaklaşım metodu onun nümerik algoritmalarıyla bağlantılı olarak incelendi ve Lyapunov eğrileri üzerinde singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü için bazı şemalar oluşturuldu.

ilk olarak γ kapalı bir Lyapunov eğriyi göstermek üzere α $(0<\alpha\leq 1)$ üstüyle Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonların kompleks $H_{\alpha}(\gamma)$ Banach uzayında tanımlanan fonksiyonların yaklaşımı için bazı genel teoremler ispatlandı. Diğer taraftan bu sonuçlar ayrıca singüler integral denklemlere indirgenebilen lineer denklem sistemleri için çözümlerin varlığı ve tekliğinin ispatı için kullanıldı ve özel bir ispat yöntemi kullanılarak yaklaşımın oranı verildi.

γ kapalı bir Lyapunov eğrisi olsun. $a(t), m(t,\tau)$ ve $f(t)$ fonksiyonları γ eğrisi üzerinde tanımlı kompleks değerli Hölder anlamında sürekli fonksiyonlar ve $\varphi(t)$ de bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{m(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(t)d\tau=f(t),\quad t\in\gamma \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım.

Burada Lyapunov eğrisi aşağıdaki şartları sağlar:

(i) γ nin her noktasında bir tanjant vardır

(ii) $G(s)$ açısı Ox ekseninin pozitif yönü ile γ eğrisi üzerinde bir M noktasında çizilen tanjant vektörü arasındaki açı olmak üzere γ eğrisi üzerindeki sabit bir noktadan yay uzunluğu

$$\left|G(s_2)-G(s_1)\right|\leq M\left|s_2-s_1\right|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leq 1$$

eşitsizliğini sağlar.

(1.1) denkleminin çok sayıda uygulaması vardır [25-27]. Bu tip denklemler teorisi bir çok araştırmacı tarafından iyi bilinir ve [25,28] monografilerinde yer almaktadır.

Ayrıca, bu çalışmada Faber polinomlarını kullanarak (1.1) in bir nümerik şeması yapıldı. Integrasyon sınırları bir çember veya reel eksende bir aralık olması durumunda singüler integral denklemler için [29-31] çalışmalarından şemalar kullanıldı.

Belirtmek gerekir ki Faber polinomları kompleks değişkenli fonksiyonların modern yaklaşım teorisinde önemli bir rol oynar [32].

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel bilgiler, ikinci bölümde kompleks bölgede fonksiyonlara Faber polinomlarıyla yaklaşım ve singüler integral denklemler için varlık teoremi incelendi. Üçüncü bölüm Faber polinomları yardımıyla singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü üzerinedir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. $\mathbb{R}^m$ de Eğriler

Bu kısımda tezle ilgili ön bilgi olarak kompleks düzlemde eğri üzerine gerekli tanımlar verilmiştir [33].

$f:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $f(t)=(f_1(t),...,f_m(t))$ sürekli vektör değerli fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\forall t\in[a,b]$ noktasına $\mathbb{R}^m$ uzayında bir $M=(f_1(t),...,f_m(t))$ noktası karşılık gelir. Böylece t ler, $[a,b]$ aralığını taradığında M noktaları da $\mathbb{R}^m$ de bir G eğrisi oluşturur. Bu nedenle

$$f(t)=(f_1(t),...,f_m(t))=f_1(t)e_1+...+f_m(t)e_m,\ a\le t\le b \tag{2.1}$$

biçimindeki bir ifadeye G eğrisinin bir parametrik gösterimi (veya denklemi) denir. t ye de bu gösterimin parametresi adı verilir. (2.1) deki gösterim

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = f_m(t) \end{cases},\ a\le t\le b$$

biçiminde yazılabilir ve özel olarak , $m=2$ ve $m=3$ için sırasıyla

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}\ a\le t\le b;\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ \ a\le t\le b \\ z = z(t) \end{cases}$$

gösterim şekilleri kullanılır.

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de

$$y=f(x),\ a\le x\le b;\ \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(t) \end{cases},\ \ a\le x\le b$$

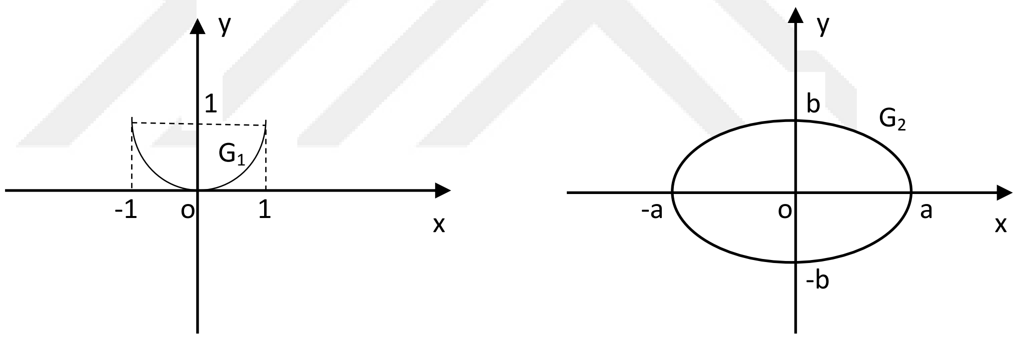
eğrileri sırasıyla,

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \le x \le b; \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t), \quad a \le x \le b \\ z = g(t) \end{cases}$$

parametrik şekilde de gösterilebilir.

Tanım 2.1.1 : $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli $f:[a,b] \to \mathbb{R}^m$ vektör değerli fonksiyonunun $R(f) = \{(f_1(t),..., f_m(t)) : t \in [a,b]\}$ görüntü (değer) kümesine bir eğri ve $A = (f_1(a),..., f_m(a)),\ B = (f_1(b),..., f_m(b))$ noktalarına bu eğrinin uç noktaları denir. Eğer, $A = B$ ise bu eğriye kapalı aksi takdirde açık eğri adı verilir.

Şekil 1 de $G_1 : f(t) = ti + t^2 j, -1 \le t \le 1$ açık ve $G_2 : f(t) = a\cos t\ \mathrm{i} + b\sin t\ \mathrm{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a > b)$ kapalı eğrilerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 1

Tanım 2.1.2 : Bir eğri kendi kendisini kestiğinde arakesit noktalarına eğrinin katlı noktaları, kendini kesmeyen eğrilere de basit (veya Jordon) eğrileri adı verilir.

Tanım 2.1.3 : Eğer, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}^m$ vektör değerli fonksiyonu sürekli türevlenebilir ve $\forall t \in (a,b)$ için $f'(t) \neq 0$

($t=a$ için $f\,'(a^+)\neq 0$ ve $t=b$ için $f\,'(b^-)\neq 0$) ise $G: f(t)=(f_1(t),\dots,f_m(t))\ \ a\le t\le b$ eğrisine düzgün (pürüzsüz) eğri adı verilir.

Tanım 2.1.4 : Eğer, $[a,b]$ aralığında sürekli bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ vektör değerli fonksiyonu için $[a,b]$ aralığı f nin düzgün olduğu sonlu sayıda $[\alpha_1,\beta_1],\dots,[\alpha_k,\beta_k]$ alt aralıklara bölünebilir ve $\forall i\in\{1,2,\dots,k\}$ için f (α_i,β_i) aralığının α_i uç noktasında sağdan, β_i uç noktasında soldan türevlenebiliyorsa f $[a,b]$ üzerinde parçalı düzgündür (pürüzsüzdür) denir.

2.2. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

Bu kısımda tezle ilgili ön bilgi olarak Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı hakkında gerekli tanımlar, sonuçlar, notlar ve özellikler verilmiştir [34].

Tanım 2.2.1 : $\varphi: X\to Y$ reel veya kompleks fonksiyon olsun. Eğer, her $t_1,t_2\in X$ ve $K>0,\ 0<\alpha\le 1$ için

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le K.|t_1-t_2|^{\alpha}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde K sabiti ve α üssü ile Hölder koşulunu sağlar denir ve $\varphi\in KH_\alpha(X)$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 2.2.2 : $C(X)$, X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi olsun.

$$KH_\alpha(X)\subset C(X)$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.2.3 : $\varphi: X\to Y$, $n.$ $(n\in\mathbb{N})$ mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, herhangi $t_1,t_2\in X$ ve $K>0,\ 0<\alpha\le 1$

$$\left|\varphi^{(n)}(t_1)-\varphi^{(n)}(t_2)\right|\le K.|t_1-t_2|^{\alpha}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde $KH_\alpha^{(n)}(X)$ sınıfındandır denilir.

Not 2.2.4 : $C^n(X)$, $n.$ $(n \in \mathbb{N})$ mertebeden türevi X üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun.

$$KH_\alpha^{(n)}(X) \subset C^{(n)}(X)$$

olduğu açıktır.

Not 2.2.5 : $H_\alpha(X)$ ile $0 < \alpha \leq 1$ üstü ve herhangi K sabiti ile bir Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı gösterilir. Yani,

$$H_\alpha(X) = \bigcup_{k>0} KH_\alpha(X)$$

dir.

Uyarı 2.2.6 : $\alpha > 1$ ise $H_\alpha(X)$ sınıfı X 'de sabit fonksiyonlar kümesidir.

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. Eğer, X kapalı ve sınırlı ise $0 < \beta < \alpha \leq 1$ için

$$H_\alpha(X) \subset H_\beta(X)$$

dir.

2. Eğer $\varphi : X \to Y$ ve $\omega : X \to Y$ ve $\varphi \in H_{\alpha_1}(X)$, $\omega \in H_{\alpha_2}(X)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ise $\varphi + \omega$, $\varphi . \omega$ ve φ / ω $(\omega \neq 0)$ fonksiyonları $H_\alpha(X)$ sınıfındandır. Burada $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ dir.

3. $t = t(s)$, $s \in M$ fonksiyonu $H_\alpha(M)$, $(0 < \alpha \leq 1)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu da $t = t(s)$ fonksiyonunun değer kümesi üzerinde $H_\beta(M)$, $(0 < \beta \leq 1)$ sınıfından ise, $\phi(s) = \varphi(t(s))$, $t \in M$ fonksiyonu M üzerinde $H_{\alpha\beta}(M)$ sınıfındandır.

4. $t = t(s),\ s \in M$ (M-kapalı kümedir) fonksiyonu $H_\alpha(M),\ 0 < \alpha \le 1$ sınıfından $\varphi(t)$ fonksiyonu da sürekli türevlenebilirse $\phi(s) = \varphi(t(s))$ fonksiyonu M üzerinde $H_\alpha(M),\ 0 < \alpha \le 1$ sınıfındandır.

5. t ve t_0 noktaları bir $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve sabitlenmiş noktalarsa,

$$\varphi(t) = |t - t_0|^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$$

fonksiyonu γ üzerinde $H_\alpha(\gamma)$ sınıfındandır.

6. $\varphi \in H_\alpha(\gamma),\ (0 < \alpha \le 1)$ $t,\ \gamma$ üzerinde değişken ve $t_0 \in \gamma$ sabitlenmiş noktalar olsun. Bu takdirde, $0 < \beta < \alpha \le 1$ olmak üzere

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\beta}$$

fonksiyonu γ eğrisi üzerinde $H_{\alpha-\beta}(\gamma)$ sınıfındandır.

2.3 Faber Polinomları

Bu kısımda Faber polinomları ve genelleştirilmiş Faber polinomları hakkında tanımlar ve teoremler verilmiştir [36].

