T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HANKEL DETERMİNANTI KULLANILARAK ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

Levent BUDAK

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

OCAK-2016

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HANKEL DETERMİNANTI KULLANILARAK ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI EŞİTSİZLİĞİ

Levent BUDAK

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

OCAK-2016

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Levent BUDAK' ın Doç. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Hankel Determinantı Kullanılarak Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .birliği..... ile kabul edilmiştir.

29./01./2016

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan	: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye	: Doç. Dr. Erhan DENİZ	....
Üye	: Yrd.Doç. Dr.Murat İbrahim YAZAR	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2016 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, ve çalışmam esnasında, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Levent BUDAK Kars - 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında, analitik fonksiyonların belli bir alt sınıfı için ikinci Hankel determinantı yani $\left|H_2(2)\right| = \left|a_2 a_4 - a_3^2\right|$ için kesin bir üst sınır bulunmuştur. Ayrıca parametrelerin özel durumlarında analitik fonksiyonların özel alt sınıfları için kesin üst sınırlar verilmiştir.

2016, 84 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Konveks fonksiyon, Yıldızıl fonksiyon, Hankel determinantı, Ma-Minda konveks ve yıldızıl fonksiyon, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, a sharp upper bound for the second Hankel determinant, that is, $|H_2(2)| = |a_2a_4 - a_3^2|$ of a subclass of the analytic functions is obtained. Moreover, for special subclasses of analytic functions in special cases of parameters sharp upper bounds are given.

2016, 84 pages

Keywords: Analytic functions, Univalent function, Convex function, Starlike function Hankel determinant, Ma-Minda convex and starlike function, Subordination.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	$\{z : \|z\| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	Sayma sayılar kümesi
γ	$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri
$f^{(n)}$	Bir f fonksiyonun n.dereceden türevi
$U(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{A}$	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathcal{U} \right\}$ kümesi
$\mathcal{S}$	$\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U}$ için f ünivalent$\}$ kümesi
$\mathcal{P}$	Caratheodory Sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^{*}$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonunu
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
$\mathcal{S}^{*}(\beta)$	β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Hankel matrisi
$H_\infty = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Hankel matrisi
$T_{n-1} = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Toeplitz matrisi
$T_\infty = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Toeplitz matrisi
$H_q(n)$	q. mertebeden Hankel determinantı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli dallarından birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform olarak dönüştüren fonksiyonun varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim disk de tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$\mathcal{U} = \left\{ z : |z| < 1, z \in \mathbb{C} \right\}$$

birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve $\mathcal{U}$ birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(\mathcal{U})$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır.

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ tahmini uzun yıllar matematikçileri devamlı meşgul eden bir problem olarak güncelliğini korumuş ve 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach tahmininin en önemli sonuçlarından birisi de $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve bükülme (Distortion) ve genişleme (Growth) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|,\ |f'(z)|$ ve $\left|\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Yukarıda da bahsedildiği üzere ünivalent fonksiyonlar için katsayı eşitsizliği birçok problemin çözümünde oldukça etkilidir.

Kompleks analizin önemli konularından biri de Hankel determinantıdır. Hankel determinantı bilimin bilinen birçok alanında sıkça kullanılmaktadır. Bizi ilgilendiren kısmı ile olaya bakacak olursak, Hankel determinantı yardımıyla $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı fonksiyonların sınırlılığını göstermek yani integral katsayılarına sahip orijinin komşuluğunda Laurent serileriyle temsil edilen iki sınırlı analitik fonksiyonun oranı olarak gösterilen bir fonksiyonun rasyonel olduğu gösterilir. Ayrıca meromorfik fonksiyonlar ile ilgili çalışmada Hankel determinantının kullanımı için [8] çalışmasına ve bu determinantın çeşitli özellikleri için de [45] çalışmaya bakmak faydalı olacaktır.

Diğer taraftan ünivalent fonksiyonlarla ilgili en önemli problem olan katsayı problemi yüzyıl boyunca matematikçileri meşgul ettiğini biliyoruz. Katsayı problemleri olarak $H_q(n)$, q. mertebeden Hankel determinantı ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere klasik a_n katsayıları için, Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $a_3-\mu a_2^2$ için, ikinci Hankel determinantı olarak bilinen $H_2(2)=a_2a_4-a_3^2$ için ve üçüncü Hankel determinantı olarak tanımlanan $H_3(1)=a_3\left(a_2a_4-a_3^2\right)-a_4\left(a_4-a_2a_3\right)+a_5\left(a_3-a_2^2\right)$ için kesin üst sınırını bulma aklımıza gelir. Dolayısıyla ünivalent fonksiyonlar teorisinde Hankel determinantı önemli bir yer tutar. Hankel determinantının ünivalent fonksiyonlar teorisine girişi q. mertebeden Hankel determinantı $H_q(n)$ nin $n\to\infty$ iken büyüme oranını bulmakla başlar. Pommerenke [33] bu soruyu 1966 yılında $k=16p\sqrt{p}$ ve $O(1)$ de sadece p, q ve f ye bağlı bir değer olmak üzere p-valent $(p\geq 1)$ fonksiyonlar için $n\to\infty$ iken $H_q(n)=O(1)n^{k\sqrt{q}-\frac{1}{2}q}$ değerini bulmasıyla cevaplamıştır. Bu şu demektir q ve p ye yeteri kadar yakın değerler için $n\to\infty$ iken $H_q(n)\to 0$ olur. Yalnız Pommerenke'nin bu çalışmasında elde ettiği $k\sqrt{q}-\frac{1}{2}q$ kuvveti kesin değildir. Diğer taraftan 1967 yılında Pommerenke [35], ünivalent fonksiyonlar için $q\geq 2$ ve $\beta>1/400$ olmak üzere $n=1,2,\dots$, için $H_q(n)<K(q)n^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)q+\frac{3}{2}}$ elde etmiştir. Hayman [16] 1968 yılında $p=1$ için $n\to\infty$ iken $H_q(n)=O(1)n^{\frac{1}{2}}$ bulmuştur. Buradaki $1/2$ kuvveti kesindir.

Daha sonra Noonan ve Thomas [26] 1971 yılında p-valent fonksiyonlar için $O(1)$ de sadece $p,\ q$ ve f ye bağlı bir değer olmak üzere

$$H_q(n) = O(1)\begin{cases} n^{2p-1}; & q=1, p>1/4 \\ n^{2pq-q^2}; & q\geq 2,\ p\geq 2(q-1) \end{cases}$$

bulmuştur. Buradaki $2pq-q^2$ kuvveti kesindir.

ElHosh [11] çalışmasında α pozitif Hayman indekse sahip ünivalent fonksiyonlar için ve [12] çalışmasında da $k-$fold simetrik ve konvekse yakın fonksiyonlar için Hankel determinantının üst sınırlarını elde etmiştir. Noor [27-29] çalışmalarında konvekse yakın fonksiyonları, [30] çalışmasında Bazilevic fonksiyonları ve [1, 31, 32] çalışmalarında ise sınırlı sınır notasyonuna sahip fonksiyonlar için Hankel determinantı problemini çalışmıştır.

Bundan sonra Hankel determinatı problemi genellikle $H_2(2)$ ve $H_3(1)$ in üst sınırını bulma üzerine yoğunlaşmıştır. Öyleki son zamanlarda Janteg, Hallim ve Darus [18] 2006 yılındaki çalışmasında pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar için $|H_2(2)| = |a_2a_4 - a_3^2| \leq 4/9$ ve 2007 yılındaki [20] çalışmasında da yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için sırasıyla $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 1$ ve $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 1/8$ bulmuştur. 2007 yılında Babalola [2] çalışmasında ise pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için $H_3(1)$ in kesin üst sınırını sırasıyla $|H_3(1)| \leq 993/1620$, $|H_3(1)| \leq 16$ ve $|H_3(1)| \leq 15/24$ olarak elde etmiştir. Daha sonra analitik fonksiyonların bazı özel alt sınırları için $H_2(2)$ ve $H_3(1)$ in üst sınırları bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır [3, 4]. Bu çalışmalardan ayrı olarak 2013 yılında Lee, Ravichandran ve Supramaniam [22] çalışmasında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için $H_2(2)$ nin kesin üst sınırını çalışmıştır.

Biz de bu tez çalışmasında Ma- Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonların oluşturduğu sınıfın genel bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf için $H_2(2)$ in kesin bir üst sınırını elde ettik. Parametrelerin özel durumlarında analitik fonksiyonların bilinen önemli alt sınıfları için $H_2(2)$ in üst sınırları verildi.

Tezin Kuramsal temeller başlığı altında tezde kullanılacak temel tanım ve bilgiler sunuldu. Materyal ve Yöntem kısmında Hankel determinantı problemi ile ilgili bu güne kadar yapılan çalışmaların bir özeti verildi. Bulgular kısmında ise ilk defa bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu.

Tanım 2.1.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) olarak adlandırılır. $\overline{\mathcal{U}}(z_0, r)$ ile $\mathcal{U}(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial\mathcal{U}(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $\mathcal{U}(0, r) = \mathcal{U}_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $\mathcal{U}(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{2/3}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{U}(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(z - z_0\right)^n} \tag{2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz.

Sonuç 2.2.10: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.11 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır [36].

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f\left(z\right)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.13: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.14 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [10].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [10].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$. Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.15 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir. Örneğin $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.18: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [10].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{2.3}$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

şeklindeki analitik fonksiyon yazılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \right\}$$

şeklinde gösterilir [10, 13, 34].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in \mathcal{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)\, f'(z_0)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n = 2,3,...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir [10].

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [10].

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z),\ z \in \mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0,\ n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [10].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in\mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [10, 34].

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n|\le n$ değerlendirmesi doğrudur [13, 34].

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^*=\left\{f\in\mathcal{A}:\forall z\in\mathcal{U} \text{ için } \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0\right\}$$

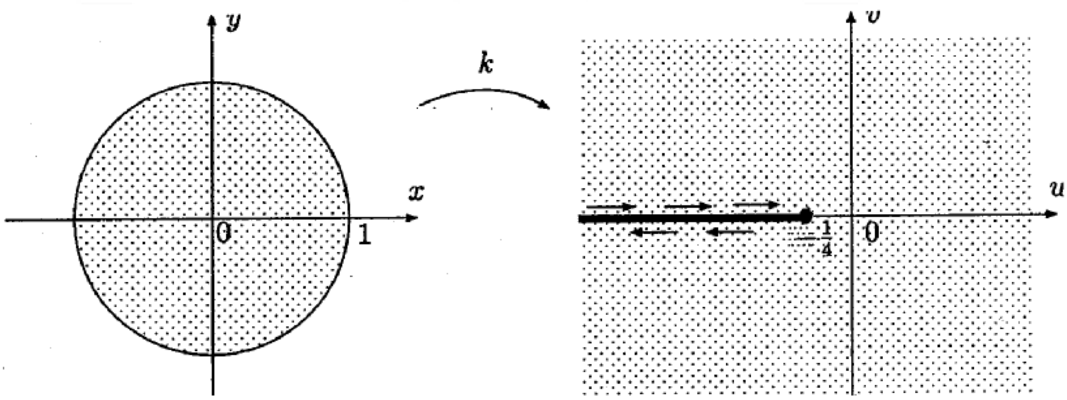
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu,

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in\mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 2.3.6 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha \in (0,2]$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$ fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [10, 34].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \le 1$ değerlendirmesi doğrudur [13, 34].

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1} \in \mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z = re^{i\theta}$ $(0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right) \\ &= \frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta} \ge \frac{1-r^2}{1+r^2} > 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.6 ve 2.3.8 in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere, $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [10, 13, 34].

İspat: $f \in \mathcal{C}$ olsun. İspatlamalıyız ki $g \in \mathcal{S}^*$ dır. $f \in \mathcal{C}$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

yazılır. $g(z) = zf'(z)$ ise $g'(z) = f'(z) + zf''(z)$ yazılabileceğinden,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

olup, $g \in \mathcal{S}^*$ dır.

Şimdi de $g \in \mathcal{S}^*$ olduğunu kabul ederek $f \in \mathcal{C}$ olduğunu gösterelim. $g \in \mathcal{S}^*$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

yazılır. $g(z)$ nin tanımı kullanılırsa,

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)}\right) > 0$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

elde edilir. O halde, $f\in\mathcal{C}$ dır. Bununla teoremin ispatı tamamlanır.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}^*\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Ünivalentlikle ilgili kriterlerden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir [10, 13, 34]:

- f fonksiyonu konveks bir $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z\in\mathcal{D}$ için $\operatorname{Re} f'(z)>0$ ise f fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesi üzerinde ünivalenttir. Bu sonuç ile Caratheodory sınıfı arasında yakın bir ilişki vardır.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer işgal eden subordinasyon ve Hadamard çarpım kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir [10].

Eğer g ünivalent ise $f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(\mathcal{U})\subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(\mathcal{U})\subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\le|f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r)\subset f(\mathcal{U}_r)$ dir [10].

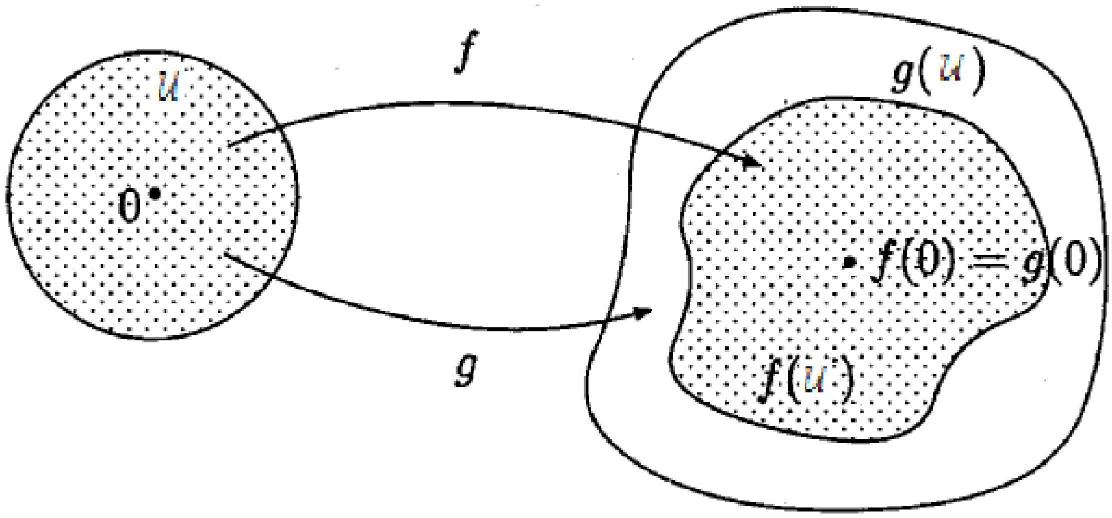
Özellikle, eğer $f\prec g$ ise

$$\max_{|z|\le r}|f(z)|\le\max_{|z|\le r}|g(z)|,\quad (r\in(0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z)\in\mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z)\prec\frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \phi(z)\in\Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z)\prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.2: $f\prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.11: $f,g\in\mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ ve } g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları,

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n b_n z^n=(g*f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $"*"$ Hadamard çarpımını gösterir [10].

