T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI ÖZEL KOMBİNASYONLARI İÇİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİN İNCELENMESİ

ŞEYMA GÖREN

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

Mayıs-2017

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI ÖZEL KOMBİNASYONLARI İÇİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİN İNCELENMESİ

ŞEYMA GÖREN

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

Mayıs-2017

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Şeyma GÖREN’ nın Doç. Dr. Erhan DENİZ’ in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonlarının Bazi Özel Kombinasyonları için Geometrik Özelliklerin İncelenmesi” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

31/05/2017

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye	: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	....
Üye	: Doç. Dr. Erhan DENİZ	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2017 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL
Enstitü Müdürü V.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım matematik bölümü öğretim üyelerinden değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı sevgili aileme teşekkür ederim.

ŞEYMA GÖREN
Kars - 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarından faydalanarak genelleştirilmiş Dini fonksiyonu tanımlanmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş Dini fonksiyonlarının $\beta-$mertebeden yıldızıllığı, $\beta-$mertebeden konveksliği, konvekse yakınlığı ve $U_{1/2}$ diskinde yıldızıllığı ve konveksliği incelenmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, we defined generalized Dini function by using generalized Bessel function. Also, we investigated starlikeness of order $\beta -$convexity of order $\beta -$close-to-convexity in U and starlikeness and convexity in $U_{1/2}$ for generalized Dini function.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	: Sayma sayılar kümesi
$U(z_0, r)$	: z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
U	: $\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	: Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{A}$	: $\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ z \in U \right\}$ sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U$ için f ünivalent$\}$ sınıfı
$\mathcal{P}$	: Caratheodory sınıfı
Ω	: Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	: Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\beta)$	: $\beta-$Mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	: $\beta-$Mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\operatorname{Re} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

$(a)_n$	: Pochhammer (veya Apell) sembolü
$\Gamma(z)$	: Euler gama fonksiyonu
$F(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$J_v(z)$	: Bessel fonksiyonu
$I_v(z)$	: Modifiye Bessel fonksiyonu
$j_v(z)$	: Küresel Bessel fonksiyonu
$i_v(z)$	: Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu
$w_{v,b,c}(z)$	: Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu
$u_{v,b,c}(z)$	: Normalize edilmiş Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu
$G_{v,a,b,c}(z)$	: Genelleştirilmiş Dini fonksiyonu
$\varphi_{v,a,b,c}(z)$	: Normalize edilmiş Genelleştirilmiş Dini fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak G. Bernard Rieman'ın 1851 yılında kompleks düzlemin bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ alt bölgesini, $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını gösteren ve adına "Riemann dönüşüm teoremi" denilen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem, 20. yüzyılın başlarına kadar bazı araştırmacılara göre kullanışlı olmadığından, bazı araştırmacılara göre de önemi fazla anlaşılmadığından teoride pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. 1907 yılında meşhur matematikçilerden biri olan Koebe'nin, bu teoremi hem analitik hem de ünivalent (yalınkat) fonksiyonlar için

> *"Kompleks düzlemin $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı alt bölgesini $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ diski üzerine resmeden f analitik ve ünivalent fonksiyonu vardır. Ayrıca $\forall\ z_0 \in \mathcal{D}$ çin $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan bir tek analitik ve ünivalent fonksiyon vardır."*

biçiminde ifade etmesi geometrik fonksiyonlar teorisine yeni bir boyut kazandırmıştır. Koebe'nin bu teoreminde f analitik ve ünivalent fonksiyonunun tanım kümesi olan $\mathcal{D}$ yerine U birim diski ve $f(z_0) = 0,\ \ f'(z_0) > 0$ şartı yerine de $f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1$ biçimindeki normalleştirme aksiyomları alınırsa, $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ normalize edilmiş fonksiyonu elde edilir. Bu tipteki analitik fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$, bu kümede tanımlı ünivalent fonksiyonların kümesi de $\mathcal{S}$ ile gösterilecektir. 1914 yılında alan teoreminin Gronwall tarafından ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisi için yeni bir dönemin de başlangıcı olmuştur.

Bieberbach'ın $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2, 3, ...$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ tahminin ispati birçok matematikçiyi uzun yıllar uğraştırmıştır. $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından alan teoreminin bir sonucu olarak

gösterilmiştir. Bunu takiben Löewner, 1923 yılında kendi bulduğu ve pareametrik metod olarak isimlendirdiği bir metodla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson (1969 yılında Ozawa) $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliğini ispatlamışlardır. Nihayet Bieberbach tahmini, Löewner teorisi ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak 1986 yılında L. De-Branges tarafından ispat edilmiş ve probleme son nokta konulmuştur. Problemin tamamen çözülmüş olması bu alanda çalışılacak problemlerin tükenmesi anlamına gelmemiş, tam aksine bu çözüm, ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirmiştir. Çağımızın önde gelen matematikçilerine yetmiş yıl meydan okuyan bu problemin çözülmüş olması bu alanda bir takım yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur. Bu sahada çalışan matematikçiler, problemi ünivalent foksiyonların değişik alt sınıflarına taşımış ve bu alt sınıf üzerinde çalışmalarını sürdürmüşlerdir.
Hipergeometrik fonksiyonların, geometrik fonksiyonlar teorisindeki bazı problemlerin özellikle Bieberbach tahmininin çözümünde etkin bir rol oynaması dikkatlerin bu fonksiyonlar üzerinde yoğunlaşmasına sebep olmuştur. Hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerinin incelenmesi bu alanda çalışmış birçok matematikçiye konu olmuştur. Bu konu 2013 yılında Semra Polat tarafından "Hipergeometrik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir [32].

Hipergeometrik fonksiyonların yanısıra özellikle matematiksel fizik, hidrodinamik, radyo fiziği, atom ve nükleer fizik gibi uygulama alanlı problemlerin çözümünde kullanılan bir diğer fonksiyon Bessel fonksiyonudur. Bu fonksiyon ilk olarak 1732 yılında Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Fakat ismini F.W. Bessel (1784-1846) den almaktadır. Bessel, bu fonksiyonu Kepler'in "aynı yerçekimi ivmesi altında hareket eden farklı üç kütlenin hareketini hesaplama" problemini çözme sonucunda elde edilmiştir.

Bessel fonksiyonu, v reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2) w(z) = 0$$

ikinci mertebeden Bessel diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup, bu çözüm

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+v}$$

şeklindedir. Bu fonksiyona v mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu denir. Ayrıca bu fonksiyondan hareketle Bessel fonksiyonunun modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu, küresel Bessel fonksiyonu ve modifiye edilmiş küresel Bessel fonksiyonu gibi farklı uygulama alanlarında kullanılan çeşitleri mevcuttur.

Bessel fonksiyonlarının geometrik fonksiyonlar teorisindeki uygulamasına bakılacak olunursa, bu fonksiyonunun ünivalentliği ilk olarak Brown [17] tarafından 1960 yılında çalışılmıştır. Aynı yıl Kreyszing ve Todd [28] tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı bulunmuştur. Selinger [44], 1995 de diferensiyel subordinasyon kullanarak normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği için yeter şartlar elde etmiştir. Daha sonra 2008 yılında Baricz [6] çalışmasında yukarıda ifade edilen dört çeşit Bessel fonksiyonunun genelleştirilmişi olan *Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonunu* tanımlayarak bu fonksiyonun geometrik özelliklerini incelemiştir. Szasz ve Kupan [49] 2009 yılında farklı bir metod kullanarak Selinger'in sonuçlarını iyileştirmiştir. 2010 yılında Baricz ve Ponnusamy [13], Euler gamma fonksiyonlarla alakalı eşitsizlikleri kullanarak genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunun yıldızıllığı ve konveksliği için yeter şartlar bulmuştur. Bulunan sonuçlar özel durumda Szasz ve Kupan'ın sonuçlarından daha iyidir. Aynı yıl Baricz ve Frasin [10] Bessel fonksiyonlarını ihtiva eden integral operatörlerin ünivalentliğini çalışmıştır. Daha sonra Deniz, Orhan ve Srivastava [20] ve Deniz [18] sırasıyla genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını ihtiva eden integral operatörlerin ünivalentliğini ve konveksliğini çalışarak hem Baricz ve Frasin'in sonuçlarını genelleştirmiş hem de özel durumlarda iyileştirmiştir. Szasz [48] 2011 yılında Bessel fonksiyonlarının sıfırlarını kullanarak

$\nu \geq -0.5623...$ olması durumunda $h_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(\sqrt{z}\right)$ normalize Bessel fonksiyonunun yıldızıl olduğunu ispatlamıştır. Baricz ve Szasz [16] 2014 yılında $\nu \geq 1$ için $f_\nu(z) = \left[2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu\left(z\right)\right]^{1/\nu}$ ve $g_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\nu} J_\nu(z),\ \nu \geq -0.1438...$ için de $h_\nu(z)$ normalize Bessel fonksiyonlarının konveks olduğunu ispatlamıştır. 2016 yılında Shah ve Trimble'ın [45] transandantal tam fonksiyonlar için bulduğu bir sonucu kullanarak, Baricz ve Szasz [15] $h_\nu(z)$ ve onun türev fonksiyonlarının, Baricz, Deniz ve Yağmur [8] Bessel fonksiyonlarının özel kombinasyonları olarak tanımlanan Dini fonksiyonları için ve Baricz, Çağlar ve Deniz [7] $f_\nu(z), g_\nu(z)$ ve $h_\nu(z)$ fonksiyonları ve onların türevlerinin konvekse yakınlığı ve yıldızıllığı için gerek ve yeter şartlar elde etmişlerdir.

Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerine farklı bir bakış olarak ünivalent fonksiyonların belli alt sınıflarının yarıçap problemini göz önüne alabiliriz. Bu konuda 2014 yılında $\nu > -1$ için Baricz, Kupan ve Szasz [11], aynı yıl Baricz ve Szasz [16] ve 2016 yılında Baricz, Orhan ve Szasz [12] $f_\nu(z), g_\nu(z)$ ve $h_\nu(z)$ fonksiyonlarının sırasıyla $\beta-$mertebeden yıldızıllık yarıçapını, $\beta-$mertebeden konvekslik yarıçapını ve $\beta-$mertebeden $\alpha-$konvekslik yarıçapını bulmuşlardır. $-2 < \nu < -1$ için 2015 yılında Szasz [47], 2016 yılında Baricz ve Szasz, $g_\nu(z)$ ve $h_\nu(z)$ fonksiyonlarının sırasıyla $\beta-$mertebeden yıldızıllık yarıçapını ve $\beta-$mertebeden konvekslik yarıçapını elde etmişlerdir. 2017 yılında Deniz ve Szasz [21] $f_\nu(z), g_\nu(z)$ ve $h_\nu(z)$ fonksiyonlarının düzgün konvekslik yarıçapını bulmuştur.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde Bessel fonksiyonları ile ilgili çalışmalar halen devam etmekte olup son zamanlarda yapılan diğer çalışmalardan bazıları da şunlardır: Porwal, Vijaya ve Kasthuri [41], Kharsani, Zahrani, Hajri ve Pogany [27], Vijaya ve Kasthuri [54], Porwal ve Dilshad [39], Tang, Srivastava, Deniz ve Li [52], Tang ve Deniz [51], Porwal [37], Baricz, Deniz, Çağlar ve Orhan [9], Porwal ve Ahmad [38], Ramachandran, Annamalai ve Sivasubramanian [42], Porwal [35], Szasz [46], Porwal [36], Porwal ve Dixit [40], Aghalary, Ebadian ve Orouji [2] ve Baricz [5].

Sunulan bu tez genel olarak altı ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin giriş kısmında tez konusu ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar tarihi bir seyir içinde sunulmuştur.

Genel bilgiler olarak adlandırılan ikinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Pochammer sembolü, Bessel fonksiyonları ve bu fonksiyonların farklı tiplerinden, Dini fonksiyonlardan ve genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarından söz edilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları kullanılarak genelleştirilmiş Dini fonksiyonunun tanımı verilmiştir.

Bulgular bölümünde genelleştirilmiş Dini fonksiyonların geometrik özellikleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde tez genel anlamda değerlendirilmiş, benzer konudaki çalışmalarla kıyaslama yapılmıştır.

Kaynakça bölümünde tezde kullanılan kaynaklar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferensiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [34].

Tanım 2.1.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U\left(z_0, r\right)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [34].

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann koşullarını sağlar [34].

Teorem 2.1.1 (Liouville Teoremi): Tam ve sınırlı fonksiyonu sabittir[34].

Kompleks fonksiyonlar teorisinde analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.2 (Cauchy-Türev Formülü): f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

dır [34].

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{5/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci ve ikinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında üçüncü mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.1.3 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktası f fonksiyonu için bir ayrık tekil noktadır denir [34].

Teorem 2.1.3 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1 merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir [34].

Tanım 2.1.4 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir [34].

Tanım 2.1.5 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A bölgesinde meromorf fonksiyon denir [34].