G bölgesi $z-$ düzleminde sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve γ onun sınırı olsun. $K = G \cup \gamma$ kontinyumunun tümleyeni D basit bağlantılı olsun $(D = \mathbb{C} - \bar{G})$ Riemann konform dönüşüm teoremine göre D bölgesini $|w| > 1$ bölgesine birebir ve konform olarak resmeden ve

$$\phi(\infty) = \infty,\ \phi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\phi(z)}{z} = a > 0 \tag{2.2}$$

koşullarını sağlayan dönüşümü tektir.

ϕ fonksiyonu D'de sadece ∞ noktasında analitik değildir. (2.2) deki şartlar altında ∞ noktası ϕ fonksiyonunun basit kutup yeridir. Buradan ∞'un komşuluğundaki Laurent açılımı

$$\phi(z) = az + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

biçimindedir. $k = 0,1,2,\dots$ için

$$[\phi(z)]^k = \left(az + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^k$$

$$= a^k z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + b_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \dots + b_1^{(k)} z + b_0^{(k)} + \frac{c_1^k}{z} + \frac{c_2^{(k)}}{z^2} + \dots + \frac{c_n^{(k)}}{z^n} + \dots$$

olduğu görülmektedir. Sonuncu eşitliğin sağındaki z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_k(z) = a^k z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + b_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \dots + b_1^{(k)} z + b_0^{(k)}$$

polinomuna G bölgesi için $k.\,mertebeden\ Faber\ polinomu$ denir.

$$\frac{c_1^k}{z} + \frac{c_2^{(k)}}{z^2} + \dots + \frac{c_n^{(k)}}{z^n} + \dots$$

toplamını da $-H_k(z)$ ile gösterirsek

$$F_k(z) = [\phi(z)]^k + H_k(z)$$

elde ederiz.

$R > 1$ olmak üzere, merkezi sıfır ve yarıçapı R olan çemberin ϕ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$\gamma_R = \{ z : |\phi(z)| = R, R > 1 \}$$

olsun.

γ_R, $(R>1)$ eğrilerine G bölgesinin seviye eğrileri denir.

Her γ_R seviye eğrisi iki kanonik bölge tanımlar; eğrinin içi G_R ve eğrinin dışı D_R :

$$G_R := \operatorname{int}\gamma_R, \quad D_R := ext\gamma_R$$

Teorem 2.3.1 : $\forall z \in G_R$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta$$

olur.

İspat : $\forall z \in G_R$ alalım. $H_k(z)$ fonksiyonu $\bar{D}_R$ kapalı bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{H_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = H_k(\infty) = 0 \qquad (2.3)$$

olur. Buradan (2.3) ve Cauchy İntegral Formülüne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta) - H_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{H_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = F_k(z)$$

olduğu görülür. Böylece her $z \in G_R$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

elde edilir ve ispat tamamdır.

Teorem 2.3.2 : $\forall z \in D_R$ için

$$H_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

olur.

İspat : $z \in D_R$ alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy İntegral Formülünden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{H_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = H_k(\infty) - H_k(z) \tag{2.4}$$

elde edilir. $H_k(\infty) = 0$ olduğundan (2.4) ve Cauchy İntegral Formülüne göre

$$H_k(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{H_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta) - [\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta$$

bulunur. Böylece

$$H_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in D_R$$

elde edilir.

Sonuç olarak Faber polinomlarının integral gösterimleri aşağıdaki gibi olur

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta \quad , \qquad z\in G_R\,, \tag{2.5}$$

$$H_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{[\phi(\zeta)]^k}{\zeta-z}d\zeta \quad , \qquad z\in D_R\,. \tag{2.6}$$

$w=\phi(z)$ konform dönüşümünün ters dönüşümünü $z=\psi(w)$ ile gösterelim. Buna göre (2.5) ve (2.6) eşitliklerinde $\zeta=\psi(t)$ dönüşümü yaparsak

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}t^k dt, \qquad z\in G_R$$

$$H_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}t^k dt, \qquad z\in D_R$$

elde edilir. $A(t,z)=\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}$ denirse, bu son eşitlikten görüldüğü gibi $F_k(z)$ Faber polinomları $A(t,z)$ fonksiyonunun $t=\infty$ noktasının delinmiş komşuluğundaki açılımının Laurent katsayılarıdır.

Dolayısıyla, $A(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{F_k(z)}{t^{k+1}}, \quad z\in G_R, \quad |t|>R$ yazabiliriz. Görüldüğü gibi $F_k(z)$ polinomları $A(t,z)$ polinomları yardımıyla üretilmiş olur. Bu sebepten $A(t,z)$ fonksiyonuna Faber polinomlarının üreteç fonksiyonları da denir. $g(z)$ ağırlık fonksiyonu D bölgesinde analitik ve $a_0=g(\infty)>0$ olsun. ϕ, D bölgesini $|w|>1$ bölgesinde birebir ve konform resmeden

$$\phi(\infty)=\infty, \quad \phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $k\in\mathbb{N}$ için $g(z)\left[\phi(z)\right]^k$ fonksiyonu ∞ noktasında $k.$mertebeden kutba sahiptir. Bu nedenle ∞ daki Laurent açılımı aşağıdaki gibidir.

$$g(z)\left[\phi(z)\right]^k = b_0 a^k z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + b_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \ldots + b_1^{(k)} z + b_0^{(k)} + \frac{c_1^k}{z} + \ldots + \frac{c_n^{(k)}}{z^n} + \ldots .$$

Buradaki z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_k(z;g) = b_0 a^k z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + b_{k-2}^{(k)} z^{k-2} + \ldots + b_1^{(k)} z + b_0^{(k)}$$

polinomuna $K = G \cup \gamma$ kontinyumunun g ağırlık fonksiyonuna göre k. mertebeden genelleşmiş Faber polinomları denir.

$$\frac{c_1^k}{z} + \frac{c_2^k}{z^2} \ldots + \frac{c_n^{(k)}}{z^n} + \ldots$$

toplamını da $-H_k(z;g)$ ile gösterirsek

$$g(z)\left[\phi(z)\right]^k = F_k(z;g) - H_k(z;g)$$

eşitliğinden

$$F_k(z;g) = g(z)\left[\phi(z)\right]^k + H_k(z;g)$$

elde edilir.

2.4 Konform Dönüşüm

Tezin bu kısmında konform dönüşümlerle ilgili gerekli tanım, teorem ve önermeler verilmiştir [37].

Bir $w = f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında sürekli olmasının geometrik anlamı oldukça açıktır. Çünkü $w_0 = f(z_0)$ denirse, f 'nin sürekliliği gereği, z_0 'ın yeterince küçük bir komşuluğunun tüm noktalarının resimleri w_0 'ın belli bir ε komşuluğuna düşer. Üstelik süreklilik bağlantılığı da koruduğundan, bu söz konusu komşuluğun resmi w_0 noktasını bulunduran bağlantılı bir küme olur. Ancak tüm bunlar bize w_0 'ın bir komşuluğunun tamamen örtülüp örtülmediğini veya bir defadan fazla örtülüp örtülmediğini belirtmez. Ortaya çıkan bu soruların cevabını ancak f 'nin analitik ve bire-bir olması koşulu ile verebiliriz.

Teorem 2.4.1 : $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise, z_0 'ın belli bir komşuluğu w_0 'ın belli bir komşuluğunu tam bir defa örter.

Önerme 2.4.2 : Eğer $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve bütün $z \in A$ noktaları için $f'(z_0) \neq 0$ ise f , A daki açık kümeleri açık kümelere resmeder.

İspat : U, A içinde bulunan açık bir küme olsun ve $f(U)$ içinde bir $w_0 = f(z_0)$ noktası alalım. Varsayım gereği $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan z_0 'ın öyle bir açık V ve w_0 'ın da W açık komşuluğu vardır ki, $f : V \to W$ fonksiyonu öncelikle süreklidir ve f^{-1} analitiktir. f^{-1} analitik olduğuna göre öncelikle süreklidir. Bu nedenle de $U \cap V$ açık olduğundan, $(f^{-1})^{-1}(U \cap V)$ kümesi de açıktır ve üstelik f V'den W'ye bire-bir üzerine olduğundan

$$w_0 \in (f^{-1})^{-1}(U \cap V) = f(U) \cap W \subset f(U)$$

olur. Yani $f(U)$ açık bir kümedir.

Teorem 2.4.3 : $w = f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesinde bire-bir ve analitik ise B'nin f altındaki resmi $f(B)$ 'yi bir defa örter ve $f(B)$ bir bölgedir.

İspat : B'nin f altındaki resminin $f(B)$ 'yi tam bir defa örttüğü f 'nin bire-birliğinden açıktır. $f(B)$ 'nin açık ve bağlantılı olduğu ise Önerme 2.4.2 ve f' nin sürekliliğinden görülür.

Önerme 2.4.4 : $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 'da analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun z_0 'dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0 'daki teğeti x-ekseni ile θ açısı yapıyorsa, $\bar{\gamma}$ resim eğrisinin de w_0 'da teğeti vardır ve teğetinin u-ekseni ile yaptığı açı

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0)$$

dır.

İspat : γ üzerinde $w_n \neq w_0$ ve fakat $w_n \to w_0$ olacak şekilde bir (w_n) noktalar dizisi alalım. $w_n = f(z_n)$ denirse γ 'da $z_n \neq z_0$ fakat $z_n \to z_0$ olacak biçimde (z_n) noktalar dizisi vardır. Buradan

$$\arg(w_n - w_0) = \arg(z_n - z_0) + \arg \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} (\operatorname{mod} 2\pi)$$

bulunur.

Dikkat edilirse $n \to \infty$ için $\arg(z_n - z_0)$, t 'nin x-ekseniyle yaptığı açıdır. Yani,

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \arg(z_n - z_0)$$

dır. Böylece,

$$\lim_{n \to \infty} \arg(w_n - w_0) = \theta + \arg f'(z_0) (\operatorname{mod} 2\pi)$$

bulunur. Bu son ifade bizi $\tilde{t}$ 'nın $\tilde{\gamma}$ 'ya w_0 'da bir teğet olduğunu ve bunun u-ekseni ile yaptığı açının da

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0) (\operatorname{mod} 2\pi)$$

olduğunu gösterir.

Önerme 2.4.5 : f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 'dan geçen ve aralarında α açısı oluşturan γ_1 ve γ_2 düzgün eğrilerinin f altındaki $\bar{\gamma}_1$ ve $\bar{\gamma}_2$ resimleri de, w_0 'da α açısı oluştururlar.

İspat : Önerme 2.4.4 gereği $\phi_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0)$ ve $\phi_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$ olacağından

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$$

bulunur.

Tanım 2.4.6 : *B*, $\mathbb{C}$'de bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 'da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 'da bir konform dönüşümdür denir. Eğer, B 'nin her noktasında f konform ise f B'de konformdur denir.

Önerme 2.4.7 : f bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f z_0 'da bir konform dönüşümdür.

Uyarı 2.4.8 : Eğer, $f'(z_0) = 0$ ise dönüşümün konform olamayacağını aşağıdaki önermeden görebiliriz.

Önerme 2.4.9 : $w = f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve bu noktada $f(z) - f(z_0)$ 'ın k. ($k \geq 2$) mertebeden sıfırı varsa, z_0 'dan geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün eğrinin resimleri w_0 'da $k.\alpha$ açısı yaparlar. Dolayısıyla da z_0 'ın bir komşuluğu w_0 'ın bir komşuluğunu k defa örter.