Tanım 2.3.12 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): Her $z\in\mathcal{U}$ ve $0\le\beta<1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta$$

koşulunu sağlayan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.3.13 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir [13].

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} :\ 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3.14: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara kompleks γ mertebeli Ma-Minda yıldızıl fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.15: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara kompleks γ mertebeli Ma-Minda konveks fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.14 ve 2.3.15 da $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ alınırsa sırasıyla analitik fonksiyonların kompleks γ mertebeli yıldızıl fonksiyonları ve kompleks γ mertebeli konveks fonksiyonları gibi önemli iki fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf sırasıyla $\mathcal{S}^*[\gamma]$ ve $\mathcal{C}[\gamma]$ ile gösterilir.

Diğer taraftan, Tanım 2.3.14 ve 2.3.15 da $\gamma=(1-\beta)e^{-i\delta}\cos\delta \ \left(|\delta|<\pi/2,\, 0\leq\beta<1\right)$ ve $\varphi(\mathrm{z})=(1+\mathrm{z})/(1-\mathrm{z})$ alınırsa analitik fonksiyonların önemli iki fonksiyon türü elde edilir. Bu fonksiyonlar literatürde sırasıyla $\beta.$ mertebeden $\delta-$spirallike fonksiyonlar ve $\beta.$ mertebeden $\delta-$Robertson fonksiyonlar olarak bilinir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıflar

$$\mathcal{S}^*[\delta,\beta]=\left\{ f\in\mathcal{A}:\mathrm{Re}\left(e^{i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta\cos\delta,\, |\delta|<\pi/2,\, 0\leq\beta<1\right\}$$

ve

$$\mathcal{C}[\delta,\beta]=\left\{ f\in\mathcal{A}:\mathrm{Re}\left(e^{i\delta}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)>\beta\cos\delta,\, |\delta|<\pi/2,\, 0\leq\beta<1\right\}$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonların önemli ve ilk çalışmalarından birisi $\mathcal{S}$ sınıfına ait katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu probleme ilk cevabı Bieberbach 1916 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.17 (Bieberbach Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2|\leq 2$ dir. Eşitlik hali $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $k_\theta(z)=\dfrac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir [10, 34].

Teorem 2.3.18 (Bieberbach Tahmini): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $n=2,3,4,...$ için $|a_n|\leq n$ eşitsizliği vardır. Eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır [10, 34].

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde elde edilmiştir.

$|a_2| \leq 2,$ Bieberbach (1916)

$|a_3| \leq 3,$ Löwner (1923) (Löwner diferensiyel Denklemi)

$|a_4| \leq 4,$ Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği)

$|a_6| \leq 6,$ Pederson (1968), Ozawa (1969)

$|a_5| \leq 5,$ Pederson, Schiffer (1972)

$|a_n| \leq e.n,$ Littlewood (1925)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n} = 1,$ Hayman (1955)

$|a_n| \leq \sqrt{7/6}\,n < 1.081n,$ FitsGerald (1972)

*** $|a_n| \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ L. De Branges (1984).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Cauchy, Hankel ve Toeplitz matrisi tanımlanarak bu matrislere karşılık gelen Hankel ve Toeplitz determinantı kavramları verildi. Ayrıca, Hankel determinatının bir uygulaması olarak ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için ikinci ve üçüncü Hankel determinantı probleminin bu güne kadar yapılmış çalışmaları sunuldu.

3.1 Cauchy, Hankel ve Toeplitz Matrisleri

Bu başlık altında özellikle Cauchy, Hankel ve Toeplitz matrisleri bu matrislerle alakalı Hankel determinantı tanımları verildi.

Tanım 3.1.1: $x_i \neq y_i \ \ (x_i, y_i \in \mathbb{C})\ 1 \leq i, \ \ j \leq n$ olmak üzere elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_i}$$

ile tanımlı $C = \left[c_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisine Cauchy matrisi denir [7].

Tanım 3.1.2: $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

kuadrik formuna Hankel formu denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve

$$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

olarak gösterilir [17].

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi Hankel matrisi simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden Hankel matrisi de

$$H_\infty = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3: $n \geq 1$ ve t_{i-j} ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \bar{x}_j$$

kuadrik formuna Toeplitz formu denir [17].

Bu forma tekabül eden,

$$T_{n-1} = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

matrise de Toeplitz matrisi denir. Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada görüldüğü gibi bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matrisi

$$T_\infty = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

3.2. Hankel Determinantı

Hankel determinantı, integral katsayılı kuvvet serisi teorisinde ve singülerlik çalışmasında önemli bir rol oynamaktadır. $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & \cdots & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix} \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

determinantına $q.$ mertebeden Hankel determinantı denir [33].

Buradan q ve n nin özel durumlarında

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2, \quad H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_3\left(a_2 a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2 a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right), \quad (a_1 = 1)$$

determinantları yazılır.

Teorem 3.2.1: $f \in \mathcal{A}$, $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olsun. Buradan,

$$H_q(n) = O(1) n^{2-q} \quad (n \to \infty)$$

mümkün olanın en iyisidir [32].

Lemma 3.2.2: $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ şeklinde verilen bir kuvvet serisinin $\mathcal{U}$ diskinde $\mathcal{P}$ sınıfından bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & 2 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

Toeplitz determinantının $c_{-k} = \overline{c}_k$ katsayılarının negatif olmayan sayılar olmasıdır.

Ayrıca bunlar, $n < m-1$ için $D_n > 0$ ve $n \geq m$ için $D_n = 0$ olması durumunda $k \neq j$, $t_k \neq t_j$ ve t_k reel ve $\rho_k > 0$ olmak üzere

$$p(z) = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \rho_0 (e^{it_k z})$$

fonksiyonu haricinde kesinlikle pozitiftir [14].

Lemma 3.2.3: $p \in \mathcal{P}$ olsun. $k = 1, 2, ...$ için $|c_k| \leq 2$ eşitsizliği doğrudur. Burada sınır kesindir [10].

Lemma 3.2.4: $p \in \mathcal{P}$ olsun. $|x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ olacak şekilde x ve z değerleri için

$$2c_2 = c_1^2 + x(4 - c_1^2) \tag{3.1}$$

ve

$$4c_3 = c_1^3 + 2c_1(4 - c_1^2)x - c_1(4 - c_1^2)x^2 + 2(4 - c_1^2)(1 - |x|^2)z \tag{3.2}$$

olur [23].

3.3. Analitik Fonksiyonlarının Bazı Alt Sınıfları İçin Hankel Determinantı

Bu başlık altında $H_2(2)$, $H_2(1)$ ve $H_3(1)$ determinantının üst sınırları üzerine yapılan çalışmalar tarihi seyir içerisinde verilmiştir.

Ayrıca, $p \in \mathcal{P}$ denildiğinde $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$ ve $f \in \mathcal{A}$ denildiğinde $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ şeklinde fonksiyonlar anlaşılacaktır. f fonksiyonunun türevinin reel kısmı pozitif olan fonksiyonlar için $H_2(2)$ determinantının üst sınırı aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için $\mathrm{Re}\{f'(z)\} > 0$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{R}$ sınıfındandır denir [18].

Teorem 3.3.2 : $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{4}{9}$$

eşitsizliği yazılır. Elde edilen sonuç kesindir [18].

İspat: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $f' \in \mathcal{P}$ yazılır. Böylece

$$f'(z) = p(z) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} 2a_2 &= c_1 \\ 3a_3 &= c_2 \\ 4a_4 &= c_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

katsayı bağıntıları bulunur. Böylece,

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{c_2^{\,2}}{9}\right|$$

kolayca yazılır. Burada $\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{c_2^{\,2}}{9}\right|$ ifadesinde uygun sınır değerleri elde etmek için Lemma 3.2.4'ten yararlanılır. İlk olarak $\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{c_2^{\,2}}{9}\right|$ ifadesindeki c_2 ve c_3 yerine Lemma 3.2.4 deki (3.1) ve (3.2) değerleri yazılır. Sonra $c_1 = c \in [0,2]$ alınırsa

$$\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{c_2^2}{9}\right| = \left|\frac{c^4}{288} + \frac{c^2\left(4-c^2\right)x}{144} - \frac{\left(4-c^2\right)\left(32+c^2\right)x^2}{288} + \frac{c\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)z}{16}\right|$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanıp ve $\rho = |x| \le 1$, $|z| \le 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{c_2^{\,2}}{9}\right| &\le \frac{c^4}{288} + \frac{c\left(4-c^2\right)}{16} + \frac{c^2\left(4-c^2\right)\rho}{144} + \frac{(c-2)(c-16)\left(4-c^2\right)\rho^2}{288} \\ &= F(\rho) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. Burada $\rho \in [0,1]$ ve $c \in [0,2]$ dır. Şimdi $F(\rho)$ fonksiyonunun maksimumluğunu araştırmak için

$$F'(\rho)=\frac{c^2\left(4-c^2\right)}{144}+\frac{(c-2)(c-16)\left(4-c^2\right)\rho}{144}$$

türevi incelenir. $F'(\rho)>0$ olduğundan F fonksiyonu artandır ve $\max_{\rho\in[0,1]} F(\rho)=F(1)$

şeklinde olur. Şimdi

$$G(c)=F(1)=\frac{c^4}{288}+\frac{c\left(4-c^2\right)}{16}+\frac{c^2\left(4-c^2\right)}{144}+\frac{(c-2)(c-16)\left(4-c^2\right)}{288}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $c\in(0,2)$ için

$$G'(c)=\frac{-c\left(5+c^2\right)}{36}<0$$

olur. Böylece G fonksiyonu $c\in(0,2)$ aralığında azalan olduğundan maksimum değerini $\mathrm{c}=0$ alması gerekir. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{c_1c_3}{8}-\frac{c_2^2}{9}\right|\leq\frac{4}{9}$$

olur. Eşitlik

$$f'(z)=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

şeklinde verilen $f\in\mathcal{R}$ fonksiyonu için elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.3: $f\in\mathcal{S}^*$ olsun. Böylece,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç kesindir [20].

İspat: $f\in\mathcal{S}^*$ olsun. Böylece her $z\in\mathcal{U}$ için $\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$ olduğundan

$$zf'(z)=f(z)p(z) \tag{3.6}$$

olacak şekilde $p\in\mathcal{P}$ vardır. Buradan

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= c_1 \\ a_3 &= \frac{c_2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \\ a_4 &= \frac{c_3}{3} + \frac{c_1 c_2}{2} + \frac{c_1^3}{6} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

katsayı bağıntıları bulunur. (3.7) ifadesinden,

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| = \left|\frac{c_1 c_3}{3} - \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^4}{12}\right| \tag{3.8}$$

kolayca elde edilir. (3.8) eşitliğinde uygun sınır değerleri kullanılarak Lemma 3.2.3 den istenen sonuç elde edilebilir.

Şimdi $c = c_1$ ve $0 \le c \le 2$ olduğu gözönüne alınıp (3.1) ve (3.2) birlikte kullanılarak,

$$\left|\frac{c_1 c_3}{3} - \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^4}{12}\right| = \left|\frac{\left(4-c^2\right)c^2 x}{24} - \frac{c^4}{16} + \frac{\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)cz}{6} - \frac{\left(4-c^2\right)x^2\left(12+c^2\right)}{48}\right|$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanır ve $\rho = |x| \le 1$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_1 c_3}{3} - \frac{c_2^2}{4} - \frac{c_1^4}{12}\right| &\le \frac{c^4}{16} + \frac{\left(4-c^2\right)c}{6} + \frac{c^2\left(4-c^2\right)\rho}{24} \\ &\quad + \frac{\left(4-c^2\right)(c-2)(c-6)\rho^2}{48} \\ &= F(\rho) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Ayrıca

$$F'(\rho) = \frac{c^2\left(4-c^2\right)}{24} + \frac{\left(4-c^2\right)(c-2)(c-6)\rho}{24}$$

olduğundan $\rho > 0$ için $F'(\rho) > 0$ olur. Dolayısıyla F fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan (3.9) eşitsizliğinde $\rho = 1$ alınırsa $c \in [0, 2]$ aralığında

$$\left|\frac{c_1c_3}{3}-\frac{c_2^2}{4}-\frac{c_1^4}{12}\right|\le 1$$

olur. Eşitlik

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1+z}{1-z}$$

veya

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonlar için elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.4: $f\in\mathcal{C}$ olsun. Böylece

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{1}{8}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç kesindir [20].