Teorem 2.1.4 (Maksimum Modül Prensibi): Sabitten farklı bir f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz [34].

Sonuç 2.1.1: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır [34].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.1.1 (Schwarz lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq|z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için sağlanır [34].

Teorem 2.1.5 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değerini alamaz [34].

Sonuç 2.1.2: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ bu bölgede sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır [34].

2.2. Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda, ünivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak bu fonksiyon yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [22].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.1: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [22].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0.$ Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.1: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$

fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece, Teorem 2.2.1 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.2 (Konform dönüşüm): Eğer, bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer, bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir [22].

Örneğin; $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.2: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur [22].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.3 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [22].

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\ f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi ($z_0=0$ için)

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, \quad (z\in U) \tag{2.3}$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A}=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in\mathcal{A}:\forall z\in U \text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir [22,24,33].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z_0 = \dfrac{1+i}{2} \in U$ noktasında $f_1'(z_0) + f_2'(z_0) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{i(n-1)\theta}z^n, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n r^{n-1}z^n, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0\in U$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(U)$ olsun. Bu durumda,

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) *n.* kök dönüşümü: $n=2,3,...$ için

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+..., \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir [22].

Tanım 2.3.2 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [22].

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z),\ z\in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [22].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \phi(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.4 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in\mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orjin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir.

Eğer, bir f fonksiyonu U birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [22,30,33].

Yıldızıl fonksiyonların geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \le n$ dır [24,33].

Kısaca yıldızıl fonksiyonların kümesini

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

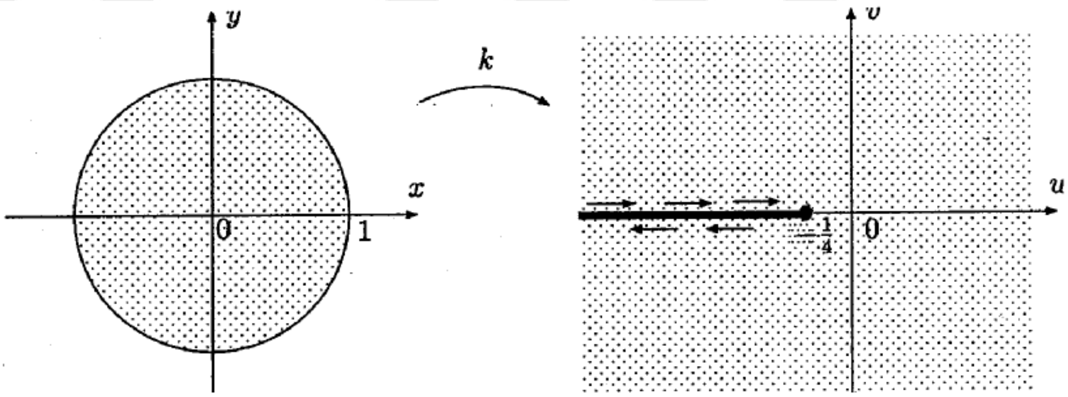
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca, $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n\in\mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca, Teorem 2.3.2 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z \in U$ için,

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha \in (0,2]$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$ fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer, bir f fonksiyonu birim diski konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [25,33].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.3: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu halde $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \le 1$ dır [24,33].

Örneğin; $f(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1}\in\mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\ge\frac{1-r^2}{1+r^2}>0\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2 ve 2.3.3 ün bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.4 (Alexander Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ ve $z\in U$ olmak üzere, $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f\in\mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g\in\mathcal{S}^*$ olmasıdır [24,25,33].

Tanım 2.3.6 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): $0\le\beta<1$ olmak üzere her $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta$$

koşulunu sağlayan $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\beta-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir [24].

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\beta -$mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir [24].

Özel olarak, $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere $\mathcal{S}^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(\beta) \subset \mathcal{C}$ dır.

Tanım 2.3.8 ($\mathcal{K}(\beta)$ sınıfı): $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu varsa bu durumda $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\beta -$mertebeden konvekse yakın fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{K}(\beta)$ ile gösterilir [26].

Özel olarak $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$ sınıfına konvekse yakın fonksiyonların sınıfı, bu sınıfa ait fonksiyonlara da konvekse yakın fonksiyon denir.

Ayrıca $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \beta$ eşitsizliğinde $g(z) = z \in \mathcal{S}^*$ alınırsa konvekse yakınlık şartı için daha kullanışlı olan $\operatorname{Re} f'(z) > \beta$ elde edilmiş olur. Yani $\operatorname{Re} f'(z) > \beta$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar da $\mathcal{K}(\beta)$ sınıfından olur.

Yukarıdaki sınıflar arasında

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

içerme bağıntısı vardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Gama ve Beta Fonksiyonu

Tanım 3.1.1 (Gama Fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3.1}$$

fonksiyonuna Euler gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinmektedir.

Analitik devam vasıtasıyla $\operatorname{Re} z > 0$ için (3.1) fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3.2}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı $P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ ve $Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa $P(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesi kuvvet serisine açılırsa

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^k \tag{3.3}$$

elde edilir.

Burada

$$\int_0^1 \left|t^{z-1}\right| dt \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^t t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da (3.3) integralinin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (3.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$\begin{aligned} P(z) = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu durumda (3.4) serisinin $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktasında basit kutba sahip ve $\operatorname{Re} z > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (3.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktalarında basit kutba sahip olan meromorf bir fonksiyon olur.

Ayrıca $\Gamma(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemdeki tanımları değişik versiyonlarla ifade edilebilir. Bunlar,

- $$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

- $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad \gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - In\ n \right)$$

- $$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \left[\lim_{n\to\infty} z e^{[1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/n)]z - zIn\ n} \right] \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z+k}{k} \right) e^{-z/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[z e^{-zIn\ n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n^z n!} \end{aligned}$$

- $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}, \quad z \neq 0,-1,-2,...$

şeklindedir. Ayrıca bu son eşitlik Gauss formülü olarak anılır. $z \neq 0,-1,-2,...,$ değerleri için Gauss formülünden

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1}\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}\right) = z\Gamma(z)$$

elde edilir.

Gama fonksiyonu ile ilgili

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2,...$
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0,1,2,...$
- $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

özellikler yazılabilir. Özel olarak

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

dir. Elbette gama fonksiyonunun özellikleri bunlarla sınırlı değildir.

Tanım 3.1.2. (Beta Fonksiyonu) : z ve w kompleks değişkenler olmak üzere

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,\ \ \mathrm{Re}(z)>0,\ \ \mathrm{Re}(w)>0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu gama fonksiyonuna bağlı olarak gösterilebilir [50]. Bunu göstermek için gama fonksiyonunun tanımından

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du\int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv$$

yazılır. Bu denklemde $u=a^2$, $v=b^2$ yazılırsa

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty e^{-a^2}a^{2x-1}da\int_0^\infty e^{-b^2}b^{2y-1}db$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+b^2)}\left|a\right|^{2x-1}\left|b\right|^{2y-1}da\ db$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlar dönüşümü $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$ yapılırsa

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}\left|r\cos\theta\right|^{2x-1}\left|r\sin\theta\right|^{2y-1}r\ dr\ d\theta$$

$$=\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-2}r\ dr\int_0^{2\pi}\left|(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\right|d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}\ d(r^2)\ 4\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\ d\theta$$

$$=\Gamma(x+y)2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\ d\theta$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

dolayısıyla $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ şeklini alır.

Beta fonksiyonu simetriktir, yani $B(x,y)=B(y,x)$ dir.

Tanım 3.1.3. (Pochhammer (Apell) sembolü): Γ gama fonksiyonunu göstermek üzere $n\in\mathbb{N}_0$, $a\in\mathbb{C}$ ve $a\neq 0,-1,-2,...$ olması durumunda

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\begin{cases}1, & n=0;\ a\in\mathbb{C}-\{0\}\\ a(a+1)...(a+n\text{-}1), & n\in\mathbb{N};\ a\in\mathbb{C}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise $(a)_n=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$ formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1}=(a+n)(a)_n$ eşitsizliği her zaman sağlanır.

Özel olarak $n=0$ alınırsa $(a)_0=1$ şeklinde tanımlanır.

3.2. Bessel Fonksiyonları

Bessel fonksiyonu ismini Alman gökbilimci ve matematikçi olan Bessel (22 Temmuz 1784-17 Mart 1846) den almıştır. Bessel fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlardan elde edilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ilk kez 1732 yılında Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Bernoulli sıfır mertebeden Bessel fonksiyonunu, salınım problemlerinin çözümünde kullanmıştır. Euler, 1764 yılında mertebesi tamsayı olan Bessel fonksiyonunu, gerilmiş zar titreşimlerinin analizinde kullanmıştır. Rayleigh, 1878 yılında Bessel fonksiyonlarını incelemiş ve bu fonksiyonların Laplace fonksiyonlarının özel hali olduğunu göstermiştir. Bessel, Kepler'in "aynı yerçekimi altındaki üç parçacığın hareketini hesaplama" problemi üzerindeki çalışmasının sonucunda Bessel fonksiyonunu elde etmiştir. 1824 yılında Bessel, "gezegenlerde karşılıklı çekim kuvvetleri sebebiyle oluşan düzensizlik" problemi üzerinde yaptığı çalışmalarda da Bessel fonksiyonunu kullanmıştır. Bu fonksiyonların fizikte dalga yayılımı ve statik potansiyelleri gibi birçok uygulaması vardır.

Tanım 3.2.1 (Bessel Diferansiyel Denklemi): v**,** reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - v^2) w(z) = 0 \tag{3.5}$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemine Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin bir özel çözümü olan

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \tag{3.6}$$

fonksiyonuna v mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu denir [53].

Tanım 3.2.2 (Modifiye Bessel Diferansiyel Denklemi): v**,** reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + v^2) w(z) = 0 \tag{3.7}$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemine Modifiye Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu diferansiyel denklemin bir özel çözümü olan

$$I_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(v+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \tag{3.8}$$

fonksiyonuna v mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu adı verilir [53].

Tanım 3.2.3 (Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi) : v**,** reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + \left[z^2 - v(v+1) \right] w(z) = 0 \tag{3.9}$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemine Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$j_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+3/2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+v} \tag{3.10}$$

fonksiyonuna v mertebeden birinci çeşit Küresel Bessel fonksiyonu denir [1].

Tanım 3.2.4 (Modifiye Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi): v**,** reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - \left[z^2 + v(v+1) \right] w(z) = 0 \tag{3.11}$$

diferansiyel denklemine Modifiye edilmiş Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$i_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(v+n+3/2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+v} \tag{3.12}$$

fonksiyonuna v mertebeden birinci çeşit Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu adı verilir [1].

Şimdi yukarıda tanımlanan son dört tanımı tek bir tanımla verecek olursak $b, c \in \mathbb{C}$ ve $d = d_1 v^2 + d_2 v + d_3$ $(d_1, d_2, d_3, v \in \mathbb{C})$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left(cz^2 + d \right) w(z) = 0 \tag{3.13}$$

denklemini göz önüne alalım.

Buradan Frobenius metodunu kullanarak (3.13) denkleminin $\forall n \geq 0$ *ve* $a_n \in \mathbb{C}$ için

$$w(z) = z^v \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)$$

şeklindeki çözümlerini araştırabiliriz.

$\forall n \geq 2$ için yukarıdaki sonsuz kuvvet serisinin a_n ve a_{n-2} katsayıları arasındaki ilişkinin

$$a_n n(n+2v+b-1) + a_n\left[(d_1+1)v^2 + (b+d_2-1)v + d_3\right] = -ca_{n-2} \tag{3.14}$$

şeklinde olduğu görülür.

Burada $d_1 = -1,\ d_2 = 1-b,\ d_3 = 0$ değerleri (3.14) denkleminde yerine koyulursa $\forall n \geq 2$ için (3.14) denklemi

$$a_n n(n+2v+b-1) = -ca_{n-2} \tag{3.15}$$

şeklini alır. O halde (3.13) denklemi

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left[cz^2 - v^2 + (1-b)v\right] w(z) = 0 \tag{3.16}$$

denklemine dönüşür. Bu denklem Bessel, Modifiye Bessel, Küresel Bessel ve Modifiye Küresel Bessel diferansiyel denklemlerinin genelleştirilmiş halidir.

(3.15) denklemindeki ilişkiyi kullanarak (3.16) denkleminin özel bir çözümünü ifade edebiliriz. Dolayısıyla $\forall z \in \mathbb{C}$ *ve* $a_0(v) \neq 0$ için

$$w(z) = a_0(v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n}{n! \prod_{m=1}^{n} \left(m + v + \frac{b-1}{2} \right)} z^{2n+v}$$

$$= a_0(v)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n \Gamma\left(v+\frac{b+1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(n+v+\frac{b+1}{2}\right)} z^{2n+v}$$

$$:= w_{v,b,c}(z)$$

olur. Eğer $a_0(v) = \left[2^v \Gamma\left(v+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1}$ alınırsa (3.16) denkleminin özel çözümü olarak $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$w_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c)^n}{n!\Gamma\left(n+v+\frac{b+1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \tag{3.17}$$

serisi elde edilir.

