T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ BİR ALT SINIFI İÇİN ÜÇÜNCÜ HANKEL DETERMİNANTI

Yekta GÜLSÜN

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

MAYIS-2017

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ BİR ALT SINIFI İÇİN ÜÇÜNCÜ HANKEL DETERMİNANTI

Yekta GÜLSÜN

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

MAYIS-2017

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yekta GÜLSÜN' ün Doç. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Analitik Fonksiyonların Belli Bir Alt Sınıfı İçin Üçüncü Hankel Determinantı" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

31 / 05 / 2017

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	A. Akdemir
Üye	: Doç. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2017 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL
Enstitü Müdürü V.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Bu tez konusunu bana vererek engin tecrübesiyle yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e ve çalışmam esnasında, tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yekta GÜLSÜN   Kars - 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında, analitik fonksiyonların belli bir alt sınıfının üçüncü Hankel determinantı yani $H_3(1) = a_3\left(a_2a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right)$ için bir üst sınır bulunmuştur. Ayrıca parametrelerin özel durumlarında analitik fonksiyonların özel alt sınıfları için üst sınırlar verilmiştir.

2017, 71 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Konveks fonksiyon, Yıldızıl fonksiyon, Hankel determinantı, Ma-Minda konveks ve yıldızıl fonksiyon, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, a upper bound for the third Hankel determinant, that is, $H_3(1) = a_3\left(a_2a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right)$ of a certain subclass of the analytic functions is obtained. Also, for special subclasses of analytic functions in special cases of parameters sharp upper bounds are given.

2017, 71 pages

Keywords: Analytic functions, Univalent function, Convex function, Starlike function Hankel determinant, Ma-Minda convex and starlike function, Subordination.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	$\{z : \lvert z\rvert < 1, z \in \mathbb{C}\}$ kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	Sayma sayılar kümesi
γ	$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri
$f^{(n)}$	Bir f fonksiyonun *n*. dereceden türevi
$\mathcal{U}(z_0, r)$	z_0 merkezli *r* yarıçaplı açık disk
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{A}$	$\left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \ \ z \in \mathcal{U} \right\}$ kümesi
$\mathcal{S}$	$\{f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U}$ için f ünivalent$\}$ kümesi
$\mathcal{P}$	Caratheodory Sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonunu
$\mathcal{S}^*(\beta)$	β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Hankel matrisi
$H_\infty = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Hankel matrisi
$T_{n-1} = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Toeplitz matrisi
$T_\infty = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Toeplitz matrisi
$H_q(n)$	q. mertebeden Hankel determinantı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli dallarından birisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform olarak dönüştüren fonksiyonun varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim disk de tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$\mathcal{U} = \left\{ z : |z| < 1, z \in \mathbb{C} \right\}$$

birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{U}$ birim diskindeki görüntüsünü incelemiş ve $\mathcal{U}$ birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(\mathcal{U})$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır.

1916 yılında Bieberbach, $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2, 3, ...$ için $|a_n| \leq n$ tahminini ileri sürmüş ve bu tahmin uzun yıllar matematikçileri meşgul eden bir problem olarak güncelliğini korumuş ve 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach tahmininin en önemli sonuçlarından birisi de $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve bükülme (Distortion) ve genişleme (Growth) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Yukarıda da bahsedildiği üzere ünivalent fonksiyonlar için katsayı eşitsizliği birçok problemin çözümünde oldukça etkilidir.

Kompleks analizin önemli konularından biri de Hankel determinantıdır. Hankel determinantı birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Bizi ilgilendiren kısmı ise Hankel determinantı yardımıyla $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı fonksiyonların sınırlılığını göstermek yani integral katsayılarına sahip orijinin komşuluğunda Laurent serileriyle temsil edilen iki sınırlı analitik fonksiyonun oranı olarak gösterilen bir fonksiyonun rasyonel olduğunu göstermektir. Ayrıca meromorfik fonksiyonlar ile ilgili çalışmada Hankel determinantının kullanımı için [8] çalışmasına ve bu determinantın çeşitli özellikleri için de [45] çalışmaya bakmak faydalı olacaktır.

Diğer taraftan ünivalent fonksiyonlar teorisinde en önemli problemlerden biri olan katsayı problemi yüzyıllar boyunca matematikçileri meşgul etmiştir. Katsayı problemleri olarak $H_q(n)$, q. mertebeden Hankel determinantı ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ olmak üzere klasik a_n katsayıları için Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $a_3-\mu a_2^2$ için, ikinci Hankel determinantı olarak bilinen $H_2(2)=a_2a_4-a_3^2$ için ve üçüncü Hankel determinantı olarak tanımlanan $H_3(1)=a_3\left(a_2a_4-a_3^2\right)-a_4\left(a_4-a_2a_3\right)+a_5\left(a_3-a_2^2\right)$ için kesin üst sınırını bulma aklımıza gelir. Dolayısıyla ünivalent fonksiyonlar teorisinde Hankel determinantının önemli bir yeri vardır. Hankel determinantının ünivalent fonksiyonlar teorisine girişi q. mertebeden Hankel determinantı $H_q(n)$ nin $n\to\infty$ iken büyüme oranını bulmakla başlar. Pommerenke [33] bu soruyu 1966 yılında $k=16p\sqrt{p}$ ve $O(1)$ de sadece p, q ve f ye bağlı bir değer olmak üzere p-valent $(p\geq 1)$ fonksiyonlar için $n\to\infty$ iken $H_q(n)=O(1)n^{k\sqrt{q}-\frac{1}{2}q}$ değerini bulmasıyla cevaplamıştır. Bu şu demektir q ve p ye yeteri kadar yakın değerler için $n\to\infty$ iken $H_q(n)\to 0$ olur. Yalnız Pommerenke'nin bu çalışmasında elde ettiği $k\sqrt{q}-\frac{1}{2}q$ kuvveti kesin değildir. Diğer taraftan 1967 yılında Pommerenke [35], ünivalent fonksiyonlar için $q\geq 2$ ve $\beta>1/400$ olmak üzere $n=1,2,\ldots,$ için $H_q(n)<K(q)n^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)q+\frac{3}{2}}$ elde etmiştir. Hayman [17]

1968 yılında $p=1$ için $n \to \infty$ iken $H_q(n) = O(1) n^{\frac{1}{2}}$ bulmuştur. Buradaki $1/2$ kuvveti kesindir.

Daha sonra Noonan ve Thomas [27] 1971 yılında p-valent fonksiyonlar için $O(1)$ de sadece p, q ve f ye bağlı bir değer olmak üzere

$$H_q(n) = O(1) \begin{cases} n^{2p-1} & ; q = 1, p > 1/4 \\ n^{2pq-q^2} & ; q \geq 2,\ p \geq 2(q-1) \end{cases}$$

bulmuştur. Buradaki $2pq - q^2$ kuvveti kesindir.

ElHosh [13] çalışmasında α pozitif Hayman indekse sahip ünivalent fonksiyonlar için ve [14] çalışmasında da $k-$fold simetrik ve konvekse yakın fonksiyonlar için Hankel determinantının üst sınırlarını elde etmiştir. Noor [28, 29, 32] çalışmalarında konvekse yakın fonksiyonları, [30] çalışmasında Bazilevic fonksiyonları ve [31] çalışmalarında ise sınırlı sınır notasyonuna sahip fonksiyonlar için Hankel determinantı problemini çalışmıştır.

Bundan sonra Hankel determinatı problemi genellikle $H_2(2)$ ve $H_3(1)$ in üst sınırını bulma üzerine yoğunlaşmıştır. $H_2(2)$ nin üst sınır problemi üzerine ayrıntılı bilgiyi 2016 yılında Levent Budak'ın [9] hazırlamış olduğu tezde bulmak mümkündür. Bizim bu tez çalışmasında a_3, a_4, a_5 katsayılarını, Fekete-Szegö probleminin özel bir durumu olarak bilinen $a_3 - a_2^2$ farkını ve $H_2(2)$ determinantını da ihtiva eden $H_3(1) = a_3 H_2(2) - a_4\left(a_4 - a_2 a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right)$ üçüncü Hankel determinantı üzerine yapılan çalışmalar tarihi seyir içerisinde verildi. Bunlara ek olarak ele aldığımız bir sınıf için bu determinantın üst sınırını elde ettik. $H_3(1)$ in üst sınırı üzerine ilk çalışma 2007 yılında Babalola [3] tarafından yapılmıştır. Babalola bu çalışmasında pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için $H_3(1)$ in kesin üst sınırını sırasıyla $\left|H_3(1)\right| \leq 993/1620$, $\left|H_3(1)\right| \leq 16$ ve $\left|H_3(1)\right| \leq 15/24$ olarak elde etmiştir. Daha sonra analitik fonksiyonların bazı özel alt sınırları için $H_2(2)$ ve $H_3(1)$

in üst sınırları bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır [4, 5]. Bu çalışmalardan ayrı olarak 2013 yılında Lee, Ravichandran ve Supramaniam [24] çalışmasında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için $H_2(2)$ nin kesin üst sınırını çalışmıştır.

Biz de bu tez çalışmasında Ma-Minda yıldızıl ve konveks fonksiyonların oluşturduğu sınıfın genel bir alt sınıfı için $H_3(1)$ in kesin bir üst sınırını elde ettik. Parametrelerin özel durumlarında analitik fonksiyonların bilinen önemli alt sınıfları için $H_3(1)$ in üst sınırları verildi.

Tezin Kuramsal temeller başlığı altında tezde kullanılacak temel tanım ve bilgiler sunuldu. Materyal ve Yöntem kısmında Hankel determinantı problemi ile ilgili bu güne kadar yapılan çalışmaların bir özeti verildi. Bulgular kısmında ise ilk defa bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu. Bu kavramlar için Ponnusamy ve Silverman'ın [36] kitabından faydalanıldı.

Tanım 2.1.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) olarak adlandırılır. $\overline{\mathcal{U}}(z_0, r)$ ile $\mathcal{U}(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial\mathcal{U}(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $\mathcal{U}(0, r) = \mathcal{U}_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $\mathcal{U}(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \text{ ve } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{3/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{U}(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n} \tag{2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz.

Sonuç 2.2.10: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.11 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq|z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.13: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.14 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [12].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [12].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ ama tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu,

A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilave olarak, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.15 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir. Örneğin $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.18: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, $z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığını şağaıdaki teoremle ispatlamıştır.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [12].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\ f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{2.3}$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonların sınıfını aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \}$$

şeklinde gösterilir [12, 15, 34].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \dfrac{1+i}{2} \in \mathcal{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + ...$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, ...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir [12].

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [12].

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z), z\in\mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca, $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [12].

Bunun yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)},\quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}$ kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in\mathcal{B}$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ kümesinde kalıyorsa, $\mathcal{B}$ ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm yıldızıl fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [12, 34].

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \leq n$ değerlendirmesi doğrudur [15, 34].