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.3 ün ispatına benzer bir şekilde yapılır. Kabul edelim ki $f\in\mathcal{C}$ olsun. Her $z\in\mathcal{U}$ için $\operatorname{Re}\left\{\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}\right\}>0$ olduğundan,

$$\left(zf'(z)\right)'=f'(z)p(z) \tag{3.10}$$

olacak şekilde, $p\in\mathcal{P}$ vardır. Buradan

$$\left.\begin{aligned} a_2&=\frac{c_1}{2}\\ a_3&=\frac{c_2}{6}+\frac{c_1^2}{6}\\ a_4&=\frac{c_3}{12}+\frac{c_1c_2}{8}+\frac{c_1^3}{24}\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

katsayı bağıntıları bulunur. (3.11) ifadesinden

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\frac{1}{144}\left|6c_1c_3+c_1^2c_2-4c_2^2-c_1^4\right| \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi,

$$\left|6c_1c_3+c_1^2c_2-4c_2^2-c_1^4\right|=\left|\frac{3c^2\left(4-c^2\right)x}{2}-\frac{\left(4-c^2\right)\left(8+c^2\right)x^2}{2}+3c\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2 z\right)\right|$$

eşitliğinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanıp ve $\rho=|x|\leq 1$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left|6c_1c_3+c_1^2c_2-4c_2^2-c_1^4\right| &\leq 3c\left(4-c^2\right)+\frac{3c^2\left(4-c^2\right)\rho}{2}\\ &\quad+\frac{\left(4-c^2\right)\left(c^2-8\right)\rho^2}{2}\\ &=F(\rho)\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan $c_1=c\left(0\leq c\leq 2\right)$ olsun. (3.1) ve (3.2) birlikte kullanılarak sonuç elde edilir. Buradan,

$$F'(\rho)=\frac{3c^2\left(4-c^2\right)}{2}+\left(4-c^2\right)\left(c-2\right)\left(c-4\right)\rho$$

$\max\limits_{\rho\leq 1} F\left(\rho\right)=F\left(1\right)$ olup $F'(\rho)>0$ olduğundan $F(\rho)$ nin artan bir fonksiyon olduğu görülür. Şimdi,

$$G\left(c\right)=F\left(1\right)=3c\left(4-c^2\right)+\frac{3c^2\left(4-c^2\right)}{2}+\frac{\left(4-c^2\right)\left(c-2\right)\left(c-4\right)}{2}$$

yazalım. $c=1$ de G fonksiyonunun maksimum değere sahip olduğu kolayca gösterilebilir. (3.13) de $c=1$ ve $\rho=1$ değerleri için üst sınır

$$\left|6c_1c_3+c_1^2c_2-4c_2^2-c_1^4\right|\leq 18$$

olur. $c_1=1$, $c_2=-1$ ve $c_3=-2$ değerleri için (3.12) sonucunun kesin olduğu açıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.5: $f\in\mathcal{R}$ olsun. Buradan,

$$\left|a_2a_3-a_4\right|\leq\frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+t^3}{1-t^3}dt$$

fonksiyonu için yazılır [2].

İspat: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $f'(z) = p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu eşitlik kullanılarak $2a_2 = c_1,\ 3a_3 = c_2$ ve $4a_4 = c_3$ katsayı bağıntıları bulunur. Böylece

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \left|\frac{c_1c_2}{6} - \frac{c_3}{4}\right| \tag{3.14}$$

yazılır. (3.14) ifadesinde Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri yerine yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| = \left|\frac{c_1^3}{48} - \frac{c_1\left(4-c_1^2\right)x}{24} + \frac{c_1\left(4-c_1^2\right)x^2}{16} - \frac{\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z}{8}\right| \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra $c_1 = c,\ c \in [-2, 0]$ alınır ve eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanır $\rho = |x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{c^3}{48} + \frac{\left(4-c^2\right)}{8} + \frac{c\left(4-c^2\right)\rho}{24} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho^2}{16} = F(\rho)$$

elde edilir. Buradan $c \in [-2, 0]$ için

$$F'(\rho) = \frac{c\left(4-c^2\right)}{24} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho}{8}$$

olur. Böylece, $[0,1]$ kapalı aralığında $F'(\rho) < 0$ olduğundan $F(\rho)$ fonksiyonu ρ değeri için azalan bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$$F(\rho) \leq \frac{c^3}{48} + \frac{4-c^2}{8} = F(0) = G(c)$$

olup sonuç olarak, $G(c)$ fonksiyonunun türevinden bu fonksiyonun $[-2, 0]$ aralığında artan olduğu görülür. Böylece $G(c) \leq G(0) = 1/2$ olur. Ayrıca $c_1 = c = 0,\ x = 0$ ve $z = 1$ değerleri için Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 kullanılarak $c_2 = 0$ ve $c_3 = 2$ bulunur. Buradan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Ayrıca $\mathcal{R}$ sınıfındaki fonksiyonlar için farklı katsayı kombinasyonlarına ilişkin sonuçlar bulunmuştur. Öyleki Macgegor [24] deki çalışmasında her $k = 2, 3, \ldots$ için $|a_k| \leq \frac{2}{k}$ ve Babalola ve Opoola [3] deki çalışmasında $\left|a_3 - a_2^2\right| \leq \frac{2}{3}$ bulmuşlardır. Bu sonuçlar Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.5 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.3.6: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \frac{993}{1620}$$

sonucu elde edilir [2].

Benzer şekilde Babalola [2] aynı çalışmasında yıldızıl fonksiyonlar için $H_3(1)$ katsayı sınırını elde etmiştir. Aşağıdaki teorem bu sonuca ulaşmak için ilk adımdır.

Teorem 3.3.7: $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Buradan

$$|a_2a_3 - a_4| \leq 2$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik Koebe fonksiyonu $k(z) = z/(1-z)^2$ ile verilir [2].

İspat: $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda $zf'(z) = f(z)p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu eşitlikte terimler eşitlenerek

$$\begin{aligned} a_2 &= c_1 \\ 2a_3 &= c_2 + c_1^2 \\ 6a_4 &= 2c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \end{aligned}$$

katsayı bağıntıları elde edilir. Buradan

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{3}|c_1^3 - c_3| \tag{3.16}$$

olur. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{12}\left|3c_1^3 - 2c_1\left(4-c_1^2\right)x + c_1\left(4-c_1^2\right)x^2 - 2\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right| \tag{3.17}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3 ten $|c_1| \leq 2$ için $c_1 = c$ ve $c \in [0,2]$ olduğu göz önüne alınıp ve (3.17) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa $\rho = |x| \leq 1$ için

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{12}\left[3c^3 + 2\left(4-c^2\right) + 2c\left(4-c^2\right)\rho + \left(4-c^2\right)(c-2)\rho^2\right] = F(\rho)$$

bulunur. $F(\rho)$ fonksiyonu için

$$F'(\rho) = \frac{1}{12}\left[2c\left(4-c^2\right) + 2\left(4-c^2\right)(c-2)\right] > 0$$

olur. Buradan eğer $c \in [1,2]$ ise $[0,1]$ üzerinde ρ için $F(\rho)$ fonksiyonu artan fonksiyondur. Bu durumda bütün $\rho \in [1,2]$ değerleri için $F(\rho) \le F(1) = c \le 2$ olur. Bu nedenle $F(\rho) \le 2$ dir. Öte yandan, $c \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $F(\rho)$, $[0,1]$ aralığı azalan olduğundan $F(\rho) \le F(0)$ olur. Şimdi

$$F(\rho) \le \frac{3c^3 - 2c^2 + 8}{12} = G(c)$$

olsun. Dolayısıyla, $c \in [0,1)$ aralığında $G(c) \le G(0) = 2/3$ olur. Bu sınır, $c \in [1,2]$ aralığı için 2 den küçüktür. Böylece, $F(\rho)$ fonksiyonu maksimum değerini $\rho = 1$ ve $c = 2$ değerleri için alır. $c_1 = c = 2$ değerleri için (3.11) ve (3.12) ifadelerinden $c_2 = c_3 = 2$ elde edilir. Buradan (3.16) eşitliğinin sonucunun kesin olduğu görülür. Ayrıca, bulunan sınırın kesinliği Koebe fonksiyonu ile sağlanır.

Ayrıca $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntılarına ilişkin $k = 2,3,...$ için Duren [10] çalışmasında $|a_k| \le k$ ve Keogh ve Merkes [21] deki çalışmasında $|a_3 - a_2^2| \le 1$ bulmuşlardır.

Tüm bu sonuçlar ve Teorem 3.3.7 dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.8: $f \in \mathcal{S}^*$ için

$$|H_3(1)| \le 16$$

olur. Eşitlik Koebe fonksiyonu ile elde edilir [2].

Aşağıdaki aynı çalışmada konveks fonksiyonlar için $H_3(1)$ in sınırı aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Teorem 3.3.9: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_3 - a_4| \le \frac{1}{6}$$

eşitsizliği yazılır. Eşitlik

$$f(z)=\int_0^z \left\{ s.\exp(\int_0^s \frac{2t^3}{1-t^3}dt) \right\} ds$$

fonksiyonu ile elde edilir [2].

İspat: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda $\left(z f'(z)\right)' = f'(z)p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Buradan

$$2a_2 = c_1$$

$$6a_3 = c_2 + c_1^2$$

$$24a_4 = 2c_3 + 3c_1 c_2 + c_1^3$$

katsayı bağıntıları bulunur. Böylece

$$|a_2 a_3 - a_4| = \frac{1}{24}\left|c_1^3 - c_1 c_2 - 2c_3\right| \tag{3.18}$$

yazılır. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (3.18) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$|a_2 a_3 - a_4| = \frac{1}{48}\left|-3c_1\left(4-c_1^2\right)x + c_1\left(4-c_1^2\right)x^2 - 2\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right| \tag{3.19}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3 de $|c_1| \le 2$ ile $c \in [-2,0]$ aralığında $c = c_1$ olduğunu varsayalım. (3.19) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanıp ve $\rho = |x| \le 1$ yazılırsa,

$$|a_2 a_3 - a_4| \le \frac{\left(4-c^2\right)}{24} + \frac{c\ \left(4-c^2\right)\rho}{16} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho^2}{48} = F(\rho)$$

yazılır. $F(\rho)$ fonksiyonunun türevi alınırsa

$$F'(\rho) = \frac{c\left(4-c^2\right)}{16} + \frac{\left(4-c^2\right)(c-2)\rho}{24} < 0$$

olur. Böylece $[0,1]$ üzerinde $F(\rho)$ azalan olduğundan $F(\rho) \le F(0)$ yazılır. Buradan,

$$F(\rho) \le (4-c^2)/24 = G(c)$$

olup $[-2,0]$ aralığında $G(c)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla, $G(c) \le G(0) = 1/6$ dır. Bu durumda, $|a_2 a_3 - a_4|$ fonksiyonunun maksimum değeri $\rho = 0$ ve $c = 0$ değerleri için $1/6$ olur.

Eğer $c = c_1 = 0$ alınıp Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 de $x = 0$ ve $z = 1$ seçilirse $c_2 = 0$ ve $c_3 = 2$ değerleri bulunur ve eşitlik teoremde tanımlanan $f(z)$ ile elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Diğer taraftan $\mathcal{C}$ sınıfına ait fonksiyonlara ilişkin katsayı bağıntıları $k = 2,3,...$ için Duren [10] çalışmasında $|a_k| \leq 1$ ve Teorem 3.3.4 te $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{8}$ ve Keogh ve Merkes [21] çalışmasında $|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{3}$ bulmuşlardır.

Tüm bu sonuçlar, Teorem 3.3.4 ve Teorem 3.3.9 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.10: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \frac{15}{24}$$

sonucu elde edilir [2].

Janteg, Halim ve Darus 2008 yılında $\mathcal{R}$ sınıfına ait fonksiyonlar için genelleştirilmiş ikinci Hankel determinantı için aşağıdaki sonucu bulmuştur.

Teorem 3.3.11: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Buradan $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|a_2 a_4 - \mu a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{(27-16\mu)^2}{144(9-8\mu)} - \dfrac{4\mu}{9}, & eğer \quad \mu \leq 0 \\ \dfrac{(27-32\mu)^2}{144(9-8\mu)} + \dfrac{4\mu}{9}, & eğer \quad 0 \leq \mu \leq \dfrac{27}{32} \\ \dfrac{4\mu}{9}, & eğer \quad \dfrac{27}{32} \leq \mu \leq \dfrac{27}{16}, \\ \dfrac{(16\mu-27)^2}{144(8\mu-9)} + \dfrac{4\mu}{9}, & eğer \quad \mu \geq \dfrac{27}{16} \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir [19].

İspat : $f \in \mathcal{R}$ olsun. Buradan her $z \in \mathcal{U}$ ve $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$ için

$$f'(z) = p(z) \tag{3.20}$$

olup (3.19) ifadesinde terimler eşitlenerek

$$\left.\begin{aligned} 2a_2 &= c_1 \\ 3a_3 &= c_2 \\ 4a_4 &= c_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

katsayı bağıntıları bulunur. Böylece

$$\left|a_2 a_4 - \mu a_3^2\right| = \left|\frac{c_1 c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \tag{3.22}$$

yazılır. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (3.22) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_1 c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| = \Bigg| & \frac{(9-8\mu)c^4}{288} + \frac{(9-8\mu)\left(4-c^2\right)c^2 x}{144} \\ & + \frac{\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)cz}{16} - \frac{\left(4-c^2\right)x^2\left(c^2(9-8\mu)+32\mu\right)}{288}\Bigg| \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanır ve $\rho = |x| \leq 1$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left|\frac{c_1 c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \leq & \frac{|9-8\mu|c^4}{288} + \frac{c\left(4-c^2\right)}{16} + \frac{|9-8\mu|c^2\left(4-c^2\right)\rho}{144} \\ & + \frac{\left(4-c^2\right)\left(|9-8\mu|c^2 + 32|\mu| - 18c\right)\rho^2}{288} = F(\rho) \end{aligned} \tag{3.23}$$

olur. $F(\rho)$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$F'(\rho) = \begin{cases} \dfrac{(9-8\mu)\left(4-c^2\right)c^2}{144} + \dfrac{\left(4-c^2\right)\left\{(9-8\mu)c^2 - 32\mu - 18c\right\}\rho}{144}, & \text{eğer} \quad \mu \leq 0 \\[2ex] \dfrac{(9-8\mu)\left(4-c^2\right)c^2}{144} + \dfrac{\left(4-c^2\right)\left\{(9-8\mu)c^2 + 32\mu - 18c\right\}\rho}{144}, & \text{eğer} \quad 0 \leq \mu \leq \dfrac{9}{8} \\[2ex] \dfrac{(8\mu-9)\left(4-c^2\right)c^2}{144} + \dfrac{\left(4-c^2\right)\left\{(8\mu-9)c^2 + 32\mu - 18c\right\}\rho}{144}, & \text{eğer} \quad \mu \geq \dfrac{9}{8} \end{cases}$$

olur. Yukarıdaki tüm durumlarda $\rho > 0$ için $F'(\rho) > 0$ olduğundan F artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $\max_{p\leq 1} F(\rho) = F(1)$ yazılır.

Şimdi,

$$G(c) = F(1) = \frac{|9-8\mu|c^4}{288} + \frac{c(4-c^2)}{16} + \frac{|9-8\mu|c^2(4-c^2)}{144} + \frac{(4-c^2)\{|9-8\mu|c^2 + 32|\mu| - 18c\}}{288} \tag{3.24}$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun maksimumluğu için aşağıdaki durumlar göz önüne alınır.