İspat : $f(z) = f(z_0) + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots, \quad k \geq 2,\ a_k \neq 0$ yazılabileceği açıktır. Buradan

$$w_0 - w = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z)$$

yazabiliriz. $g(z)$ fonksiyonu z_0 'da analitik ve $g(z_0) \neq 0$'dır. Böylece,

$$\arg(w - w_0) = \arg(f(z) - f(z_0)) = k \arg(z - z_0) + \arg g(z)$$

elde edilir. Şimdi $z \to z_0$ için iki yanın limiti alınır ve de φ ile θ Önerme 2.4.4'deki anlamda simgeler olarak düşünülürse

$$\phi = k\theta + \arg g(z_0)$$

bulunur. Ancak, $\arg g(z_0)$ θ 'dan bağımsız olduğundan Önerme 2.4.5 gereği

$$\phi_2-\phi_1=k(\theta_2-\theta_1)=k\alpha$$

sonucuna varılır.

Uyarı 2.4.10 : Açıyı büyüklük ve yön bakımından koruyan dönüşümlere bazen direkt konform dönüşümler de denir. Açının büyüklüğünü koruyan, fakat yönünü değiştiren dönüşümlere de ters (indirekt) konform dönüşümler denir. Dikkat edilirse $\phi_2-\phi_1=\theta_2-\theta_1$ ise açının yönü korunmuştur. Eğer, $\phi_2-\phi_1=\theta_1-\theta_2$ ise açının yönü değişmiştir. Örneğin, $f(z) = z$ dönüşümü her noktada direkt konform, fakat $h(z)=\overline{z}$ ise ters konform dönüşüm yapar.

2.5. Banach Uzayı

Bu kısımda Banach uzayının tanımı ve Banach uzayı ile ilgili bir lemma verilmiştir [38].

Tanım 2.5.1 : Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Lemma 2.5.2 : $H_\alpha(\gamma)$ vektör uzayı $f\in H_\alpha(\gamma)$ için

$$\|f\|_\alpha=\|f\|_{C(\gamma)}+H(f;\alpha) \tag{2.7}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Burada,

$$H(f;\alpha)=\sup\left\{\left|f(t_1)-f(t_2)\right|.\left|t_1-t_2\right|^{-\alpha}:t_1,t_2\in(\gamma)\right\}.$$

İspat : $(H_\alpha(\gamma),\|.\|_\alpha)$ içinde (f_n) keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ ve $\forall m,n>n_\varepsilon$ için

$$\|f_n-f_m\|_\alpha<\varepsilon \tag{2.8}$$

olur. Şu halde (2.7) e göre $\forall n,m > n_\varepsilon$ için

$$\| f_n - f_m \|_{C(\gamma)} < \varepsilon$$

olduğu elde edilir. $C(\gamma)$ uzayı tam olduğundan öyle $f_0 \in C(\gamma)$ vardır ki

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \|_{C(\gamma)} = 0 \tag{2.9}$$

Şimdi, $f_0 \in H_\alpha(\gamma)$ olduğunu gösterelim. (f_n) dizisi $(H_\alpha(\gamma), \|.\|_\alpha)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır. Yani öyle $M > 0$ sayısı vardır ki

$$\| f_n \|_\alpha \leq M, n = 1, 2, ...$$

o zaman herhangi $t_1, t_2 \in (\gamma)$ noktaları ve $\forall n > n_\varepsilon$ için

$$| f_n(t_1) - f_n(t_2) | \leq M.|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçersek (2.9)'e göre

$$| f_0(t_1) - f_0(t_2) | \leq M.|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu ve dolayısıyla $f_0 \in H_\alpha(\gamma)$ olduğu görülür. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \|_\alpha = 0$$

olduğunu gösterelim. (2.8) ifadesine göre herhangi $t_1, t_2 \in (\gamma)$ noktaları ve $\forall n,m > n_\varepsilon$ için

$$| f_n(t_1) - f_m(t_1) - f_n(t_2) + f_m(t_2) | < \varepsilon |t_1 - t_2|^\alpha$$

olur. Bu eşitsizlikte sabit $n > n_\varepsilon$ için $m \to \infty$ iken limite geçersek $\forall n > n_\varepsilon$ sayısı ve $\forall t_1, t_2 \in (\gamma)$ noktaları için

$$| f_n(t_1) - f_0(t_1) - f_n(t_2) + f_0(t_2) | \leq \varepsilon |t_1 - t_2|^\alpha \tag{2.10}$$

olduğu elde edilir. (2.9) ve (2.10) ifadelerine göre

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \|_\alpha = 0$$

olduğu ve dolayısıyla da $H_\alpha(\gamma)$ vektör uzayının (2.7) normuna göre bir Banach uzayı olduğu görülür.

2.6. İzdüşüm Operatörü ve Özellikleri

Bu kısımda izdüşüm operatörünün tanımı ve izdüşüm operatörünün temel özellikleri hakkında bilgi verilmiştir [39].

X bir Banach uzayı olsun.

Tanım 2.6.1 : $P: X \to X$ sınırlı bir lineer operatörü verilsin. Eğer P operatörü $P^2 = P$ koşulunu sağlarsa P operatörüne izdüşüm operatörü denir.

Çalışma boyunca $D(\cdot)$, $\Re(\cdot)$ *ve* $\aleph(\cdot)$ ile bir operatörün tanım bölgesi, değer bölgesi ve sıfırları gösterilecektir. Açıktır ki bir lineer operatörün sıfır kümesi lineer uzaydır.

Aşağıdakiler bir izdüşüm operatörünün temel özellikleridir. Bunlar fonksiyonel analizin temel konuları olarak bilinir ve burada ispatsız verilecektir.

Önerme 2.6.2 : $P: X \to X$ bir izdüşüm operatörü ise

(i) $X = \Re(P) \oplus \aleph(P)$;

(ii) $\Re(P) = \aleph(I - P)$, $\aleph(P) = \Re(I - P)$;

(iii) $Px = x, \ \forall x \in \Re(P)$

önermeleri doğrudur. Burada I özdeşlik operatörüdür ve $\oplus$ iki alt uzayın direkt toplamıdır.

Önerme 2.6.3 : M ve N , X ’in $X = M \oplus N$ koşulunu sağlayan kapalı alt uzayları olsun. Eğer

$$Px = x, \ \forall x \in M \ \text{ ve } \ Px = 0, \ \forall x \in N$$

koşullarını sağlayan $P: X \to X$ sınırlı lineer operatörü varsa bu P operatörü $M = \Re(P)$ ve N=$\aleph(P)$ ile bir izdüşüm operatörüdür.

Uygulamalar açısından aşağıdaki soru önemlidir. X bir Banach uzayı olmak üzere sonlu boyutlu bir M alt uzayı için $\Re(P) = M$ olacak şekilde bir $P : X \to X$ izdüşüm operatörü bulunabilir mi?

Bu soruyu cevaplamak için kabul edelim ki M 'nin boyutu $n \geq 1$ dir ve M 'nin tabanı $\{e_1, ..., e_n\}$ dir. Yani $M = span\{e_1, ..., e_n\}$.

Hahn-Banach teoremine göre, $l_1, ..., l_n \in X^*$ vardır. Öyle ki

$$l_i(e_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., n,$$

burada X^* X uzayının dual uzayıdır. δ_{ij} Kronecker deltasıdır. Şimdi $P : X \to M$ ye dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$Px = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) e_k, \qquad \forall x \in X.$$

Gösterilebilir ki P bir lineer operatör olup aşağıdaki koşulu sağlar

$$P^2 x = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) P e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_i(x) l_j(e_i) e_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_i(x) e_i = Px, \qquad \forall x \in X.$$

Bu yukarıdaki sorunun cevabının evet olduğu anlamına gelir. Biz bu sonucu aşağıdaki önermeyle özetleyebiliriz.

Önerme 2.6.4 : Bir X Banach uzayının her sonlu boyutlu M alt uzayı için $\Re(P) = M$ koşulunu sağlayacak şekilde bir P izdüşüm operatörü vardır.

2.7. Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral Denklem

Bu kısımda Cauchy çekirdekli singüler integral denklemlerin ve karakteristik denklemlerin tanımı verilecektir [34,35].

Tanım 2.7.1 : $\varphi(t)$ fonksiyonu γ kapalı düzgün eğrisi üzerinde tanımlı kompleks bir fonksiyon olsun.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \quad z \notin \gamma \tag{2.11}$$

integraline $\varphi(t)$ çekirdekli **Cauchy tipli integral** denir.

Biz çalışma boyunca $\varphi(t)$ fonksiyonunu sınırlı ve integrallenebilir olduğunu kabul edeceğiz. (2.11) integrali $\forall z \notin \gamma$ için anlamlıdır ve $F(\infty) = 0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla, $F(z)$ fonksiyonu γ eğrisi hariç tüm kompleks düzlem üzerinde tanımlıdır.

Cauchy Çekirdekli İntegral

(2.11) Cauchy tipli integralinde

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \quad t_0 \in \gamma \tag{2.12}$$

limiti doğal olarak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt, \quad t_0 \in \gamma \tag{2.13}$$

dir. Bununla birlikte, bu integral genel olarak birbirinden farklıdır. Çünkü (1.10) bir analitik fonksiyon olmasına rağmen (2.13) bir singüler integraldir. Yani γ üzerinde biri t_0 'ın solunda, diğeri sağında olmak üzere, t_0 noktasından farklı keyfi iki t', t'' noktaları alınırsa

$$\lim_{t',t''\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-t't''}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \tag{2.14}$$

limiti genel olarak mevcut değildir. Burada, $t't''$ ile γ eğrisinin t_0 'ı içine alan ve uç noktaları t' ve t'' olan yayı gösterilmiştir. Eğer (2.14) limiti varsa bunu (2.13) integralinin değeri olarak alacağız.

Tanım 2.7.2 : (2.13) de gösterilen integrale Cauchy (çekirdekli) tipli singüler integral denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt.$$

Burada $\dfrac{1}{(t-t_0)}$ ifadesine Cauchy çekirdeği ve $\varphi(t)$ fonksiyonuna yoğunluk fonksiyonu denir [34].

Tanım 2.7.3 : $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$ şeklinde singüler integral bulunduran

$$Su \equiv a(t)u(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u(x)}{x-t}dx+\int_{\gamma}K(t,x)u(x)dx = f(t), \quad t\in\gamma \tag{2.15}$$

tipinde ki denklemlere Cauchy çekirdekli singüler integral denklem denir [34].

Yukarıdaki denklemde $K(t,x)=0$ aldığımızda

$$Su \equiv a(t)u(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u(x)}{x-t}dx = f(t), \quad t\in\gamma \tag{2.16}$$

denklemini elde ederiz. (2.16) denklemine (2.15) denkleminin **karakteristik denklemi** denir [35].

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.BANACH UZAYLARINDA LYAPUNOV EĞRİLERİ ÜZERİNDE SİNGÜLER INTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIMI

Tezin bu bölümünde Cauchy çekirdekli Singüler integral denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri incelenirken E.G. Ladopoulos ve G. Tsamasphyros'nin çalışmaları sunulmuştur. [40].