Burada $w_{v,b,c}(z)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞ olduğundan $w_{v,b,c}(z)$ serisi $\forall b,c,v,z \in \mathbb{C}$ için tüm kompleks düzlemde yakınsaktır.

Tanım 3.2.5 (Genelleştirilmiş Bessel Diferansiyel Denklemi): b,c ve v reel ya da kompleks bir sayı olsun. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left[cz^2 - v^2 + (1-b)v\right]w(z) = 0$$

lineer diferansiyel denklemine genelleştirilmiş Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin özel bir çözümü olan ve (3.17) ile verilen

$$w_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c)^n}{n!\Gamma\left(n+v+\frac{b+1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}$$

fonksiyonuna v mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu denir[4].

Burada b ve c ye çeşitli değerler vererek yukarıda tanımlanan dört tip v mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonlarının türlerini elde edebiliriz.

Örneğin, (3.16) denkleminde $b=c=1$ olarak alınırsa (3.5) denklemi elde edilir. $w_{v,b,c}(z)$ fonksiyonu da v mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu olan J_v ye dönüşür.

Diğer taraftan (3.16) denkleminde $b=-c=1$ olarak alınırsa (3.7) denklemi elde edilir. Aynı değerler için $w_{v,b,c}(z)$ fonksiyonu da v mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu olan I_v ye dönüşür.

Benzer şekilde (3.16) denkleminde $b-1=c=1$ yazılırsa (3.9) denklemi elde edilir. Aynı değerler için $w_{v,b,c}(z)$ fonksiyonu da $2j_v/\sqrt{\pi}$ fonksiyonuna indirgenir.

Aynı şekilde (3.16) denkleminde $b-1=-c=1$ yazılırsa (3.11) denklemi elde edilir. Aynı değerler için $w_{v,b,c}(z)$ fonksiyonu da $2i_v/\sqrt{\pi}$ fonksiyonuna indirgenir.

Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunun tanımına bakıldığında bu fonsiyonun normalize olmadığı açıktır. Şimdi normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunu elde edelim. Bunun için

$$a_0(v)=\left[2^v\Gamma\left(v+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1}$$

olmak üzere

$$u_{v,b,c}(z)=\frac{1}{a_0(v)}z^{1-\frac{v}{2}}w_{v,b,c}\left(\sqrt{z}\right)$$

elde edilir. Elde edilen $u_{v,b,c}(z)$ fonksiyonuna normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu denir. Daha açık bir ifadeyle bu fonksiyon

$$b_n = \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(v + n + \frac{b+1}{2}\right)}$$

için

$$u_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1}$$

şeklindedir. Pochhammer sembolünün tanımı olan

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

ifadesi göz önüne alınacak olursa

$$u_{v,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n} \frac{z^{n+1}}{n!} \tag{3.18}$$

elde edilir. Burada b, v, c birer kompleks sayı olup

$$\kappa = v + \frac{b+1}{2} \neq 0, -1, -2, ... \tag{3.19}$$

şeklindedir [6].

Bessel ve modifiye edilmiş Bessel fonksiyonlarında v nin özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilebilir:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z,$$

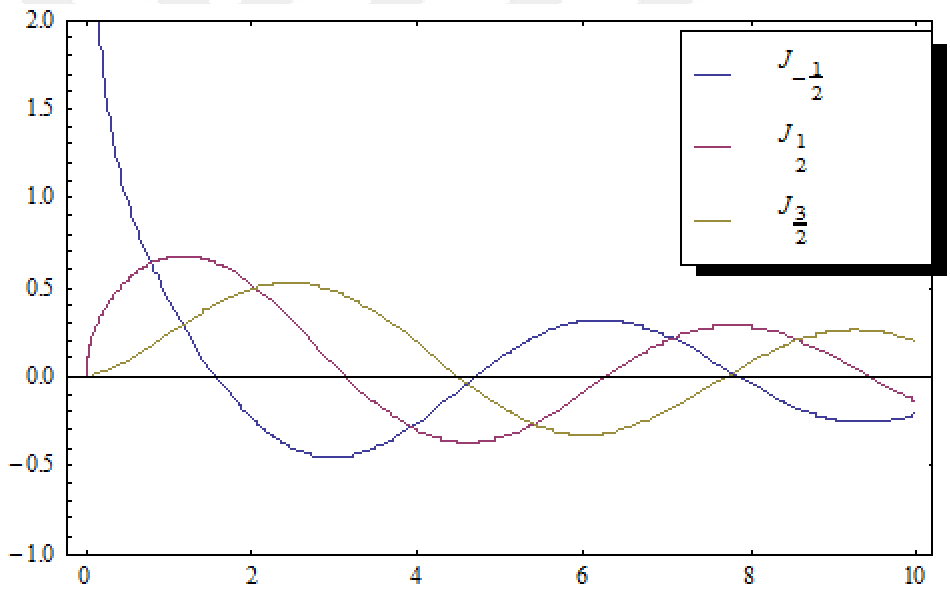
$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right),$$

$$I_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh z,$$

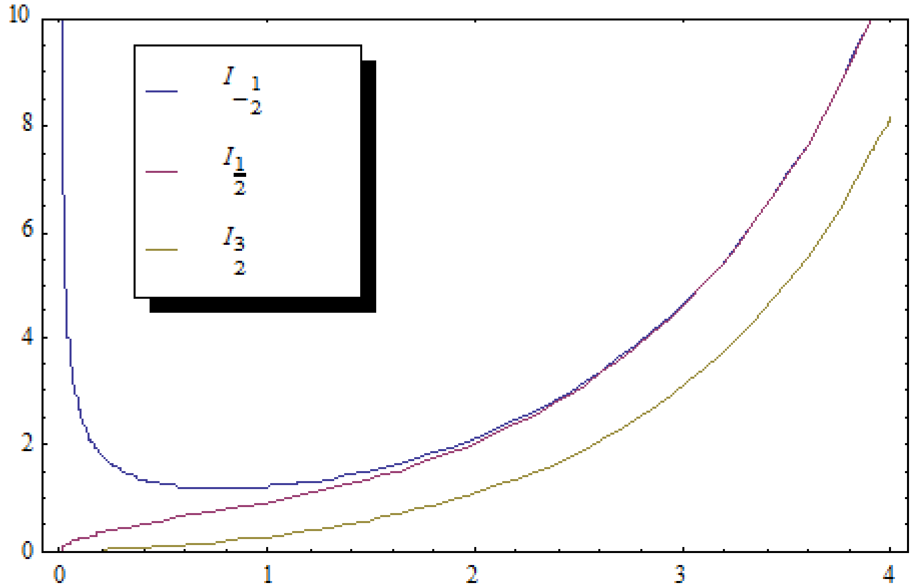
$$I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\text{sinhz},$$

$$I_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\cosh z-\frac{\sinh z}{z}\right)$$

şeklindedir. Aşağıda $J_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $I_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $v=-\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{2}$, $v=\frac{3}{2}$ değerleri için J_v ve I_v fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.1: $J_{-1/2}(x), J_{1/2}(x)$ ve $J_{3/2}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 3.2: $I_{-1/2}(x), I_{1/2}(x)$ ve $I_{3/2}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

3.3. Dini Fonksiyonları

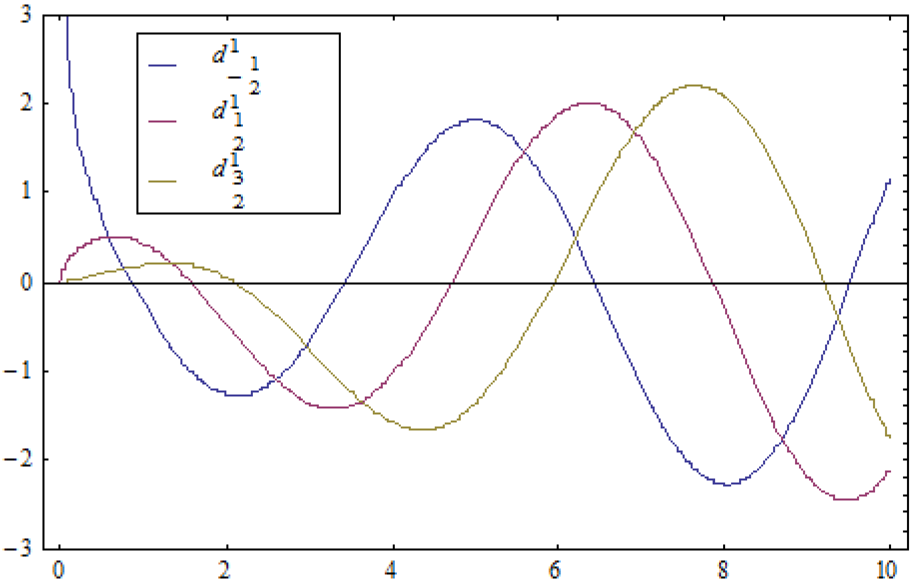
Bu başlık altında Bessel fonksiyonları ve modifiye Bessel fonksiyonları yardımıyla onların özel kombinasyonlarının tanım ve bazı özellikleri sunulmuştur. Bu özel kombinasyonlar uygulama alanı bulduğundan dolayı ayrı bir inceleme gerektirir.

Tanım 3.3.1 (Dini Fonksiyonu): v reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere $d_v^{1,2}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

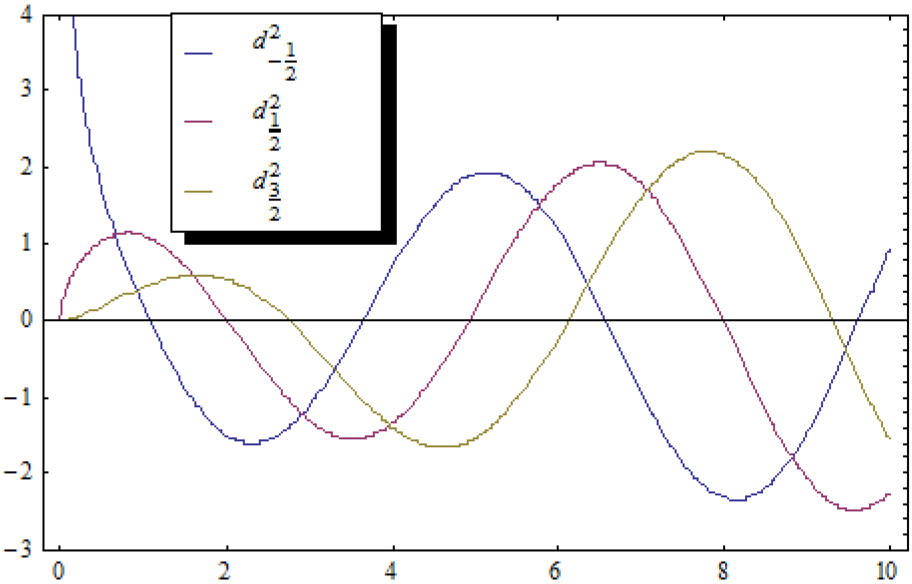
$$d_v^{1}(z)=(1-v)J_v(z)+zJ_v'(z)$$

$$d_v^{2}(z)=(2-v)J_v(z)+zJ_v'(z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara Dini fonksiyonları denir [8]. $d_\nu^{1,2}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunda $\nu=-\dfrac{1}{2}$, $\nu=\dfrac{1}{2}$, $\nu=\dfrac{3}{2}$ değerleri için grafikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.3: $d^1_{-\frac{1}{2}}(x), d^1_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $d^1_{\frac{3}{2}}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 3.4: $d^2_{-\frac{1}{2}}(x), d^2_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $d^2_{\frac{3}{2}}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

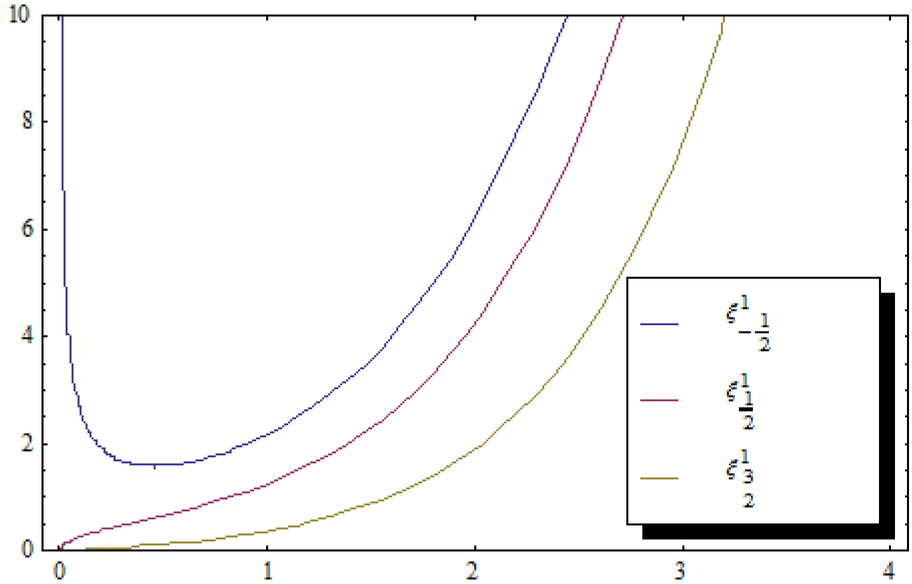
Tanım 3.3.2 (Modifiye Dini Fonksiyon) : ν reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere $\xi_\nu^{1,2}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$\xi_\nu^1(z)=(1-\nu)I_\nu(z)+zI_\nu'(z)$$