(i): İlk olarak $\mu \leq 0$ olsun. (3.24) ifadesinden

$$G'(c) = \frac{c}{36}\{-(9-8\mu)c^2 + 27 - 16\mu\}$$

bulunur. Basit hesaplamalarla G fonksiyonunun $c = \sqrt{\frac{27-16\mu}{9-8\mu}}$ değerinde maksimum değerine ulaştığı görülür. (3.23) eşitliğinde $\rho = 1$ ve $c = \sqrt{\frac{27-16\mu}{9-8\mu}}$ değerleri için

$$\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \leq \frac{(27-16\mu)^2}{144(9-8\mu)} - \frac{4\mu}{9}$$

eşitsizliği elde edilir.

(ii): İkinci olarak $0 \leq \mu \leq \frac{27}{32}$ olsun. Bu durumda

$$G'(c) = \frac{c}{36}\{-(9-8\mu)c^2 + 27 - 32\mu\}$$

olur. Burada G fonksiyonu maksimum değerini $c = \sqrt{\frac{27-16\mu}{9-8\mu}}$ ile alır. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \leq \frac{(27-32\mu)^2}{144(9-8\mu)} + \frac{4\mu}{9}$$

elde edilir.

(iii): Üçüncü sonucu kanıtlamak için, ilk ikisi kullanılır. İlk olarak, $\frac{9}{8} \le \mu \le \frac{27}{16}$ olsun. Bu durumda (3.23) eşitliğinden

$$G'(c) = \frac{c}{36}\left\{-(8\mu-9)c^2 + 16\mu - 27\right\}$$

olur. Burada G fonksiyonu maksimum değerini $c = \sqrt{\frac{27-16\mu}{8\mu-9}}$ ile alır. Her iki durumda da,

$$\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \le \frac{4\mu}{9}$$

üst sınır olarak elde edilir.

(iv): Son olarak, $\mu \ge \frac{27}{16}$ olsun. Burada G fonksiyonu maksimum değerini $c = \sqrt{\frac{16\mu-27}{8\mu-9}}$ ile alır. Bundan dolayı,

$$\left|\frac{c_1c_3}{8} - \frac{\mu c_2^2}{9}\right| \le \frac{(16\mu-27)^2}{144(8\mu-9)} + \frac{4\mu}{9}$$

olur. Bununla teoremin ispatını tamamlanır.

Murugusundaramoorthy ve Magesh 2009 yılında aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfı için ikinci Hankel determinatı sınırlarını bulmuştur.

Tanım 3.3.12: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z)\right\} > 0 \tag{3.25}$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfındandır denir [25].

Teorem 3.3.13: $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ olsun. $\alpha > 0$ için

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{4}{(1+2\alpha)^2}$$

eşitsizliği yazılır. Elde edilen sonuç kesindir [25].

Hayami ve Owa [15] deki çalışmada Tanım 3.3.12 deki $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfını aşağıdaki şekilde genelleştirerek bu sınıf için Hankel ve Fekete-Szegö problemlerini çözmüşlerdir.

Tanım 3.3.14: $f(z)\in\mathcal{A}$ olsun. $\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha+n\beta\neq 0\ (n=1,2,3,...),\ \gamma\ (0\leq\gamma<1)$ reel sayısı için $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>\gamma$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\alpha(\frac{f(z)}{z})+\beta f'(z)\right]>\gamma$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\theta R(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfındandır denir [15].

Örnek 3.3.15: $\mathcal{A}(\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{2(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)}{\alpha+\beta}$ olsun. O halde,

$$f_d(z)=\begin{cases}(1-\mathcal{A}(\alpha,\beta,\gamma))z+\mathcal{A}(\alpha,\beta,\gamma)z\,{}_2\mathcal{F}_1(\dfrac{\alpha+\beta}{d\beta},1;1+\dfrac{\alpha+\beta}{d\beta};z^d) & ;\beta\neq 0\\ \dfrac{z+(\dfrac{2(\mathrm{Re}(\alpha)-\gamma}{\alpha}-1)z^{d+1}}{1-z^d} & ;\beta=0\end{cases} \tag{3.26}$$

fonksiyonu $\theta R(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfına aittir. Burada ${}_2\mathcal{F}_1(a,b;c;z)$ bilenen Gauss hipergeometrik fonksiyondur [15].

$\theta R(\alpha,\beta;\gamma)$ sınıfı için Hankel ve Fekete-Szegö sonuçları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3.16: $f(z)\in\theta R(\alpha,\beta;\gamma)$ olsun. Buradan,

$$B(\mu)=1-\frac{2(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)(\alpha+3\beta)}{(\alpha+2\beta)^2}\mu$$

olmak üzere

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq\begin{cases}\dfrac{2(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)}{|\alpha+3\beta|}|B(\mu)| & ;(|B(\mu)|\geq 1)\\ \dfrac{2(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)}{|\alpha+3\beta|} & ;(|B(\mu)|\leq 1)\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.26) denkleminden faydalanıldığında $f_1(z)\left(|B(\mu)|\geq 1\right)$ ve $f_2(z)\left(|B(\mu)|\leq 1\right)$ için sağlanır [15].

Teorem 3.3.17: $f(z)\in \theta R(\alpha,\beta;\gamma)$ olsun. Buradan, $\mathcal{C}(\mu)=\dfrac{(\alpha+n\beta)(\alpha+(n+2)\beta)}{(\alpha+(n+1)\beta)^2}\mu$

olmak üzere $n=2,3,\ldots$ için

$$\left|a_n a_{n+2}-\mu a_{n+1}^2\right|\le\begin{cases}2\left|\dfrac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)^2}{(\alpha+n\beta)(\alpha+(n+2)\beta)}\right|\left[\left|2-\mathcal{C}(\mu)\right|+\left|\mathcal{C}(\mu)\right|\right] & ;\mathrm{Re}\left[\mathcal{C}(\mu)\right]\le 1\\ 4\left|\dfrac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)-\gamma)^2}{(\alpha+(n+1)\beta)}\mu\right| & ;\mathrm{Re}\left[\mathcal{C}(\mu)\right]\ge 1\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.26) ile verilen $f_d(z)$ $(\mathrm{Re}\left[\mathcal{C}(\mu)\right]\ge 1;\ d\ge 2\ \ ve\ \ d|\,n)$ fonksiyonu için sağlanır [15].

Teorem 3.3.16 ve Teorem 3.3.17 de $\beta=1-\alpha$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.18: $f(z)\in\theta R_\alpha(\gamma)$ olsun. $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le\begin{cases}2(1-\gamma)\left\{\dfrac{1}{3-2\alpha}-\dfrac{2(1-\gamma)}{(2-\alpha)^2}\mu\right\} & ;\mu\le 0\\ \dfrac{2(1-\gamma)}{3-2\alpha} & ;0\le\mu\le\dfrac{(1-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\gamma)}\\ 2(1-\gamma)\left\{\dfrac{2(1-\gamma)}{(2-\alpha)^2}\mu-\dfrac{1}{3-2\alpha}\right\} & ;\mu\ge\dfrac{(2-\alpha)^2}{(3-2\alpha)(1-\gamma)}\end{cases}$$

olur. Eşitlik (3.26) ile verilen $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlar için sağlanır [15].

Sonuç 3.3.19: $f(z)\in\theta R_\alpha(\gamma)$ olsun.

$$D(\alpha,\gamma,\mu)=\frac{\left\{9(3-2\alpha)^4-16(2-\alpha)(4-3\alpha)(3-2\alpha)^2\mu+8(2-\alpha)^2(4-3\alpha)^2\mu^2\right\}(1-\gamma)^2}{2(2-\alpha)(4-3\alpha)(3-2\alpha)^2\left\{(3-2\alpha)^2-(2-\alpha)(4-3\alpha)\mu\right\}}$$

olmak üzere

$$\left|a_2a_4-\mu a_3^2\right|\le\begin{cases}D(\alpha,\gamma,\mu) & ;\dfrac{(2-\sqrt{2})(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)}\le\mu\le\dfrac{3(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)}\\ \dfrac{4(1-\gamma)^2}{(3-2\alpha)^2}\mu & ;\dfrac{3(3-2\alpha)^2}{4(2-\alpha)(4-3\alpha)}\le\mu\le\dfrac{(3-2\alpha)^2}{(2-\alpha)(4-3\alpha)}\end{cases}$$

sağlanır. Eşitlik (3.26) ile verilen $f_2(z)$ fonksiyonu için sağlanır [15].

Bansal 2012 yılında [5] çalışmasında $R^{\tau}(A,B)$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı problemini ele almıştır.

Tanım 3.3.20: $f\in\mathcal{A}$ olsun. $\tau\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$1+\frac{1}{\tau}\left(f'(z)+zf''(z)-1\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\quad(-1\le B<A\le 1)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $R^{\tau}(A,B)$ sınıfındandır denilir [5].

Subordinasyon tanımı uygulandığında Tanım 3.3.20 deki subordinasyon şartı

$$\left|\frac{f'(z)+zf''(z)-1}{\tau(A-B)-B(f'(z)+zf''(z)-1)}\right|<1$$

eşitsizliğine denk olur.

Teorem 3.3.21: $f\in R^{\tau}(A,B)$ olsun. $0\le\gamma\le 1,\quad -1\le B<A\le 1$ ve $\tau\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{|\tau|^2(A-B)^2}{9(1+2\gamma)^2}$$

eşitsizliği yazılır [5].

Verma, Grupta ve Singh 2012 yılında [43] çalışmasında aşağıda tanımlanan $\mathcal{H}_\alpha$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı problemini ele almışlardır.

Tanım 3.3.22: $f\in\mathcal{A}$ olsun. $\alpha\in\mathbb{R}$, $0\le\alpha\le 1$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left[(1-\alpha)f'(z)+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]>\alpha$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{H}_\alpha$ sınıfındandır denir [43].

Teorem 3.3.23: $f \in \mathcal{H}_\alpha$ ve α , $0 \le \alpha \le 1$ aralığında bir reel sayı olsun. Böylece

$$K(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}[32(1+2\alpha)-\frac{1}{2}\frac{[10\alpha^3-5\alpha^2+12\alpha-5]^2}{[4\alpha^5-6\alpha^4-18\alpha^3+29\alpha^2-20\alpha-1]}]$$

ve $\alpha_0 = 0,4276891324...$ da $10\alpha^3-5\alpha^2+12\alpha-5=0$ denkleminin bir kökü olmak üzere

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{4}{9}\dfrac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} & ; 0 \le \alpha \le \alpha_0 \\ K(\alpha) & ; \alpha_0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

eşitsizliği doğrudur [43].

İspat: $f \in \mathcal{H}_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$(1-\alpha)f'(z)+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=\alpha+(1-\alpha)p(z) \tag{3.27}$$

olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonu vardır. (3.27) ifadesinin terimleri eşitlenerek

$$\begin{aligned} 2a_2 &= (1-\alpha)c_1 \\ 3a_3(1+\alpha) &= (1-\alpha)c_2+\alpha(1-\alpha)^2c_1^2 \\ 4a_4(1+2\alpha) &= (1-\alpha)c_3+\frac{3\alpha(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)}c_1c_2+\frac{\alpha(1-\alpha)^3(2\alpha-1)}{(1+\alpha)}c_1^3 \end{aligned}$$

katsayı bağıntıları elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4-a_3^2\right| &= \frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\left|\{9(1+\alpha)^2c_1c_3-8(1+2\alpha)c_2^2\right. \\ &\quad \left.-\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)c_1^2c_2+\alpha(1-\alpha)^2(2\alpha^2+\alpha-9)c_1^4\}\right| \end{aligned} \tag{3.28}$$

kolayca elde edilir. Diğer taraftan (3.28) eşitliğinde Lemma 3.2.4 teki c_2 ve c_3 değerleri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\left|a_2a_4-a_3^2\right| \\ &= \frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\left|\left\{\frac{c_1^4}{4}\Big[(9\alpha^2+2\alpha+1)+4\alpha(2\alpha^2+\alpha-9)(1-\alpha)^2\right.\right. \\ &\quad +2\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)\Big]+\frac{1}{2}(4-c_1^2)c_1^2x\Big[(9\alpha^2+2\alpha+1)+\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)\Big] \\ &\quad \left.\left.+\frac{9}{2}(1+\alpha)^2(4-c_1^2)c_1(1-|x|^2)z-\frac{1}{4}x^2(4-c_1^2)\Big[32(1+2\alpha)+c_1^2(9\alpha^2+2\alpha+1)\Big]\right\}\right| \end{aligned} \tag{3.29}$$

sonucuna varılır. $p\in\mathcal{P}$ için $|c_1|\le 2$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $c\in[0,2]$ aralığında $c_1=c$ alalım. (3.29) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanıp, $\rho=|x|\le 1$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}|a_2a_4-a_3^2|\le{}&\frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\left\{\frac{c^4}{4}\left[(9\alpha^2+2\alpha+1)+4\alpha(2\alpha^2+\alpha-9)(1-\alpha)^2\right.\right.\\&\left.+2\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)\right]+\frac{1}{2}(4-c^2)c^2\rho\left[(9\alpha^2+2\alpha+1)+\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)\right]\\&\left.+\frac{9}{2}(1+\alpha)^2(4-c^2)c+\frac{1}{4}\rho^2(4-c^2)(c-2)\left[c(9\alpha^2+2\alpha+1)-16(1+2\alpha)\right]\right\}\\&\equiv F(\rho)\end{aligned}$$

olur. $F(\rho)$ nin türevi alınıp basit işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}F'(\rho)={}&\frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\left\{\frac{1}{2}(4-c^2)c^2\left[(9\alpha^2+2\alpha+1)+\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)\right]\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\rho(4-c^2)(c-2)\left[c(9\alpha^2+2\alpha+1)-16(1+2\alpha)\right]\right\}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan kolaylıkla $\rho>0$ için $F'(\rho)>0$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}F(\rho)\le F(1)={}&\frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}\left\{\frac{c^4}{4}\left[4\alpha(2\alpha^2+\alpha-9)(1-\alpha)^2-2(9\alpha^2+2\alpha+1)\right]\right.\\&\left.+c^2\left[3(9\alpha^2+2\alpha+1)+2\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)-8(2\alpha+1)\right]+32(2\alpha+1)\right\}\\&=G(c)\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}G'(c)={}&\frac{(1-\alpha)^2}{72(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}c\left\{2c^2\left[2\alpha(2\alpha^2+\alpha-9)(1-\alpha)^2-(9\alpha^2+2\alpha+1)\right]\right.\\&\left.+2\left[3(9\alpha^2+2\alpha+1)+2\alpha(1-\alpha)(11-5\alpha)-8(2\alpha+1)\right]\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. $G'(c)=0$ alındığında $10\alpha^3-5\alpha^2+12\alpha-5=0$ denkleminin kökü $\alpha_0=0,4276891324...$ olup, $0\le c\le 2$ olduğunda $\alpha\ge\alpha_0$ için

$$c_0=\sqrt{\frac{-\left(10\alpha^3-5\alpha^2+12\alpha-5\right)}{4\alpha^5-6\alpha^4-18\alpha^3+29\alpha^2-20\alpha-1}}$$

olur.