3.1.1. KOMPLEKS BİR BÖLGEDE FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Tanım 3.1.1.1 : γ, $t=0$ noktasını içeren basit bağlantılı bir bölge tarafından sınırlandırılan bir kapalı Lyapunov eğri ve $h(t)$ fonksiyonu da $H_\alpha(\gamma)$, $t\in\gamma$ Banach uzayında α $(0<\alpha\leq 1)$ üstüyle Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $h(t)\in H_\alpha(\gamma)$ fonksiyonu için

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k\Phi_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}l_kF_k(\frac{1}{t}), \tag{3.1}$$

Faber-Laurent açılımı vardır. Burada $\Phi_k(t)$ ve $F_k(1/t)$ Faber polinomları, ve e_k ve l_k da $h(t)$ fonksiyonunun Faber-Laurent katsayılarıdır.

Tanım 3.1.1.2 : E_n ile $h(t)\in H_\alpha(\gamma)$ fonksiyonunun

$$(E_nh)(t)=\sum_{k=0}^{n}e_k\Phi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}l_kF_k(\frac{1}{t}),\ t\in\gamma \tag{3.2}$$

Faber-Laurent serisinin n. kısmi toplamını tanımlayalım. Burada $\Phi_k(t)$ ve $F_k(1/t)$ Faber polinomları ve e_k ve l_k da $h(t)$ fonksiyonunun Faber-Laurent katsayılarıdır.

Lemma 3.1.1.3 : P_n , $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde

$$(P_n h)(t)=\sum_{j=-n}^{n} h_j t^j \tag{3.3}$$

ile tanımlanan bir izdüşüm operatörü olsun. Burada $h(t)\in H_\alpha(\gamma)$, $t\in\gamma$ ve $\{h_j\}$, $j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ kompleks dizisi

$$\begin{aligned} h_j &= \frac{1}{j!}\frac{d^j\left[Ah(t)\right]}{dt^j}\bigg|_{t=0} \qquad (j=0,1,2,3,\ldots),\\ h_j &= \frac{1}{(-j)!}\frac{d^{(-j)}\left[Bh(t^{-1})\right]}{dt^{(-j)}}\bigg|_{t=0} \qquad (j=-1,-2,-3,\ldots), \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki I birim operatör ve E de

$$(Eu)(\mathrm{t})=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{u(x)}{x-t}dx, \qquad t\in\gamma \tag{3.5}$$

Cauchy singüler integrali olmak üzere $A=(I+E)/2$ ve $B=(I-E)/2$ şeklindedir. Bu durumda $t\in\gamma$ için

$$\begin{aligned} h(t)-(P_n h)(t) &= h(t)-(E_n h)(t)-\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\left[(Ah)(x)-(E_n Ah)(x)\right]\\ &\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{x^{j+1}}dx-\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\left[(Bh)(x)-(E_n Bh)(x)\right]\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{t^{j+1}}dx, \qquad t\in\gamma \end{aligned} \tag{3.6}$$

formülü yazılır.

İspat : γ Lyapunov eğrisi için

$$\Phi_k(t)=\sum_{j=0}^{k}\delta_j t^j,\ F_k(\frac{1}{t})=\sum_{j=1}^{k}G_j t^{-j} \tag{3.7}$$

Faber polinomlarını göz önüne alalım.

Böylece

$$\left(P_n\Phi_k\right)(t)=\begin{cases}\Phi_k\left(t\right), & k\le n\\ \sum_{j=0}^{n}\delta_j t^j, & k>n\end{cases} \tag{3.8}$$

ve

$$\left(P_nF_k\right)(t)=\begin{cases}\mathrm{F}_k\left(\frac{1}{t}\right), & k\le n\\ \sum_{j=1}^{n}G_j t^{-j}, & k>n\end{cases} \tag{3.9}$$

formülleri elde edilir. Buradan (3.1) kullanılarak

$$(P_n\,\mathrm{h})(\mathrm{t})=P_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}e_k\Phi_k(t)\right)+P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}I_kF_k(\frac{1}{t})\right) \tag{3.10}$$

formülü elde edilir. Ayrıca (3.8) ve (3.9) kullanılarak (3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned}(P_nh)(t)=(E_nh)(t)+\sum_{k=n+1}^{\infty}e_k\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Phi_k(x)t^j}{x^{j+1}}dx\\ +\sum_{k=n+1}^{\infty}l_k\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{F_k(1/x)\,\mathrm{x}^{j+1}}{t^j}dx\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Nihayetinde (3.11) formülü

$$\begin{aligned}(P_n\,\mathrm{h})(\mathrm{t})=(E_nh)(t)+\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\sum_{k=n+1}^{\infty}e_k\frac{\Phi_k(x)t^j}{x^{j+1}}dx\\ +\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\sum_{k=n+1}^{\infty}l_k\frac{F_k(1/x)\,\mathrm{x}^{j+1}}{t^j}dx\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Bunların dışında

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}e_k\Phi_k\left(t\right)=\left(Ah\right)\left(t\right)-\left(E_nAh\right)\left(t\right) \tag{3.13}$$

ve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} l_k F_k\left(\frac{1}{t}\right)=(Bh)(t)-(E_nBh)(t) \tag{3.14}$$

bağıntıları yazılabilir.

Böylece (3.12) - (3.14) ifadelerinden istenen (3.6) formülü elde edilir. Böylece Lemma 3.1.1.3'in ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.1.4 : $h(t)\in H_\alpha(\gamma)$ $(t\in\gamma)$, P_n polinomu $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde (3.3) ile verilen izdüşüm operatörü, $R_n(h,T)$

$$u_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k t^k, \qquad t\in\gamma \tag{3.15}$$

polinomları tarafından γ üzerinde $h(t)$' nin en iyi düzgün yaklaşımı, I birim operatör, E de (3.5) deki Cauchy singüler operatörü $A=(I+E)/2$ ve $B=(I-E)/2$ olsun. Bu durumda

$$\left|h(t)-(P_nh)(t)\right|\le c_1 \ln\, n\mathrm{R}_n(h;\gamma)+c_2\ln^2 nR_n(Ah;\gamma)+c_3\ln^2 nR_n(Bh;\gamma), \tag{3.16}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c_1, c_2 ve c_3 sabitleri n ye bağlı olmayan sabitlerdir.

İspat : $h(t)\in H_\alpha(\gamma)$ olduğundan

$$\left|h(t)-(E_nh)(t)\right|\le c_4 \ln n\,\mathrm{R}_n(h;\gamma), \tag{3.17}$$

yazılır (bkz [41]). Burada c_4 n ye bağlı olmayan sabittir.

Ayrıca $(Ah)(t)$ ve $(Bh)(t)$ fonksiyonları $H_\alpha(\gamma)$ sınıfından olduğundan ve böylece (3.6) ve (3.17) birleştirilerek

$$\begin{aligned}\left|h(t)-(P_nh)(t)\right| \le c_4 \ln n.\Big\{R_n(h;\gamma)+R_n(Ah;\gamma)\frac{1}{\pi}\int_\gamma\left|\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{x^{j+1}}\right||dx| \\ +R_n(Bh;\gamma)\frac{1}{\pi}\int_\gamma\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{x^j}{t^{j+1}}\right||dx|\Big\}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bunun yanı sıra (bkz [41]) ‘den

$$\begin{aligned}\int_\gamma\left|\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{x^{j+1}}\right||dx| \le c_5 \ln n, \\ \int_\gamma\left|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{t^{j+1}}\right||dx| \le c_6 \ln n.\end{aligned} \tag{3.19}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Böylece (3.18) ve (3.19) dan (3.16) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.1.5 : $h(t)\in H_\varepsilon(\gamma)$ $(0<\alpha\le\varepsilon\le 1)$, P_n polinomu $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde (3.3) ile verilen izdüşüm operatörü ve c_7 n’ye bağlı olmayan bir sabit olsun. Bu durumda

$$\left\|h-P_nh\right\|_\alpha \le c_7\left(\ln^2 n\right)n^{\alpha-\varepsilon}H(h;\varepsilon) \tag{3.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : (3.20) eşitsizliğini ispatlamak için $\max_{t\in\gamma}\left|h(t)-(P_nh)(t)\right|$ de bir sınırın bulunması gerekir. Dolayısıyla (3.16) dan

$$\begin{aligned}\max_{t\in\gamma}\left|h(t)-(P_nh)(t)\right| &\le c_4c_8(\ln\ n)n^{-\varepsilon}\left[c_1H(h,\varepsilon)+c_2\ln\ nH(Ah;\varepsilon)+c_3\ln\ nH(Bh;\varepsilon)\right] \\ &\le c_9\left(\ln^2 n\right)n^{-\varepsilon}H(h,\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.21}$$

yazılır.

Böylece istenen (3.20) eşitsizliği (3.21) den elde edilir.

Lemma 3.1.1.6 : $h(t) \in H(\gamma)$, P_n polinomu $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde (3.3) ile verilen izdüşüm operatörü olsun. Bu durumda

$$\|P_n h\|_\gamma \leq \left(1 + c_7 \ln^2 n\right)\|h\|_\alpha . \tag{3.22}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, c_7 n 'ye bağlı olmayan bir sabittir.

İspat : (3.22) eşitsizliği (3.20) eşitsizliğinde $\alpha = \varepsilon$ değişimi yapılarak elde edilir.

3.1.2. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK TEOREMLERİ

γ kapalı Lyapunov eğrisi üzerinde tanımlanan

$$Su \equiv a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{u(x)}{x-t}dx + \int_\gamma K(t,x)u(x)dx = f(t), \quad t \in \gamma \tag{3.23}$$

singüler integral denklemini gözönüne alalım. Burada, γ eğrisi $t = 0$ noktasını içeren basit bağlantılı bir bölge tarafından sınırlandırılan bir eğri, $a(t), b(t), f(t)$ ve $K(t,x)$ fonksiyonları $H_\alpha(\gamma)$ Banach uzayında bilinen fonksiyonlar ve $u(t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

Teorem 3.1.2.1 : γ kapalı Lyapunov eğrisi üzerinde tanımlanan (3.23) şeklindeki singüler integral denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin bir yaklaşık çözümü

$$u_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varepsilon_k t^k, \qquad t \in \gamma \tag{3.24}$$

şeklindedir. Burada ε_k $(k = \overline{-n,n})$ bilinmeyenleri

$$\sum_{k=0}^{n} M_{j-k}\varepsilon_k + \sum_{k=-n}^{-1} \Lambda_{j-k}\varepsilon_k + \sum_{k=-n}^{n} N_{jk}\varepsilon_k = f_j \tag{3.25}$$

lineer denklemi sağlar. Bu denklemdeki M_j, Λ_j, N_{jk} ve f_j $(j=0,\pm1,\pm2,..., k=\overline{-n,n})$ ler $h(t)$ yerine sırasıyla $M(t)=a(t)+b(t), \Lambda(t)=a(t)-b(t), K(t,x)=\int_\gamma k(t,x)x^k dx$ ve $f(t)$ alınarak (3.4) den hesaplanır.