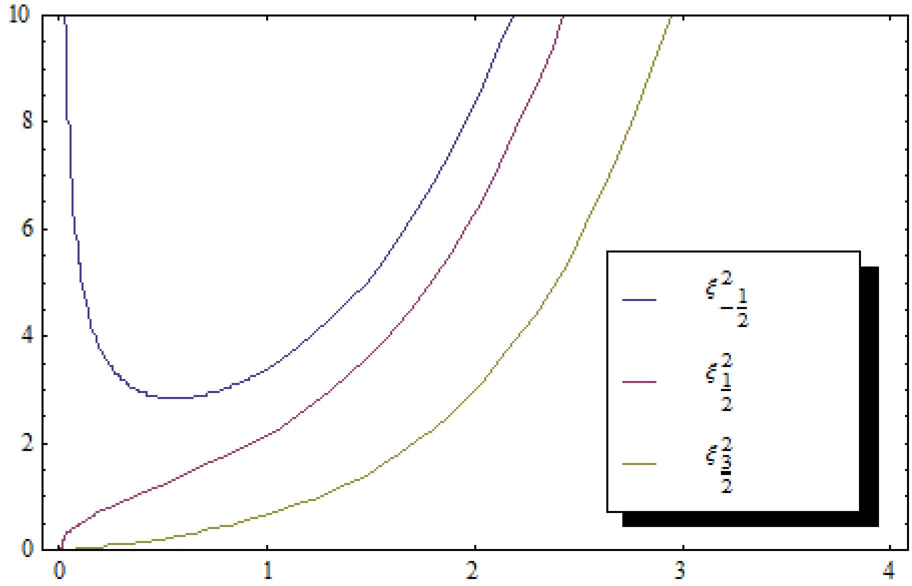
$$\xi_\nu^2(z)=(2-\nu)I_\nu(z)+zI_\nu'(z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara modifiye Dini fonksiyonlar denir [14].

$\xi_\nu^{1,2}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunda $\nu=-\dfrac{1}{2}$, $\nu=\dfrac{1}{2}$, $\nu=\dfrac{3}{2}$ değerleri için grafikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.5: $\xi^1_{-\frac{1}{2}}(x), \xi^1_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $\xi^1_{\frac{3}{2}}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 3.6: $\xi^2_{-\frac{1}{2}}(x), \xi^2_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $\xi^2_{\frac{3}{2}}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

Bu fonksiyonların normalize formları

$$D_\nu^1(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} d_\nu^1(\sqrt{z})$$

$$D_\nu^2(z) = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} d_\nu^2(\sqrt{z})$$

$$E_\nu^1(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} \xi_\nu^1(\sqrt{z})$$

$$E_\nu^2(z) = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} \xi_\nu^2(\sqrt{z})$$

şeklindedir. Bu fonksiyonların kısmi toplamları Aktaş ve Orhan [3], monotonluk özellikleri ve bazı fonksiyonel eşitsizlikleri Baricz, Ponnusamy ve Sing [14] ve geometrik özellikleri Raza ve Din [43], Deniz, Gören ve Çağlar [19] tarafından çalışılmıştır.

Raza ve Din [43] çalışmasında aşağıdaki sonuçları bulmuştur.

Teorem 3.3.1: $v \in \mathbb{R}, \beta \in [0,1)$ ve $z \in U$ olsun. Bu durumda

i. Eğer $v > \dfrac{12 + \sqrt{720 - 576\beta}}{32(1-\beta)}$ ise $D_v^1(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$

ii. Eğer $v > \dfrac{3(2-\beta)}{2(1-\beta)}$ ise $D_v^1(z) \in \mathcal{C}(\beta)$

iii. Eğer $v > \dfrac{6}{1-\beta}$ ise $D_v^1(z) \in \mathcal{K}\left(\dfrac{1+\beta}{4}\right)$

iv. Eğer $v > 0$ ise bu durumda $U_{1/2}$ diskinde $D_v^1(z) \in \mathcal{S}^*$

v. Eğer $v > 1$ ise bu durumda $U_{1/2}$ diskinde $D_v^1(z) \in \mathcal{C}$

sonuçları doğrudur [43].

Biz de bu tez çalışmasında gerek yukarıda tanımlanan Dini fonksiyonları gerekse genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları birlikte düşünerek aşağıdaki tanımı verdik.

Tanım 3.3.3 (Genelleştirilmiş Dini Fonksiyonu): $a \in \mathbb{R}$, b, c ve v kompleks sayılar olsun. $G_{v,a,b,c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$G_{v,a,b,c}(z) = (a - v)w_{v,b,c}(z) + zw'_{v,b,c}(z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonuna genelleştirilmiş Dini fonksiyonu denir.

$G_{v,a,b,c}$ fonksiyonu yukarıda ifade edilen Dini ve modifiye Dini fonksiyonların genelleştirilmesidir. Örneğin;

$$G_{v,1,1,1}(z) = d_v^1(z)$$

$$G_{v,2,1,1}(z) = d_v^2(z)$$

$$G_{v,1,1,-1}(z) = \xi_v^1(z)$$

$$G_{v,2,1,-1}(z) = \xi_v^2(z)$$

elde edilir. $G_{v,a,b,c}$ fonksiyonunun tanımından da görüldüğü gibi bu fonksiyon normalize değildir. Bu fonksiyonların normalize formu $\varphi_{v,a,b,c} : U \to \mathbb{C}$

$$\varphi_{v,a,b,c}(z) = \frac{2^{\nu}}{a}\Gamma\left(\nu + \frac{b+1}{2}\right) z^{1-\frac{\nu}{2}}\left[(a-\nu)\, w_{v,b,c}(\sqrt{z}) + \sqrt{z} w'_{v,b,c}(\sqrt{z})\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n (2n+a)\Gamma(\nu+1)}{a4^n n!\Gamma(n+\nu+1)} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n (2n+a)}{a4^n n!(\kappa)_n} z^{n+1}$$

$$= z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-c)^n (2n+a)}{a4^n n!(\kappa)_n} z^{n+1}$$

şeklinde verilir. Buna normalize edilmiş genelleştirilmiş Dini fonksiyonu denir.

Deniz, Gören ve Çağlar [19] çalışmasında aşağıdaki sonuçları bulmuştur.

Teorem 3.3.2: $a\in\mathbb{R}^+, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{C}$ ve $\kappa\in\mathbb{C}-\{\mathbb{Z}^-\cup\{0\}\}$ olsun. Bu durumda

i. Eğer

$$\kappa > \frac{8|c| + a(5|c|-8) + \sqrt{64a^2 + 16a(3a+8)|c| + [64 + a(33a+208)]|c|^2}}{16a}$$

ise $\varphi_{v,a,b,c}(z)\in\mathcal{S}^*$

ii. Eğer

$$\kappa > \frac{16|c| + a(7|c|-6) + \sqrt{100a^2 + 20a(5a+16)|c| + [256 + a(a+704)]|c|^2}}{16a}$$

ise $\varphi_{v,a,b,c}(z)\in\mathcal{C}$

iii. Eğer

$$\kappa > \frac{8|c| + a(5|c|-8) + \sqrt{64a^2 + 16a(3a+8)|c| + [64 + a(33a+208)]|c|^2}}{16a}$$

ise bu durumda $U_{1/2}$ diskinde $\varphi_{v,a,b,c}(z)\in\mathcal{C}$

iv. Eğer

$$\kappa > \frac{4|c| + a(3|c|-8) + \sqrt{64a^2 + 16a(a+4)|c| + (a+4)(9a+4)|c|^2}}{16a}$$

ise bu durumda $U_{1/2}$ diskinde $\varphi_{v,a,b,c}(z)\in\mathcal{S}^*$

sonuçları doğrudur [19].

4. BULGULAR

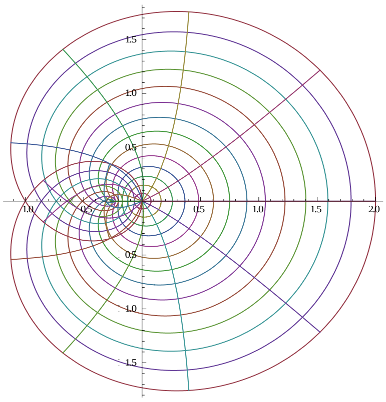
Bu bölümde ilk olarak ana teoremlerin ispatında kullanılacak bazı lemmalara yer verilmiştir.

Lemma 4.1. $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu U da analitik ve $a_1=1$, her $n\geq 2$ için $a_n \geq 0$ olsun. Eğer $\{na_n-(n+1)a_{n+1}\}_{n\geq 1}$ ile $\{na_n\}_{n\geq 1}$ dizileri azalan ise f, U da yıldızıldır [23].

Lemma 4.2. $c_1=1$ olmak üzere $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ fonksiyonu U da analitik ve her $n\geq 2$ için $c_n\geq 0$ olsun. Eğer $\{c_n\}_{n\geq 1}$ bir konveks azalan dizi (yani her $n\geq 1$ için $c_n-2c_{n+1}+c_{n+2}\geq 0$ ve $c_n-c_{n+1}\geq 0$) ise $\forall z\in U$ için $\operatorname{Re} g(z)>\frac{1}{2}$ dir [23].

Lemma 4.3. $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z\in U$ için $\left|\frac{f(z)}{z}-1\right|<1$ şartını sağlıyorsa $|z|<\frac{1}{2}$ diskinde yıldızıl ve dolayısıyla ünivalenttir [29].

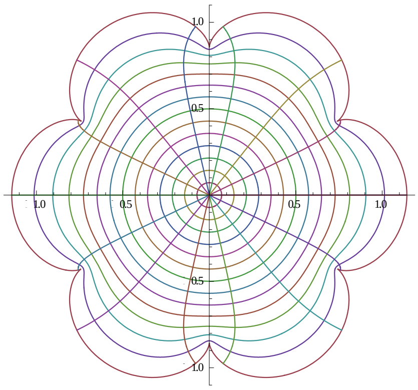
Örneğin; $f(z)=z+z^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon aşağıdaki grafiğinden de görüldüğü gibi U birim diskinde yıldızıl değildir. Bunun yanısıra fonksiyon $|z|<\frac{1}{2}$ diskinde yıldızıldır. Çünkü $\forall z\in U$ için $\left|\frac{f(z)}{z}-1\right|<1$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Lemma 4.3 den $f(z)$ fonksiyonu $|z|<\frac{1}{2}$ diskinde yıldızıldır.



Şekil 4.1 : U birim diskinin $f(z)=z+z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Lemma 4.4. $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z\in U$ için $\left|f'(z)-1\right|<1$ şartını sağlıyorsa $|z|<\dfrac{1}{2}$ diskinde konvekstir [29].

Örneğin; $f(z)=z+\dfrac{1}{n}z^n$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon U da konveks değildir. n için çeşitli değerler verilerek konveks olmadığı açıkça görülür. Özel olarak $n=7$ alarak grafik incelenirse konveks olmadığı görülür. Ancak fonksiyon $|z|<\dfrac{1}{2}$ diskinde konvekstir. Çünkü $\forall z\in U$ için $f'(z)=1+z^{n-1}$ olup $\left|f'(z)-1\right|<1$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Lemma 4.4 den $f(z)$ fonksiyonu $|z|<\dfrac{1}{2}$ diskinde konveks olur.



Şekil 4.2: U birim diskinin $f(z)=z+\frac{1}{7}z^7$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Lemma 4.5 $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z\in U$ için $|f'(z)-1|<\frac{2}{\sqrt{5}}$ şartını sağlıyorsa $U=\{z:|z|<1\}$ diskinde yıldızıldır [29].

Lemma 4.6 $0\le\beta<1$ olmak üzere, $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z\in U$ için $|zf''(z)|<\frac{1-\beta}{4}$ şartını sağlıyorsa $\operatorname{Re} f'(z)>\frac{1+\beta}{4}$ dır [31].

Lemma 4.7 $w_{v,b,c}$, v mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup $\kappa=v+(b+1)/2\neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere $\forall b,v,c\in\mathbb{C}$ ve her $z\in\mathbb{C}$ için

a. $zw_{v-1,b,c}(z)+czw_{v+1,b,c}(z)=(2v+b-1)w_{v,b,c}(z)$

b. $zw'_{v,b,c}(z)+(v+b-1)w_{v,b,c}(z)=zw_{v-1,b,c}(z)$

c. $zw'_{v,b,c}(z)+czw_{v+1,b,c}(z)=pw_{v,b,c}(z)$

d. $\left[z^{-v}w_{v,b,c}(z)\right]'=-cz^{-v}w_{v+1,b,c}(z)$

rekürans bağıntılar doğrudur [6].