α nın durumlarına göre $\max\limits_{0\le c\le 2}G(c)$ aşağıdaki şekilde incelenir:

1. Durum: $0 \le \alpha \le \alpha_0$ olsun. Bu durumda $G(c)$ fonksiyonu maksimumum değerini $c=0$ noktasında alır. Buradan

$$\max_{0\le c\le 2} G(c) = G(0) = \frac{4(1-\alpha)^2}{9(1+\alpha)^2}$$

olur.

2. Durum: $\alpha_0 \le \alpha \le 1$ olsun. Bu durumda $G(c)$ fonksiyonu maksimumum değerini $c=c_0$ noktasında alır. Böylece, $K(\alpha)$ fonksiyonu

$$\max_{0\le c\le 2} G(c) = G(c_0) = K(\alpha)$$

olur. Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

Lee, Ravichandran ve Supramaniam 2013 yılında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı problemini ele almışlardır [22].

Tanım 3.3.24: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ analitik ve φ nin Maclaurin serisi

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots \qquad (B_1, B_2 \in \mathbb{R}\ ,\ B_1 > 0) \tag{3.30}$$

şeklinde olsun.

i. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Ma-Minda yıldızıl fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ ile gösterilir.

ii. $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağalayan fonksiyonlara ise Ma-Minda konveks fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ ile gösterilir [22].

Literatürde genellikle $\mathcal{S}^*(\varphi)$ ve $\mathcal{C}(\varphi)$ sınıflarına sırasıyla Ma-Minda yıldızıl ve Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı denir.

Aşağıdaki sonuç Ma-Minda yıldızıl fonksiyonlara aittir.

Teorem 3.3.25: $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ olsun.

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$|B_2| \leq B_1,\ 4B_1^4 - 16B_1|B_3| + 12B_2^2 - 6B_1|B_2| + 9B_1^2 \geq 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{B_1^2}{4}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$|B_2| \geq B_1,\ 4B_1^4 - 16B_1|B_3| + 12B_2^2 - 2B_1|B_2| + 5B_1^2 \leq 0,$$

veya

$$|B_2| \leq B_1,\ 4B_1^4 - 16B_1|B_3| + 12B_2^2 - 6B_1|B_2| + 9B_1^2 \leq 0,$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{48}(-4B_1^4 + 16B_1|B_3| - 12B_2^2 + 6B_1|B_2| + 3B_1^2)$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$|B_2| > B_1,\ 4B_1^4 - 16B_1|B_3| + 12B_2^2 - 2B_1|B_2| + 5B_1^2 \geq 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{B_1^2}{12}\left(\frac{12B_1^4 - 48B_1|B_3| + 40B_2^2 - 2B_1|B_2| + 7B_1^2}{4B_1^4 - 16B_1|B_3| + 12B_2^2 + 2B_1|B_2| + B_1^2}\right)$$

olur [22].

İspat: $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi(w(z)) \tag{3.31}$$

olacak şekilde $\mathcal{U}$ da $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ şartını sağlayan bir w fonksiyonu vardır.

Ayrıca

$$p_1(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = 1 + c_1z + c_2z^2 + ...$$

şeklinde tanımlanan p_1 fonksiyonları için

$$w(z)=\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}=\frac{1}{2}\left(c_1z+\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+...\right) \tag{3.32}$$

eşitliği yazılır. Böylece p_1, $\mathcal{U}$ da analitik $p_1(0)=1$ ve reel kısmı pozitif olan bir fonksiyon olur. Diğer taraftan (3.30) ve (3.32) ifadeleri birlikte kullanıldığında,

$$\varphi\left(\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}\right)=1+\frac{1}{2}B_1c_1z+\left(\frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right)z^2+... \tag{3.33}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+a_2z+(-a_2^2+2a_3)z^2+(3a_4-3a_2a_3+a_2^3)z^3+... \tag{3.34}$$

olur. (3.31), (3.33) ve (3.34) ifadelerinden

$$a_2=\frac{B_1c_1}{2}$$
$$a_3=\frac{1}{8}\left[\left(B_1^2-B_1+B_2\right)c_1^2+2B_1c_2\right]$$
$$a_4=\frac{1}{48}\left[\left(-4B_2+2B_1+B_1^3-3B_1^2+3B_1B_2+2B_3\right)c_1^3+2\left(3B_1^2-4B_1+4B_2\right)c_1c_2+8B_1c_3\right]$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$a_2a_4-a_3^2=\frac{B_1}{96}\left[c_1^4\left(\frac{-B_1^3}{2}+\frac{B_1}{2}-B_2+2B_3-\frac{3B_2^2}{2B_1}\right)+2c_1^2c_2\left(B_2-B_1\right)+8B_1c_1c_3-6B_1c_2^2\right]$$

yazılır. Eğer

$$d_1=8B_1,\ d_2=2\left(B_2-B_1\right)$$
$$d_3=-6B_1,\ d_4=-\frac{B_1^3}{2}+\frac{B_1}{2}-B_2+2B_3-\frac{3B_2^2}{2B_1} \tag{3.35}$$
$$T=\frac{B_1}{96}$$

alınırsa

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=T\left|d_1c_1c_3+d_2c_1^2c_2+d_3c_2^2+d_4c_1^4\right| \tag{3.36}$$

sonucu yazılır. Herhangi bir $p\in\mathcal{P}$ fonksiyonu için $p\left(e^{i\theta}z\right)\in\mathcal{P}$ olduğundan $c_1>0$ alınması genelliği bozmayacaktır. $c\in[0,2]$ aralığında $c_1=c$ alalım. (3.1) ve (3.2) ifadelerindeki c_2 ve c_3 değerleri sırasıyla (3.36) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\frac{T}{4}\left|c^4\left(d_1+2d_2+d_3+4d_4\right)+2xc^2\left(4-c^2\right)\left(d_1+d_2+d_3\right)\right.$$
$$\left.+\left(4-c^2\right)x^2\left(-d_1c^2+d_3\left(4-c^2\right)\right)+2d_1c\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right|$$

elde edilir. (3.35) ifadesindeki d_1, d_2, d_3 ve d_4 ve $|x|$ yerine de μ değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right| &\le \frac{T}{4}\left[c^4\left(-2B_1^3+8|B_3|-6\frac{B_2^2}{B_1}\right)+4|B_2|\mu c^2\left(4-c^2\right)\right.\\ &\left.+\mu^2\left(4-c^2\right)\left(2B_1c^2+24B_1\right)+16B_1c\left(4-c^2\right)\left(1-\mu^2\right)\right]\\ &=T\left[\frac{c^4}{4}\left(-2B_1^3+8|B_3|-6\frac{B_2^2}{B_1}\right)+4B_1c\left(4-c^2\right)+|B_2|\mu c^2\left(4-c^2\right)\right.\\ &\left.+\frac{B_1}{2}\mu^2\left(4-c^2\right)\left(c-6\right)\left(c-2\right)\right]\\ &\equiv F\left(c,\mu\right)\end{aligned} \tag{3.37}$$

olur. $(c,\mu)\in[0,2]\times[0,1]$ için (3.37) ifadesindeki $F(c,\mu)$ fonksiyonunun μ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}=T\left[|B_2|\left(4-c^2\right)+B_1\mu\left(4-c^2\right)\left(c-2\right)\left(c-6\right)\right] \tag{3.38}$$

elde edilir. Böylece $0<\mu<1$ ve $0<c<2$ aralığında sabit bir c değeri için $F(c,\mu)$ fonksiyonu μ değerleri için $\frac{\partial F}{\partial \mu}>0$ olur. Yani $F(c,\mu)$ artan bir fonksiyondur. Bu nedenle, sabitlenmiş $c\in[0,2]$ için

$$\max F\left(c,\mu\right)=F\left(c,1\right)\equiv G\left(c\right)$$

olur. Yani $F(c,\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ de alır. Böylece

$$G\left(c\right)=\frac{B_1}{96}\left[\frac{c^4}{4}\left(-2B_1^3+8|B_3|-6\frac{B_2^2}{B_1}-|B_2|-\frac{B_1}{2}\right)+4c^2\left(|B_2|-B_1\right)+24B_1\right]$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{4}\left(-2B_1^3+8|B_3|-6\frac{B_2^2}{B_1}-|B_2|-\frac{B_1}{2}\right)\\ Q&=4\left(|B_2|-B_1\right)\\ R&=24B_1\end{aligned} \tag{3.39}$$

olsun. Dolayısıyla, (3.39) ifadelerinde verilen P, Q ve R değerleri için

$$\max_{0\le t\le 4}\left(Pt^2+Qt+R\right)=\begin{cases} R & ;Q\le 0,\ P\le -\dfrac{Q}{4} \\ 16P+4Q+R & ;Q\ge 0,\ P\ge -\dfrac{Q}{8}\ veya\, Q\le 0,\ P\ge -\dfrac{Q}{4} \\ \dfrac{4PR-Q^2}{4P} & ;Q>0,\ P\le -\dfrac{Q}{8} \end{cases} \tag{3.40}$$

değerlendirmesi doğru olduğundan sonuç olarak

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{B_1}{96}\begin{cases} R & ;Q\le 0,\ P\le -\dfrac{Q}{4} \\ 16P+4Q+R & ;Q\ge 0,\ P\ge -\dfrac{Q}{8}\ veya\, Q\le 0,\ P\ge -\dfrac{Q}{4} \\ \dfrac{4PR-Q^2}{4P} & ;Q>0,\ P\le -\dfrac{Q}{8} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.3.26: $f\in\mathcal{C}(\varphi)$ olsun. Bu durumda

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2+4|B_2|-2B_1\le 0,\ B_1^4-B_1^2|B_2|-6B_1|B_3|+4B_2^2+4B_1^2\ge 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{B_1^2}{36}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2+4|B_2|-2B_1\ge 0,\ 2B_1^4-2B_1^2|B_2|-12B_1|B_3|+8B_2^2+4B_1|B_2|+B_1^3+6B_1^2\le 0\ ,$$

veya

$$B_1^2+4|B_2|-2B_1\le 0,\ B_1^4-B_1^2|B_2|-6B_1|B_3|+4B_2^2+4B_1^2\le 0\ ,$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le \frac{1}{144}(-B_1^4+B_1^2|B_2|+6B_1|B_3|-4B_2^2)$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2+4|B_2|-2B_1>0,\ 2B_1^4-2B_1^2|B_2|-12B_1|B_3|+8B_2^2+4B_1|B_2|+B_1^3+6B_1^2\ge 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{B_1^2}{576}\left(\frac{17B_1^4-8B_1^2\left|B_2\right|-96B_1\left|B_3\right|+80B_2^2+12B_1^3+48B_1\left|B_2\right|+36B_1^2}{B_1^4-B_1^2\left|B_2\right|-6B_1\left|B_3\right|+4B_2^2+B_1^3+4B_1\left|B_2\right|+2B_1^2}\right)$$

olur [22].

İspat: $f\in\mathcal{C}(\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\varphi\left(w(z)\right) \tag{3.41}$$

olacak şekilde $\mathcal{U}$ da $w(0)=0$ ve $\left|w(z)\right|<1$ şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır. Böylece

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1+2a_2z+\left(-4a_2^2+6a_3\right)z^2+\left(8a_2^3-18a_2a_3+12a_4\right)z^3+... \tag{3.42}$$

olur. (3.33), (3.41) ve (3.42) ifadelerinden

$$a_2=\frac{B_1c_1}{4}$$

$$a_3=\frac{1}{24}\left[\left(B_1^2-B_1+B_2\right)c_1^2+2B_1c_2\right]$$

$$a_4=\frac{1}{192}\left[\left(-4B_2+2B_1+B_1^3-3B_1^2+3B_1B_2+2B_3\right)c_1^3+2\left(3B_1^2-4B_1+4B_2\right)c_1c_2+8B_1c_3\right]$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$a_2a_4-a_3^2=\frac{B_1}{768}\left[c_1^4\left(-\frac{4}{3}B_2+\frac{2}{3}B_1-\frac{1}{3}B_1^3-\frac{1}{3}B_1^2+\frac{1}{3}B_1B_2+2B_3-\frac{4}{3}\frac{B_2^2}{B_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}c_2c_1^2\left(B_1^2-4B_1+4B_2\right)+8B_1c_1c_3-\frac{16}{3}B_1c_2^2\right]$$

yazılır. Eğer

$$d_1=8B_1,\quad d_2=\frac{2}{3}\left(B_1^2-4B_1+4B_2\right),\quad d_3=-\frac{16}{3}B_1$$

$$d_4=-\frac{4}{3}B_2+\frac{2}{3}B_1-\frac{1}{3}B_1^3-\frac{1}{3}B_1^2+\frac{1}{3}B_1B_2+2B_3-\frac{4}{3}\frac{B_2^2}{B_1},\quad T=\frac{B_1}{768} \tag{3.43}$$

alınırsa

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=T\left|d_1c_1c_3+d_2c_1^2c_2+d_3c_2^2+d_4c_1^4\right| \tag{3.44}$$

yazılır. Teorem 3.3.25 deki ispatın benzeri bir şekilde (3.1) ve (3.2) ifadelerindeki c_2 ve c_3 değerleri sırasıyla (3.44) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right| &= \frac{T}{4}\Big|c^4\left(d_1+2d_2+d_3+4d_4\right)+2xc^2\left(4-c^2\right)\left(d_1+d_2+d_3\right)\\ &\quad +\left(4-c^2\right)x^2\left(-d_1c^2+d_3\left(4-c^2\right)\right)+2d_1c\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\Big|\end{aligned}$$