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde gösterebiliriz

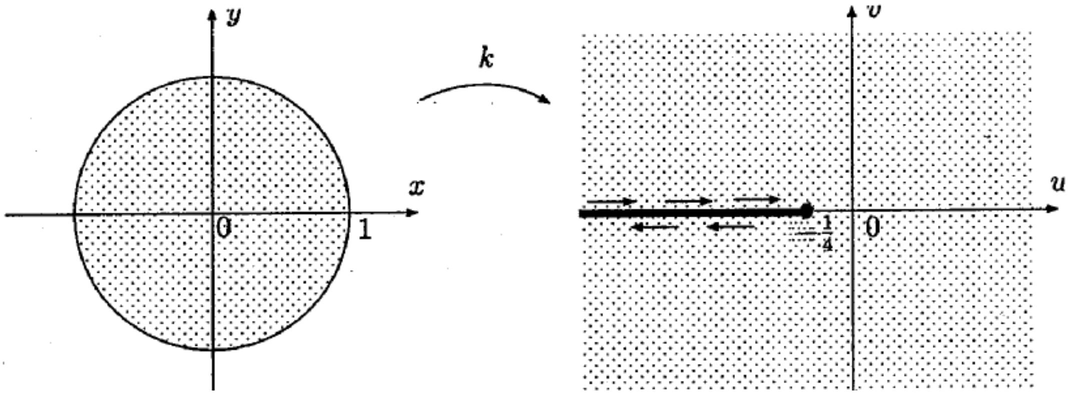
Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyonu $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu,

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}\left[g(z) - 1 \right]$$

biçiminde yazılarak $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in \mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 2.3.6 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)&=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Her $z\in\mathcal{U}$ için, Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation)

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $-\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışını hariç kompleks düzlem olur.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in\mathcal{B}$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{B}$ içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [12, 34].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.8: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_n|\le 1$ değerlendirmesi doğrudur [15, 34].

Örneğin; $f(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1}\in\mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)$$
$$=\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\ge\frac{1-r^2}{1+r^2}>0$$

elde edilir.

Bir analitik fonksiyonun ünivalentliğini garanti eden en kullanışlı şart şudur: f fonksiyonu konveks bir $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z\in\mathcal{D}$ için $\operatorname{Re} f'(z)>0$ ise f fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesi üzerinde ünivalenttir. Bu kriter Noshiro-Warschawski-Wolff kriteri olarak bilinir. Bu sonuç ile Caratheodory sınıfı arasında yakın bir ilişki vardır [12, 15, 34].

Teorem 2.3.6 ve 2.3.8 in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f\in\mathcal{A}$ ve $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere, $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda, $f\in\mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g\in\mathcal{S}^*$ olmasıdır [12, 15, 34].

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}^*\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer işgal eden subordinasyon ve Hadamard çarpım kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir [12].

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0)=g(0)$ ve $f(\mathcal{U})\subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(\mathcal{U})\subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\le|f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r)\subset f(\mathcal{U}_r)$ dir [12].

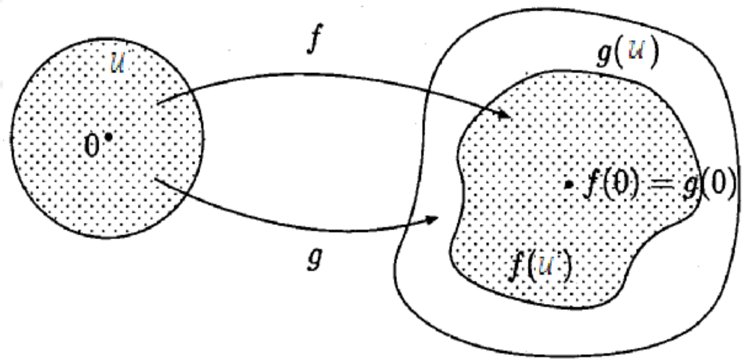
Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\le r}|f(z)|\le \max_{|z|\le r}|g(z)|,\quad (r\in(0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z)\in\mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z)\prec\frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad \phi(z)\in\Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z)\prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.2: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.11: $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)>0,\ \operatorname{Re}(\varphi(z))>0$ koşullaını sağlasın. Ayrıca $\varphi(\mathcal{U})$da reel eksene göre simetrik olsun. Bu koşullarını sağlayan fonksiyonlar $\mathcal{W}$ sınıfındandır denilir [9].

Tanım 2.3.12 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.3.13 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir [15].

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} :\ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3.14: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara kompleks γ mertebeli Ma-Minda yıldızıl fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}^*[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.3.15: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara kompleks γ mertebeli Ma-Minda konveks fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}[\gamma;\varphi]$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.3.14 ve 2.3.15 da $\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ve $\varphi(\mathrm{z}) = (1+\mathrm{z})/(1-\mathrm{z})$ alınırsa sırasıyla analitik fonksiyonların kompleks γ mertebeli yıldızıl fonksiyonları ve kompleks γ mertebeli konveks fonksiyonları gibi önemli iki fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf sırasıyla $\mathcal{S}^*[\gamma]$ ve $\mathcal{C}[\gamma]$ ile gösterilir.

Diğer taraftan, Tanım 2.3.14 ve 2.3.15 da $\gamma = (1-\beta)e^{-i\delta}\cos\delta$ $\left(|\delta| < \pi/2,\, 0 \le \beta < 1\right)$ ve $\varphi(\mathrm{z}) = (1+z)/(1-\mathrm{z})$ alınırsa analitik fonksiyonların önemli iki fonksiyon türü elde edilir. Bu fonksiyonlar literatürde sırasıyla β. mertebeden $\delta-$spirallike fonksiyonlar ve β. mertebeden $\delta-$Robertson fonksiyonlar olarak bilinir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıflar sırasıyla

$$\mathcal{S}^*[\delta,\beta] = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(e^{i\delta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta\cos\delta,\, |\delta| < \pi/2,\, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}[\delta,\beta] = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(e^{i\delta}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \beta\cos\delta,\, |\delta| < \pi/2,\, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.16 ($\mathcal{K}(\beta)$ sınıfı): $0 \le \beta < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu varsa bu durumda $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna $\beta-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıf $\mathcal{K}(\beta)$ ile gösterilir [12,32].

Özel olarak $\mathcal{K}(0)=\mathcal{K}$ sınıfına konvekse yakın fonksiyonların sınıfı, bu sınıfa ait fonksiyonlara da konvekse yakın fonksiyon denir.

Ayrıca $\operatorname{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{g(z)}\right)>\beta$ eşitsizliğinde $g(z)=z\in\mathcal{S}^*$ alınırsa konvekse yakınlık şartı için daha kullanışlı olan $\operatorname{Re} f'(z)>\beta$ elde edilmiş olur. Yani $\operatorname{Re} f'(z)>\beta$ koşulunu sağlayan fonksiyonlarda $\mathcal{K}(\beta)$ sınıfından olur.

Yukarıdaki sınıflar arasında

$$\mathcal{C}\subset\mathcal{S}^*\subset\mathcal{K}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{A}$$

içerme bağıntısı vardır.

Ünivalent fonksiyonların önemli ve ilk çalışmalarından birisi $\mathcal{S}$ sınıfına ait katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu probleme ilk cevabı Bieberbach 1916 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.17 (Bieberbach Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ dir. Eşitlik hali $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun rotasyonu için yani $k_\theta(z)=\dfrac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir [12, 34].

Bieberbach aynı yıl $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n|\le n \quad (n=2,3,4,...)$ tahminini ortaya atmıştır. Bu tahmine cevap 1984 yılında L. De Branges tarafından aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.18 (Branges Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $n=2,3,4,...$ için $|a_n|\le n$ eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun rotasyonları olmasıdır [12, 34].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Cauchy, Hankel ve Toeplitz matrisi tanımlanarak bu matrislere karşılık gelen Hankel ve Toeplitz determinantı kavramları verildi. Ayrıca, Hankel determinatının bir uygulaması olarak ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için ikinci ve üçüncü Hankel determinantı probleminin bu güne kadar yapılmış çalışmaları sunuldu.

3.1 Cauchy, Hankel ve Toeplitz Matrisleri

Bu başlık altında özellikle Cauchy, Hankel ve Toeplitz matrisleri bu matrislerle alakalı Hankel determinantı tanımları verildi.

Tanım 3.1.1: $x_i \neq y_i \ \ (x_i, y_i \in \mathbb{C}) \ 1 \leq i, \ \ j \leq n$ olmak üzere elemanları

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_i}$$

ile tanımlı $C = \left[c_{ij} \right]_{i,j=1}^{n}$ matrisine Cauchy matrisi denir [7].

Tanım 3.1.2: $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

kuadratik formuna Hankel formu denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve

$$H_{n-1} = \left(h_{i+j} \right)_{i,j=0}^{n-1}$$

olarak gösterilir [18].

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1}=\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi Hankel matrisi simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden Hankel matrisi de

$$H_\infty=\left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3: $n\geq 1$ ve t_{i-j} ler kompleks sayılar olmak üzere

$$T_{n-1}(x,x)=\sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j}x_i\,\bar{x}_j$$

kuadratik formuna Toeplitz formu denir [18].

Bu forma tekabül eden,

$$T_{n-1}=\left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

matrise de Toeplitz matrisi denir. Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_{n-1}=\begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \dots & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \dots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada görüldüğü gibi bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matrisi

$$T_\infty=\left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

3.2. Hankel Determinantı

Hankel determinantı, integral katsayılı kuvvet serisi teorisinde ve singülerlik çalışmasında önemli bir rol oynamaktadır. $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & \cdots & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix} \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

determinantına $q.$ mertebeden Hankel determinantı denir [33].

Buradan q ve n nin özel durumlarında

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2, \ H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_3\left(a_2 a_4 - a_3^2\right) - a_4\left(a_4 - a_2 a_3\right) + a_5\left(a_3 - a_2^2\right), \quad (a_1 = 1)$$

determinantları yazılır.

Teorem 3.2.1: $f \in \mathcal{K}$, $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olsun. Buradan,

$$H_q(n) = O(1) n^{2-q} \quad (n \to \infty)$$

mümkün olanın en iyisidir [32].

Lemma 3.2.2: $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ şeklinde verilen bir kuvvet serisinin $\mathcal{U}$ diskinde $\mathcal{P}$ sınıfından bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & 2 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

Toeplitz determinantının $c_{-k} = \overline{c}_k$ katsayılarının negatif olmayan sayılar olmasıdır.

Ayrıca bunlar, $n<m-1$ için $D_n>0$ ve $n\geq m$ için $D_n=0$ olması durumunda $k\neq j$, $t_k\neq t_j$ ve t_k reel ve $\rho_k>0$ olmak üzere

$$p(z)=\sum_{k=1}^{m}\rho_k\rho_0(e^{it_k z})$$

fonksiyonu haricinde kesinlikle pozitiftir [16].

Lemma 3.2.3: $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...\in\mathcal{P}$ olsun. $k=1,2,...$ için $|c_k|\leq 2$ eşitsizliği doğrudur. Burada sınır kesindir. Eşitlik $p(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile sağlanır [12].

Lemma 3.2.4: $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...\in\mathcal{P}$ olsun. $|x|\leq 1$ ve $|z|\leq 1$ olacak şekilde x ve z değerleri için

$$2c_2=c_1^2+x(4-c_1^2) \tag{3.1}$$

ve

$$4c_3=c_1^3+2c_1(4-c_1^2)x-c_1(4-c_1^2)x^2+2(4-c_1^2)(1-|x|^2)z \tag{3.2}$$

olur [25].