Böylece, eğer $M(t)\Lambda(t)\neq 0$ ve $M(t), \Lambda(t), f(t)$ ve $k(t,x)$ fonksiyonları $H_\varepsilon(\gamma)$ $(0<\alpha<\varepsilon\leq 1)$ uzayından iseler bu durumda (3.25) lineer sistemi bir tek ε_k çözümüne sahiptir. Bunu yanı sıra, (3.24) yaklaşık çözümü $n\to\infty$ için yakınsaktır ve (3.23) in tam $u(t)$ çözümü

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t)=u(t), \tag{3.26}$$

olup yakınsamanın oranı δ keyfi küçük pozitif bir sabit, c sayısı n ye bağlı olmayan bir sabit ve

$$\xi(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, & \varepsilon<1,\\ 1-\delta, & \varepsilon=1,\end{cases} \tag{3.27}$$

olmak üzere

$$\|u-u_n\|_\gamma \leq c\frac{\ln^2 n}{n^{\xi(\varepsilon)-\gamma}} H\left(u;\xi(\varepsilon)\right). \tag{3.28}$$

eşitsizliği ile verilir.

İspat : (3.25) lineer denklem sistemi

$$S_n u_n \equiv P_n\left(MA+\Lambda B+K\right)P_n u_n(t)=\left(P_n f\right)(t), \quad t\in\gamma \tag{3.29}$$

operatör formunda yazılabilir. Burada, P_n polinomu $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde (3.3) ile verilen izdüşüm operatörü, I birim operatör, E (3.5) deki Cauchy singüler operatörü, $A=(I+E)/2$ ve $B=(I-E)/2$ şeklindedir.

Buradan, yeteri kadar büyük n ler için S_n operatörünün $H_\alpha(\gamma)$ kümesinde tersinin var olduğunu göstermek gerekir. $M(t)=M_-(t)M_+(t)$ ve $\Lambda(t)=\Lambda_-(t)\Lambda_+(t)$ ifadeleri sırasıyla $M(t)$ ve $\Lambda(t)$ nin kanonik faktorizasyonları olsun.

Böylece,

$$R_1 = \left(M_+A + \Lambda_-B\right)\left(AM_- + B\Lambda_+\right) \tag{3.30}$$

ve

$$R_2 = M_+BM_-A + \Lambda_-A\Lambda_+B + K \tag{3.31}$$

olmak üzere

$$MA + \Lambda B + K = R_1 + R_2 \tag{3.32}$$

elde edilir (bkz [42]).

Dolayısıyla, bütün n ler için $P_nR_1P_n$ operatörleri tersinirdir ve

$$\left(P_nR_1P_n\right)^{-1} = \left(AM_-^{-1} + B\Lambda_+^{-1}\right)P_n\left(M_+^{-1}A + \Lambda_-^{-1}B\right) \tag{3.33}$$

yazılır.

Ayrıca $M_+^{\pm1}(t)$, $\Lambda_+^{\pm1}(t)$, $M_-^{\pm1}(t)$ ve $\Lambda_-^{\pm1}(t)$ fonksiyonları sırasıyla $H^+_{\xi(\varepsilon)}(\gamma) = AH_\varepsilon(\gamma)$ ve $H^-_{\xi(\varepsilon)}(\gamma) = BH_\varepsilon(\gamma) \oplus$ (sabit) uzayındandır (bkz [43]).

Böylece (3.33) denkleminden ve Lemma 3.1.1.6 dan

$$\left\| \left(P_nR_1P_n\right)^{-1} P_n \right\|_\alpha \le c_{10} \ln^2 n \tag{3.34}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Diğer taraftan, [43] deki çalışmadan her $h(t) \in H_\varepsilon(\gamma)$ fonksiyonu için BhA ve AhB operatörleri $H_\alpha(\gamma)$ kümesini $H_{\xi(\varepsilon)}(\gamma)$ kümesine dönüştürür ve $H_\alpha(\gamma)\left(0 < y < \varepsilon\right)$ üzerinde süreklidirler. Aynı işlem K operatör için de yapılır. Böylece,

R_2 $\left(R_2 : H_\alpha(\gamma) \to H_{\xi(\varepsilon)}(\gamma)\right)$ operatörü $H_\alpha(\gamma)$ yı $H_{\xi(\varepsilon)}(\gamma)$ üzerine dönüştürür ve $H_\alpha(\gamma)$ üzerinde süreklidir.

Yukarıdaki ifadelerden aşağıdaki bağıntıları söyleyebiliriz:

$$y(t) = R_1^{-1}h(t), \tag{3.35}$$

$$y_n(t) = (P_nR_1P_n)^{-1} P_nh(t). \tag{3.36}$$

$y_n^*(t)$ $y(t)$ nin en iyi düzgün yaklaşımı olmak üzere,

$$y_n(t) - y_n^*(t) = (P_nR_1P_n)^{-1} P_nR_1\left(y_n - y_n^*\right)(t), \tag{3.37}$$

yazılır ve böylece (3.34) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|y - y_n\|_\alpha &\le \|y - y_n^*\|_\alpha + c_{10}\ln^2 n\|R_1\|_\alpha \|y_n - y_n^*\|_\alpha \\ &\le c_{11}H(y;\varepsilon)n^{\alpha-\xi(\varepsilon)}\left[1 + c_{10}\ln^2 n\|R_1\|_\alpha\right] \end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir.

(3.38) eşitsizliğinden $h(t) \in H_\varepsilon(\gamma)$ fonksiyonu için

$$\left\|R_1^{-1}h - (P_nR_1P_n)^{-1} P_nh\right\|_\alpha \le c_{12}\left(\ln^2 n\right)n^{\alpha-\xi(\varepsilon)}H\left(R_1^{-1}h;\xi(\varepsilon)\right) \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak $R_1 + R_2$ nin tersinirliğinden ve R_2 nin sürekliliğinden dolayı, yeterince büyük n ler için $S_n = P_n(R_1 + R_2)P_n$ operatörü tersinirdir ve

$$\left\|S_n^{-1}\right\|_\alpha \le c_{13}\ln^2 n, \tag{3.40}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece, (3.25) lineer sistemi bir tek çözüme sahiptir.

Son olarak, istenilen (3.28) eşitsizliğini ispatlamak için $u_n^* \in P_nH_\alpha(\gamma)$ olmak üzere,

$$\|u - u_n\|_\alpha = \left\|\left(\mathrm{I} - S_n^{-1}P_nS\right)\left(u - u_n^*\right)\right\|_\alpha, \tag{3.41}$$

eşitliği kullanılır. Böylece Teorem 3.1.2.1 nin ispatı tamamlanmış olur.

3.2.FABER POLİNOMLARIN CAUCHY ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNE UYGULAMASI

Tezin bu bölümünde Faber polinomlarının Cauchy çekirdekli Singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulaması incelenirken P. Wojcik, M.A. Sheshko, S.M Sheshko'nun çalışmaları sunulmuştur [35].

3.2.1. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEME İNDİRGENMESİ

γ kapalı bir Lyapunov eğrisi olsun. $a(t), m(t,\tau)$ ve $f(t)$ fonksiyonları γ eğrisi üzerinde tanımlı kompleks değerli Hölder anlamında sürekli fonksiyonlar ve $\varphi(t)$ de bilinmeyen bir fonksiyon olsun. Şimdi

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{m(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(t)d\tau = f(t), \quad t\in\gamma \tag{3.42}$$

denklemini göz önüne alalım.

(3.42) şekilli denklemler teorisinin temel bilgilerini verelim (bkz. [29, s.191]).

(3.42) denkleminin çekirdeği için

$$\frac{m(t,\tau)}{\tau-t}=\frac{m(t,\tau)-m(\tau,\tau)}{\tau-t}+\frac{m(\tau,\tau)}{\tau-t}$$

dönüşümü uygulanır ve kısalık açısından

$$m(\tau,\tau)=b(\tau) \text{ ve } \frac{m(t,\tau)-m(\tau,\tau)}{\tau-t}=k(t,\tau)$$

denirse (3.42) denklemi $\forall t\in\gamma$ için $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$ olmak üzere

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{b(\tau)\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}k(t,\tau)\varphi(t)d\tau = f(t), \quad t\in\gamma \tag{3.43}$$

şeklinde yeniden yazılır.

D^+ ile γ eğrisinin içini, D^- ile de γ eğrisinin dışını gösterelim. $z \in D^+$ için $X^+(z)$ ve $z \in D^-$ için $X^-(z)$ ile

$$X^+(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} X^-(t), \quad t \in \gamma \tag{3.44}$$

lineer transmission probleminin kanonik fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada $X^{\pm}(t),\ t \in \gamma$ değerleri sırasıyla $X^{\pm}(z)$ fonksiyonlarının sınır değerleridir. [28, s.125] çalışmasında özel olarak

$$\begin{aligned}
&X^+(z) = \exp\left(\Gamma^+(z)\right), \quad z \in D^+ \\
&X^-(z) = z^{-\varkappa} \exp\left(\Gamma^-(z)\right), \quad z \in D^- \\
&\Gamma^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^{\pm} \\
&G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} \\
&\varkappa = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_{\gamma}
\end{aligned}$$

alınmıştır.

z- kompleks düzlemin orijini D^+ bölgesine ait olsun.

(3.43) denkleminde yeni bir $u(t)$ bilinmeyen fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = \frac{Z(t)u(t)}{a^2(t)-b^2(t)}, \\
&Z(t) = \left[a(t)+b(t)\right] X^+(t) = \left[a(t)-b(t)\right] X^-(t), \quad t \in \gamma
\end{aligned} \tag{3.45}$$

kurallar uygulanır ve kısalık açısından

$$A(t) = \frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}, \quad B(t) = \frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}$$

ifadeleri kullanılırsa (3.43) denklemi

$$A(t)\,Z(t)u(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}B(\tau)Z(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}k(t,\tau)\frac{Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}u(\tau)d\tau=f(t),\quad t\in\gamma \tag{3.46}$$

denklemine indirgenir.

Özel durumda (3.46) denkleminde $k(t,\tau)\equiv 0$ alalım. Bu durumda

$$A(t)\,Z(t)u(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}B(\tau)Z(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t),\quad t\in\gamma \tag{3.47}$$

karakteristik denklemini çözmeye çalışalım.

Eğer $\varkappa\geq 0$ ise bu durumda (3.47 denkleminin $u(t)$ çözümü

$$u(t)=a(t)Z^{-1}(t)f(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}b(\tau)Z^{-1}(\tau)\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau+P_{\varkappa-1}(t),\quad t\in\gamma \tag{3.48}$$

formülü ile verilir (bkz. [29, s.56]). Burada, $P_{\varkappa-1}(t)=\gamma_0+\gamma_1 t+...+\gamma_{\varkappa-1}t^{\varkappa-1}$ keyfi katsayılı bir polinomdur.

Burada $\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{\varkappa-1}$ katsayılarını bulmak için (3.47) denkleminde

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}B(\tau)Z(\tau)u(\tau)\tau^{j-1}d\tau=A_j,\quad j=1,2,...,\varkappa \tag{3.49}$$

eşitliği göz önüne alalım. Burada, $j=1,2,...,\varkappa$ için A_j ler verilen sayılardır. (3.48) ifadesi (3.49) ifadesindekilerle yer değiştirirse $\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{\chi-1}$ bilinmeyenleri için

$$\gamma_{\varkappa-1}=A_1,\quad \gamma_{\varkappa-2}+p_1\gamma_{\varkappa-1}=A_2,\quad ...,\quad \gamma_0+p_1\gamma_1+...+p_{\varkappa-1}\gamma_{\varkappa-1}=A_{\varkappa} \tag{3.50}$$

lineer sistemi elde edilir. Burada, $p_0,p_1,...,p_{\varkappa}$ katsayıları $z=\infty$ noktasının komşuluğunda $X^-(z)$ fonksiyonunun

$$X^-(z)=\frac{1}{z^{\varkappa}}\left(1+\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+...\right) \tag{3.51}$$

şeklindeki seri açılımındaki katsayılardır.