elde edilir. (3.43) ifadelerindeki d_1, d_2, d_3 ve d_4 ve $|x|$ yerine de μ değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right| &\leq \frac{T}{4}\Bigg[c^4\left(-\frac{4}{3}B_1^3+\frac{4}{3}B_1B_2+8B_3-\frac{16}{3}\frac{B_2^2}{B_1}\right)+2\mu c^2\left(4-c^2\right)\left(\frac{2}{3}B_1^2+\frac{8}{3}B_2\right)\\ &\quad +\mu^2\left(4-c^2\right)\left(\frac{8}{3}B_1c^2+\frac{64}{3}B_1\right)+16B_1c\left(4-c^2\right)\left(1-\mu^2\right)\Bigg]\\ &= T\Bigg[\frac{c^4}{3}\left(-B_1^3+B_1\left|B_2\right|+6\left|B_3\right|-4\frac{B_2^2}{B_1}\right)+4B_1c\left(4-c^2\right)\\ &\quad +\frac{1}{3}\mu c^2\left(4-c^2\right)\left(B_1^2+4\left|B_2\right|\right)+\frac{2B_1}{3}\mu^2\left(4-c^2\right)\left(c-4\right)\left(c-2\right)\Bigg]\\ &\equiv F(c,\mu)\end{aligned} \tag{3.45}$$

olur. (3.45) ifadesindeki $F(c,\mu)$ fonksiyonunun μ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}=T\left[\frac{c^2}{3}\left(4-c^2\right)\left(B_1^2+4\left|B_2\right|\right)+\frac{4B_1}{3}\mu\left(4-c^2\right)\left(c-4\right)\left(c-2\right)\right] \tag{3.46}$$

elde edilir. Böylece $0<\mu<1$ ve $0<c<2$ aralığında sabit bir c değeri için $F(c,\mu)$ fonksiyonu μ değerleri için $\dfrac{\partial F}{\partial \mu}>0$ olur. Yani $F(c,\mu)$ artan bir fonksiyondur. Bu nedenle, sabitlenmiş $c\in[0,2]$ için

$$\max F(c,\mu)=F(c,1)\equiv G(c)$$

olur. Yani $F(c,\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ de alır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}G(c) &= T\Bigg[\frac{c^4}{3}\left(-B_1^3+B_1\left|B_2\right|+6\left|B_3\right|-4\frac{B_2^2}{B_1}-B_1^2-4\left|B_2\right|-2B_1\right)\\ &\quad +\frac{4}{3}c^2\left(B_1^2+4\left|B_2\right|-2B_1\right)+\frac{64}{3}B_1\Bigg]\end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$P=\frac{1}{3}\left(-B_1^3+B_1|B_2|+6|B_3|-4\frac{B_2^2}{B_1}-B_1^2-4|B_2|-2B_1\right)$$
$$Q=\frac{4}{3}\left(B_1^2+4|B_2|-2B_1\right) \tag{3.47}$$
$$R=\frac{64}{3}B_1$$

olsun. Dolayısıyla (3.47) ifadesindeki P, Q ve R değerleri (3.40) ifadesinde kullanılırsa

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{B_1}{768}\begin{cases}R & ;Q\le 0,\ P\le-\frac{Q}{4}\\ 16P+4Q+R & ;Q\ge 0,\ P\ge-\frac{Q}{8}\ veya\, Q\le 0,\ P\ge-\frac{Q}{4}\\ \frac{4PR-Q^2}{4P} & ;Q>0,\ P\le-\frac{Q}{8}\end{cases}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Lee, Ravichandran ve Supramaniam [22] deki çalışmasında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonlardan başlıca analitik fonksiyonların bazı farklı alt sınıfları içinde ikinci Hankel determinantı problemini ele almışlardır. Bununla ilgili sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.27: $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu Tanım 3.3.24 deki gibi tanımlanan bir fonksiyon olsun. $0\le\gamma\le 1$ ve $\tau\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$1+\frac{1}{\tau}\left(f'(z)+\gamma z f''(z)-1\right)\prec\varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\Re_\gamma^\tau(\varphi)$ sınıfı denir [22].

Teorem 3.3.28: $f\in\Re_\gamma^\tau(\varphi)$, $0\le\gamma\le 1$, $\tau\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve

$$m=\frac{8}{9}\frac{(1+\gamma)(1+3\gamma)}{(1+2\gamma)^2}$$

olsun. Bu durumda

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$2|B_2|(1-m)+B_1(1-2m)\le 0,\ |B_1B_3-mB_2^2|-mB_1^2\le 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4-a_3^2|\le\frac{|\tau|^2 B_1^2}{9(1+2\gamma)^2}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$2|B_2|(1-m)+B_1(1-2m)\ge 0,\quad 2|B_1B_3-mB_2^2|-2(1-m)B_1|B_2|-B_1\ge 0$$

veya

$$2|B_2|(1-m)+B_1(1-2m)\le 0,\quad |B_1B_3-mB_2^2|-B_1^2\ge 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4-a_3^2|\le\frac{|\tau|^2}{8(1+\gamma)(1+3\gamma)}|B_1B_3-pB_2^2|$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$2|B_2|(1-m)+B_1(1-2m)>0,\ 2|B_1B_3-mB_2^2|-2(1-m)B_1|B_2|-B_1^2\le 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$|a_2a_4-a_3^2|\le\frac{|\tau|^2 B_1^2}{32(1+\gamma)(1+3\gamma)}\times\frac{4m|B_3B_1-mB_2^2|-4(1-m)B_1\left[|B_2|(3-2m)+B_1\right]-4B_2^2(1-m)^2-B_1^2(1-2m)^2}{|m|-(1-m)B_1\left(2|B_2|+B_1\right)}$$

olur [22].

Tanım 3.3.29: $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu Tanım 3.3.24 deki gibi tanımlanan bir fonksiyon olsun. $0\le\gamma\le 1$ ve $\tau\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere her $z\in\mathcal{U}$ için

$$(1-\alpha)\,f'(z)+\alpha\,(1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)})\prec\varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $G_\alpha(\varphi)$ sınıfı denir [22].

Teorem 3.3.30: $f \in G_\alpha(\varphi)$, $0 \le \alpha \le 1$ ve $m = 8(1+2\alpha)/9(1+\alpha)$ olsun. Bu durumda

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2\alpha(3-2m)+2|B_2|(m)+B_1(1+\alpha-2m)\le 0,$$
$$B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)+(1+\alpha)B_1|B_3|-m\left(B_1^2+B_2^2\right)\le 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{B_1^2}{9(1+\alpha)^2}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2\alpha(3-2m)+2|B_2|(m)+B_1(1+\alpha-2m)\ge 0,$$
$$\begin{cases}2B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+2\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)-B_1^3\alpha(3-2m)\\ +2(1+\alpha)B_1|B_3|-2(1+\alpha-m)B_1|B_2|-(1+\alpha)B_1^2-2mB_2^2\ge 0\end{cases}$$

veya

$$B_1^2\alpha(3-2m)+2|B_2|(1+\alpha-m)+B_1(1+\alpha-2m)\le 0,$$
$$B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)+(1+\alpha)B_1|B_3|-m\left(B_1^2+B_2^2\right)\ge 0$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)+(1+\alpha)B_1|B_3|+m\left(B_2^2-B_1^2\right)}{8(1+\alpha)(1+2\alpha)}$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2\alpha(3-2m)+2|B_2|(1+\alpha-m)+B_1(m)>0,$$
$$\begin{cases}2B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+2\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)-B_1^3\alpha(3-2m)\\ +2(1+\alpha)B_1|B_3|-2(1+\alpha-m)B_1|B_2|-(1+\alpha)B_1^2-2mB_2^2\le 0\end{cases}$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{B_1^2}{32(1+\alpha)(1+2\alpha)}\left[4m-\frac{\left[B_1^2\alpha(3-2m)+2|B_2|(1+\alpha-m)+B_1(1+\alpha-2m)\right]^2}{\left[\begin{array}{l}B_1^4\alpha(2\alpha-1-m\alpha)+\alpha B_1^2|B_2|(3-2m)-B_1^3\alpha(3-2m)\\+(1+\alpha)B_1|B_3|-(1+\alpha-m)B_1\left(2|B_2|+1\right)-mB_2^2\end{array}\right]}\right]$$

olur [22].

Tanım 3.3.31: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Buradan her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\left|\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 - 1\right| < 1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara lemniskat yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf SL^* ile gösterilir [38].

Geometrik olarak $w = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ için $\left|w^2 - 1\right| < 1$ ile Bernoulli lemniskatının sağ yarı düzlemindeki kısmı elde edilir. Buradan kolayca $f \in SL^*$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \sqrt{1+z} \quad , z \in \mathcal{U}$$

olduğu görülür [38].

Teorem 3.3.32: $f \in SL^*$ olsun. Buradan

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} (1-4\mu)/16 & ; \mu < -3/4 \\ 1/4 & ; -3/4 \le \mu \le 5/4 \\ (4\mu - 1)/16 & ; \mu > 5/4 \end{cases}$$

olur. Ayrıca,

$$-\frac{3}{4} < \mu \le \frac{1}{4} \text{ için } \left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{1}{4}(4\mu + 3)\left|a_2\right|^2 \le \frac{1}{4}$$

ve

$$\frac{1}{4} < \mu \le \frac{5}{4} \text{ için } \left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{1}{4}(5 - 4\mu)\left|a_2\right|^2 \le \frac{1}{4}$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar kesindir [38].

Teorem 3.3.33: $f \in SL^*$ olsun. Buradan μ bir kompleks sayı ise

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \frac{1}{4} \max\left\{1; \left|\mu - \frac{1}{4}\right|\right\}$$

olur [38].

Teorem 3.3.34: $f \in SL^*$ olsun. Buradan

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq 1/16$$

olur [38].

Teorem 3.3.35: $f \in SL^*$ olsun. Buradan

$$\left|a_2a_3 - a_4\right| \leq 1/6$$

olur [38].

Ayrıca Sokol [40] daki çalışmasında $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in SL^*$ fonksiyonları için $|a_2| \leq 1/2$, $|a_3| \leq 1/4$, $|a_4| \leq 1/6$ ve $|a_5| \leq 1/8$ sonuçlarını bulmuştur. Bu sonuçlar kesindir. Sokol'un bu sonuçları ve Raza ve Malik'in Teorem 3.3.32, Teorem 3.3.33, Teorem 3.3.34, Teorem 3.3.35 ve Teorem 3.3.36 da buldukları sonuçlar birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilir.

Teorem 3.3.36: $f \in SL^*$ olsun. Buradan

$$\left|H_3(1)\right| \leq 43/576$$

olur [38].

Yahya, Soh ve Mohamad [44] deki çalışmasında aşağıdaki G_{St} sınıfını tanımlayarak bu sınıf için ikinci Hankel determinantı problemini ele almışlardır.

Tanım 3.3.37: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $|\alpha| < \pi$, $\cos\alpha > \delta$ ve $0 \leq \delta < 1$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{ e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > \delta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf G_{St} ile gösterilir [44].

Teorem 3.3.38: $f \in G_{St}$ ve $A_{\alpha\delta} = \cos\alpha - \delta \le 1.269$ olmak üzere

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \left(\frac{1}{9}\right) + A_{\alpha\delta}\left(\frac{4}{9}\right) + A_{\alpha\delta}{}^2\left(\frac{122+28\sqrt{7}}{972}\right)$$

olur [44].

Sudharsan ve Vijaya 2014 de [41] çalışmasında β.mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonların alt sınıflarını tanımlayarak bunlar için $H_2(2)$ nin üst sınırını bulmuştur.

Tanım 3.3.39: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\alpha \ge 0$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\frac{z^2 f''(z)}{f(z)}\right\} > \beta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathbb{S}^*(\alpha,\beta)$ sınıfındandır denir [41].

Tanım 3.3.40: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\alpha \ge 0$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\left[zf'(z) + \alpha z^2 f''(z)\right]'}{f'(z)}\right\} > \beta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ sınıfındandır denilir [41].

Teorem 3.3.41: $f \in \mathbb{S}^*(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{(1-\beta)^2}{(1+3\alpha)^2}$$

olur. Elde edilen sonuç kesindir [41].

Teorem 3.3.42: $f \in \mathbb{C}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \frac{1}{144}\frac{T}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$

olur. Burada

$$T = (1-\beta)^2\left(280\alpha^3 + 332\alpha^2 + 128\alpha + 16\right) + (1-\beta)^4(1+7\alpha) + (1-\beta)^3\left(8\alpha^2 + 3\alpha + 1\right)$$

dır. Elde edilen sonuç kesindir [41].

2014 yılında Sudharsan, Vijayalakshmi ve Stephen [42] çalışmasında $\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için $H_3(1)$ in üst sınır problemini ele almışlar ve aşağıdaki sonucu bulmuşlardır.

Teorem 3.3.43: $f\in\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right|\le\frac{(1-\beta)^2(3+2\alpha-2\beta)}{3(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\left\{\frac{(1-\beta)^2}{N}\left[M_1V_1V_2+(4V_2-V_1)\{M_2V_1+V_1P_1+P_2\}\right]\right\}$$
$$+\frac{(1-\beta)^2\left(6+6\alpha^2+2\beta^3+13\alpha-7\beta-8\alpha\beta\right)}{6MA_2(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)}\left\{\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\left[B_1+(4A_2-A_1)(B_2+B_3)\right]\right\}$$
$$+\frac{(1-\beta)^2\left(120+408\alpha^2+500\alpha-576\alpha\beta-432\alpha^2\beta+160\alpha\beta^2+188\beta+96\beta^2\right)}{360(1+2\alpha)(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)(1+5\alpha)}$$

olur. Burada

$$M_1=\left[22\alpha^3+31\alpha^2+11\alpha-2\beta^2-5\beta-3\alpha\beta-8\alpha^2\beta\right],$$
$$M_2=3+118\alpha^2-45\alpha+44\alpha^3-\beta-3\alpha\beta-8\alpha^2\beta,$$
$$P_1=\left(1+27\alpha^2-10\alpha\right)(1+2\alpha),$$
$$P_2=\left(8+48\alpha+64\alpha^2\right)(1+2\alpha),$$
$$V_1=2M_1+8M_2+8P_1-2P_2,$$
$$V_2=4M_2+4P_1,$$
$$A_1=4(4+23\alpha+48\alpha^2+36\alpha^3-\beta-2\alpha\beta),$$
$$A_2=3(4+20\alpha+64\alpha^2+48\alpha^3+2\beta+20\alpha\beta-2\beta^2-12\alpha\beta^2),$$
$$B_1=-3\alpha+3\beta+22\alpha\beta-2\beta^2-12\alpha\beta^2+16\alpha^2+12\alpha^3,$$
$$B_2=3+16\alpha+32\alpha^2+24\alpha^3,$$
$$B_3=1+7\alpha+16\alpha^2+12\alpha^3,$$
$$N=288(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha),$$
$$M=48(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)(1+4\alpha)$$

dır [42].