3.3. Analitik Fonksiyonlarının Bazı Alt Sınıfları İçin Hankel Determinantı

Bu başlık altında

$$\begin{aligned}|H_3(1)|&=\left|a_3\left(a_2a_4-a_3^2\right)-a_4\left(a_4-a_2a_3\right)+a_5\left(a_3-a_2^2\right)\right|\\&\leq|a_3||a_2a_4-a_3^2|+|a_4||a_4-a_2a_3|+|a_5||a_3-a_2^2|\end{aligned}$$

değerlendirilmesinin üst sınırları üzerine yapılan çalışmalar tarihi seyir içerisinde verilmiştir.

Tez çalışması boyunca, $p\in\mathcal{P}$ denildiğinde $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ve $f\in\mathcal{A}$ denildiğinde $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ şeklindeki fonksiyonlar anlaşılacaktır.

$f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun türevinin reel kısmı pozitif olan fonksiyonlar için $H_3(1)$ determinantının üst sınırı ilk defa Babalola [3] tarafından aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{R}$ sınıfı denir [26].

Teorem 3.3.1: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Buradan,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik

$$f(z) = \int_0^z \frac{1+t^3}{1-t^3}dt$$

fonksiyonu ile sağlanır [3].

İspat: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $f'(z) = p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu eşitlik kullanılarak $2a_2 = c_1$, $3a_3 = c_2$ ve $4a_4 = c_3$ katsayı bağıntıları bulunur. Böylece

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \left|\frac{c_1c_2}{6} - \frac{c_3}{4}\right| \tag{3.3}$$

yazılır. (3.3) ifadesinde Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri yerine yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| = \left|\frac{c_1^3}{48} - \frac{c_1\left(4-c_1^2\right)x}{24} + \frac{c_1\left(4-c_1^2\right)x^2}{16} - \frac{\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z}{8}\right| \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra $c_1 = c,\ c \in [-2,0]$ alınır ve (3.4) eşitliğinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanır $\rho = |x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{c^3}{48} + \frac{\left(4-c^2\right)}{8} + \frac{c\,\left(4-c^2\right)\rho}{24} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho^2}{16} = F(\rho)$$

elde edilir. Buradan $c \in [-2,0]$ için

$$F'(\rho) = \frac{c\,\left(4-c^2\right)}{24} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho}{8}$$

olur. Böylece, $[0,1]$ kapalı aralığında $F'(\rho)<0$ olduğundan $F(\rho)$ fonksiyonu ρ değeri için azalan bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$$F(\rho) \leq \frac{c^3}{48} + \frac{4-c^2}{8} = F(0) = G(c)$$

olup sonuç olarak, $G(c)$ fonksiyonunun türevinden bu fonksiyonun $[-2,0]$ aralığında artan olduğu görülür. Böylece $G(c) \leq G(0) = 1/2$ olur. Ayrıca $c_1 = c = 0,\ \ x = 0$ ve $z = 1$ değerleri için Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 kullanılarak $c_2 = 0$ ve $c_3 = 2$ bulunur. Buradan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Ayrıca $\mathcal{R}$ sınıfındaki fonksiyonlar için farklı katsayı kombinasyonlarına ilişkin sonuçlar bulunmuştur. Öyleki Macgegor [26] deki çalışmasında her $k = 2,3,...$ için $|a_k| \leq \dfrac{2}{k}$ ve Babalola ve Opoola [4] deki çalışmasında $|a_3 - a_2^2| \leq \dfrac{2}{3}$ bulmuşlardır. Son zamanlarda ise Janteng ve arkadaşları [19] çalışmasında $\mathcal{R}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \dfrac{4}{9}$ eşitsizliğini elde etmişlerdir. Bu sonuçlar ve Teorem 3.3.1 birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} |H_3(1)| &\leq |a_3||a_2 a_4 - a_3^2| + |a_4||a_4 - a_2 a_3| + |a_5||a_3 - a_2^2| \\ &\leq \frac{2}{3}\frac{4}{9} + \frac{2}{4}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{2}{3} = \frac{439}{540} \cong 0,81 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat Babalola çalışmasında sınırı aşağıdaki şekilde vermiştir.

Sonuç 3.3.1: $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \frac{993}{1620} \cong 0,61$$

sonucu elde edilir [3].

Benzer şekilde Babalola [3] aynı çalışmasında yıldızıl fonksiyonlar için $H_3(1)$ için üst sınır elde etmiştir. Aşağıdaki teorem bu sonuca ulaşmak için ilk adımdır.

Teorem 3.3.2: $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Buradan

$$|a_2a_3 - a_4| \le 2$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik Koebe fonksiyonu $k(z) = z/(1-z)^2$ ile verilir [3].

İspat: $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda $zf'(z) = f(z)p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu eşitlikte terimler eşitlenerek

$$a_2 = c_1$$
$$2a_3 = c_2 + c_1^2$$
$$6a_4 = 2c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3$$

katsayı bağıntıları elde edilir. Buradan

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{3}|c_1^3 - c_3| \tag{3.5}$$

olur. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{12}\left|3c_1^3 - 2c_1\left(4-c_1^2\right)x + c_1\left(4-c_1^2\right)x^2 - 2\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right| \tag{3.6}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3 ten $|c_1| \le 2$ için $c_1 = c$ ve $c \in [0,2]$ olduğu göz önüne alınıp ve (3.6) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa $\rho = |x| \le 1$ için

$$|a_2a_3 - a_4| \le \frac{1}{12}\left[3c^3 + 2\left(4-c^2\right) + 2c\left(4-c^2\right)\rho + \left(4-c^2\right)(c-2)\rho^2\right] = F(\rho)$$

bulunur. $F(\rho)$ fonksiyonu için

$$F'(\rho) = \frac{1}{12}\left[2c\left(4-c^2\right) + 2\left(4-c^2\right)(c-2)\right] > 0$$

olur. Buradan eğer $c \in [1,2]$ ise $[0,1]$ üzerinde ρ için $F(\rho)$ fonksiyonu artan fonksiyondur. Bu durumda bütün $\rho \in [1,2]$ değerleri için $F(\rho) \le F(1) = c \le 2$ olur. Bu nedenle $F(\rho) \le 2$ dir. Öte yandan, $c \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $F(\rho)$, $[0,1]$ aralığı azalan olduğundan $F(\rho) \le F(0)$ olur. Şimdi

$$F(\rho) \le \frac{3c^3 - 2c^2 + 8}{12} = G(c)$$

olsun. Dolayısıyla, $c \in [0,1)$ aralığında $G(c) \le G(0) = 2/3$ olur. Bu sınır, $c \in [1,2]$ aralığı için 2 den küçüktür. Böylece, $F(\rho)$ fonksiyonu maksimum değerini $\rho = 1$ ve $c = 2$ değerleri için alır. $c_1 = c = 2$ değerleri için (3.1) ve (3.2) ifadelerinden $c_2 = c_3 = 2$ elde edilir. Buradan (3.5) eşitliğinin sonucunun kesin olduğu görülür. Ayrıca, bulunan sınırın kesinliği Koebe fonksiyonu ile sağlanır.

Ayrıca $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntılarına ilişkin $k = 2,3,...$ için Duren [12] çalışmasında $|a_k| \le k$ ve Keogh ve Merkes [21] deki çalışmasında $|a_3 - a_2^2| \le 1$ bulmuşlardır. 2007 yılında Janteng ve arkadaşları [20] çalışmasında $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2 a_4 - a_3^2| \le 1$ eşitsizliğini elde etmişlerdir. Bu sonuçlar ve Teorem 3.3.2 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.3.2: $f \in \mathcal{S}^*$ için

$$|H_3(1)| \le 16$$

olur. Eşitlik Koebe fonksiyonu ile elde edilir [3].

Aynı çalışmada konveks fonksiyonlar için $H_3(1)$ in sınırı aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Teorem 3.3.3: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_3 - a_4| \le \frac{1}{6}$$

eşitsizliği yazılır. Eşitlik

$$f(z) = \int_0^z \left\{ s.\exp\left(\int_0^s \frac{2t^3}{1-t^3} dt\right) \right\} ds$$

fonksiyonu ile elde edilir [3].

İspat: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda $\left(zf'(z)\right)' = f'(z)p(z)$ olacak şekilde bir $p \in \mathcal{P}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} 2a_2 &= c_1 \\ 6a_3 &= c_2 + c_1^2 \\ 24a_4 &= 2c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \end{aligned}$$

katsayı bağıntıları bulunur. Böylece

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{24}\left|c_1^3 - c_1c_2 - 2c_3\right| \tag{3.7}$$

yazılır. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (3.7) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{48}\left|-3c_1\left(4-c_1^2\right)x + c_1\left(4-c_1^2\right)x^2 - 2\left(4-c_1^2\right)\left(1-|x|^2\right)z\right| \tag{3.8}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3 de $|c_1| \leq 2$ ile $c \in [-2,0]$ aralığında $c = c_1$ olduğunu varsayalım. (3.8) ifadesinin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanıp ve $\rho = |x| \leq 1$ yazılırsa,

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{\left(4-c^2\right)}{24} + \frac{c\,\left(4-c^2\right)\rho}{16} + \frac{(c-2)\left(4-c^2\right)\rho^2}{48} = F(\rho)$$

yazılır. $F(\rho)$ fonksiyonunun türevi alınırsa

$$F'(\rho) = \frac{c\left(4-c^2\right)}{16} + \frac{\left(4-c^2\right)(c-2)\rho}{24} < 0$$

olur. Böylece $[0,1]$ üzerinde $F(\rho)$ azalan olduğundan $F(\rho) \leq F(0)$ yazılır. Buradan,

$$F(\rho) \leq (4-c^2)/24 = G(c)$$

olup $[-2,0]$ aralığında $G(c)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla, $G(c) \leq G(0) = 1/6$ dır. Bu durumda, $|a_2a_3 - a_4|$ fonksiyonunun maksimum değeri $\rho = 0$ ve $c = 0$ değerleri için $1/6$ olur.

Eğer $c = c_1 = 0$ alınıp Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 de $x = 0$ ve $z = 1$ seçilirse $c_2 = 0$ ve $c_3 = 2$ değerleri bulunur ve eşitlik teoremde tanımlanan $f(z)$ ile elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Diğer taraftan $\mathcal{C}$ sınıfına ait fonksiyonlara ilişkin katsayı bağıntıları $k = 2,3,...$ için Duren [12] çalışmasında $|a_k| \leq 1$ ve Keogh ve Merkes [21] çalışmasında $|a_3 - a_2^2| \leq 1/3$ bulmuşlardır. 2007 yılında Janteng ve arkadaşları [20] çalışmasında $\mathcal{C}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq 1/8$ eşitsizliğini elde etmişlerdir. Bu sonuçlar ve Teorem 3.3.3 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.3.3: $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq 15/24 \approx 0.625$$

sonucu elde edilir [3].

2013 yılında Raza ve Malik [39] lemniskat yıldızıl fonksiyonlar için üçüncü Hankel determinantını çalışmıştır. Bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.2: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Buradan her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara lemniskat yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf SL^* ile gösterilir [39].