Şimdi (3.46) denklemini göz önüne alalım. Bu denklem bir Fredholm integral denklemine indirgenebilir. Bunun için (3.46) denklemindeki son terim sağ tarafa geçirilir ve sonra (3.48) formülü sağ taraftaki sonuca uygulanır. Önceki dönüşümlerden sonra

$$u(t)+\int_{\gamma} N(t,\tau)u(\tau)d\tau = F(t), \quad t\in\gamma \tag{3.52}$$

şeklinde bir Fredholm integral denklemi elde edilir.

Burada,

$$N(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\frac{Z^{-1}(t)Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}\left[a(t)k(t,\tau)-\frac{Z(t)}{\pi i}\int_{\gamma} b(\tau_1)Z^{-1}(\tau_1)k(\tau_1,\tau)\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}\right], \tag{3.53}$$

$$F(t)=a(t)Z^{-1}(t)f(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} b(\tau)Z^{-1}(\tau)\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau+P_{\varkappa-1}(t) \tag{3.54}$$

şeklindedir.

$\varkappa>0$ için bir tek çözümü bulmak için önceki durum ile karşılaştırarak (3.49) şartları ile (3.46) denklemi tamamlanabilir.

Kabul edelim ki (3.44) lineer transmission probleminin $\varkappa$ indeksi negatif olmasın ve (3.52) homojen denklemi sadece sıfır çözüme sahip olsun. Bu durumda (3.46) ve (3.49) problemleri tek bir çözüme sahiptir ve ayrıca (3.54) ifadesinin sağ tarafında oluşan $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{\varkappa}$ sabitleri aynı sistemden bulunur. Yani (3.50) sistemi (3.47) karakteristik denkleminin durumunda olduğu gibidir.

Yukarıdaki teorem [29, s.158] monografisinde ispatlanmıştır.

3.2.2. SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

[29, s.159] çalışmasındakine benzer şekilde bu çalışmada $\varkappa\geq 0$ için

$$A(t)Z(t)u_{n+\varkappa}(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)\frac{u_{n+\varkappa}(\tau)}{\tau-t}d\tau = f_n(t), \quad t\in\gamma, \tag{3.55}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)u_{n+\varkappa}(\tau)\tau^{j-1}d\tau = A_j, \quad j=1,2,...,\varkappa \tag{3.56}$$

probleminin bir yaklaşık çözümü bulunabilir. Burada,

$$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k\Phi_k(t), \tag{3.57}$$

olup $k=0,1,...,n$ için a_k katsayıları

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f\left[\psi(t)\right]}{t^{k+1}}dt, \quad k=0,1,...$$

formülü ile verilir.

[29, s.158] den $u_{n+\varkappa}(t)$ çözümü $j=0,1,...,n+\varkappa$ için c_j bilinmeyen katsayılar olmak üzere,

$$u_{n+\varkappa}(t)=\sum_{j=0}^{n+\varkappa} c_j\Phi_j(t), \tag{3.58}$$

şeklindedir.

$f_n(t)$ ve $u_{n+\varkappa}(t)$ polinomlarını amaca uygun olarak

$$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k^* t^k, \tag{3.59}$$

$$u_{n+\varkappa}(t)=\sum_{j=0}^{n+\varkappa} c_j^* t^j \tag{3.60}$$

formda alınabilir.

[41, s.53] den $\Phi(z)$ fonksiyonu $z=\infty$ noktasının komşuluğunda

$$\Phi(z)=\alpha z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+.... \tag{3.61}$$

fonksiyonunun katsayıları olan $\alpha,\alpha_0,\alpha_1,...$ katsayıları için $\Phi_0(t)=1, \Phi_1(t)=\alpha t+\alpha_0$ ve $\Phi_2(t)=\alpha^2t^2+2\alpha\alpha_0 t+(\alpha_0^2+2\alpha\alpha_1)$ alındı.

Riemann teoreminden, $\Phi(z)$ fonksiyonu (z) düzleminin D^{-} bölgesini (w) düzleminin $|w|>1$ bölgesi üzerine resmeden bir konform dönüşümdür.

$\Phi_0(z), \Phi_1(z)$ ve $\Phi_2(z)$ Faber polinomları bilinen polinomlar olduğundan, kolaylıkla

$$\beta\Phi_{k+1}(t) = t\Phi_k(t) - k\beta_k - \sum_{p=0}^{k} \beta_p \Phi_{k-p}(t) \tag{3.62}$$

formülünü kullanarak $k = 3,4,...$ için $\Phi_k(z)$ polinomlarını bulabiliriz (bkz. [41,S 60]). Burada $\beta, \beta_0, \beta_1, ...$ katsayıları

$$z = \Psi(w) = \beta w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \frac{\beta_2}{w^2} + ..., \quad |w| > 1 \tag{3.63}$$

seri açılımındaki katsayılardır.

(3.55) denkleminde (3.60) fonksiyonu yerine yazılırsa ve [29] çalışmasında ki (1.2.2) ve (1.2.3) formülleri de dikkate alınırsa

$$\sum_{j=\varkappa}^{n+\varkappa} c_j^* \left(t^{j-\varkappa} + p_1 t^{j-\varkappa-1} + ... + p_{j-\varkappa} \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* t^k, \quad t \in \gamma \tag{3.64}$$

elde edilir. Burada, $p_1, p_2, ...$ sayıları (3.51) dan bulunur.

Burada (3.64) de t nin kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} & c_{n+\chi}^* = a_n^*, \\ & p_1 c_{n+\chi}^* + c_{n+\chi-1}^* = a_{n-1}^*, \\ & \vdots \\ & p_n c_{n+\chi}^* + p_{n-1} c_{n+\chi-1}^* + ... + p_1 c_{\chi+1}^* + c_\chi^* = a_0^*, \quad p_0 = 1 \end{aligned} \tag{3.65}$$

elde edilir. Diğer kalan $c_0^*, c_1^*, ..., c_{\chi-1}^*$ katsayıları [29] çalışmasındaki

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} B(\tau) Z(\tau) \tau^j d\tau = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} \left(X^{-}(z) z^j \right), \quad j = 1,2,...$$

formülünü kullanarak (3.56) ifadesinden bulunur.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} &c^*_{\varkappa-1} + p_1 c^*_{\varkappa} + \ldots + p_{n+1} c^*_{n+\varkappa} = A_1, \\ &c^*_{\varkappa-2} + p_1 c^*_{\varkappa-1} + \ldots + p_{n+2} c^*_{n+\varkappa} = A_2, \\ &\vdots \\ &c^*_0 + p_1 c^*_1 + \ldots + p_{n+\varkappa} c^*_{n+\varkappa} = A_{\varkappa} \end{aligned} \tag{3.66}$$

sistemi elde edilir.

(3.58) ifadesindeki $j = 0,1,\ldots,n+\varkappa$ için c_j katsayıları

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{u_{n+\varkappa}\left[\Psi(t)\right]}{t^{j+1}}dt = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c^*_k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\left[\Psi(t)\right]^k}{t^{j+1}}dt, \quad j = 0,1,\ldots,n+\varkappa$$

formülünden bulunur.

Şimdi

$$A(t)\,\mathrm{Z}(t)u(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} k(t,\tau)\frac{Z(\tau)}{a^2(\tau) - b^2(\tau)}u(\tau)d\tau = f(t), \quad t\in\gamma, \tag{3.67}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)u(\tau)\tau^{j-1}d\tau = A_j, \quad j = 1,2,\ldots,\varkappa \tag{3.68}$$

problemi için bir çözüm şeması oluşturalım.

Farz edelim ki, $k(t,\tau)$ fonksiyonu γ eğrisinden D^+ bölgesi içine her iki değişkene göre analitik olarak genişletilebilir ve $\overline{D^+}$ bölgesinde t ve τ değişkenlerine göre $r-$ defa sürekli diferensiyellenebilir ve ayrıca

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^r k(\mathrm{z}_1,\zeta)}{\partial z} - \frac{\partial^r k(\mathrm{z}_2,\zeta)}{\partial z}\right| \le K_1\left|\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_2\right|^{\alpha}, \quad \forall\zeta\in\overline{D^+}, \quad \mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2\in\overline{D^+}, \\ &\left|\frac{\partial^r k(\mathrm{z},\zeta_1)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^r k(\mathrm{z},\zeta_2)}{\partial \zeta}\right| \le K_2\left|\zeta_1 - \zeta_2\right|^{\alpha}, \quad \forall\zeta\in\overline{D^+}, \quad \zeta_1,\zeta_2\in\overline{D^+} \end{aligned}$$

şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$k(t,\zeta)$ analitik fonksiyonu $\gamma\cup D^+$ bölgesinde

$$k(t,\zeta)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}k_{pq}\Phi_p(z)\Phi_q(\zeta)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}k_{pq}^{*}z^p\zeta^q,\quad (z,\zeta)\in\gamma\times D^{+} \tag{3.69}$$

şeklinde seriye açılabilir. Burada,

$$k_{p,q}=\frac{1}{(\pi i)^2}\iint_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{k\left[\Psi(t_1),\Psi(t_2)\right]}{t_1^{p+1}t_2^{q+1}}dt_1dt_2,\quad \gamma_1=|t_1|=1,\quad \gamma_2=|t_2|=1 \tag{3.70}$$

dır.

(3.67) ve (3.68) probleminin bir yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} &A(t)\,Z(t)u_{n+\varkappa}(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}B(\tau)Z(\tau)\frac{u_{n+\varkappa}(\tau)}{\tau-t}d\tau \\ &+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}k_{n,n}(t,\tau)\frac{Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}u_{n+\varkappa}(\tau)d\tau=f_n(t),\quad t\in\gamma, \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}B(\tau)Z(\tau)u_{n+\varkappa}(\tau)\tau^{j-1}d\tau=A_j,\quad j=1,2,...,\varkappa \tag{3.72}$$

probleminin çözümü gibi bulunabilir. Burada,

$$k_{n,n}(t,\tau)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}k_{pq}^{*}t^p\tau^q, \tag{3.73}$$

olup $f_n(t)$ ve $u_{n+\varkappa}(t)$ fonksiyonları sırasıyla (3.59) ve (3.60) ifadeleriyle verilir.

Kolaylıkla, (3.71) ve (3.72) probleminden

$$\begin{aligned} &c_{n+\varkappa}^{*}+\sum_{j=0}^{n+\varkappa}h_{j,n}c_j^{*}=a_n^{*}, \\ &p_1c_{n+\varkappa}^{*}+c_{n+\varkappa-1}^{*}+\sum_{j=0}^{n+\varkappa}h_{j,n-1}c_j^{*}=a_{n-1}^{*}, \\ &\vdots \\ &p_nc_{n+\varkappa}^{*}+p_{n-1}c_{n+\varkappa-1}^{*}+...+p_1c_{\varkappa+1}^{*}+c_{\varkappa}^{*}+\sum_{j=0}^{n+\varkappa}h_{j,0}c_j^{*}=a_0^{*} \end{aligned} \tag{3.74}$$

sistemine geçilir. Burada,

$$h_{j,l} = \sum_{r=0}^{n} k_{l,r}^{*} h_{j,r}^{*}, \quad h_{j,r}^{*} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{Z(\tau)}{a^2(\tau) - b^2(\tau)} \tau^{j+r} d\tau$$

değerleri (3.66) ifadesi ile verilir.