Bundan sonraki kısımda ana teoremlere yer verilmiştir. Çalışma boyunca $\kappa = \nu + \frac{b+1}{2} \neq 0,-1,-2,...$ ve $\varphi_{\nu,a,b,c} : U \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_{\nu,a,b,c}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-c)^n (2n+a)}{a4^n n! (\kappa)_n} z^{n+1}$$

olarak kullanılacaktır.

Ana sonuçlarımızdan ilki normalize edilmiş genelleştirilmiş Dini fonksiyonların $\beta-$mertebeden yıldızıllığı ile ilgilidir. Bulunan sonuç aşağıdadır.

Teorem 4.1: $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ ve $\beta \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $\Delta_{a,c,\beta} = 4(\beta-2)|c| + a(8-5|c| + \beta(3|c|-8))$ olmak üzere

$$\kappa > \frac{\Delta_{a,c,\beta} - \sqrt{\Delta_{a,c,\beta}^2 - 8a(\beta-1)|c|(-8(2+a)(\beta-2) + (16+a-2\beta)|c|)}}{16a(\beta-1)}$$

ise $\varphi_{\nu,a,b,c}(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$ olur.

İspat. $\varphi_{\nu,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun $\beta-$mertebeden yıldızıllığını göstermek için $\left| \frac{z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)}{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)} - 1 \right| < 1-\beta$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

üçgen eşitsizliği ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizlikleri kullanılacaktır.

İlk olarak $\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z) - \frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right|$ için bir üst sınır bulalım. Dolayısıyla

$$\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z) - \frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n} z^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+a)|c|^n}{a4^n n!(\kappa)_n}$$

$$\leq \frac{|c|}{4\kappa a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+a)}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}} |c|^{n-1}$$

$$\leq \frac{|c|}{4\kappa a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}} |c|^{n-1} + \frac{|c|}{4\kappa a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}} |c|^{n-1}$$

$$\leq \frac{|c|}{2\kappa a} + \frac{|c|}{2\kappa a} 8 \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1} + \frac{|c|}{4\kappa} + \frac{|c|}{4\kappa} 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$= \frac{|c|^2 [14+a] + |c| 8(\kappa+1)(2+a)}{4a\kappa(8(\kappa+1)-|c|)}$$

elde edilir. İlk ve son terimden

$$\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z) - \frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right| \leq \frac{|c|^2 [14+a] + |c| 8(\kappa+1)(2+a)}{4a\kappa(8(\kappa+1)-|c|)} \tag{4.1}$$

yazılır.

İkinci olarak $\left|\frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right|$ için bir alt sınır bulalım. İspat için,

$$|z_1 + z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$$

ve

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \ \ n \in \mathbb{N}$$

$$(\kappa+1)_{n-1} n! \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliklerini kullanacağız. Böylece

$$\left|\frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right| \geq 1 - \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n} z^n\right|$$

$$\geq 1 - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{a4^n n!(\kappa)_n} |c|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a4^n n!(\kappa)_n} |c|^n\right]$$

$$\geq 1 - \left[\frac{2|c|}{4\kappa a} + \frac{2|c|}{4\kappa a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c|^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}} + \frac{|c|}{4\kappa} + \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c|^{n-1}}{4^{n-1}(n)!(\kappa+1)_{n-1}}\right]$$

$$\geq 1 - \left[\frac{|c|}{2\kappa a} + \frac{|c|}{\kappa a} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1} + \frac{|c|}{4\kappa} + \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}\right]$$

$$\geq \frac{-2|c|^2 - |c| 4\left(a\kappa + 2(a+2)(\kappa+1)\right) + 32a\kappa(k+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1) - |c|\right)}$$

bulunur. İlk ve son terimden

$$\left|\frac{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)}{z}\right| \geq \frac{-2|c|^2 - |c| 4\left(a\kappa + 2(a+2)(\kappa+1)\right) + 32a\kappa(k+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1) - |c|\right)} \tag{4.2}$$

elde edilir. Böylece (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerinden

$$\left|\frac{z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)}{\varphi_{\nu,a,b,c}(z)} - 1\right| \leq \frac{|c|^2[14+a] + |c| 8(\kappa+1)(2+a)}{-2|c|^2 - |c| 4\left(a\kappa + 2(a+2)(\kappa+1)\right) + 32a\kappa(k+1)}$$

olur. Şimdi $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun $\beta-$mertebeden yıldızıllığını inceleyelim. Teoremin hipotezindeki κ için eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{|c|^2\left[14+a\right]+|c|8\left(\kappa+1\right)\left(2+a\right)}{-2|c|^2-|c|4\left(a\kappa+2\left(a+2\right)\left(\kappa+1\right)\right)+32a\kappa\left(k+1\right)}<1-\beta$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $\left|\frac{z\varphi'_{v,a,b,c}\left(z\right)}{\varphi_{v,a,b,c}\left(z\right)}-1\right|<1-\beta$ olup $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $\beta-$mertebeden yıldızıl olur. Bu durumda teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1 de özel olarak $\beta=0$ alınırsa Teorem 3.3.2 nin i. sonucu elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 4.1 de özel olarak $a=b=c=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1: Eğer $\beta\in\left[0,1\right)$ olmak üzere

$$v>\frac{17\beta-11+\sqrt{\left(\beta+5\right)^2+8(1-\beta)(65-26\beta)}}{16(1-\beta)}$$

ise bu durumda $D_v^1(z)\in\mathcal{S}^*(\beta)$ olur.

Sonuç 4.1 ve Teorem 3.3.1 in i. şıkkı karşılaştırma açısından değerlendirildiğinde her $\beta\in\left[0,1\right)$ için

$$\frac{12+\sqrt{720-576\beta}}{32(1-\beta)}>\frac{17\beta-11+\sqrt{\left(\beta+5\right)^2+8(1-\beta)(65-26\beta)}}{16(1-\beta)}$$

olduğu açık bir şekilde görülmektedir. Dolayısıyla Sonuç 4.1 de bulunan sınır Teorem 3.3.1 in i. şıkkında verilen Raza ve Din [43] nin sonucundan daha iyidir. Sonuç 4.1 de özel olarak $\beta=0$ alınırsa $v>\dfrac{-11+\sqrt{545}}{16}\approx 0.7715$ için $D_v^1(z)$ fonksiyonu yıldızıldır.

Teorem 4.2: $a\in\mathbb{R}^+, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{C}$, $\kappa\in\mathbb{R}-\{\mathbb{Z}^-\cup\{0\}\}$ olsun. Eğer

$$\kappa>\frac{a(5|c|-8)+8|c|+\sqrt{64a^2+16a(3a+8)|c|+[64+a(33a+208)]|c|^2}}{16a}$$

olursa $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde konveks olur [19].

İspat. Bu teoremi ispatlamak için Lemma 4.4 den $\left|\varphi'_{v,a,b,c}(z)-1\right|<1$ olduğunu göstermek yeterlidir. İspatta

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

üçgen eşitsizliği ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}\ge[2(\kappa+1)]^{n-1}n,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}\ge[2(\kappa+1)]^{n-1},\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$n!(\kappa+1)_{n-1}\ge[2(\kappa+1)]^{n-1}\qquad n\in\mathbb{N}$$

eşitsizlikleri kullanılacaktır. $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun tanımını göz önüne alarak $\left|\varphi'_{v,a,b,c}(z)-1\right|$ ifadesini inceleyelim. Dolayısıyla

$$\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)-1\right| = \left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n} z^n - 1\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+n(a+2)+a\right)}{a4^n n!(\kappa)_n}|c|^n$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a4^n (n-1)!(\kappa)_n}|c|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+2}{a4^n (n-1)!(\kappa)_n}|c|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a4^n \, \mathrm{n}!(\kappa)_n}|c|^n$$

$$\le \frac{|c|}{2\kappa a} + \frac{|c|}{\kappa a}4\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1} + \left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{4\kappa} + \left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{2\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa} + \frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$= \frac{(16+a)|c|^2 + 16(a+2)(\kappa+1)|c|}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)}$$

elde edilir. Teorem hipotezinde ki κ için eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{(16+a)|c|^2 + 16(a+2)(\kappa+1)|c|}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)} < 1$$

bulunur. $\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)-1\right| < 1$ olup $\varphi_{\nu,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde konveks olur.

Diğer taraftan Teorem 4.2 de özel olarak $a=b=c=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2: Eğer

$$\nu > \frac{-11+\sqrt{545}}{16} \approx 0.7715$$

olursa $D_\nu^1(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde konveks olur.

Sonuç 4.2 nin $v>\dfrac{-11+\sqrt{545}}{16}\approx 0.7715$ şartına bakıldığında Teorem 3.3.1 in v. şıkkında verilen Raza ve Din [43] nin $v>1$ sonucundan daha iyi olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Teorem 4.3: $a\in\mathbb{R}^{+}, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{C}$, $\kappa\in\mathbb{R}-\left\{\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}\right\}$ ve $\beta\in[0,1)$ olsun. Bu durumda $\Theta_{a,c,\beta}=8(\beta-2)|c|+a(6-7|c|+\beta(5|c|-8))$ olmak üzere

$$\kappa>\frac{\Theta-\sqrt{\Theta^{2}_{a,c,\beta}+8a(\beta-1)(4|c|(-16-15|c|+4\beta(|c|+2))+a(-8+|c|(-23+6|c|+\beta(16+|c|)))}}{16a(\beta-1)}$$

ise $\varphi_{v,a,b,c}(z)\in\mathcal{C}(\beta)$ olur.

İspat. $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun $\beta-$mertebeden konveksliğini incelerken $\left|\dfrac{z\varphi''_{v,a,b,c}(z)}{\varphi'_{v,a,b,c}(z)}\right|<1-\beta$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

eşitsizliği ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}\ge[2(\kappa+1)]^{n-1}n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$32(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}\ge n^{2}[2(\kappa+1)]^{n-1},\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}\ge[2(\kappa+1)]^{n-1}\qquad n\in\mathbb{N}$$

eşitsizlikleri kullanılır. $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun tanımı göz önüne alınarak öncelikle $\left|z^{2}\varphi''_{v,a,b,c}(z)\right|$ için bir üst sınır bulunur.

Dolayısıyla

$$\left|z^2\varphi''_{\nu,a,b,c}(z)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n}z^{n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+a)(n+1)}{a4^n(n-1)!(\kappa)_n}|c|^n$$

$$\le \frac{|c|}{2a\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1} + \frac{(a+2)|c|}{4a\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1}$$

$$\le \frac{|c|}{2\kappa a}+\frac{|c|}{\kappa a}16\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1} + \left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{4\kappa}+\left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{\kappa}2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa}+\frac{|c|}{4\kappa}2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$=\frac{(44-7a)|c|^2+\left(8(\kappa+1)(a+4)-a\right)|c|+8a(\kappa+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)}$$

elde edilir. O halde ilk ve son terimden

$$\left|z^2\varphi''_{\nu,a,b,c}(z)\right| \le \frac{(44-7a)|c|^2+\left(8(\kappa+1)(a+4)-a\right)|c|+8a(\kappa+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)} \tag{4.3}$$

olur.

İkinci olarak $\left|z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)\right|$ için bir alt sınır bulalım. İspat için

$$|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$$

ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \ge \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} n, \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$n!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliklerini kullanırız. Şimdi $\varphi_{\nu,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun tanımı kullanarak $\left|z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)\right|$ ifadesini inceleyelim

Dolayısıyla

$$\left|z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)\right| = \left|z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n}z^n\right| \geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+n(a+2)+a\right)}{a4^n n!(\kappa)_n}|c|$$

$$\geq 1-\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a4^n(n-1)!(\kappa)_n}|c|^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+2}{a4^n(n-1)!(\kappa)_n}|c|^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a4^n\,\mathrm{n}!(\kappa)_n}|c|^n\right]$$

$$\geq 1-\left[\frac{|c|}{2\kappa a}+\frac{|c|}{\kappa a}4\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}+\left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{4\kappa}+\left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{2\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}\right]$$

$$-\frac{|c|}{4\kappa}+\frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$=\frac{-(16+a)|c|^2-\left(4a\kappa+8(\kappa+1)(2a+4)\right)|c|+32a\kappa(\kappa+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)}$$

elde edilir. O halde ilk ve son terimden

$$\left|z\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)\right| \geq \frac{-(16+a)|c|^2-\left(4a\kappa+8(\kappa+1)(2a+4)\right)|c|+32a\kappa(\kappa+1)}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)} \tag{4.4}$$

yazılır. Burada (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerini kullanılırsa. Dolayısıyla alt ve üst sınırdan

$$\left|\frac{z\varphi''_{v,a,b,c}(z)}{\varphi'_{v,a,b,c}(z)}\right| \leq \frac{(44-7a)|c|^2+\left(8(\kappa+1)(a+4)-a\right)|c|+8a(\kappa+1)}{-(16+a)|c|^2-\left(4a\kappa+8(\kappa+1)(2a+4)\right)|c|+32a\kappa(\kappa+1)}$$

bulunur. Teorem hipotezinde ki κ için eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{(44-7a)|c|^2+\left(8(\kappa+1)(a+4)-a\right)|c|+8a(\kappa+1)}{-(16+a)|c|^2-\left(4a\kappa+8(\kappa+1)(2a+4)\right)|c|+32a\kappa(\kappa+1)} < 1-\beta$$

olduğu görülür.