Geometrik olarak $w = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ için $|w^2 - 1| < 1$ ile Bernoulli lemniskatının sağ yarı düzlemindeki kısmı elde edilir. Buradan kolayca $f \in SL^*$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \sqrt{1+z} \quad , z \in \mathcal{U}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.4: $f \in SL^*$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \begin{cases} (1-4\mu)/16 & ; \mu < -3/4 \\ 1/4 & ; -3/4 \le \mu \le 5/4 \\ (4\mu - 1)/16 & ; \mu > 5/4 \end{cases}$$

olur. Ayrıca,

$$-\frac{3}{4} < \mu \le \frac{1}{4} \text{ için } \left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{1}{4}(4\mu + 3)\left|a_2\right|^2 \le \frac{1}{4}$$

ve

$$\frac{1}{4} < \mu \le \frac{5}{4} \text{ için } \left|a_3 - \mu a_2^2\right| + \frac{1}{4}(5 - 4\mu)\left|a_2\right|^2 \le \frac{1}{4}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuçlar kesindir [39].

Teorem 3.3.5: $f \in SL^*$ olsun. Buradan μ bir kompleks sayı ise

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \frac{1}{4} \max\left\{1; \left|\mu - \frac{1}{4}\right|\right\}$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Teorem 3.3.6: $f \in SL^*$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le 1/16 \quad \text{ve} \quad \left|a_2 a_3 - a_4\right| \le 1/6$$

eşitsizlikleri sağlanır [39].

Ayrıca Sokol [41] daki çalışmasında $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in SL^*$ fonksiyonları için $\left|a_2\right| \le 1/2$, $\left|a_3\right| \le 1/4$, $\left|a_4\right| \le 1/6$ ve $\left|a_5\right| \le 1/8$ sonuçlarını bulmuştur. Bu sonuçlar kesindir. Sokol'un bu sonuçları ve Raza ve Malik'in Teorem 3.3.4, Teorem 3.3.5 ve Teorem 3.3.6 da buldukları sonuçlar birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç verilir.

Teorem 3.3.7: $f \in SL^*$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right| \le 43/576$$

eşitsizliği sağlanır [39].

2014 yılında Sudharsan ve Vijaya [42] yıldızıl fonksiyonların genel iki alt sınıfı için aşağıdaki sonuçları bulmuşlardır.

Tanım 3.3.3: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\alpha \geq 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \frac{z^2 f''(z)}{f(z)}\right\} > \beta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir [42].

Tanım 3.3.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. $\alpha \geq 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\left[zf'(z) + \alpha z^2 f''(z)\right]'}{f'(z)}\right\} > \beta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir [42].

Teorem 3.3.8: $f \in \mathcal{S}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \leq \frac{(1-\beta)^2}{(1+3\alpha)^2}$$

olur. Elde edilen sonuç kesindir [42].

Teorem 3.3.9: $f \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \leq \frac{1}{144}\frac{T}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$

olur. Burada

$$T = (1-\beta)^2\left(280\alpha^3 + 332\alpha^2 + 128\alpha + 16\right) + (1-\beta)^4(1+7\alpha) + (1-\beta)^3\left(8\alpha^2 + 3\alpha + 1\right)$$

dır. Elde edilen sonuç kesindir [42].

2014 yılında Sudharsan, Vijayalakshmi ve Stephen [43] çalışmasında $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonlar için $\left|H_3(1)\right|$ in üst sınır problemini ele almışlar ve aşağıdaki sonucu bulmuşlardır.

Teorem 3.3.10: $f \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right| \le \frac{(1-\beta)^2(3+2\alpha-2\beta)}{3(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\left\{\frac{(1-\beta)^2}{N}\left[M_1V_1V_2+(4V_2-V_1)\{M_2V_1+V_1P_1+P_2\}\right]\right\}$$
$$+\frac{(1-\beta)^2\left(6+6\alpha^2+2\beta^3+13\alpha-7\beta-8\alpha\beta\right)}{6MA_2(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)}\left\{\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\left[B_1+(4A_2-A_1)(B_2+B_3)\right]\right\}$$
$$+\frac{(1-\beta)^2\left(120+408\alpha^2+500\alpha-576\alpha\beta-432\alpha^2\beta+160\alpha\beta^2+188\beta+96\beta^2\right)}{360(1+2\alpha)(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)(1+5\alpha)}$$

olur. Burada

$$M_1=\left[22\alpha^3+31\alpha^2+11\alpha-2\beta^2-5\beta-3\alpha\beta-8\alpha^2\beta\right],$$
$$M_2=3+118\alpha^2-45\alpha+44\alpha^3-\beta-3\alpha\beta-8\alpha^2\beta,$$
$$P_1=\left(1+27\alpha^2-10\alpha\right)(1+2\alpha),$$
$$P_2=\left(8+48\alpha+64\alpha^2\right)(1+2\alpha),$$
$$V_1=2M_1+8M_2+8P_1-2P_2,$$
$$V_2=4M_2+4P_1,$$
$$A_1=4(4+23\alpha+48\alpha^2+36\alpha^3-\beta-2\alpha\beta),$$
$$A_2=3(4+20\alpha+64\alpha^2+48\alpha^3+2\beta+20\alpha\beta-2\beta^2-12\alpha\beta^2),$$
$$B_1=-3\alpha+3\beta+22\alpha\beta-2\beta^2-12\alpha\beta^2+16\alpha^2+12\alpha^3,$$
$$B_2=3+16\alpha+32\alpha^2+24\alpha^3,$$
$$B_3=1+7\alpha+16\alpha^2+12\alpha^3,$$
$$N=288(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha),$$
$$M=48(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)(1+4\alpha)$$

dır [43].

2014 yılında Shanmugan ve arkadaşları [40] ilk defa Mocanu tarafından 1969 yılında tanımlanan $\alpha-$yıldızıl ($\alpha-$konveks veya Mocanu fonksiyonu) fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Tanım 3.3.5: $f \in \mathcal{A}$ olsun. α $(0 \le \alpha \le 1)$ reel sayı olmak üzere $\forall z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\} > 0$$

şartını sağlayan fonksiyona $\alpha-$yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf M_α ile gösterilir [40].

Teorem 3.3.11: $f \in M_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$|a_2| \le \frac{2}{1+\alpha}$$

$$|a_3| \le \frac{\alpha^2 + 8\alpha + 3}{(1+\alpha)^2(1+2\alpha)}$$

$$|a_4| \le \frac{4\left(\alpha^4 + 11\alpha^3 + 38\alpha^2 + 19\alpha + 3\right)}{3(1+\alpha)^3(1+2\alpha)(1+3\alpha)}$$

$$|a_5| \le \frac{18\alpha^7 + 244\alpha^6 + 1319\alpha^5 + 3193\alpha^4 + 2642\alpha^3 + 1012\alpha^2 + 197\alpha + 15}{3(1+\alpha)^4(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)(1+4\alpha)}$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

Teorem 3.3.12: $f \in M_\alpha$ olsun. Bu durumda

i. $$|a_2a_3 - a_4| \le \begin{cases} 2 & ; \alpha = 0 \\ \dfrac{2(2\alpha^2 + 5\alpha + 1)}{3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\sqrt{\dfrac{(2\alpha^3 + 7\alpha^2 + 6\alpha + 1)}{2\alpha(\alpha^2 + 4\alpha + 1)}} & ; 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

ii. $$|a_3 - a_2^2| \le \frac{1}{1+2\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

Teorem 3.3.13: $f \in M_\alpha$ olsun. $\alpha \ge 1$ olmak üzere

$$|a_2a_3 - a_4| \le \frac{2(2\alpha^2 + 5\alpha + 1)}{3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\sqrt{\frac{(2\alpha^3 + 7\alpha^2 + 6\alpha + 1)}{(2\alpha^3 + 5\alpha^2 + 14\alpha + 3)}}$$

eşitsizliği sağlanır [40].

Sonuç 3.3.4: $f \in M_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \le \begin{cases} 16 & ;\alpha = 0 \\ \dfrac{M_1 + M_2\sqrt{2\alpha(1+10\alpha+32\alpha^2+36\alpha^3+15\alpha^4+2\alpha^5)}}{M_3} & ;0 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} M_1 = 3\alpha\big(&48+1327\alpha+15930\alpha^2+109795\alpha^3+482338\alpha^4 \\ &+1411420\alpha^5+2780596\alpha^6+3638314\alpha^7+3060628\alpha^8 \\ &+1588795\alpha^9+496722\alpha^{10}+90547\alpha^{11}+8922\alpha^{12}+378\alpha^{13}\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = 4\big(&6+149\alpha+1586\alpha^2+9464\alpha^3+34703\alpha^4+80481\alpha^5+117092\alpha^6 \\ &+103046\alpha^7+51849\alpha^8+14252\alpha^9+1980\alpha^{10}+112\alpha^{11}\big) \end{aligned}$$

$$M_3 = 9\alpha(1+\alpha)^4(1+2\alpha)^3(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)\big(2+23\alpha+86\alpha^2+118\alpha^3+52\alpha^4+7\alpha^5\big)$$

şeklindedir [40].

Venkateswarlu ve arkadaşları [44] 2015 yılında analitik fonksiyonların özel bir alt sınıfına ait fonksiyonların tersinin katsayıları için üçüncü Hankel determinantını çalışmıştır. Bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için $\mathrm{Re}\{1/f'(z)\} > 0$ şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa RT sınıfı denir [44].

Teorem 3.3.14: $f(z) \in RT$ ve f fonksiyonunun tersi $w = 0$ noktası civarında $f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n$ olsun. Bu durumda

$$|t_2 t_4 - t_3^2| \le 137/288$$

eşitsizliği sağlanır [44].

Teorem 3.3.15: $f(z) \in RT$ ve f fonksiyonunun tersi $w=0$ noktası civarında $f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n$ olsun. Bu durumda

$$\left| t_2 t_3 - t_4 \right| \leq \left(\frac{13}{6} \right)^{\frac{3}{2}}$$

sağlanır [44].

Teorem 3.3.16: $f(z) \in RT$ ve f fonksiyonunun tersi $w=0$ noktası civarında $f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n$ olsun. Bu durumda

$$\left| t_3 - t_2^2 \right| \leq 2/3$$

eşitsizliği sağlanır [44].

Teorem 3.3.17: $f(z) \in RT$ ve f fonksiyonunun tersi $w=0$ noktası civarında $f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n$ olsun. Bu durumda

i. $\left| t_2 \right| \leq 1$
ii. $\left| t_3 \right| \leq 4/3$
iii. $\left| t_4 \right| \leq 13/6$
iv. $\left| t_5 \right| \leq 59/15$

eşitsizlikleri sağlanır [44].

Teorem 3.3.14- Teorem 3.3.17 deki eşitsizliklerden aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 3.3.5: $f(z) \in RT$ olsun. Eğer f fonksiyonunun tersi $w=0$ noktası civarında $f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n$ ise bu durumda

$$\left| H_3(1) \right| \leq \frac{1}{3} \left[\frac{3157}{360} + \left(\frac{13}{6} \right)^{\frac{5}{2}} \right]$$

eşitsizliği sağlanır [44].