(3.45) ifadesi ile verilen $Z(t)$ fonksiyonunun yaklaşık hesaplamasını göz önüne alalım. Bunu bulmak için, $X^{+}(z)$ veya $X^{-}(z)$ Cauchy tipli integrallerden birisi için bir yaklaşık çözüm bulmak yeterlidir. Bunun için

$$X^{+}(z) = \exp\left(\Gamma^{+}(z)\right),$$

$$\Gamma^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^{+}$$

yaklaşık çözümü göz önüne alınabilir.

[41, s.262] çalışmasından

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\ln[\left(\Psi(t)\right)^{-\varkappa} G(\Psi(t))]}{t^{k+1}} dt$$

olmak üzere,

$$\Gamma_n^{+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Phi_k(z), \quad z \in D^{+}$$

açılımı elde edilir. Öte yandan

$$\Gamma^{+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Phi_k(z), \quad z \in D^{+}$$

olmak üzere,

$$X^{+}(z) \approx X_n^{+}(z) = \exp\left(\Gamma_n^{+}(z)\right)$$

bulunur. Böylece,

$$Z(t) \approx Z_n(t) = \left[a(t) + b(t)\right] \Gamma_n^{+}(t), \quad t \in \gamma \tag{3.75}$$

dır.

Örnek : $t \in \gamma$ için aşağıdaki

$$A(t)Z(t)u(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)\frac{u(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} k(t,\tau)\frac{Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}u(\tau)d\tau = f(t) \quad (3.76)$$

denklemi göz önüne alalım. Burada

$$a(t)=\frac{1+t}{1-t}, \quad b(t)=1, \quad k(t,\tau)=\frac{1}{(t-5)(\tau+5)}, \quad f(t)=\frac{4}{25}\frac{1}{t-5}$$

ve γ ise odak noktaları ± 1 ve ekseni kestiği noktaları

$$c=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right), \quad d=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right), \quad R>1$$

olan bir elipstir. γ eğrisinin denklemi

$$t=\frac{1}{2}\left(R\mathrm{e}^{i\theta}+\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-i\theta}\right), \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

parametrik temsili ile verilebilir.

Bu durumda $\Phi(z)$ ve $\Psi(w)$ fonksiyonları

$$w=\Phi(z)=\frac{1}{R}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \quad z=\Psi(w)=\frac{1}{2}\left(Rw+\frac{1}{Rw}\right)$$

olarak bulunurlar. Faber polinomları $T_n(x)=\cos(n\arccos x), -1\le x\le 1$ olmak üzere,

$$\Phi_n(z)=\frac{2}{R^n}T_n(z), \quad n=1,2,...$$

şeklinde olur.

Transmission probleminin standart fonksiyonları

$$X^+(z)=1, \quad z\in D^+$$
$$X^-(z)=\frac{1}{z}, \quad z\in D^-$$

$$\varkappa = ind\,\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = ind\,t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} d\ln t = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$$

ya da

$$(indt = N_+ + N_- = 1)$$

yani $\varkappa = 1$ olduğundan $Z(t) = 2/(1-t)$ bulunur.

(3.76) denklemi

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} B(\tau)Z(\tau)u(\tau)d\tau = \frac{1}{5} \tag{3.77}$$

şartı ile birlikte düşünüldüğünde (3.76), (3.77) probleminin çözümü kolaylıkla

$$u(t) = \frac{1}{t-5}, \ t \in \gamma$$

olarak bulunur.

Bu durumda, $R = 2$ için (3.57) açılımı

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{f\left[\Psi(\xi)\right]}{\xi^{k+1}} d\xi = -\frac{2}{25\sqrt{6}}\left(10-4\sqrt{6}\right)^k, \quad k = 1, 2, ...$$

olmak üzere,

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(t), \quad t \in \gamma$$

şeklinde olur.

Faber polinomları ile Chebyshev polinomları birlikte düşünüldüğünde, (3.76) denkleminin sağ tarafı

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{2^{k-1}} T_n(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^{n} a_k^* t^k$$

olarak bulunur. Burada,

$$a_k^* = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} a_j \alpha_k, \quad k = 1, 2, ..., n$$

$$a_0^* = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} \alpha_0$$

ve $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ katsayıları

$$T_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + ...\alpha_n z^n$$

Chebyshev polinomunun katsayılarıdır.

Diğer taraftan $k(t,\tau)$ çekirdeği

$$k_{p,q} = \frac{1}{(\pi i)^2} \iint\limits_{\gamma_1 \times \gamma_2} \frac{k\left[\Psi(t_1, t_2)\right]}{t_1^{p+1} t_2^{q+1}} dt_1 dt_2, \quad \gamma_1 = |t_1| = 1, \quad \gamma_2 = |t_2| = 1$$

olmak üzere,

$$k(t,\tau) \approx k_{n,n}(t,\tau) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} k_{pq} \Phi_p(t) \Phi_q(\tau) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} k_{pq}^* t^p \tau^q,$$

şeklinde bir yaklaşıma sahip olur.

Ayrıca,

$$u_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j^* t^j$$

açılımında oluşan katsayılar için lineer denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{5^{n+2}} c_0^* + c_{n+1}^* = a_n^*, \\
&-\frac{1}{5^{n+1}} c_0^* + c_n^* = a_{n-1}^*, \\
&\vdots \\
&-\frac{1}{5^2} c_0^* + c_1^* = a_0^*, \quad c_0^* = A_1 = -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki tablo $n = 20$ için (3.76), (3.77) probleminin çözümünün sonuçları ile ilgilidir.

t	$u_n(t)$	$u(t)$
1.2500	−0.266666666666	−0.266666666665
0.62500 + 0.64952i	−0.223642172523−0.033202251902i	−0.223642172522− 0.033202251901i
−0.62500+0.64952i	−0.175438596491−0.020257904183i	−0.175438596490−0.020257904182i
−1.2500	−0.159999999999	−0.160000000000
−0.62500−0.64952i	−0.175438596491+0.020257904183i	−0.175438596490+0.020257904182i
0.62500 −0.64952i	−0.223642172523+0.033202251902i	−0.223642172522+0.033202251901i

Tablo 1.

Oluşturulan yaklaşık çözümler için hata tahminlerini verelim.

3.2.3. YAKLAŞIMIN HATASI

Teorem 3.2.3.1 : Kabul edelim ki, (3.47) denkleminin sağ tarafındaki $f(t)$ fonksiyonu γ eğrisinden D^+ bölgesi içine analitik devam ettirilebilir ve $\overline{D^+}$ kapalı bölgesinde $r-$defa sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ayrıca, $0<\alpha\le 1$ olmak üzere $f^{(r)}(z)\in Lip\alpha$ yani $f(t)\in W^r H^\alpha\left(\overline{D^+}\right)$ olsun. Bunların yanı sıra $u(t)$ ve $u_{n+\varkappa}(t)$ sırasıyla (3.46), (3.49) ve (3.55), (3.56) problemlerinin tam ve yaklaşık çözümleri olsun. Bu durumda K_1, n den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\left\|u(t)-u_{n+\varkappa}(t)\right\|_\infty \le K_1\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}$$

dır.

İspat : Her $t \in \gamma$ için

$$u(t)-u_{n+\varkappa}(t)=a(t)Z^{-1}(t)\left[f(t)-f_n(t)\right]-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} b(\tau)Z^{-1}(\tau)\left[f(\tau)-f_n(t)\right]\frac{d\tau}{\tau-t}$$

olduğu kolayca görülebilir. [41, s.197] çalışmasından

$$\|f(t)-f_n(t)\|_{\infty} \leq K_2 \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}$$

değerlendirmesi doğrudur. Burada ve bundan sonraki bölümlerde K_j, n den bağımsız değişik sabitleri gösterir.

Ayrıca [29] çalışmasındaki Teorem 2.2.1 in tahminlerini kullanarak

$$\left\|\int_{\gamma} b(\tau)Z^{-1}(\tau)\left[f(\tau)-f_n(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-t}\right\|_{\infty} \leq K_3 \frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}$$

eşitsizliği elde edilebilir.

Yukarıdaki son iki eşitsizlik $u(t)-u_{n+\varkappa}(t)$ ifadesinde yerine yazılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Denklemin tamamı için hesaplama şeması elde edilirken [29, s.171] deki sonuç kullanılır.

Teorem 3.2.3.2 : Kabul edelim ki, (3.46) denklemindeki $k(t,\tau)$ (her iki değişkene göre) ve $f(t)$ fonksiyonları $W^r H^{\alpha}\left(\overline{D^+}\right)$ sınıfına ait olsun. Ayrıca

$$\varkappa = \operatorname{lnd} \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$$

olmak üzere $\varkappa$, (3.44) lineer transmission probleminin indeksi ve kabul edelim ki $\varkappa \geq 0$ ve (3.53) homojen denklemi sadece trivial çözüme sahip olsun. Bu durumda, yeteri kadar büyük n değerleri için (3.66) ifadesi ile desteklenen (3.74) lineer sistemi çözülebilirdir ve

$$\|u(t)-u_{n+\varkappa}(t)\|_{\infty}\leq K_4\frac{\ln^3 n}{n^{r+\alpha}} \tag{3.78}$$

dır.

İspat : (3.74), (3.66) sistemi ve (3.71), (3.72) problemi çözülebilirlik açısından denktir. Böylece sistemin çözülebilirliğini göstermek için (3.71), (3.72) probleminin çözülebilirliğini ispatlamak yeterlidir. Yani

$$N_{n,n}(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\frac{Z^{-1}(t)Z(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}\left[a(t)k_{n,n}(t,\tau)-\frac{Z(t)}{\pi i}\int_{\gamma}b(\tau_1)Z^{-1}(\tau_1)k_{n,n}(\tau_1,\tau)\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}\right],$$

$$F_n(t)=a(t)Z^{-1}(t)f_n(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}b(\tau)Z^{-1}(\tau)\frac{f_n(\tau)}{\tau-t}d\tau+P_{\varkappa-1}(t)$$

olmak üzere

$$u_{n+\varkappa}(t)+\int_{\gamma}N_{n,n}(t,\tau)u_{n+\varkappa}(\tau)d\tau=F_n(t),\quad t\in\gamma \tag{3.79}$$

denkleminin çözülebilirliğini göstermek yeterli olacaktır.

(3.79) denkleminin çözülebilirliğini göstermek için [29] deki Teorem 4.1.6 kullanılarak

$$\varepsilon_1=\max_{t\in\gamma}\iint_{\gamma\times\gamma}\left|N(t,\tau)-N_{n,n}(t,\tau)\right|\left|N_{n,n}(\tau,\tau_1)\right|\left|d\tau d\tau_1\right|$$

tahminini göstermek yeterli olur.

[41, s.197] çalışmasından

$$\|k(t,\tau)-k_{n,n}(t,\tau)\|_{\infty}\leq K_5\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}},\quad (t,\tau)\in\gamma\times\gamma$$

tahmini elde edilir. Buradan

$$\left\|\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}b(\tau_1)Z^{-1}(\tau_1)\left[k(\tau_1,\tau)-k_{n,n}(\tau_1,\tau)\right]\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}\right\|_{\infty}\leq K_6\frac{\ln^3 n}{n^{r+\alpha}}$$

bulunur. Böylece yeteri kadar büyük n değerleri için

$$\varepsilon_1 \leq K_7 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\alpha}}$$

değerlendirmesi doğrudur.