Böylece $\left|\frac{z\varphi''_{v,a,b,c}(z)}{\varphi'_{v,a,b,c}(z)}\right| < 1-\beta$ olup $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $\beta-$mertebeden konveks olur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 de özel olarak $\beta = 0$ alınırsa Teorem 3.3.2 nin ii. sonucu elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 4.3 de özel olarak $a = b = c = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3: Eğer $\beta \in [0,1)$ için

$$v > \frac{11\beta+1+\sqrt{(5\beta-17)^2+8(\beta-1)(48\beta-124)+(17\beta-25)}}{16(1-\beta)}$$

ise $\varphi_{v,a,b,c}(z) \in \mathcal{C}(\beta)$ olur.

Sonuç 4.3 ve Teorem 3.3.1 in ii. şıkkı karşılaştırma açısından değerlendirildiğinde her $\beta \in [0,1)$ için

$$\frac{3(2-\beta)}{2(1-\beta)} > \frac{11\beta+1+\sqrt{(5\beta-17)^2+8(\beta-1)(48\beta-124)+(17\beta-25)}}{16(1-\beta)}$$

olduğu açık bir şekilde görülmektedir. Dolayısıyla Sonuç 4.3 de bulunan sınır Teorem 3.3.1 nin ii. şıkkında verilen Raza ve Din [43] nin sonucundan daha iyidir. Ayrıca Sonuç 4.3 de özel olarak $\beta = 0$ alınırsa $v > \dfrac{1+2\sqrt{314}}{16} \approx 2.2775$ için $D_v^1(z)$ fonksiyonu konvekstir.

Teorem 4.4: $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{R} - \left\{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\right\}$ olsun. Eğer

$$\kappa > \frac{4|c| + a(3|c|-8) + \sqrt{64a^2 + 16a(a+4)|c| + (a+4)(9a+4)|c|^2}}{16a}$$

olursa $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde yıldızıl olur.

İspat. $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun $U_{1/2}$ de yıldızıllığını göstermek için Lemma 4.3 den $\left|\dfrac{\varphi_{v,a,b,c}(z)}{z} - 1\right| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. İspat için

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

üçgen eşitsizliği

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \ge \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(\kappa+1)_{n-1} n! \ge \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizlikleri birlikte kullanılıp $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun tanımından da faydalanılarak $\left|\frac{\varphi_{v,a,b,c}(z)}{z}-1\right|$ ifadesi incelenir. Dolayısıyla

$$\left|\frac{\varphi_{v,a,b,c}(z)}{z}-1\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n}z^n\right|$$

$$\le \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a4^n n!(\kappa)_n}|c|^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a4^n n!(\kappa)_n}|c|^n\right]$$

$$\le \left[\frac{2|c|}{4\kappa a}+\frac{2|c|}{4\kappa a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|c|^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}+\frac{|c|}{4\kappa}+\frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|c|^{n-1}}{4^{n-1}(n)!(\kappa+1)_{n-1}}\right]$$

$$\le \left[\frac{|c|}{2\kappa a}+\frac{|c|}{\kappa a}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}+\frac{|c|}{4\kappa}+\frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}\right]$$

$$\le \frac{2|c|^2+8(\kappa+1)(2+a)|c|}{4a\kappa(8(\kappa+1)-|c|)}$$

olur. Teorem hipotezinde ki κ için eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{2|c|^2+8(\kappa+1)(2+a)|c|}{4a\kappa(8(\kappa+1)-|c|)}<1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\left|\frac{\varphi_{v,a,b,c}(z)}{z}-1\right|<1$ olup $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde yıldızıl olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Diğer taraftan Teorem 4.4 de özel olarak $a=b=c=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4: Eğer

$$v > \frac{-17+\sqrt{209}}{16} \approx -0.1589$$

olursa $D_v^1(z)$ fonksiyonu $U_{1/2}$ diskinde yıldızıl olur.

Sonuç 4.4 ün $v > \frac{-17+\sqrt{209}}{16} \approx -0.1589$ şartına bakıldığında Teorem 3.3.1 nin iv. şıkkında verilen Raza ve Din [43] nin $v > 1$ sonucundan daha iyi olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Teorem 4.5: $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ ve $\kappa \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ olsun.

$$\varsigma_{a,c,\beta} = 80|c|^2 + 8a|c|\left[8\sqrt{5} + 10|c| + 9\sqrt{5}|c|\right] + a^2\left[64 + |c|\left(-16 + 32\sqrt{5} + 21|c| + 8\sqrt{5}|c|\right)\right]$$

olmak üzere eğer

$$\kappa > \frac{20|c| + a\left[-8\sqrt{5} + \left(10+\sqrt{5}\right)|c| + \sqrt{5\varsigma_{a,c,\beta}}\right]}{16\sqrt{5}a}$$

ise bu durumda $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu U birim diskinde yıldızıldır.

İspat. Lemma 4.5 gereğince bu teoremi ispatlamak için $\left|\varphi'_{v,a,b,c}(z) - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{5}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

üçgen eşitsizliğini ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$n!(\kappa+1)_{n-1} \geq \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizlikleri kullanılıp $\varphi_{\nu,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun da tanımı göz önüne alınarak $\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)-1\right|$ ifadesinin değerlendirilmesini inceleyeceğiz. Dolayısıyla

$$\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)-1\right| = \left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+a)(-c)^n}{a4^n n!(\kappa)_n} z^n - 1\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n^2+n(a+2)+a\right)}{a4^n n!(\kappa)_n}|c|^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a4^n (n-1)!(\kappa)_n}|c|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+2}{a4^n (n-1)!(\kappa)_n}|c|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a4^n\, \mathrm{n}!(\kappa)_n}|c|^n$$

$$\leq \frac{|c|}{2\kappa a} + \frac{|c|}{\kappa a}4\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1} + \left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{4\kappa} + \left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{2\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa} + \frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$= \frac{(16+a)|c|^2 + 16(a+2)(\kappa+1)|c|}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)}$$

olur. İlk ve son terimden

$$\left|\varphi'_{\nu,a,b,c}(z)-1\right| \leq \frac{(16+a)|c|^2 + 16(a+2)(\kappa+1)|c|}{4a\kappa\left(8(\kappa+1)-|c|\right)} < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

yazılır. Böylece, teorem hipotezinden Lemma 4.5 in koşulları sağlanır. Dolayısıyla $\varphi_{\nu,a,b,c}(z)$ fonksiyonu U birim diskinde yıldızıl olur.

Teorem 4.6: $a \in \mathbb{R}^{+}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}^{-} \cup \{0\}\}$ ve $0 \le \beta < 1$ olsun. Bu durumda $\varpi_{a,c,\beta} = 8(\beta - 5)|c| + a\left[\beta(5|c| - 8) - 13|c|\right]$ olmak üzere

$$\kappa > \frac{\varpi_{a,c,\beta} - \sqrt{\varpi^{2}{}_{a,c,\beta} + 8a(\beta - 1)(16|c|\left[\beta(2 + |c| - 2(5 + 6|c|)\right]) + a(-32 + |c|\left[-44 + 27|c| + \beta(16 + |c|)\right])}}{16a(\beta - 1)}$$

ise $\operatorname{Re} \varphi'_{v,a,b,c}(z) > \dfrac{1+\beta}{4}$ olur. Yani $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu $\dfrac{1+\beta}{4}$ – mertebeden konvekse yakındır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için Lemma 4.6 dan $\left|z\varphi''_{v,a,b,c}(z)\right| < \dfrac{1-\beta}{4}$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. İspat için

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

üçgen eşitsizliği ve

$$8(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \ge \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$32(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \ge n^{2}\left[2(\kappa+1)\right]^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$2(n-1)!(\kappa+1)_{n-1} \ge \left[2(\kappa+1)\right]^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizlikleri kullanılarak ve $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonunun da tanımını göz önüne alarak $\left|z\varphi''_{v,a,b,c}(z)\right|$ ifadesininin değerlendirilmesi durumunu inceleyeceğiz.

Dolayısıyla

$$\left|z\varphi''_{v,a,b,c}(z)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+a)(-c)^{n}}{a4^{n} n!(\kappa)_{n}} z^{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+a)(n+1)}{a4^{n}(n-1)!(\kappa)_{n}} |c|^{n}$$

$$\leq \frac{|c|}{2a\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1}+\frac{(a+2)|c|}{4a\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa+1)_{n-1}}|c|^{n-1}$$

$$\leq \frac{|c|}{2\kappa a}+\frac{|c|}{\kappa a}16\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}+\left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{4\kappa}+\left(\frac{a+2}{a}\right)\frac{|c|}{\kappa}2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$+\frac{|c|}{4\kappa}+\frac{|c|}{4\kappa}2\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{|c|}{8(\kappa+1)}\right]^{n-1}$$

$$=\frac{(44-7a)|c|^2+\big(8(\kappa+1)(a+4)-a\big)|c|+8a(\kappa+1)}{4a\kappa\big(8(\kappa+1)-|c|\big)}$$

elde edilir. Teorem hipotezinde ki κ için eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{(44-7a)|c|^2+\big(8(\kappa+1)(a+4)-a\big)|c|+8a(\kappa+1)}{4a\kappa\big(8(\kappa+1)-|c|\big)}<\frac{1-\beta}{4}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece $\left|z\varphi''_{v,a,b,c}(z)\right|<\frac{1-\beta}{4}$ elde edilir. Dolayısıyla Lemma 4.6 dan $\varphi_{v,a,b,c}(z)$ fonksiyonu için $\operatorname{Re}\varphi'_{v,a,b,c}(z)>\frac{1+\beta}{4}$ yazılır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.5: $0\leq\beta<1$ olsun. Eğer

$$v>\frac{11\beta+37+\sqrt{(5\beta-53)^2+2432\beta(1-\beta)+17\beta-49}}{16(1-\beta)}$$

ise $D_v^1(z)$ fonksiyonu $\frac{1+\beta}{4}-$mertebeden konvekse yakındır.

Eğer Sonuç 4.5 de $\beta=0$ alınırsa $\nu > \frac{37+\sqrt{2760}}{16} \approx 5.5959$ için $D_\nu^1(z)$ fonksiyonu $\frac{1}{4}-$ mertebeden konvekse yakındır.

Teorem 4.7: $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$, $c < -0{,}117874$ olsun.

$$N(c)=\sqrt{143c^2+152c+64}-12c-8$$

olmak üzere eğer $\kappa > N(c)$ ise, bu durumda $\varphi_{\nu,a,b,c} \in \mathcal{S}^*$ olur.

İspat. Bu teoremin ispatı için Lemma 4.1 den faydalanacağız. Bunun için $\varphi_{\nu,a,b,c}$ fonksiyonunun tanımından

$$\varphi_{\nu,a,b,c}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

yazılır. Burada

$$A_n=\frac{\left[2(n-1)+a\right](-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}$$

dır.

A_n nin tanımında $c < -0{,}117874$ ve hipotezdeki şartlar göz önüne alınırsa her $n \geq 1$ için $A_n > 0$ olur.

Diğer taraftan

$$A_n=\frac{\left[2(n-1)+a\right](-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}=\frac{2(n-1)(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}+\frac{(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F_n = \frac{2(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-2)!(\kappa)_{n-1}} \text{ ve } G_n = \frac{(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}$$

olmak üzere $A_n = F_n + G_n$ şeklinde yazılır.