Krishna ve arkadaşları [22] 2015 yılında $\mathcal{R}$ sınıfının genelleştilmişi olan $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfı için üçüncü Hankel determinantını çalışmıştır. Bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.7: $f \in \mathcal{A}$ olsun. α , $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} f'(z) > \alpha$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfı denir [22].

Özel olarak $\alpha = 0$ için Tanım 3.3.1 de tanımlanan $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}$ sınıfı elde edilir.

Teorem 3.3.18: $f(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ olsun. Eğer $0 \le \alpha \le 1/4$ ise bu durumda

$$|a_2 a_3 - a_4| \le \frac{1-\alpha}{6}\left(\frac{5-4\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Özel olarak $\alpha = 0$ için

$$|a_2 a_3 - a_4| \le \frac{5}{18}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

bulunur [22].

Teorem 3.3.19: $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ olsun. Eğer $0 \le \alpha \le 1/3$ ise

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \le \frac{2}{3}(1-\alpha)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Özel olarak $\alpha = 0$ için $\left|a_3 - a_2^2\right| \le 2/3$ bulunur [22].

Teorem 3.3.20: $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ olsun. Eğer $0 \le \alpha \le 1$ ise

$$|a_k| \le \frac{2(1-\alpha)}{k} \ , \ k \in \{2,3,4...\}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Teorem 3.3.18- Teorem 3.3.20 deki eşitsizliklerden aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 3.3.5: $f(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ olsun. Eğer $0 \le \alpha \le 1/4$ ise bu durumda

$$\left|H_3(1)\right| \le \frac{(1-\alpha)^2}{3}\left[\frac{8(1-\alpha)}{9} + \frac{1}{4}\left(\frac{5-4\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}\right]$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa $f(z) \in \mathcal{R}$ için $\left|H_3(1)\right| \le 0,7422$ bulunur [22]. Bu sınırın Babalola'nın [3] çalışmasında bulduğu sınırdan daha iyi olduğu açıktır.

Bansal ve arkadaşları [6] 2015 yılında konvekse yakın fonksiyonların sınıfı olarakta bilinen bir sınıf için aşağıdaki sonuçları bulmuştur.

Tanım 3.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > -\frac{1}{2}$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{F}$ sınıfı denir [6].

$\mathcal{F}$ sınıfına ait fonksiyonlar aynı zamanda konvekse yakın fonksiyonlar olarak bilinir. Ayrıca, konvekse yakın her fonksiyon ünivalent fonksiyon olduğundan $\mathcal{F}$ sınıfına ait fonksiyonlar ünivalent fonksiyon olarak da bilinir.

Teorem 3.3.21: $f \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \le \frac{1}{2}$$

$$\left|a_2 a_3 - a_4\right| \le \frac{9}{4\sqrt{15}}$$

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \frac{21}{64}$$

eşitsizlikleri sağlanır [6].

Ayrıca Ponnusamy, Sahoo ve Yanagihara [37] çalışmasında $f \in \mathcal{F}$ ve $n \geq 2$ için $|a_n| \leq \dfrac{n+1}{2}$ olduğunu ispatlamıştır. Sonuç olarak Teorem 3.3.21 ve her $f \in \mathcal{F}$ için $|a_n| \leq \dfrac{n+1}{2}$ $(n = 3,4,5)$ sonuçları dikkate alındığında aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

Teorem 3.3.22: $f \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \frac{180 + 69\sqrt{15}}{32\sqrt{15}}$$

eşitsizliği sağlanır [6].

2016 yılında Krishna, Venkateswarlu ve Ramreddy [23] yıldızıl ve konveks fonksiyonların özel bir çeşidi olan simetrik noktalara göre yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için üçüncü Hankel determinant problemini çalışmışlardır. Aynı çalışma aynı yılda Ambuj ve arkadaşları [2] tarafından çalışılmıştır. Elde ettikleri sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.9: $f(z) \in \mathcal{A}$ olsun. Buradan her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf ST_s ile gösterilir [23].

Teorem 3.3.23: $f(z) \in ST_s$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_3 - a_4| \leq \frac{1}{2}$$

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \leq 1$$

$$|a_k| \leq 1, \quad k \in \{2,3,4,...\}$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

Ramreddy ve Vamshee [38] 2012 yılında ST_s sınıfına ait fonksiyonlar için ikinci hankel determinantı için $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le 1$ olduğunu göstermiştir. Bu eşitsizlik ve Teorem 3.3.23 deki eşitsizlikler göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.24: $f(z)\in ST_s$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right|\le\frac{5}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

Tanım 3.3.10: $f(z)\in\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda her $z\in\mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2\left(zf'(z)\right)'}{\left(f(z)-f(-z)\right)'}\right)>0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara simetrik noktalara göre konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf CV_s ile gösterilir [23].

Teorem 3.3.25: $f(z)\in CV_s$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_3-a_4\right|\le 4/27$$

$$\left|a_3-a_2{}^2\right|\le 1/3$$

$$\left|a_k\right|\le 1/k,\quad k\in\{2,3,4,...\}$$

eşitsizlikleri sağlanır [23].

Ramreddy ve Vamshee[38] 2012 yılında CV_s sınıfına ait fonksiyonlar için ikinci hankel determinantı için $\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le 1/9$ olduğunu göstermiştir. Bu eşitsizlik ve Teorem 3.3.25 deki eşitsizlikler göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.26: $f(z)\in CV_s$ olsun. Bu durumda

$$\left|H_3(1)\right|\le\frac{19}{135}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

2016 yılında Altınkaya ve Yalçın [1] yıldızıl fonksiyonlar sınıfının önemli bir alt sınıfı olan ve ilk defa 1973 yılında Singh tarafından tanımlanan *Bazilevič̃* fonksiyonların sınıfı olarak bilinen $B(\beta)$ sınıfı için üçüncü Hankel determinantını çalışmıştır. Bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.3.11: $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \le \beta < 1$ olsun. $\forall z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1-\beta} f'(z)\right) > 0$$

şartını sağlayan fonksiyonlara *Bazilevič̃* fonksiyonu denir. *Bazilevič̃* fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $B(\beta)$ ile gösterilir [1].

Teorem 3.3.27: $f \in B(\beta)$ olsun. Bu durumda

i. $|a_2| \le \dfrac{2}{\beta+1}$

ii. $|a_3| \le \dfrac{2}{\beta+2} + \dfrac{2(1-\beta)}{(\beta+1)^2}$

iii. $|a_4| \le \dfrac{2}{\beta+3} + \dfrac{4(1-\beta)}{(\beta+1)(\beta+2)} + \dfrac{4(1-\beta)|2\beta-1|}{3(\beta+1)^3}$

iv. $|a_2a_3 - a_4| \le \begin{cases} 2 & ; \beta = 0 \\ \dfrac{2(\beta^2+\beta+6)}{3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\sqrt{\dfrac{2(\beta^3+4\beta^2+9\beta+6)}{\beta^3+4\beta^2+\beta+18}} & ; 0 < \beta < 1 \end{cases}$

v. $|a_3 - a_2^2| \le \dfrac{2}{\beta+2}$

eşitsizlikleri sağlanır [1].

Tanım 3.3.12: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \mathcal{W}$ olsun. $0 \le \lambda \le 1$ ve $\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right) \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfındandır denilir ([47], [10]).

Xu, Gui ve Srivastava [47] 2011 yılında Tanım 3.3.12 de φ nin konveks olması durumunda $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı eşitsizliğini elde etmiştir.

Teorem 3.3.28: $\varphi \in \mathcal{W}$ bir konveks fonksiyon ve $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|a_n| \le \frac{\prod_{k=0}^{n-2}(k + B_1|\gamma|)}{(n-1)!(1+\lambda(n-1))}$$

eşitizliği sağlanır [47].

Xıong, Feng ve Zhang 2014 yılında [46] çalışmasında parametrelerin özel bir durumunda $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Fekete-Szegö eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 3. 3. 29: $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda $\Delta = \left|\gamma B_1 + \frac{B_2}{B_1} - \frac{2(1+2\lambda)\gamma B_1}{(1+\lambda)^2}\right|$ olmak üzere

$$|a_3 - a_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)} & ;\Delta \le 1 \\ \dfrac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}\Delta & ;\Delta > 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sınırlar kesindir [46].

Deniz ve Budak [10] 2016 yılında $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı problemini çalışarak aşağıdaki sonucu bulmuştur.

Sonucu vermeden önce $\varphi \in \mathcal{W}$ fonksiyonunun

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots \quad (z \in \mathcal{U},\ B_k \in \mathbb{C},\ B_1 > 0) \tag{3.9}$$

şeklinde Taylor açılımına sahip olduğunu gözönüne alacağız. Bundan sonraki kısımlarda $\varphi \in \mathcal{W}$ ile (3.9) şeklindeki fonksiyonlar anlaşılacaktır.

Aynı zamanda $\mathcal{W}$ sınıfı ile $\mathcal{P}$ sınıfı arasında yakından bir ilişki vardır. Öyle ki; $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ve $u, v : \mathcal{U} \to \mathcal{U}, u(0) = v(0) = 0$ fonksiyonları için

$$p_1(z) = \frac{1+u(\mathrm{z})}{1-u(\mathrm{z})} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

ve

$$p_2(z) = \frac{1+v(\mathrm{z})}{1-v(\mathrm{z})} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$u(z) = \frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1} = \frac{c_1}{2} z + \frac{1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) z^2 + \ldots \text{ve}$$

$$v(z) = \frac{p_2(z)-1}{p_2(z)+1} = \frac{b_1}{2} z + \frac{1}{2}\left(b_2 - \frac{b_1^2}{2} \right) z^2 + \ldots$$

yazılır. Böylece

$$\varphi(u(z)) = 1 + \frac{B_1 c_1}{2} z + \left\{ \frac{1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2} \right) B_1 + \frac{1}{4} c_1^2 B_2 \right\} z^2 + \ldots$$

ve

$$\varphi(v(z)) = 1 + \frac{B_1 b_1}{2} z + \left\{ \frac{1}{2}\left(b_2 - \frac{b_1^2}{2} \right) B_1 + \frac{1}{4} b_1^2 B_2 \right\} z^2 + \ldots$$

elde edilir [9].

Teorem 3. 3. 30: $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi),\ 0 \le \lambda \le 1,\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m = \dfrac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}$ olsun.

Bu durumda

1) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2 |\gamma| (6-m) + |B_2| (8-m) + B_1 (4-m) \le 0,$$
$$\left| B_1^4 \gamma^2 (4-m) + 2\gamma B_1^2 B_2 (6-m) - m B_2^2 + 8 B_1 B_3 \right| - m B_1^2 \le 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left| a_2 a_4 - a_3^2 \right| \le \frac{|\gamma|^2 B_1^2}{4(1+2\lambda)^2}$$

olur.

2) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\geq 0,$$

$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\geq 0$$

veya

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\leq 0,$$
$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-mB_1^2\geq 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{|\gamma|^2\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3-mB_2^2\right|}{24(1+3\lambda)(1+\lambda)}$$

olur.