2015 yılında Selveraj ve Kumar [39] simetrik ve eşlenik noktalara göre yıldızıl ve konveks fonksiyonların bir alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıflar için ikinci Hankel determinantı problemini ele almışlardır.

Tanım 3.3.44: $f \in \mathcal{A}$ olsun.

i. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha f'(z) + (1-\alpha)\frac{2zf'(z)}{f(z)+\overline{f(\overline{z})}}\right\} > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}_c^{*(\alpha)}$ sınıfındandır denir.

ii. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha f'(z) + (1-\alpha)\frac{2zf'(z)}{f(z)-\overline{f(-\overline{z})}}\right\} > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}_{sc}^{*(\alpha)}$ sınıfındandır denir. [39].

Özel durumda $\mathcal{S}_c^{*(0)} = \mathcal{S}_c^*$ sınıfına eşlenik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların sınıfı ve $\mathcal{S}_{sc}^{*(0)} = \mathcal{S}_{sc}^*$ sınıfına da simetrik eşlenik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir

Tanım 3.3.45: $f \in \mathcal{A}$ olsun.

i. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha f'(z) + (1-\alpha)\frac{2\left(zf'(z)\right)'}{\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)'}\right\} > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{C}_c^{(\alpha)}$ sınıfındandır denir.

ii. Her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\alpha f'(z) + (1-\alpha)\frac{2\left(zf'(z)\right)'}{\left(f(z)-\overline{f(-\overline{z})}\right)'}\right\} > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{C}_{sc}^{(\alpha)}$ sınıfındandır denir [39].

Özel durumda $\mathcal{C}_c^{(0)} = \mathcal{C}_c$ sınıfına eşlenik noktalara göre konveks fonksiyonların sınıfı ve $\mathcal{C}_{sc}^{(0)} = \mathcal{C}_{sc}$ sınıfına da simetrik eşlenik noktalara göre konveks fonksiyonların sınıfı denir.

Teorem 3.3.46: $f \in \mathcal{S}_c^{*(\alpha)}$ (veya $f \in \mathcal{S}_{sc}^{*(\alpha)}$) olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \frac{4}{\left(2+\alpha\right)^2}$$

olur. Elde edilen sonuç kesindir [39].

Teorem 3.3.47: $f \in \mathcal{C}_c^{(\alpha)}$ (veya $f \in \mathcal{C}_{sc}^{(\alpha)}$) olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \frac{4}{9\left(2-\alpha\right)^2}$$

olur. Elde edilen sonuç kesindir [39].

Son olarak 2015 yılında Bansal, Maharana ve Prajapat aynı zamanda konvekse yakın fonksiyonlar olarakta bilinen analitik fonksiyonların bir alt sınıfı için $H_3\left(1\right)$ in kesin bir üst sınırını bulmuşlardır.

Tanım 3.3.48: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > -\frac{1}{2}$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{F}$ sınıfındandır denir [6].

$\mathcal{F}$ sınıfına ait fonksiyonlar aynı zamanda konvekse yakın fonksiyonlar (dolayısıyla ünivalent) olarak bilinir.

Teorem 3.3.49: $f \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \leq \frac{1}{2},$$

$$\left|a_2 a_3 - a_4\right| \leq \frac{9}{4\sqrt{15}},$$

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \leq \frac{21}{64}$$

olur [6].

Ayrıca Ponnusamy, Sahoo ve Yanagihara [37] çalışmasında $f \in \mathcal{F}$ ve $n \geq 2$ için $\left|a_n\right| \leq \dfrac{n+1}{2}$ olduğunu ispatlamıştır. Sonuç olarak Teorem 3.3.49 ve her $f \in \mathcal{F}$ için $a_n \leq \dfrac{n+1}{2}$ $(n = 3,4,5)$ sonuçları dikkate alındığında aşağıdaki sonuç yazılır.

Teorem 3.3.50: $f \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right| \leq \frac{180 + 69\sqrt{15}}{32\sqrt{15}}$$

olur [6].

Bizde bu tez çalışmasında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonların daha genel bir alt sınıfını aşağıdaki şekilde tanımladık.

Tanım 3.3.51: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu Tanım 3.3.24 deki gibi tanımlanan bir fonksiyon olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındandır denilir [9].

4. BULGULAR

Çalışmanın temel amacı yukarıda tanımladığımız $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için $\mathrm{H}_2(2)$ in bir üst sınırını elde etmek olacaktır. Teoremin ispatı *materyal ve yöntem* kısmında verilen teoremlerin ispatındaki yol izlenerek yapılacaktır.

Teorem 4.1: $f\in\mathcal{A},\ 0\le\lambda\le1,\ \gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ve $m=\dfrac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}$ olsun. Bu durumda

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\le 0,$$
$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-mB_1^2\le 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{|\gamma|^2B_1^2}{4(1+2\lambda)^2}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\ge 0,$$

$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\ge 0$$

veya

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\le 0,$$
$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-mB_1^2\ge 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{|\gamma|^2\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3-mB_2^2\right|}{24(1+3\lambda)(1+\lambda)}$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)>0,$$

$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\le 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{|\gamma|^2B_1^2}{24(1+3\lambda)(1+\lambda)}$$

$$\times\left(\frac{\left[\begin{array}{l} m\left|B_1^4\gamma^2(4-m)-mB_2^2+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3\right| \\ -2B_1\left[|B_2|(8-m)+B_1^2|\gamma|(6-m)-B_1^2(8-m)\right] \\ -\left(\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]+B_1(4-m)\right)^2 \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} \left|B_1^4\gamma^2(4-m)-mB_2^2+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3\right| \\ -2\left[B_1^3|\gamma|(6-m)+B_1|B_2|(8-m)\right]-B_1^2(8-m) \end{array}\right]}\right)$$

olur [9].

İspat: $f\in\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)=\varphi(w(z)) \tag{4.1}$$

olacak şekilde $\mathcal{U}$ da $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır. Ayrıca

$$p_1(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\dots$$

şeklinde tanımlanana p_1 fonksiyonları için

$$w(z)=\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}=\frac{c_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+\frac{1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{2}\right)z^3+\dots \tag{4.2}$$

yazılır. Bu durumda p_1, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik $p_1(0)=1$ ile $\mathcal{U}$ birim diskinde reel kısmı pozitif olan bir fonksiyon olur. Diğer taraftan (4.2) ile (3.30) birlikte kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\varphi(w(z))=1+\frac{B_1c_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right\}z^2\\ +\left\{\frac{1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4}\right)B_1+\frac{1}{4}\left(c_1c_2-\frac{c_1^3}{2}\right)B_2+\frac{c_1^3}{16}B_3\right\}z^3+\dots\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. Böylece

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)$$

$$=1+\frac{1}{\gamma}(1+\lambda)a_2 z+\left[(1+2\lambda)2a_3-(1+\lambda)^2 a_2^2\right]z^2 \qquad (4.4)$$

$$+\left[(1+3\lambda)3a_4-3(1+\lambda)(1+2\lambda)a_2a_3+(1+\lambda)^3 a_2^3\right]z^3+\ldots$$

olur. (4.1), (4.3) ve (4.4) ifadelerinden

$$a_2=\frac{\gamma}{2(1+\lambda)}B_1c_1,$$

$$a_3=\frac{\gamma}{4(1+2\lambda)}\left[\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)\frac{c_1^2}{2}+B_1c_2\right],$$

$$a_4=\frac{\gamma}{6(1+3\lambda)}$$

$$\times\left[\frac{c_1^3}{2}\left(\frac{B_1}{2}-B_2+\frac{B_3}{2}-\frac{3\gamma B_1^2}{4}+\frac{3\gamma}{4}B_1B_2+\frac{\gamma^2}{4}B_1^3\right)+c_1c_2\left(B_2-B_1+\frac{3\gamma}{4}B_1^2\right)+B_1c_3\right]$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$a_2a_4-a_3^2$$

$$=\frac{\gamma^2 B_1}{12(1+3\lambda)(1+\lambda)}$$

$$\times\left[B_1c_1c_3+c_1^2c_2\left(B_2-B_1+\frac{3\gamma}{4}B_1^2\right)+\frac{c_1^4}{2}\left(\frac{B_1}{2}-B_2+\frac{B_3}{2}-\frac{3\gamma}{4}B_1^2+\frac{3\gamma}{4}B_1B_2+\frac{\gamma^2}{4}B_1^3\right)\right]$$

$$-\frac{\gamma^2}{16(1+2\lambda)^2}$$

$$\times\left[c_1^2c_2\left(B_1B_2-B_1^2+\gamma B_1^3\right)+c_2^2B_1^2+\frac{c_1^4}{2}\left(\frac{B_1^2}{2}+\frac{B_2^2}{2}+\frac{\gamma^2}{2}B_1^4-B_1\left(B_2+\gamma B_1^2-\gamma B_1B_2\right)\right)\right]$$

$$=\frac{\gamma^2 B_1}{96(1+\lambda)(1+3\lambda)}$$

$$\times\left\{\left[8B_1c_1c_3+c_1^2c_2\left(8B_2-8B_1+6\gamma B_1^2\right)+c_1^4\left(2B_1-4B_2+2B_3-3\gamma B_1^2+3\gamma B_1B_2+\gamma^2B_1^3\right)\right]\right.$$

$$-\frac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}$$

$$\left.\times\left[c_1^2c_2\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)+c_2^2B_1+\frac{c_1^4}{2}\left(\frac{B_1}{2}+\frac{B_2^2}{2B_1}+\frac{\gamma^2}{2}B_1^3-B_2-\gamma B_1^2+\gamma B_1B_2\right)\right]\right\}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|$$
$$=T\left|8B_1c_1c_3+c_1^2c_2\left(8B_2-8B_1+6\gamma B_1^2\right)+c_1^4\left(2B_1-4B_2+2B_3-3\gamma B_1^2+3\gamma B_1B_2+\gamma^2B_1^3\right)\right.$$
$$\left.-m\left[c_1^2c_2\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)+c_2^2B_1+\frac{c_1^4}{2}\left(\frac{B_1}{2}+\frac{B_2^2}{2B_1}+\frac{\gamma^2}{2}B_1^3-B_2-\gamma B_1^2+\gamma B_1B_2\right)\right]\right| \tag{4.5}$$
$$=T\left|8B_1c_1c_3+c_1^2c_2\left[8\left(B_2-B_1\right)+6\gamma B_1^2-m\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)\right]+c_1^4\left[2\left(B_1-2B_2+B_3\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-3\gamma B_1\left(B_1-B_2-\frac{\gamma B_1^2}{3}\right)-m\left(\frac{B_1-2B_2}{4}+\frac{B_2^2}{4B_1}+\frac{\gamma^2B_1^3}{4}-\frac{\gamma B_1\left(B_1-B_2\right)}{2}\right)\right]-c_2^2mB_1\right|$$

olur. Burada

$$T=\frac{|\gamma|^2B_1}{96(1+3\lambda)(1+\lambda)} \quad \text{ve} \quad m=\frac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}$$

olup $0\le\lambda\le1$ için $m\in\left[\frac{16}{3},6\right]$ bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
d_1&=8B_1\\
d_2&=8\left(B_2-B_1\right)+6\gamma B_1^2-m\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)\\
d_3&=-mB_1\\
d_4&=2\left(B_1-2B_2+B_3\right)-3\gamma\left(B_1^2-B_1B_2-\frac{\gamma B_1^3}{3}\right)\\
&\quad-m\left(\frac{B_1-2B_2}{4}+\frac{B_2^2}{4B_1}+\frac{\gamma^2B_1^3}{4}-\frac{\gamma B_1}{2}\left(B_1-B_2\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

alınırsa

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=T\left|d_1c_1c_3+d_2c_1^2c_2+d_3c_2^2+d_4c_1^4\right| \tag{4.7}$$

sonucu yazılır. Herhangi bir $p\in\mathcal{P}$ fonksiyonu için $p\left(e^{i\theta}z\right)\in\mathcal{P}$ olduğundan $c_1>0$ alınması genelliği bozmayacaktır. $c\in[0,2]$ aralığında $c_1=c$ alalım. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\frac{T}{4}\left|c^4\left(d_1+2d_2+d_3+4d_4\right)+2xc^2\left(4-c^2\right)\left(d_1+d_2+d_3\right)\right.$$
$$\left.+\left(4-c^2\right)x^2\left(-d_1c^2+d_3\left(4-c^2\right)\right)+2d_1c\left(4-c^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right|$$

elde edilir. (4.6) ifadelerindeki $d_1,\ d_2,\ d_3$ ve d_4 ve $|x|$ yerine de μ değeri yazılır ve eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq \frac{T}{4}\Bigg\{ & c^4\left|B_1^3\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1B_2(6-m)+8B_3-m\frac{B_2^2}{B_1}\right| \\ & +2\mu c^2\left(4-c^2\right)\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right] \\ & +\mu^2\left(4-c^2\right)B_1\left[(8-m)c^2-16c+4m\right]+16B_1c\left(4-c^2\right)\Bigg\} \\ \equiv {} & F(c,\mu)\end{aligned} \tag{4.8}$$

olur. $(c,\mu)\in[0,2]\times[0,1]$ için (4.8) ifadesindeki $F(c,\mu)$ fonksiyonunun μ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \mu}=\frac{T}{2}\Big\{ & c^2\left(4-c^2\right)\left|B_1^2\gamma(6-m)+B_2(8-m)\right| \\ & +\mu\left(4-c^2\right)B_1\left[(8-m)c^2-16c+4m\right]\Big\}\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece $0<\mu<1$ ve $0<c<2$ aralığında sabit bir c değeri için $F(c,\mu)$ fonksiyonu μ değerleri için $\dfrac{\partial F}{\partial \mu}>0$ olur. Yani $F(c,\mu)$ artan bir fonksiyondur. Bu nedenle, sabitlenmiş $c\in[0,2]$ için