Teorem ispatlamak için Lemma 4.1 den faydalanacağız. Yani

i. $\{nA_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalan

ii. $\{nA_n - (n+1)A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalan

olduğunu göstermeliyiz.

i. Önce $\{nA_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalan olduğunu ispat edelim. $\{nA_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalan olduğunu göstermek için $\{nF_n\}_{n\geq 2}$ ve $\{nG_n\}_{n\geq 1}$ dizilerinin azalan olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak $\{nF_n\}_{n\geq 2}$ dizisinin azalanlığını gösterelim. Bunun için $nF_n - (n+1)F_{n+1} > 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Dolayısıyla

$$nF_n - (n+1)F_{n+1} = \frac{2n(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-2)!(\kappa)_{n-1}} - \frac{2(n+1)(-c)^{n}}{a4^{n}(n-1)!(\kappa)_{n}}$$

$$= \frac{2(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-2)!(\kappa)_{n-1}}\left[n - \frac{(n+1)(-c)}{4(n-1)(\kappa+n-1)}\right]$$

$$= F_n\left[\frac{4n(n-1)(\kappa+n-1)+(n+1)c}{4(n-1)(\kappa+n-1)}\right]$$

yazılır. Burada $U_1(n) = 4n(n-1)(\kappa+n-1)+(n+1)c$ alalım. $n\geq 2$ ve c negatif olduğundan $\kappa > 0$ olup dolayısıyla $F_n > 0$ ve $\kappa + n - 1 > 0$ olur. Şimdi $nF_n - (n+1)F_{n+1} > 0$ olduğunu göstermek için $U_1(n) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Dolayısıyla

$$U_1(n) = 4n(n-1)(\kappa+n-1)+(n+1)c$$

$$= n\left[4(n-1)(\kappa+n-1)+c\right]+c$$

$$= n\left[4(n-1)^2+4(n-1)\kappa+c\right]+c \quad (n \geq 2 \text{ için } (n-1)^2 \geq 2(n-1)-1 \text{ den})$$

$$> n\left[8(n-1)-4+4(n-1)\kappa+c\right]+c \quad (n \geq 2 \text{ için})$$

$$> n\left[4(\kappa+1)+c\right]+c$$

olur. Burada $n \geq 2$ ve $\kappa > N(c) > \frac{-3c}{8} - 1 > \frac{-c}{4} - 1$ olduğundan

$$U_1(n) > 8(\kappa+1)+3c > 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\kappa > N(c)$ için $nF_n - (n+1)F_{n+1} > 0$ olur. Bu ise $\{nF_n\}_{n\geq 2}$ dizisinin kesin azalan olduğunu gösterir.

Şimdi $\{nG_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalanlığını gösterelim. Bunun için $nG_n - (n+1)G_{n+1} > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla

$$nG_n - (n+1)G_{n+1} = \frac{n(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}} - \frac{(n+1)(-c)^n}{4^n(n)!(\kappa)_n}$$

$$= \frac{(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}}\left[n + \frac{(n+1)c}{4n(\kappa+n-1)}\right]$$

$$= G_n\left[\frac{4n^3+n^2(4\kappa-4)+nc+c}{4n(\kappa+n-1)}\right]$$

yazılır. Burada $V_1(n) = 4n^3 + n^2(4\kappa - 4) + nc + c$ alalım. $n \geq 1$ ve c negatif olduğundan $\kappa > 0$ olup dolayısıyla $G_n > 0$ ve $\kappa + n - 1 > 0$ olur. Böylece $\{G_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalanlığını göstermek için $V_1(n) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla

$$V_1(n) = 4n^3 + n^2(4\kappa - 4) + nc + c \quad (n \geq 1 \text{ için } n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1 \text{ eşitsizliğinden})$$

$$> 4(3n^2 - 3n + 1) + n^2(4\kappa - 4) + nc + c$$

$$= n^2(4\kappa + 8) + n(c - 12) + c + 4 \quad (\kappa > N(c) > -2 \text{ ve } n^2 \geq 2n - 1 \text{eşitsizliklerinden})$$

$$> (2n-1)(4\kappa + 8) + n(c - 12) + c + 4$$

$$= n(c + 4 + 8\kappa) + c - 4\kappa - 4$$

yazılır. Burada $n \geq 1$ ve $\kappa > N(c) > -\dfrac{c}{2} > -\dfrac{c+4}{8}$ olduğundan

$$V_1(n) > 2\kappa + c > 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\kappa > N(c)$ için $nG_n - (n+1)G_{n+1} > 0$ olur. Bu ise $\{nG_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin kesin azalanlığını gösterir. Böylece $\{nA_n\}_{n\geq 1}$ dizisi azalandır.

ii. Şimdi $\{nA_n - (n+1)A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalanlığını gösterelim. Bunun için $\{nF_n - (n+1)F_{n+1}\}_{n\geq 2}$ ve $\{nG_n - (n+1)G_{n+1}\}_{n\geq 1}$ dizilerinin azalan olduğunu göstermek gerekir.

Önce $\{nF_n - (n+1)F_{n+1}\}_{n\geq 2}$ dizisinin azalan olduğunu gösterelim. Kolaylık olması açısından $K_n = nF_n - (n+1)F_{n+1}$ olsun. Böylece

$$K_n - K_{n+1} = nF_n - 2(n+1)F_{n+1} + (n+2)F_{n+2} > 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla

$$K_n - K_{n+1} = \frac{2n(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-2)!(\kappa)_{n-1}} - \frac{4(n+1)(-c)^n}{a4^n(n-1)!(\kappa)_n} + \frac{2(n+2)(-c)^{n+1}}{a4^{n+1}(n)!(\kappa)_{n+1}}$$

$$= \frac{2(-c)^{n-1}}{a4^{n-1}(n-2)!(\kappa)_{n-1}}\left[n + \frac{(n+1)c}{2(n-1)(\kappa+n-1)} + \frac{(n+2)c^2}{16n(n-1)(\kappa+n)(\kappa+n-1)}\right]$$

$$= F_n \left[\frac{\begin{array}{l}16n^5 + 16n^4(2\kappa-2) + 16n^3(\kappa^2 - 3\kappa + 1 + c/2) \\ +16n^2(\kappa - \kappa^2 + (\kappa+1)c/2) + n(8c\kappa + c^2) + 2c^2\end{array}}{16n(n-1)(\kappa+n)(\kappa+n-1)}\right]$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} U_2(n) = {} & 16n^5 + 16n^4(2\kappa-2) + 16n^3(\kappa^2 - 3\kappa + 1 + c/2) \\ & +16n^2(\kappa - \kappa^2 + (\kappa+1)c/2) + n(8c\kappa + c^2) + 2c^2 \end{aligned}$$

alalım. Şimdi $U_2(n) > 0$ olduğunu gösterelim. $U_2(n)$ yeniden düzenlenecek olunursa

$$U_2(n) = n\begin{bmatrix}16n^4 + 16n^3(2\kappa-2) + 16n^2(\kappa^2 - 3\kappa + 1 + c/2) \\ +16n(\kappa - \kappa^2 + (\kappa+1)c/2) + (8c\kappa + c^2)\end{bmatrix} + 2c^2$$

yazılır. Analizden bilinen $n^4 \geq 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$U_2(n) > n\begin{bmatrix}16(4n^3 - 6n^2 + 4n - 1) + 16n^3(2\kappa-2) + 16n^2(\kappa^2 - 3\kappa + 1 + c/2) \\ +16n(\kappa - \kappa^2 + (\kappa+1)c/2) + (8c\kappa + c^2)\end{bmatrix} + 2c^2$$

$$\begin{aligned} &= n\begin{bmatrix}16n^3(2\kappa+2) + 16n^2(\kappa^2 - 3\kappa + 5 + c/2) \\ +16n(4 + \kappa - \kappa^2 + (\kappa+1)c/2) + (8c\kappa + c^2 - 16)\end{bmatrix} + 2c^2 \\ &:= X_1(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son ifadede $\kappa > N(c) > -1$ olduğundan $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ eşitsizliğinden

$$X_1(n) > n\begin{bmatrix} 16\left(3n^2 - 3n + 1\right)\left(2\kappa + 2\right) + 16n^2\left(\kappa^2 - 3\kappa + 5 + c/2\right) \\ +16n\left(4 + \kappa - \kappa^2 + \left(\kappa + 1\right)c/2\right) + \left(8c\kappa + c^2 - 16\right) \end{bmatrix} + 2c^2$$

$$\begin{aligned} &= n\begin{bmatrix} 16n^2\left(\kappa^2 + 3\kappa + 1 + c/2\right) + 16n\left(-2 - 5\kappa - \kappa^2 + \left(\kappa + 1\right)c/2\right) \\ +\left(32\kappa + 8c\kappa + c^2 + 16\right) \end{bmatrix} + 2c^2 \\ &:= X_2(n) \end{aligned}$$

yazılır. Son ifadede n^2 nin katsayısı $\kappa^2 + 3\kappa + 1 + c/2$, $\kappa > N(c)$ için negatif değildir. Böylece $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} X_2(n) &> n\begin{bmatrix} 16\left(2n - 1\right)\left(\kappa^2 + 3\kappa + 1 + c/2\right) + 16n\left(-2 - 5\kappa - \kappa^2 + \left(\kappa + 1\right)c/2\right) \\ +\left(32\kappa + 8c\kappa + c^2 + 16\right) \end{bmatrix} + 2c^2 \\ &= n\left[16n\left(\kappa + \kappa^2 + c + \left(\kappa + 1\right)c/2\right) + \left(-16\kappa^2 - 16\kappa - 8c + 8c\kappa + c^2\right)\right] + 2c^2 \\ &:= X_3(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada n nin katsayısı olan $\kappa + \kappa^2 + c + \left(\kappa + 1\right)c/2$, $\kappa > N(c)$ için negatif değildir. Dolayısıyla $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} X_3(n) &> n\left[16\kappa^2 + 16\kappa + 40c + 24c\kappa + c^2\right] + 2c^2 \\ &:= X_4(n) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\kappa > N(c)$ ve $n \geq 2$ için $16\kappa^2 + 16\kappa + 40c + 24c\kappa + c^2 > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} X_4(n) &> 32\kappa^2 + 32\kappa + 80c + 48c\kappa + 4c^2 \\ &:= X_5(n) \end{aligned}$$

olur. Son ifadede $\kappa > N(c)$ ve $n \geq 2$ için $16\kappa^2 + 16\kappa + 40c + 24c\kappa + 2c^2 > 0$ olduğundan

$$X_5(n) > 0$$

elde edilir. Böylece

$$U_2(n) > X_1(n) > X_2(n) > X_3(n) > X_4(n) > X_5(n) > 0$$

yazılır. Dolayısıyla $\{K_n\}_{n\geq 2}$ dizisi kesin azalandır.

Şimdi $\{nG_n - (n+1)G_{n+1}\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalanlığını göstermeliyiz. Kolaylık olması açısından $P_n = nG_n - (n+1)G_{n+1}$ yazalım. Dolayısıyla

$$P_n - P_{n+1} = nG_n - 2(n+1)G_{n+1} + (n+2)G_{n+2} > 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece

$$P_n - P_{n+1} = \frac{n(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}} - \frac{2(n+1)(-c)^n}{4^n (n)!(\kappa)_n} + \frac{(n+2)(-c)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!(\kappa)_{n+1}}$$

$$= \frac{(-c)^{n-1}}{4^{n-1}(n-1)!(\kappa)_{n-1}} \left[n + \frac{2c(n+1)}{4n(\kappa+n-1)} + \frac{(n+2)c^2}{16n(n+1)(\kappa+n)(\kappa+n-1)} \right]$$

$$= G_n \left[n + \frac{2c(n+1)}{4n(\kappa+n-1)} + \frac{(n+2)c^2}{16n(n+1)(\kappa+n)(\kappa+n-1)} \right]$$

$$= G_n \left[\frac{\begin{array}{l} 16n^5 + 32\kappa n^4 + n^3\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 16 + 8c\right) + n^2\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c\right) \\ + n\left(16\kappa c + 8c + c^2\right) + 8c\kappa + 2c^2 \end{array}}{16n(n+1)(\kappa+n-1)(\kappa+n)} \right]$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} V_2(n) &= 16n^5 + 32\kappa n^4 + n^3\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 16 + 8c\right) + n^2\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c\right) \\ &\quad + n\left(16\kappa c + 8c + c^2\right) + 8c\kappa + 2c^2 \end{aligned}$$

alalım. Şimdi $V_2(n) > 0$ olduğunu gösterelim. $V_2(n)$ yeniden düzenlenecek olunursa

$$V_2(n) = n\begin{bmatrix} 16n^4 + 32\kappa n^3 + n^2\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 16 + 8c\right) \\ +n\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c\right) + 16\kappa c + 8c + c^2 \end{bmatrix} + 8c\kappa + 2c^2$$

yazılır. Analizden bilinen $n^4 \geq 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$V_2(n) > n\begin{bmatrix} 16(4n^3 - 6n^2 + 4n - 1) + 32\kappa n^3 + n^2\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 16 + 8c\right) \\ +n\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c\right) + 16\kappa c + 8c + c^2 \end{bmatrix} + 8c\kappa + 2c^2$$

$$\begin{aligned} &= n\begin{bmatrix} 32n^3(\kappa + 2) + n^2\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 112 + 8c\right) \\ +n\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c + 64\right) + 16\kappa c + 8c + c^2 - 16 \end{bmatrix} + 8c\kappa + 2c^2 \\ &:= Y_1(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada n^3 ün katsayısı $\kappa + 2$, $\kappa > N(c)$ için negatif değildir. Böylece ifadede $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ eşitsizliğini kullanılırsa

$$Y_1(n) > n\begin{bmatrix} (3n^2 - 3n + 1)(64 + 32\kappa) + n^2\left(16\kappa^2 + 16\kappa - 112 + 8c\right) \\ +n\left(16\kappa^2 - 16\kappa + 16c + 8\kappa c + 64\right) + 16\kappa c + 8c + c^2 - 16 \end{bmatrix} + 8c\kappa + 2c^2$$