3) Eğer B_1, B_2 ve B_3 değerleri

$$B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)>0,$$

$$\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\leq 0$$

koşullarını sağlarsa,

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{|\gamma|^2B_1^2}{24(1+3\lambda)(1+\lambda)}$$
$$\times\left(\frac{\begin{bmatrix} m\left|B_1^4\gamma^2(4-m)-mB_2^2+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3\right| \\ -2B_1\left[|B_2|(8-m)+B_1^2|\gamma|(6-m)-B_1^2(8-m)\right] \\ -\left(\left[B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)\right]+B_1(4-m)\right)^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left|B_1^4\gamma^2(4-m)-mB_2^2+2B_1^2B_2\gamma(6-m)+8B_1B_3\right| \\ -2\left[B_1^3|\gamma|(6-m)+B_1|B_2|(8-m)\right]-B_1^2(8-m) \end{bmatrix}}\right)$$

olur [10].

BULGULAR

Bu çalışmanın temel amacı yukarıda tanımlanan $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfı için $|\mathrm{H}_3(1)|$ in bir üst sınırını elde etmek olacaktır. Teoremin ispatı materyal ve yöntem kısmında verilen teoremlerin ispatındaki yol izlenerek yapılacaktır.

Teorem 4.1: $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi),\ 0 \le \lambda \le 1,\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve

$$N = \frac{3(1+3\lambda)}{(1+\lambda)(1+2\lambda)}$$

olsun. Bu durumda

1. Eğer B_1 ve B_2 katsayıları

$$\left|\frac{B_2}{B_1} + (3-N)\gamma B_1\right| \ge 1$$

şartını sağlarsa

$$|a_4 - a_2 a_3| \le \frac{|\gamma|}{192(1+3\lambda)} \begin{bmatrix} \left|8B_3 + 4\gamma(3-N)B_1B_2 + 4\gamma^2(1-N)B_1^3\right| \\ + \dfrac{3}{2B_1}\left|4B_2 + \gamma(3-N)B_1^2\right|^2 + 48B_1 \end{bmatrix}$$

olur.

2. Eğer B_1, B_2 ve B_3 katsayıları

$$\left|\frac{2B_3}{B_1} + \frac{\gamma(3-N)}{4}B_2 + \frac{\gamma^2(1-N)}{4}B_1^2\right| - \left|\frac{2B_2}{B_1} + \frac{\gamma(3-N)}{2}B_1\right| \ge 1$$

şartını sağlarsa

$$|a_4 - a_2 a_3| \le \frac{|\gamma|}{6(1+3\lambda)}\left[\left|2B_3 + \gamma(3-N)B_1B_2 + \gamma^2(1-N)B_1^3\right|\right]$$

olur [11].

İspat: $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right) = \varphi(w(z)) \tag{4.1}$$

olacak şekilde $\mathcal{U}$ da $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ şartlarını sağlayan bir w fonksiyonu vardır. Ayrıca

$$p_1(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\ldots$$

şeklinde tanımlanana p_1 fonksiyonları için

$$w(z)=\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}=\frac{c_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+\frac{1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{2}\right)z^3+\ldots \tag{4.2}$$

yazılır. Bu durumda p_1, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik $p_1(0)=1$ ile $\mathcal{U}$ birim diskinde reel kısmı pozitif olan bir fonksiyon olur. Diğer taraftan (4.2) ile (3.9) birlikte kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\varphi(w(z))&=1+\frac{B_1c_1}{2}z+\left\{\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)B_1+\frac{1}{4}B_2c_1^2\right\}z^2\\&+\left\{\frac{1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4}\right)B_1+\frac{1}{4}\left(c_1c_2-\frac{c_1^3}{2}\right)B_2+\frac{c_1^3}{16}B_3\right\}z^3+\ldots\end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)\\&=1+\frac{1}{\gamma}(1+\lambda)a_2z+\frac{1}{\gamma}\left[(1+2\lambda)2a_3-(1+\lambda)^2a_2^2\right]z^2\\&+\frac{1}{\gamma}\left[(1+3\lambda)3a_4-3(1+\lambda)(1+2\lambda)a_2a_3+(1+\lambda)^3a_2^3\right]z^3+\ldots\end{aligned} \tag{4.4}$$

olur. (4.1), (4.3) ve (4.4) ifadelerinden

$$a_2=\frac{\gamma}{2(1+\lambda)}B_1c_1,$$

$$a_3=\frac{\gamma}{4(1+2\lambda)}\left[\left(B_2-B_1+\gamma B_1^2\right)\frac{c_1^2}{2}+B_1c_2\right],$$

$$\begin{aligned}a_4&=\frac{\gamma}{6(1+3\lambda)}\\&\times\left[\frac{c_1^3}{2}\left(\frac{B_1}{2}-B_2+\frac{B_3}{2}-\frac{3\gamma B_1^2}{4}+\frac{3\gamma}{4}B_1B_2+\frac{\gamma^2}{4}B_1^3\right)+c_1c_2\left(B_2-B_1+\frac{3\gamma}{4}B_1^2\right)+B_1c_3\right]\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan

$$a_4 - a_2 a_3 = \frac{\gamma}{6(1+3\lambda)} \left[\begin{array}{l} B_1 c_3 + c_1 c_2 \left(B_2 - B_1 + \frac{3\gamma}{4} B_1^2 \right) \\ + \frac{c_1^3}{2} \left(\frac{B_1}{2} - B_2 + \frac{B_3}{2} - \frac{3\gamma}{4} B_1^2 + \frac{3\gamma}{4} B_1 B_2 + \frac{\gamma^2}{4} B_1^3 \right) \end{array} \right]$$

$$- \frac{\gamma^2 B_1 c_1}{8(1+\lambda)(1+2\lambda)} \left[B_1 c_2 + \frac{c_1^2}{2} \left(B_2 - B_1 + \gamma B_1^2 \right) \right]$$

$$= \frac{\gamma}{48(1+3\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} 2c_1 c_2 (4B_2 - 4B_1 + 3\gamma B_1^2) + 8B_1 c_3 \\ + c_1^3 (2B_1 - 4B_2 + 2B_3 - 3\gamma B_1^2 + 3\gamma B_1 B_2 + \gamma^2 B_1^3) \\ - \frac{3\gamma(1+3\lambda) B_1}{(1+\lambda)(1+2\lambda)} \left[2B_1 c_1 c_2 + c_1^3 (B_2 - B_1 + \gamma B_1^2) \right] \end{array} \right\}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |a_4 - a_2 a_3| = T \, \big| & 2c_1 c_2 (4B_2 - 4B_1 + 3\gamma B_1^2 - N\gamma B_1^2) + 8B_1 c_3 \\ & + c_1^3 (2B_1 - 4B_2 + 2B_3 - 3\gamma B_1^2 + 3\gamma B_1 B_2 + \gamma^2 B_1^3 - N\gamma B_1 (B_2 - B_1 + \gamma B_1^2)) \big| \end{aligned} \tag{4.5}$$

Burada

$$T = \frac{|\gamma|}{48(1+3\lambda)} \quad \text{ve} \quad N = \frac{3(1+3\lambda)}{(1+\lambda)(1+2\lambda)}$$

olup $0 \le \lambda \le 1$ için $N \in [2,3]$ bulunur. Kolaylık açısından

$$\begin{aligned} d_1 &= 2(4B_2 - 4B_1 + 3\gamma B_1^2 - N\gamma B_1^2) \\ d_2 &= 8B_1 \\ d_3 &= 2B_1 - 4B_2 + 2B_3 - 3\gamma B_1^2 + 3\gamma B_1 B_2 + \gamma^2 B_1^3 - N\gamma B_1 (B_2 - B_1 + \gamma B_1^2) \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde alınırsa

$$|a_4 - a_2 a_3| = T \left| d_1 c_1 c_2 + d_2 c_3 + d_3 c_1^3 \right| \tag{4.7}$$

yazılır. Herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonu için $p\left(e^{i\theta} z\right) \in \mathcal{P}$ olduğundan $c_1 > 0$ alınması genelliği bozmayacaktır. $c \in [0,2]$ aralığında $c_1 = c$ alalım. Lemma 3.2.4 deki c_2 ve c_3 değerleri (4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |a_4 - a_2 a_3| = \frac{T}{4} \big| & c^3 (2d_1 + d_2 + 4d_3) + 2xc(4-c^2)(d_1 + d_2) \\ & -(4-c^2) d_2 c x^2 + 2d_2 (4-c^2) \left(1 - |x|^2\right) z \big| \end{aligned}$$

elde edilir. (4.6) ifadelerindeki $d_1,\ d_2,\ d_3$ ve $|x|$ yerine de μ değeri yazılır ve eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |a_4 - a_2 a_3| &\le \frac{T}{4}\left\{c^3(2d_1 + d_2 + 4d_3) + 2(4-c^2)|d_2| \right. \\ &\quad \left. + 2c(4-c^2)|d_1 + d_2|\mu + (4-c^2)(c-2)|d_2|\mu^2\right\} \\ &:= F(c,\mu) \end{aligned} \tag{4.8}$$

olur. $(c,\mu)\in[0,2]\times[0,1]$ için (4.8) ifadesindeki $F(c,\mu)$ fonksiyonunun μ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial F(c,\mu)}{\partial\mu} = \frac{T}{2}(4-c^2)\left\{c|d_1+d_2| + (c-2)|d_2|\mu\right\}$$

elde edilir.

Şimdi $(c,\mu)\in[0,2]\times[0,1]$ için $F(c,\mu)$ fonksiyonunun maksimumunu araştıralım. Bunun için $0<c<2,\ c=0$ ve $c=2$ durumlarına göre maksimumluğa bakalım.

Durum 1: $0<c<2$ olsun.

Bu durumda $\dfrac{\partial F(c,\mu)}{\partial\mu}=0$ eşitliğinden $\mu_0 = \dfrac{c|d_1+d_2|}{(2-c)|d_2|}$ kritik noktası bulunur.

Buna göre aşağıdaki durumlar araştırılır.

i. $c\in\left(0,\dfrac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right)$ olsun. c nin bu aralığı için $\dfrac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}<2$ yazılır.

Böylece $\mu_0<1$ yani μ_0, $[0,1]$ aralığının bir iç noktasıdır. Buna göre $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\mu^2}(\mu_0)<0$ olduğundan $F(c,\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=\mu_0$ de alır. Böylece

$$\begin{aligned} \max_{0<c<\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}} F(c,\mu) &= F(c,\mu_0) \\ &= \frac{T}{4}\left\{c^3\left[|2d_1+d_2+4d_3| + \frac{|d_1+d_2|^2}{|d_2|}\right] + c^2\left[\frac{2|d_1+d_2|^2}{|d_2|} - 2|d_2|\right] + 8|d_2|\right\} \\ &:= G(c) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $G(c)$ fonksiyonunun $c \in \left(0, \frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right)$ için maksimumluğunu araştıralım.