$$\max F(c,\mu)=F(c,1)\equiv G(c)$$

olur. Yani $F(c,\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ de alır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}G(c)=T\Bigg\{ & \frac{c^4}{4}\Bigg(\left|B_1^3\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1B_2(6-m)+8B_3-m\frac{B_2^2}{B_1}\right| \\ & -2\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]-B_1(8-m)\Bigg) \\ & +2c^2\left(\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]+B_1(4-m)\right)+4mB_1\Bigg\}\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}P=\frac{1}{4}\Bigg(& \left|B_1^3\gamma^2(4-m)-m\frac{B_2^2}{B_1}+2\gamma B_1B_2(6-m)+8B_3\right| \\ & -2\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]-B_1(8-m)\Bigg)\end{aligned}$$

$$Q=2\left(\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]+B_1(4-m)\right) \tag{4.10}$$

$$R=4mB_1$$

olarak alalım. Dolayısıyla (4.10) ifadelerinde verilen $P,\ Q$ ve R değerleri için

$$\max_{0\le t\le 4}\left(Pt^2+Qt+R\right)=\begin{cases} R & ;Q\le 0, P\le -\dfrac{Q}{4} \\ 16P+4Q+R & ;Q\ge 0, P\ge -\dfrac{Q}{8}\ veya\ Q\le 0, P\ge -\dfrac{Q}{4} \\ \dfrac{4PR-Q^2}{4P} & ;Q>0, P\le -\dfrac{Q}{8} \end{cases}$$

olup sonuç olarak

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le T\begin{cases} R & ;Q\le 0, P\le -\dfrac{Q}{4} \\ 16P+4Q+R & ;Q\ge 0, P\ge -\dfrac{Q}{8}\ veya\ Q\le 0, P\ge -\dfrac{Q}{4} \\ \dfrac{4PR-Q^2}{4P} & ;Q>0, P\le -\dfrac{Q}{8} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Yukarıdaki teoremde $\varphi(z)=(1+z)/(1-z)$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2: $f\in\mathcal{A}$ olsun ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ verilsin. Buradan

$$f\in\mathcal{S}^*[\gamma]\Rightarrow\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\begin{cases} |\gamma|^2 & ;\left|4\gamma^2-1\right|\le 3 \\ \dfrac{|\gamma|^2\left|4\gamma^2-1\right|}{3} & ;\left|4\gamma^2-1\right|\ge 3 \end{cases}$$

ve

$$f\in\mathcal{C}[\gamma]\Rightarrow\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\begin{cases} \dfrac{|\gamma|^2\left|2\gamma^2-\gamma-1\right|}{18} & ;\left|2\gamma^2-\gamma-1\right|\ge\dfrac{|\gamma|+5}{2} \\ \dfrac{|\gamma|^2}{72}\left[8-\dfrac{\left(|\gamma|+1\right)^2}{\left|2\gamma^2-\gamma-1\right|-|\gamma|-3}\right] & ;\left|2\gamma^2-\gamma-1\right|\le\dfrac{|\gamma|+5}{2} \end{cases}$$

olur.

Sonuç 4.2 de $\gamma=(1-\beta)e^{-i\delta}\cos\delta$ alınırsa

$$\left|4\gamma^2-1\right|-3=\left|4(1-\beta)^2 e^{-2i\delta}\cos^2\delta-1\right|-3$$

$$=\sqrt{16(1-\beta)^4\cos^4\delta-8(1-\beta)^2\cos^2\delta\cos 2\delta+1}-3$$

$$=\sqrt{16(1-\beta)^4\cos^4\delta-8(1-\beta)^2\cos^2\delta\left(2\cos^2\delta-1\right)+1}-3$$

$$=\sqrt{16(1-\beta)^2\cos^4\delta\left((1-\beta)^2-1\right)+8(1-\beta)^2\cos^2\delta+1}-3$$

$$=\sqrt{8(1-\beta)^2\cos^2\delta+1}-3\le 0$$

ve

$$\left|2\gamma^2-\gamma-1\right|=\left|2(1-\beta)^2 e^{-2i\delta}\cos^2\delta-(1-\beta)e^{-i\delta}\cos\delta-1\right|$$

$$=\sqrt{4(1-\beta)^2\cos^4\delta\left((1-\beta)^2-(1-\beta)-2\right)+(1-\beta)\cos^2\delta\left(5(1-\beta)+2\right)+1}$$

$$\le\sqrt{-8(1-\beta)^2\cos^4\delta+7(1-\beta)\cos^2\delta+1}\le\frac{9\sqrt{2}}{8}<\frac{5}{2}+\frac{|\gamma|}{2}$$

sonuçları elde edilir [9].

Bu durumda β. mertebeden $\delta-$spirallike fonksiyonlar ve β. mertebeden $\delta-$Robertson fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.3: $f\in\mathcal{A}$ ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ verilsin. Buradan

$$f\in\mathcal{S}^*[\delta,\beta]\Rightarrow\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le(1-\beta)^2\cos^2\delta$$

ve

$$f\in\mathcal{C}[\delta,\beta]\Rightarrow$$

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{(1-\beta)^2\cos^2\delta}{72}$$

$$\times\left[8-\frac{\left((1-\beta)\cos\delta+1\right)^2}{\sqrt{4(1-\beta)^2\left(\beta^2-\beta-2\right)\cos^4\delta+(1-\beta)(7-5\beta)\cos^2\delta+1}-(1-\beta)\cos\delta-3}\right]$$

sonuçları elde edilir [9].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak analitik fonksiyonların genelleştirilmiş $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ alt sınıfını tanımladık. Sonra bu sınıfa ait fonksiyonların katsayıları için $H_2(2)$ nin bir üst sınırını elde ettik. Bulunan sınır kesindir.

Bulunan sonuç son zamanlarda yapılan Ravichandran'ın [22] sonuçlarının genelleştirilmesi olup ayrıca bu sonuç literatür kısmında verilen bir çok sonucun genel halidir. Bu çalışmadan yola çıkarak bazı araştırmacılar ünivalent fonksiyonlar teorisinde ele alınan birçok problemi $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için yapabilir. Örneğin; katsayı eşitsizliği, içerme bağıntısı, distortion ve growth teoremleri, subordinasyon sonuçları, integral ve türev operatörleri, komşuluk ve kısmi toplamları gibi birçok problem $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için yapılabilir. Bu sınıfa ait fonksiyonlar için ayrıca $H_2(1)$ ve $H_3(1)$ gibi Hankel determinantlarının üst sınırları bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Arif, M., Noor, K. I. and Raza, M., 2012.“ Hankel determinant problem of a subclass of analytic functions”, J. Inequal. Appl. , 22, 7.

[2] Babalola, K. O., 2007.“ On $H_3(1)$ Hankel determinant for some classes of univalent functions”, Inequality Theory and Applications, 6, 1–7.

[3] Babalola, K. O. and Opoola, T. O., 2008. “ On the coefficients of certain analytic and univalent functions”, Advances in Inequalities for Series, (Edited by S. S. Dragomir and A. Sofo) Nova Science Publishers, 5-17.

[4] Bansal, D., 2012.“ Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions”, Applied Mathematics Letters doi:10.1016- 04.002.

[5] Bansal, D. 2014.“ Fekete-Szegö problem and upper bound of second Hankel determinant for a new Class of Analytic Functions”, Kyungpook Math. J., 54, 443-452.

[6] Bansal, D., Maharana, S. and Prajapat, J. K., 2015.“ Third order Hankel determinant for certain univalent functions”, J.Korean Math. Soc. 52(6), 1139-1148.

[7] Calivetti, D. and Reichel, L ., 1997.“ Factorizations of Cauchy Matrices”, Journal of Compution and Applied Mathematics, 86, 103- 123.

[8] Cantor, D. G., 1963. “ Power series with integral coefficients”, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 362– 366.

[9] Deniz, E. and Budak, L., 2015.“ Second Hankel Determinant For Certain Analytic Functions Satisfying Subordinate Condition”, Akdeniz Üniversitesi 28. Ulusal Matematik Sempozyumunda sunuldu ve yayımlanması için dergiye gönderildi. s.36.

[10] Duren, P. L., 1983.“ Univalent functions”, Springer Verlag. New York Inc.

[11] EhHosh, M. M., 1986.“ On the second Hankel determinant of univalent functions”, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 9, 1, 23– 25.

[12] EhHosh, M. M., 1986.“ On the second Hankel determinant of close-to-convex functions”, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 9, 2, 67– 68.

[13] Goodman, A. W. , 1983.“ Univalent Functions”, I. Mariner Publishing Company., 245, Tapma, Florida.

[14] Grenander, U. and Szegö G., 1958.“ Toeplitz forms and their applications”, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles.

[15] Hayami, T. and Owa, S., 2010.“ Coefficient estimates for analytic functions concerning with Hankel determinant”, Geometric Function Theory and Applications, (Proc. of International Symposium, Sofia, 27- 31 August 2010).

[16] Hayman, W. K., 1968.“ On the second Hankel determinant of mean univalent functions”, Proc. London Math. Soc. (3) 18. 77-94.

[17] Iohvidov, I. S., 1982.“ Hankel and Toeplitz matrices and forms”, Birk Hauser, Boston.

[18] Janteng, A., Halım, S. A. and Darus, M., 2006.“ Cooefficıent inequality for a function whose derivative has a positive real part”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7(2), 50.

[19] Janteng, A., Halim, S. A. and Darus, M., 2008.“ Estimate on the second Hankel functional for functions whose derivative has a positive real part”, Journal of Quality Measurement and Analysis, Jurnal Pengukuran Kualiti dan Analisis, JQMA 4(1).189-195.

[20] Janteng, A., Halim, S. A. and Darus, M., 2007.“ Hankel determinant for starlike and convex functions”, Int. Journal of Math. Analysis, 1(13), 619 – 625.

[21] Keogh, F. R. and Merkes, E. P., 1969.“ A coefficient inequality for certain classes of analytic functions”, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 8- 12.

[22] Lee, S. K., Ravichandran, V. and Supramaniam, S., 2013.“ Bounds for the second Hankel determinant of certain univalent functions”, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012(147842), 6.

[23] Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J., 1983.“ Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P”, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (2). 251- 257.

[24] Macgegor, T. H., 1962.“ Functions whose derivative has a positive real part”, Trans. Amer. Math. Soc. 104, 532- 537.

[25] Murugusundaramoorthy, G. and Magesh, N., 2009.“ Coefficient inequalities for certain classes of analytic functions associated with Hankel determinant”, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications ISSN: 1821- 1291, 1(3), 85- 89.

[26] Noonan, J. W. and Thomas, D. K., 1972.“ On the Hankel determinants of areally mean p-valent functions”, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 503–524.

[27] Noor, K. I., 1992.“ Higher order close- to- convex functions”, Math. Japon. 37, 1, 1–8.

[28] Noor, K. I., 1997.“ On the Hankel determinant problem for strongly close-to-convex functions”, J. Natur. Geom. 11, 1, 29– 34.

[29] Noor, K. I., 2008.“ On certain analytic functions related with strongly close- to-convex functions”, Appl. Math. Comput.197, 1, 149– 157.

[30] Noor, K. I. and Al-Bany, S. A., 1987.“ On Bazilevic functions”, Internat. J. Math. Math. Sci. 10, 1, 79– 88.

[31] Noor, K. I., 1981.“ On analytic functions related with functions of bounded boundary rotation”, Comment. Math. Univ. St. Paul. 30, 2, 113– 118.

[32] Noor, K. I., 1980.“ On the Hankel determınants of Close-to-convex unıvalent functıons”, Internat. J. Math. Math. Sci.3(3), 477- 481.

[33] Pommerenke, CH.,1966.“ On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions”, J. London Math. Soc. 41. 111- 22.

[34] Pommerenke, Ch., 1975.“ Univalent Functions”, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[35] Pommerenke, Ch., 1967.“ On the Hankel determinants of univalent functions”, Mathematika 14, 108– 112.

[36] Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006.“ Complex variables with Applications”, Birkhäuser. Boston.

[37] Ponnusamy, S., Sahoo, S. K. and Yanigahara, H., 2014.“ Radius of convexity of partial sums of fuctions in the close-to-convex family”, Nonlinear Anal. 95. 219-228.

[38] Raza, M., Malik, S. N., 2013.“ Upper bound of the third hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli”, Journal of Inequalities and Applications, 2013/1/412.

[39] Selveraj, C., Kumar T. R. K., 2015.“ Hankel determinant for analytic functions with respect to other points”, International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics, 9(2), 45- 54.

[40] Sokol, J., 2009.“ Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions”, Kyungpook Math. J. 49(2), 349- 353.

[41] Sudharsan, T. V., Vijaya, R., 2014.“ On second Hankel determinant for two new subclasses of analytic functions”, Surveys in Mathematics and its Aplications, 9, 131- 138.

[42] Sudharsan, T. V., Vijayalakshmi, S. P. and Stephen A. B., 2014.“ Third Hankel determinant for a subclass of analytic univalent functions” , Malaya J. Mat. 2(4)438-444.

[43] Verma, S., Gupta, S. and Singh, S., 2012.“ Bounds of Hankel determinant for a class of univalent functions”, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012(147842), 6.

[44] Yahya, A., Soh, S. C. and Mohamad, D., 2013.“ Second Hankel determinant for a class of a generalised Sakaguchi class of analytic functions”, Int. Journal of Math. Analysis, 7(33), 1601- 1608.

[45] Wilson, R., 1954.“ Determinantal criteria for meromorphic functions”, Proc. LondonMath. Soc. (3) 4, 357– 374.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Levent BUDAK

Doğum Yeri: Arpaçay

Doğum Tarihi: 10. 11. 1975

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: Akyaka Lisesi - 1993

Lisans: Atatürk Üniveristesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik - 1999

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl Yayınları (SCI ve diğer)

1999 yılında Kars Merkez Cumhuriyet Lisesi Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. 2008 yılına kadar Kars Anadolu Lisesi ve Kars Fen Lisesinde geçici olarak görev yaptım. 2008 yılında Anadolu ve Fen Lisesi öğretmenliği sınavını kazanarak Konya Meram Fen lisesine atandım. Burada Matematik Öğretmenliğinin yanı sıra Bilgisayar Formatör Öğretmenliği de yaptım. 2011 yılından bu yana Kars Fen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.