$$\begin{aligned} &= n\begin{bmatrix} n^2\left(16\kappa^2 + 112\kappa + 80 + 8c\right) + n\left(16\kappa^2 - 112\kappa + 16c + 8\kappa c - 128\right) \\ +16\kappa c + 8c + 32\kappa + c^2 + 48 \end{bmatrix} + 8c\kappa + 2c^2 \\ &:= Y_2(n) \end{aligned}$$

olur. İfadedeki n^2 nin katsayısı $16\kappa^2 + 112\kappa + 80 + 8c,$ $\kappa > N(c)$ için negatif değildir. Böylece $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$Y_2(n) > n\begin{bmatrix}(2n-1)\left(16\kappa^2+112\kappa+80+8c\right)+n\left(16\kappa^2-112\kappa+16c+8\kappa c-128\right)\\+16\kappa c+8c+32\kappa+c^2+48\end{bmatrix}+8c\kappa+2c^2$$
$$= n\begin{bmatrix}n\left(48\kappa^2+112\kappa+32c+8\kappa c+32\right)\\-16\kappa^2-80\kappa+16\kappa c+c^2-32\end{bmatrix}+8c\kappa+2c^2$$
$$:= Y_3(n)$$

elde edilir. Burada n nin katsayısı olan $48\kappa^2+112\kappa+32c+8\kappa c+32,\ \kappa > N(c)$ için negatif değildir. Dolayısıyla $n \geq 1$ için

$$Y_3(n) > n\left(32\left(\kappa^2+\kappa c+c+1\right)+c^2\right)+8\kappa c+c^2$$
$$:= Y_4(n)$$

bulunur. Buradan $\kappa > N(c)$ ve $n \geq 1$ için $32\left(\kappa^2+\kappa c+c+1\right)+c^2 > 0$ olduğundan

$$Y_4(n) > 32\left(\kappa^2+\kappa c+c+1\right)+3c^2$$
$$:= Y_5(n)$$

olur. Son ifadede $\kappa > N(c)$ ve $n \geq 1$ için $32\left(\kappa^2+\kappa c+c+1\right)+3c^2 > 0$ olduğundan

$$Y_5(n) > 0$$

elde edilir. Böylece

$$V_2(n) > Y_1(n) > Y_2(n) > Y_3(n) > Y_4(n) > Y_5(n) > 0$$

yazılır. Dolayısıyla $\left\{P_n\right\}_{n\geq 1}$ dizisi kesin azalandır.

Böylece $\left\{K_n\right\}$ ve $\left\{P_n\right\}$ dizileri azalan olduğundan $\left\{nA_n-(n+1)A_{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ dizisinin azalan olduğu görülür.

Sonuç olarak $\{nA_n\}_{n\geq 1}$ ve $\{nA_n-(n+1)A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ dizileri azalandır. Böylece Lemma 4.1 e göre $\varphi_{\nu,a,b,c}\in\mathcal{S}^*$ olur. Bununla teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.7 de özel olarak $a=b=1$ ve $c=-1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6: Eğer $\nu>3+\sqrt{55}$ ise, bu durumda $E_\nu^1(z)\in\mathcal{S}^*$ olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları yardımıyla genelleştirilmiş Dini fonksiyonu tanımlanmıştır. Akabinde genelleştirilmiş Dini fonksiyonların $\beta-$mertebeden yıldızıllığı ve konveksliği, konvekse yakınlığı ve $U_{1/2}$ diskinde yıldızıllığı ve konveksliği incelenmiştir. Bulunan sonuçların Raza ve Din'in [43] çalışmasındaki sonuçlarının hem genelleştirilmişi hem de özel durumlarda onların buldukları sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.

Bu konu üzerine çalışacak araştırmacılar genelleştirilmiş Dini fonksiyonların integral operatörlerinin geometrik özelliklerini, kısmi toplamlarını ve düzgün konvekslik, düzgün yıldızıllığı gibi diğer geometrik özelliklerini araştırabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1965. "Handbook of mathematical functions with formulas, graps and mathematical tables", Dover publications, New York.

[2] Aghalary, R., Ebadian, A., Orouji Z., 2012. "Certain properties of rational functions involving Bessel functions", Tamkang J. Math. 43(3), 391-398.

[3] Aktaş, I., Orhan, H., 2016. "Partial sums of normalized Dini functions", Journal of Classical Analysis 9(2), 127-135 .

[4] Baricz, Á., 1994. "Generalized Bessel functions of the first kind", 203, Romania.

[5] Baricz, Á., 2010."Generalized Bessel Functions of the First Kind", Springer-Verlag, Berlin,

[6] Baricz, Á., 2008. "Geometric properties of generalized Bessel functions", Publ. Math.Debrecen 73, 155-178.

[7] Baricz, Á., Çağlar, M., Deniz, E., 2016. "Starlikeness of Bessel functions and their derivatives", Math. Inequal. Appl. 19 (2), 439-499.

[8] Baricz, Á., Deniz, E., Yağmur, N., 2016. "Close-to-convexity of normalized Dini functions", Mathematische Nachrichten 289 (14-15), 1721-1726.

[9] Baricz, Á., Deniz, E., Çağlar, M., Orhan, H., 2015. "Differential subordinations involving generalized Bessel functions", Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38(3), 33-42.

[10] Baricz, Á., Frasin, B.A., 2010. "Univalence of integral operators involving Bessel functions", App. Math. Lett. 23(4), 371-376.

[11] Baricz, Á., Kupan, P., Szasz, R., 2014. "The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind", Proc. Amer. Math. Soc. 142(6), 2019-2025.

[12] Baricz, Á., Orhan, H., Szasz, R., 2016. "The radius of α-convexity of normalized Bessel functions of the first kind", Comput. Methods. Funct. Theory 16(1), 93-103.

[13] Baricz, Á., Ponnusamy, S., 2010. "Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions", Integral Transforms Spec. Funct. 21(9), 641–653.

[14] Baricz, A., Ponnusamy, S., Sing, S., 2016. "Modified Dini functions; Monotonicity Patterns and Functinal Inequalities", Acta Mathematica Hungarica, 149, 120-142.

[15] Baricz, Á., Szasz, R., 2016. "Close-to-convexity of some special functions and their derivatives", Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 39, 427-437.

[16] Baricz, Á., Szasz, R., 2014. "The radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind", Anal. Appl. 12(5), 485-509.

[17] Brown, R. K., 1960. "Univalence of Bessel functions", Proc. Amer. Math. Soc. 11(2), 278-283.

[18] Deniz, E., 2013. "Convexity of integral operators involving generalized Bessel functions", Integral Transforms Spec. Funct. 24(3), 201-216.

[19] Deniz, E., Gören, Ş., Çağlar, M., 2017. "Starlikeness and Convexity of the Generalized Dini functions", AIP Conference Proceedings, 1833, 020004.

[20] Deniz, E., Orhan H., Srivastava H. M., 2011. "Some sufficient conditions for univalence of certain families of integral operators involving generalized Bessel functions", Taiwanese J. Math. 15(2), 883-917.

[21] Deniz, E., Szasz, R., 2017. "The radius of uniform convexity of Bessel functions", J. Math. Anal. Appl. 453, 572-588.

[22] Duren, P. L., 1983. "Univalent functions" Springer Verlag. New York Inc.

[23] Fejer, L., 1936. "Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge", Acta Litterarum ac Scientiarum, 8, 89–115.

[24] Goodman, A. W., 1983. "Univalent Functions I". Mariner Publishing Company, 245, Tapma, Florida.

[25] Graham I., Kohr G., 2003. "Geometric function theory in one and higherdimensions", Marcel Dekker, Inc.

[26] Hamidi, S. G., Jahangiri, J. M., 2014. "Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions" , C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 352 (1), 17-20.

[27] Kharsani, Al-, H, M., Zahrani, Al-, A, M., Hajri, Al-, S, S., Pogany, T, K., 2016. “Univalence criteria for linear fractional differential operators associated with a generalized Bessel function”, Math. Commun. 21(2), 171-188.

[28] Kreyszing, E., Todd J., 1960. “The radius of univalence of Bessel functions”, Linois J. Math. 4, 143-149.

[29] MacGregor, T. H., 1964. “A class of univalent functions”, Proceedings of the American Mathematical Society, 15(2), 311-317.

[30] Mocanu, P. T., 1988. “Some starlikeness conditions for analytic functions”, Rev. Roumaine Math. Puress Appl. 33**,** 117-124.

[31] Owa, S., Nunokawa, M., Saitoh, H., Srivastava. H.M., 2002. “Close-to-convexity, starlikeness, and convexity of certain analytic functions”, Appl. Math. Letters 15, 63-69.

[32] Polat, S., 2013. “Hipergeometrik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri”, yüksek lisans tezi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kafkas Üniversitesi.

[33] Pommerenke, Ch., 1975. “Univalent Functions”, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[34] Ponnusamy, S., Silverman, H., 2006. “Complex Variables with Applications”, Birkhäuser. Boston.

[35] Porwal, S., 2014. “Harmonic starlikeness and convexity of integral operators generated by generalized Bessel functions”, Acta Math. Vietnam. 36(3), 337-346.

[36] Porwal, S., 2013. “Mapping properties of generalized Bessel function on some subclasses of univalent functions”, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 20(2), 51-60.

[37] Porwal S., 2015. “Some connections between various subclasses of planar harmonic mappings involving generalized Bessel functions”, Afr. Mat. 26(5-6), 997-1008.

[38] Porwal, S., Ahmad, M., 2015. “Some sufficient conditions for generalized Bessel functions associated with conic regions”, Vietnam J. Math. 43 (1), 163-172.

[39] Porwal, S., Dilshad, A., 2015. “Connections between certain classes of harmonic univalent mappings involving generalized Bessel functions”, Gulf J. Math. 3 (4), 98-110.

[40] Porwal, S., Dixit, K. K., 2013. “An application of generalized Bessel functions on certain analytic functions”, Acta Univ. M. Beli Ser. Math. 51-57.

[41] Porwal, S., Vijaya, K., Kasthuri, M., 2016. “Connections between various subclasses of planar harmonic mappins involving generalized Bessel functions”, Matematiche (Catania) 71 (1), 99-114.

[42] Ramachandran, C., Annamalai, S., Sivasubramanian, S., 2014. “Inclusion relations for Bessel functions for domains bounded by conical domains”, Adv. Difference Equ. 288, 12pp.

[43] Raza, M., Din M. U., “Certain geometric properties of the generalized Dini functions”. in ResearchGate.

[44] Selinger, V., 1995. “Geometric properties of normalized Bessel functions”, Pure Math. Appl. 6, 273-277.

[45] Shah, S. M., Trimble, S.Y., 1971. “Entire functions with univalent derivaties”, J. Math. Anal. Appl, 33, 220-229.

[46] Szasz, R., 2014. “About the starlikeness of Bessel functions”, Integral Transforms Spec. Funct. 24 (9), 750-755.

[47] Szasz, R., 2015. “About the radius of starlikeness of Bessel functions of the first kind”, Monatsh. Math. 176 (2), 323-330.

[48] Szasz, R., 2010. “On starlikeness of Bessel functions of the first kind”, 8th Joint Conference on Mathematic a Computer Scince- MaCS, 63-70, novadat Lty., Gyor, (2011).

[49] Szasz, R., Kupan, P., 2009. “About the univalence of the Bessel functions”, Stud. Unıv. Babeş- Bolyai Math. 54(1), 127-132.

[50] Şahin, R., 2011. “Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar”, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi.

[51] Tang, H., Deniz, E., 2014. “Third-order differential superordination result for analytic functions involving the generalized Bessel functions”, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 34 (6), 1707-1719.

[52] Tang, H., Srivastava, H. M., Deniz, E., Li, S. H., 2015. “Third-order differential superordination involving the generalized Bessel functions”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38(4), 1669-1688.

[53] Watson, G.N., 1944. “A Treatise on the Theory of Bessel Functions”, Cambridge University Press, Cambridge.

[54] Vijaya, K., Kasthuri, M., 2015. “Subclasses of starlike and convex functions associated with Bessel functions”, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 22(1), 83-91.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Şeyma GÖREN

Doğum Yeri: Keçiören

Doğum Tarihi: 05.10.1988

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise: Kars Alparslan Lisesi - 2005

Lisans: Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü - 2011

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)

Yıl Yayınları (SCI ve diğer):
Deniz, E., Gören, Ş., Çağlar, M., Starlikeness and Convexity of the Generalized Dini functions, AIP Conference Proceedings, 1833, 020004, (2017).

Çalıştığı Kurum/Kurumlar:

2012 yılında Kars Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfı'nda İnceleme Uzmanı olarak göreve başladım.2014 Şubat ayında Gazi Kars Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak Milli Eğitim'e atandım. 2016 Eylül ayından itibaren Kars Kız Anadolu İmam Hatip Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.