Bunun için

$$D_1 = \frac{T}{4}\left[|2d_1 + d_2 + 4d_3| + \frac{|d_1+d_2|^2}{|d_2|}\right] \geq 0$$

$$D_2 = \frac{T}{4}\left[\frac{2|d_1+d_2|^2}{|d_2|} - 2|d_2|\right]$$

$$D_3 = 2T\,|d_2| \geq 0$$

olmak üzere $G : \left(0, \frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right) \to \mathbb{R}$, $G(c) = D_1c^3 + D_2c^2 + D_3$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin i şıkkının hipotezinden $\left|\frac{B_2}{B_1} + \gamma(3-N)B_1\right| \geq 1$ (veya $|d_1+d_2| \geq |d_2|$)

$$\frac{dG(c)}{dc} = 3D_1c^2 + 2D_2c > 0$$

olur. Dolayısıyla $\left(0, \frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right)$ aralığında G artan fonksiyon olup maksimum değerini $\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}$ noktasında alır. Böylece $|d_1+d_2| \geq |d_2|$ yada $|d_1+d_2| + |d_2| \geq 2|d_2|$ eşitsizliğini göz önüna alarak

$$\begin{aligned}
\max_{0<c<\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}} G(c) &= G\left(\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right) \\
&= D_1\left(\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right)^3 + D_2\left(\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}\right)^2 + D_3 \\
&< D_1 + D_2 + D_3 \\
&= \frac{T}{4}\left[|2d_1 + d_2 + 4d_3| + \frac{3|d_1+d_2|^2}{|d_2|} + 6|d_2|\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

ii. $c \in \left(\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}, 2\right)$ olsun. Böylece $\mu_0 > 1$ yani μ_0, $[0,1]$ aralığının bir dış noktasıdır. Bu durumda

$$\max_{\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}<c<2} F(c,\mu)=F(c,1)$$

$$=\frac{T}{4}\left[\left(|2d_1+d_2+4d_3|-4|d_1+d_2|-2|d_2|\right)c^3+8\left(2|d_1+d_2|+|d_2|\right)c\right]$$

$$:=H(c)$$

bulunur. Teoremin ii şıkkının $|2d_1+d_2+4d_3|-4|d_1+d_2|\geq 2|d_2|$ yada

$$\left|\frac{2B_3}{B_1}+\frac{\gamma(3-N)}{4}B_2+\frac{\gamma^2(1-N)}{4}B_1^2\right|-\left|\frac{2B_2}{B_1}+\frac{\gamma(3-N)}{2}B_1\right|\geq 1$$

hipotezinden

$$\frac{dH(c)}{dc}=\frac{T}{4}\left[3\left(|2d_1+d_2+4d_3|-4|d_1+d_2|-2|d_2|\right)c^2+8\left(2|d_1+d_2|+|d_2|\right)\right]>0$$

elde edilir. Dolayısıyla H fonksiyonu $\left(\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|},2\right)$ aralığında maksimum

değerini $c=2$ noktasında alır. Böylece

$$\max_{\frac{2|d_2|}{|d_1+d_2|+|d_2|}<c<2} H(c)=H(2)=2T|2d_1+d_2+4d_3|$$

elde edilir.

Durum 2: $c=0$ olsun. Bu durumda her $\mu\in[0,1]$ için

$$F(0,\mu)=8|d_2|(1-\mu^2)$$

olup, $\frac{dF(0,\mu)}{d\mu}<0$ olduğundan $F(0,\mu)$ maksimum değerini $\mu=0$ da alır. Yani

$$\max F(0,\mu)=F(0,0)=8|d_2|$$

elde edilir.

Durum 3: $c=2$ olsun. Bu durumda her $\mu\in[0,1]$ için

$$F(2,\mu)=2T|2d_1+d_2+4d_3|=\max F(2,\mu)$$

elde edilir.

Sonuç olarak Durum 1, 2 ve 3 birlikte düşünüldüğünde teorem ispatlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.1 in bazı özel durumlarını verelim.

Eğer Teorem 4.1 de $\varphi(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1: $f\in\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olsun. Bu durumda

$$f\in\mathcal{S}^*[\gamma]\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le\begin{cases}\dfrac{|\gamma|\left[|4\gamma^2-1|+9\right]}{12} & ;\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\\ \dfrac{2|\gamma||4\gamma^2-1|}{3} & ;|\gamma^2-1|\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

ve

$$f\in\mathcal{C}[\gamma]\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le\begin{cases}\dfrac{|\gamma|}{48}\left[|2\gamma^2-\gamma-1|+\dfrac{3|\gamma+1|}{4}+6\right] & ;|\gamma|\ge\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{|\gamma|}{6}|2\gamma^2-\gamma-1| & ;|2\gamma^2-\gamma-4|\ge 2|\gamma+2|+2\end{cases}$$

Eğer Sonuç 4.1 de $\gamma=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2: $f\in\mathcal{S}^*\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le 1$ ve $f\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le\dfrac{5}{32}\cong 0{,}15$

Not: Babalola'nın $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ için Teorem 3.3.2 ve 3.3.3 deki

$$f\in\mathcal{S}^*\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le 2 \text{ ve } f\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_4-a_2a_3|\le\frac{1}{6}\cong 0{,}16$$

sonuçlarına bakıldığında Sonuç 4.2 de bulduğumuz sınırların daha iyi olduğunu görürüz. Bu anlamda bu tez çalışmasında bulduğumuz sonuçlar (Teorem 4.1) Babalola'nın Teorem 3.3.2 ve 3.3.3 deki buldukları sonuçları hem genelleştirir hemde özel durumlarda iyileştirir.

Şimdi çalışmanın son safhasında Teorem 3.3.28, Teorem 3.3.29, Teorem 3.3.30 ve Teorem 4.1 birlikte düşünerek $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|H_3(1)|$ in bir üst sınırını aşağıdaki şekilde verebiliriz. Sonucu vermeden önce bazı kısaltmaları verelim.

$$A_3 = \frac{B_1|\gamma|(1+B_1|\gamma|)}{2!(1+2\lambda)}$$

$$A_4 = \frac{B_1|\gamma|(1+B_1|\gamma|)(2+B_1|\gamma|)}{3!(1+3\lambda)}$$

$$A_5 = \frac{B_1|\gamma|(1+B_1|\gamma|)(2+B_1|\gamma|)(3+B_1|\gamma|)}{4!(1+4\lambda)}$$

$$\Phi_1 = \frac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}$$

$$\Phi_2 = \frac{|\gamma| B_1}{2(1+2\lambda)}\left|\gamma B_1 + \frac{B_2}{B_1} - \frac{2(1+2\lambda)\gamma B_1}{(1+\lambda)^2}\right|$$

$$\Phi_3 = \frac{|\gamma|}{192(1+3\lambda)}\begin{bmatrix} \left|8B_3 + 4\gamma(3-N)B_1B_2 + 4\gamma^2(1-N)B_1^3\right| \\ + \dfrac{3}{2B_1}\left|4B_2 + \gamma(3-N)B_1^2\right|^2 + 48B_1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_4 = \frac{|\gamma|}{6(1+3\lambda)}\left[\left|2B_3 + \gamma(3-N)B_1B_2 + \gamma^2(1-N)B_1^3\right|\right]$$

$$\Phi_5 = \frac{|\gamma|^2 B_1^2}{4\left(1+2\lambda\right)^2}$$

$$\Phi_6 = \frac{|\gamma|^2\left|B_1^4\gamma^2\left(4-m\right)+2B_1^2B_2\gamma\left(6-m\right)+8B_1B_3 - mB_2^2\right|}{24\left(1+3\lambda\right)\left(1+\lambda\right)}$$

$$\Phi_7 = \frac{|\gamma|^2 B_1^2}{24\left(1+3\lambda\right)\left(1+\lambda\right)}$$

$$\times\left(\frac{\begin{bmatrix} m\left|B_1^4\gamma^2\left(4-m\right) - mB_2^2 + 2B_1^2B_2\gamma\left(6-m\right) + 8B_1B_3\right| \\ -2B_1\left[\left|B_2\right|\left(8-m\right) + B_1^2\left|\gamma\right|\left(6-m\right) - B_1^2\left(8-m\right)\right] \\ -\left(\left[B_1^2\left|\gamma\right|\left(6-m\right) + \left|B_2\right|\left(8-m\right)\right] + B_1\left(4-m\right)\right)^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left|B_1^4\gamma^2\left(4-m\right) - mB_2^2 + 2B_1^2B_2\gamma\left(6-m\right) + 8B_1B_3\right| \\ -2\left[B_1^3\left|\gamma\right|\left(6-m\right) + B_1\left|B_2\right|\left(8-m\right)\right] - B_1^2\left(8-m\right) \end{bmatrix}}\right)$$

$$\Omega_1=\left\{(B_1,B_2,\gamma,\lambda):\left|\gamma B_1+\frac{B_2}{B_1}-\frac{2(1+2\lambda)\gamma B_1}{(1+\lambda)^2}\right|\le 1\right\}$$

$$\Omega_2=\left\{(B_1,B_2,\gamma,\lambda):\left|\gamma B_1+\frac{B_2}{B_1}-\frac{2(1+2\lambda)\gamma B_1}{(1+\lambda)^2}\right|> 1\right\}$$

$$\Omega_3=\left\{(B_1,B_2,\gamma,\lambda):\left|\frac{B_2}{B_1}+(3-N)\gamma B_1\right|\ge 1,\ \ N=\frac{3(1+3\lambda)}{(1+\lambda)(1+2\lambda)}\right\}$$

$$\Omega_4=\left\{(B_1,B_2,B_3,\gamma,\lambda):\left[\begin{array}{l}\left|\frac{2B_3}{B_1}+\frac{\gamma(3-N)}{4}B_2+\frac{\gamma^2(1-N)}{4}B_1^2\right|-\left|\frac{2B_2}{B_1}+\frac{\gamma(3-N)}{2}B_1\right|\ge 1,\\ N=\frac{3(1+3\lambda)}{(1+\lambda)(1+2\lambda)}\end{array}\right.\right\}$$

$$\Omega_5=\left\{(B_1,B_2,B_3,\gamma,\lambda):\left[\begin{array}{l}B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\le 0,\\ \left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-mB_1^2\le 0,\\ m=\frac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}\end{array}\right.\right\}$$

$$\Omega_6=\left\{(B_1,B_2,B_3,\gamma,\lambda):\left[\begin{array}{l}B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|\\ -B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\ge 0\end{array}\right]\\ \textit{veya}\\ B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)\le 0,\\ \left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|-mB_1^2\ge 0,\\ \quad m=\frac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}\end{array}\right.\right\}$$

$$\Omega_7=\left\{(B_1,B_2,B_3,\gamma,\lambda):\left[\begin{array}{l}B_1^2|\gamma|(6-m)+|B_2|(8-m)+B_1(4-m)> 0,\\ \left[\begin{array}{l}\left|B_1^4\gamma^2(4-m)+2\gamma B_1^2B_2(6-m)-mB_2^2+8B_1B_3\right|\\ -B_1^3|\gamma|(6-m)-B_1|B_2|(8-m)-4B_1^2\le 0\end{array}\right],\\ m=\frac{6(1+\lambda)(1+3\lambda)}{(1+2\lambda)^2}\end{array}\right.\right\}$$

Teorem 4.2: $\varphi \in \mathcal{W}$ bir konveks fonksiyon ve $f \in \mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ olsun. Bu durumda

$$|H_3(1)| \leq \begin{cases} A_3\Phi_5 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_3 \cap \Omega_5 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_6 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_3 \cap \Omega_6 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_7 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_3 \cap \Omega_7 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_5 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_4 \cap \Omega_5 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_6 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_4 \cap \Omega_6 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_7 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_1; & \Omega_1 \cap \Omega_4 \cap \Omega_7 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_5 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_5 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_6 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_6 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_7 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_7 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_5 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_4 \cap \Omega_5 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_6 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_4 \cap \Omega_6 \text{ kümesinde} \\ A_3\Phi_7 + A_4\Phi_4 + A_5\Phi_2; & \Omega_2 \cap \Omega_4 \cap \Omega_7 \text{ kümesinde} \end{cases}$$

değerlendirilmesi doğrudur.