Sonuç olarak yeteri kadar büyük n değerleri için [29] deki (4.1.39) şartı sağlanır buda bu n değerleri için (3.79) denkleminin çözülebilirliğini gösterir.

Diğer taraftan

$$M = \max_{t\in\gamma} \int_\gamma \left|N_{n,n}(t,\tau)\right| |d\tau| = \max_{t\in\gamma} \int_\gamma \left| \left[N_{n,n}(t,\tau) - N(t,\tau) \right] + N(t,\tau) \right| |d\tau| = O(1),$$

$$\varepsilon_2 = \max_{t\in\gamma} \int_\gamma \left|N(t,\tau) - N_{n,n}(t,\tau)\right| |d\tau| \leq K_8 \frac{\ln^3 n}{n^{r+\alpha}},$$

$$\varepsilon_3 = \left\| F(t) - F_n(t) \right\|_\infty \leq K_9 \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}$$

olduğundan (3.78) tahmini doğrudur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not : (3.75) yaklaşımı dikkate alındığında (3.43) denklemi için bir yaklaşık çözüm $\varkappa \geq 0$ için

$$\varphi_{n+\varkappa}(t) = \frac{Z_n(t)}{a^2(t) - b^2(t)} u_{n+\varkappa}(t) = \frac{X_n^+(t)}{a(t) - b(t)} u_{n+\varkappa}(t)$$

formülü ile bulunur.

Kabul edelim ki,

$$H(t) = \ln\left[t^{-\varkappa} \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right]$$

fonksiyonu γ üzerinde r. mertebeden türevlenebilir ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $H^{(r)}(t) \in Lip\alpha$ olsun. Bu durumda

$$\left\| X^+(t) - X_n^+(t) \right\|_\infty \leq K_{10} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \tag{3.80}$$

eşitsizliği bulunur (bkz. [41, s.262]).

Böylece, sonuç olarak eğer Teorem 3.2.3.2 nin koşulları sağlanırsa bu durumda (3.80) eşitsizliğinden

$$\|\varphi(t)-\varphi_{n+\varkappa}(t)\|_\infty \le K_{11}\frac{\ln^3 n}{n^{r+\alpha}}$$

tahmini elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGUARI

Tez çalışması esasen iki çalışmadan ibarettir. Bunlardan ilki E.G. Ladopoulos ve G. Tsamasphyros'nin "Banach Uzaylarında Lyapunov Eğrileri Üzerinde Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşımı" çalışması olup bu çalışma detaylı bir şekilde incelenerek bulunan sonuçlar ispatlarıyla verildi. İkinci olarak P. Wojcik, M.A. Sheshko, S.M Sheshko'nun "Faber Polinomların Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne Uygulaması" çalışması incelenerek çalışmadaki sonuçlar ispat ve yorumlarıyla verildi. Ayrıca çalışmaların görsel açıdan değerlendirilmesi için bazı nümerik şemalar sunuldu.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında E.G. Ladopoulos ve G. Tsamasphyros'nin "Banach Uzaylarında Lyapunov Eğrileri Üzerinde Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşımı" çalışması esas alınarak kapalı Lyapunov eğrisi üzerinde tanımlı Cauchy çekirdekli lineer singüler integral denklemlerin çözümü için bir yaklaşım yöntemi verildi ve incelendi. Bunun için fonksiyonların Faber polinomları ile yaklaşımı kullanıldı. Son olarak P. Wojcik, M.A. Sheshko, S.M Sheshko'nun "Faber Polinomların Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne Uygulaması" çalışması göz önüne alınarak bu yaklaşımlar Cauchy çekirdekli lineer singüler integral denklemlerin nümerik çözümüne uygulandı. Sonuçlar bir örnekle doğrulandı.

KAYNAKLAR

[1] Ladopoulos, E.G., "On the numerical solution of the finite-part singular integral equations of the first and second kind used in fracture mechanics", Comp Meth. Appl. Mech. Engng 65, 253-266, (1987).

[2] Ladopoulos, E.G., "On the numerical evaluation of the singular integral equations used in two-and three-dimensional plasticity problems", Mech. Res. Commun. 14, 263-274, (1987).

[3] Ladopoulos, E.G., "Singular integral representation of three-dimensional plasticity fracture problem", Theor. Appl. Fract. Mech 8, 205-211, (1987)

[4] Ladopoulos, E.G., "On a new integration rule with the Gegenbauer polynomials for singular integral equations, used in the theory of elasticity", Ing Archw 58, 35-46, (1988).

[5] Ladopoulos, E.G., "On the numerical evaluation of the general type of finite-part singular integrals and integral equations used in fracture mechanics", J. Engng. Fract. Mech. 31, 315-337, (1988).

[6] Ladopoulos, E.G., "The general type of finite-part singular integrals and integral equations with logarithmic singularities used in fracture mechamcs", Acta Mech. 75, 275-285, (1988).

[7] Ladopoulos, E.G., "Sigular integral operators method for two-dimensional plasticity problems", Comput. Struct. 33, 859-865, (1989).

[8] Ladopoulos, E. G., Zısıs, V.A., Kravvantıs, D., "Sigular integral equations in Hilbert space applied to crack problems", Theor. Appl. Fract. Mech. 9, 271-281, (1988).

[9] Elliot, D., "The classical collocation method for singular integral equations having a Cauchy kernel", SIAM J. Numer. Anal. 19, 816-831, (1982).

[10] Kaya, A. C., Erdoğan, F., "On the solution of integral equation with strongly singular kernels", Q. Appl. Math. 45, 105-122, (1987).

[11] Kaya, A.C., Erdoğan, F., “On the solution of integral equations with a generalized Cauchy kernel”, Q. Appl. Math. 45, 455-469, (1987).

[12] Gilbert, R. P., Maganını, R., “The boundary integral method for two-dimensional orthotropic materials”, J. Elasticity 18, 61-82, (1987).

[13] Golberg, M. A, “The numerical solution of Cauchy singular integral equations with constant coefficients”, J. Integ. Eqns. 9, 127-151, (1985).

[14] Heinlein, M., Mukherjee, S., Richmond, O., “A boundary element method analysis of temperature fields and stresses during solidification”, Acta Mech. 59, 58-81, (1986).

[15] Hsiao, G. C., Kopp P., Wendland, W. L., “A galerkin collocation method for some integral equations of the first kind”, Computing, 25, 89-130, (1980).

[16] Ivanov, V.V., “The Theory of Approximate Methods and Their Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations”, Noordoff, Leyden, Netherlands, (1976).

[17] Prossdorf, S., “On approximate methods for the solution of one-dimensional singular integral equations”, Applic. Anal. 7, 259-270, (1977).

[18] Srivastav, R.P., Venturino, E., “On the approximate solutions of singular integral equations using galerkin-type and collocation methods”, Appl. Anal. 19, 39-48, (1985).

[19] Theotokoglou, E. N., Tsamasphyros, G. J., “Integral equations for any configuration of curved cracks and holes in an elastic strip”, Ing. Archıv 57, 3-15, (1987).

[20] Venturino, E., “Recent developments in the numerical solution of singular integral equations”, J. Math. Anal. Appl. 115, 239-274, (1986).

[21] Mustafa, N., Çağlar, M., “Approximate solution of singular integral equations with negative index”, Gazi University Journal of Science, 2010, 23(4):449-455.

[22] Mustafa, N., “On the approximate solution of singular ıntegral equations with negative index”, Complex Variables and Elliptic Equations, 2010, 55(7):621-631.

[23] Mustafa, N., Khalilov, H.E., “The collocation method fort he solution of boundary integral equations”, 2009, 88(12):1665-1675.

[24] Mustafa, N., “Fixed point theory and approximate solutions of non-linear singular integral equations”, 2008, 53(11):10470158.

[25] Muskhelishvili, N.I., “Singulyarnie Integralnie Uravneniya (Singular Integral Equations)”, Moscow:Nauka, 1968.

[26] Kalandiya, A.I., “Matematicheskie Metodi Dvumernoi Uprugosti (Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity)”, Moscow: Nauka, 1973.

[27] Estrada, R., Kanwal, R.P., “Singular Integral Equations”, Boston, 2000.

[28] Gakhov, F.D., “Kraevie zadachi (Boundary Value Problems)”, Moscow: Nauka, 1977.

[29] Sheshko, M.A., “Singular Integral Equations with Cauchy and Hilbert Kernels and Their Approximate Solution”, Lublin, 2003.

[30] Elliott, D., “The approximate solution of singular integral equations. Solutions methods of integral equations”, Theory and Appl., New York”, 1979, vol. 18, s83–107.

[31] Golberg, M.A., “The numerical solution of Cauchy singular integral equations with constant coefficients”, J. Integr. Equat., 1985, vol. 9, pp. 127–151.

[32] Suetin, P.K., “Ryadi po Mnogochlenam Fabera (Series in Faber Polynomials)”, Moscow: Nauka, 1984.

[33] Musayev, B., Koca, K., Mustafayev, N., “Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz III”, Seçkin Yayıncılık San. ve Tic. A.Ş., Ankara, (2006)

[34] Güngör, M., “Cauchy Çekirdekli Singüler İntegrallere Yaklaşımlar”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars,(2014)

[35] Wojcik, P., Sheshko, M.A., Sheshko, S.M., “Application of Faber polynomials to the approximate solution of singular integral equations with the Cauchy kernel”, Volume 49, Issue 2, pp 198-209 (2012)

[36] Doğu A., “Faber Polinomlarının İleri Asimtotik Özellikleri”, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir,(2011)

[37] Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, 6. Baskı, DORA Basım-Yayın Dağıtım Ltd.Şti. Bursa, (2010)

[38] Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, Balcı Yayınları, Kütahya, (2010)

[39] Chen, M., Chen, Z., Chen, G., “Approximate Solutions of Operator Equations”, World Scientific Book Series in Approximation and Decomposition, (1997)

[40] Ladopoulos, E.G., Tsamasphyros, G., “Approximations of Singular Integral Equations on Lyapunov Contours in Banach Spaces”, Computers and Mathematics with Applications Volume 50, Issues 3–4, Pages 567–573 (2005)

[41] Suetın, P. K., “Series in Faber polynomials”, Naukova Dumka, Moscow, (1984).

[42] Gohberg, I., Feldman, L. A., “Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution”, In AMS, Trans. Math. Monographs, Volume 41,, Providence, RI, (1974)

[43] Muskhelishvill, N. I., “Singular Integral Equations”, Noordhoff, Gronmgen, Netherlands, (1972).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	İsmail ÖZTÜRK
Doğum Yeri:	Kars
Doğum Tarihi:	01.03.1981
Medeni Hali:	Evli
Yabancı dil:	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise :	Kars Alpaslan Lisesi (1996)
Lisans :	Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002) Anadolu Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme Bölümü (2015)
Yüksek Lisans :	Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi (Tezsiz) (2006) Kafkas Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi (2016)

Çalıştığı Kurumlar

1.Kars Final Dergisi Dershanesi (2003)
2.Kafkas Üniversitesi Ardahan MYO (2006-2008)
3.Ardahan Üniversitesi Ardahan MYO (2008-2014)
4.Kafkas Üniversitesi Kazım Karabekir Teknik Bilimler MYO (2014-Devam)