Teorem 4.2 de özel olarak; $\gamma = 1,\ \varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z} \in \mathcal{C}$ alınırsa $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ için sırasıyla aşağıdaki sonuçlar yazılır.

$$f \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |H_3(1)| \leq A_3\Phi_6 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_1 = 12$$

ve

$$f \in \mathcal{C} \Rightarrow |H_3(1)| \leq A_3\Phi_6 + A_4\Phi_3 + A_5\Phi_1 = \frac{115}{192} \approx 0.598$$

elde edilir.

Not: $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıfları için; Babalola'nın sırasıyla Sonuç 3.3.2 ve Sonuç 3.3.3 deki sonuçları ile bizim sonuçlarımızın karşılaştırılması aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu sonuçlara göre bizim sonuçlarımızın daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Ele alınan sınıf	**Babalola'nın sonuçları**	**Bizim bulduğumuz sonuçlar**
$\mathcal{S}^*$	$\lvert H_3(1)\rvert \leq 16$	$\lvert H_3(1)\rvert \leq 12$
$\mathcal{C}$	$\lvert H_3(1)\rvert \leq \frac{15}{24} \approx 0.625$	$\lvert H_3(1)\rvert \leq \frac{115}{192} \approx 0.598$

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak analitik fonksiyonların genelleştirilmiş $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ alt sınıfa ait fonksiyonların katsayıları için $|a_4 - a_2 a_3|$ nin bir üst sınırını elde ettik. Daha sonra bu sonuçla birlikte üçüncü Hankel determinantı $|H_3(1)|$ için bir üst sınır bulundu.

Bulunan sonuç son zamanlarda yapılan Babalola'nın [3] sonuçlarının genelleştirilmesi olup ayrıca bu sonuç literatür kısmında verilen bir çok sonucun genel halidir. Ayrıca parametrelerin özel durumlarında elde edilen sonuçların yine Babalola'nın [3] çalışmasında buldukları sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür.

Bu çalışmadan yola çıkarak bazı araştırmacılar $\mathcal{S}(\lambda,\gamma;\varphi)$ sınıfını genelleştirerek oluşturdukları sınıflar için $H_2(1), H_2(2)$ ve $H_3(1)$ Hankel determinantlarının üst sınırları bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Altınkaya, Ş. and Yalçın, S., 2016. "Third Hankel determinant for Bazilevic functions", Advances Mathematics Scientific Journal 5(2), 91-96.

[2] Ambuj, K. M., Prajapat, J. K. and Maharana, S., 2016. "Bounds on Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symmetric points", Cogent Mathematics 3:1160557.

[3] Babalola, K. O., 2007. "On $H_3(1)$ Hankel determinant for some classes of univalent functions", Inequality Theory and Applications, 6, 1–7.

[4] Babalola, K. O. and Opoola, T. O., 2008. "On the coefficients of certain analytic and univalent functions", Advances in Inequalities for Series, (Edited by S. S. Dragomir and A. Sofo) Nova Science Publishers, 5-17.

[5] Bansal, D., 2013. "Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions", Applied Mathematics Letters 26(1), 103-107.

[6] Bansal, D., Maharana, S. and Prajapat, J. K., 2015."Third order Hankel determinant for certain univalent functions", J. Korean Math. Soc. 52(6), 1139-1148.

[7] Calivetti, D. and Reichel, L ., 1997. "Factorizations of Cauchy Matrices", Journal of Compution and Applied Mathematics" 86, 103-123.

[8] Cantor, D. G., 1963. "Power series with integral coefficients", Bull. Amer. Math. Soc. 69, 362– 366.

[9] Deniz, E. and Budak, L., 2016. "Hankel Determinantı Kullanılarak Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği", Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[10] Deniz, E. and Budak, L., 2016. "Second Hankel determinant for dertain analytic functions satisfying subordinate condition", Mathematica Slovaca (in press).

[11] Deniz, E., Gülsün Y. and Mustafa N., 2017. "Coefficient estimates for certain analytic functions satisfying subordinate condition", AIP Conference Proceedings. 1833, 020003.

[12] Duren, P. L., 1983. "Univalent functions", Springer Verlag. New York Inc.

[13] EhHosh, M. M., 1986. "On the second Hankel determinant of univalent functions", Bull. Malaysian Math. Soc. (2)9, 1, 23– 25.

[14] EhHosh, M. M., 1986. "On the second Hankel determinant of close-to-convex functions", Bull. Malaysian Math. Soc. (2)9, 2, 67– 68.

[15] Goodman, A. W. , 1983.“ Univalent Functions”, I. Mariner Publishing Company., 245, Tapma, Florida.

[16] Grenander, U. and Szegö G., 1958. “Toeplitz forms and their applications”, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles.

[17] Hayman, W. K., 1968. “On the second Hankel determinant of mean univalent functions”, Proc. London Math. Soc. (3)18, 77-94.

[18] Iohvidov, I. S., 1982. “Hankel and Toeplitz matrices and forms”, Birk Hauser, Boston.

[19] Janteng, A., Halım, S. A. and Darus, M., 2006. “Coefficıent inequality for a function whose derivative has a positive real part”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7(2), 50.

[20] Janteng, A., Halim, S. A. and Darus, M., 2007. “Hankel determinant for starlike and convex functions”, Int. Journal of Math. Analysis, 1(13), 619 – 625.

[21] Keogh, F. R. and Merkes, E. P., 1969. “A coefficient inequality for certain classes of analytic functions”, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 8- 12.

[22] Krishna, V. D., Venkatesvarlu, B. and RamReddy, T., 2015. “Third Hankel determinant for bounded turning functions of order alpha”, Journal of the Nigerian Mathematical Society 34, 121-127

[23] Krishna, V. D., Venkatesvarlu, B. and RamReddy, T., 2016. “Third Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symmetric points”, Annales Univarsitatis Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia, 70(1), 37-45.

[24] Lee, S. K., Ravichandran, V. and Supramaniam, S., 2013. “Bounds for the second Hankel determinant of certain univalent functions”, Journal of Inequalities and Applications 2013:281.

[25] Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J., 1983. “Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P”, Proc. Amer. Math. Soc. 87(2), 251- 257.

[26] Macgegor, T. H., 1962. “Functions whose derivative has a positive real part”, Trans. Amer. Math. Soc. 104, 532- 537.

[27] Noonan, J. W. and Thomas, D. K., 1972. “On the Hankel determinants of areally mean p-valent functions”, Proc. London Math. Soc. (3)25, 503–524.

[28] Noor, K. I., 1997. “On the Hankel determinant problem for strongly close-to-convex functions”, J. Natur. Geom. 11(1), 29– 34.

[29] Noor, K. I., 2008. "On certain analytic functions related with strongly close- to-convex functions", Appl. Math. Comput. 197(1), 149–157.

[30] Noor, K. I. and Al-Bany, S. A., 1987. "On Bazilevic functions", Internat. J. Math. Math. Sci. 10(1), 79–88.

[31] Noor, K. I., 1981. "On analytic functions related with functions of bounded boundary rotation", Comment. Math. Univ. St. Paul. 30(2), 113–118.

[32] Noor, K. I., 1980. "On the Hankel determinants of Close-to-convex univalent functions", Internat. J. Math. Math. Sci. 3(3), 477- 481.

[33] Pommerenke, CH., 1966. "On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions", J. London Math. Soc. 41, 111- 22.

[34] Pommerenke, Ch., 1975. "Univalent Functions", Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s- 376, Göttingen, Berlin.

[35] Pommerenke, Ch., 1967. "On the Hankel determinants of univalent functions", Mathematika 14, 108–112.

[36] Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006. "Complex variables with Applications", Birkhäuser. Boston.

[37] Ponnusamy, S., Sahoo, S. K. and Yanigahara, H., 2014. "Radius of convexity of partial sums of fuctions in the close-to-convex family", Nonlinear Anal. 95, 219- 228.

[38] Ramreddy, T. and Vamshee K., D., 2012. "Hankel determinant for starlike and convex functions with respect to symetric points", J. Ind. Math. Soc. (N.S) 79(1-4), 161-171.

[39] Raza, M. and Malik, S. N., 2013. "Upper bound of the third hankel determinant for a class of analytic functions related with lemniscate of Bernoulli", Journal of Inequalities and Applications, 2013:412.

[40] Shanmugam, G., Stephen, B., A., and Babalola, K., O., 2014. "Third Hankel determinant for $\alpha-$starlike functions", Gulf Journal Mathematics 2(2), 107-113.

[41] Sokol, J., 2009. "Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions", Kyungpook Math. J. 49(2), 349- 353.

[42] Sudharsan, T. V. and Vijaya, R., 2014. "On second Hankel determinant for two new subclasses of analytic functions", Surveys in Mathematics and its Aplications, 9, 131- 138.

[43] Sudharsan, T. V., Vijayalakshmi, S. P. and Stephen A. B., 2014. “Third Hankel determinant for a subclass of analytic univalent functions” , Malaya J. Mat. 2(4), 438- 444.

[44] Venkateswarlu, B., Krishna, D. and Rani N., 2015. “Third Hankel determinant for the inverse reciprocal of bounded turning functions”, Bul. Acad. Ştiinte Repub. Mold. Mat. 3, 50-59.

[45] Wilson, R., 1954. “Determinantal criteria for meromorphic functions”, Proc. London Math. Soc. (3)4, 357–374.

[46] Xıong, L., Feng, X. and Zhang, J., 2014. “Fekete–Szegö inequality for generalized subclasses of univalent functions”, J. Math. Ineq. 8(3), 643–659.

[47] Xu, Q-H., Gui, Y-C. and Srivastava H. M., 2011. “Coefficient estimates for certain subclasses of analytic functions of complex order”, Taiwanese Journal of Mathematics 15(5), 2377-2386.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yekta GÜLSÜN

Doğum Yeri: Ergani

Doğum Tarihi: 01. 05. 1991

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise: Ergani Lisesi - 2009

Lisans: Kafkas Üniveristesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik - 2014

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)-2017

Çalıştığı Kurum/Kurumlar

2016-2017 eğitim öğretim yılında Kars Merkez Doğru Cevap Etüt Eğitim Merkezinde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptım.

Yıl Yayınları (SCI ve diğer)

E. Deniz, Y. Gülsün and N. Mustafa, Coefficient estimates for certain analytic functions satisfying subordinate condition, AIP Conference Proceedings. 1833, (2017) 020003.