**T.C**
**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# YÜKLÜ PARÇACIKLARIN LİNEER VE HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA HAREKETİNİN OPTİMAL KONTROLÜ

**Merve ZENGİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**
**Prof. Dr. Gabil YAGUB**

**HAZİRAN - 2017**
**KARS**

**T.C**

**KAFKAS ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# YÜKLÜ PARÇACIKLARIN LİNEER VE HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA HAREKETİNİN OPTİMAL KONTROLÜ

**Merve ZENGİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**

**Prof. Dr. Gabil YAGUB**

**HAZİRAN - 2017**

**KARS**

Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında Merve ZENGİN' in Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı 'Yüklü Parçacıkların Lineer ve Homojen olmayan Ortamda Hareketinin Optimal Kontrolü' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında…oy birliği……… ile kabul edilmiştir.

19/06/2017

| | | Adı Soyadı | İmza |
|---|---|---|---|
| **Başkan** | : | Prof. Dr. Gabil YAGUB | |
| **Üye** | : | Doç. Dr. Binyamin YILDIZ | |
| **Üye** | : | Yard. Doç. Dr. Veysel NEZİR | |

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./2017 gün ve …./ …................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

............................

Doç.Dr.Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdür Vekili

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın başlangıcından bitimine kadar her aşamada çalışmayı yönlendiren, değerli bilgilerini ve özverili yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Danışmanım Prof. Dr. Gabil YAGUB ve Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Başkanım Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2017 Merve ZENGİN

## İÇİNDEKİLER

# ÖZET

Bu tezde yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketini ifade eden sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1.1. bölümünde önce sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemi konuldu. 3.1.2. bölümünde Galerkin yöntemiyle birinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin hemen hemen genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı . Bu çalışmanın 4.1.1 bölümünde söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini gösteren teorem ispatlandı. 4.1.2 bölümünde ise optimal kontrol probleminin en az bir çözümünün varlığı gösterildi. 4.2.1 bölümünde fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterildi ve onun gradyenti için formül elde edildi. Nihayet çalışmanın 4.2.2 bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlandı. Tezin tartışma ve sonuç bölümünde incelenen optimal kontrol probleminin konulma ve verilerin sağladığı şartlar açısından daha genel olduğu, bir önceki çalışmalarda yer alan optimal kontrol problemlerinden ciddi bir biçimde farklı olduğu gösterilmiştir. Bunların yanı sıra elde edilen sonuçların güncel olduğu ve bir önceki çalışmalardaki sonuçlarla örtüşmediği de vurgulanmıştır.

**2017, 74 Sayfa**



**Anahtar Kelimeler:** Yüklü parçacıklar, Schrödinger denklemi, optimal kontrol, final fonksiyonel.

## ABSTRACT

In this thesis, the optimal control problem of the final function is discussed for the nonlinear Schrödinger equation involving the virtual coefficient gradient expressing the movement of charged particles in linear and inhomogeneous media. İn section 3.1.1 of this work the optimal control problem of the final function for the nonlinear Schrödinger equation with the virtual coefficient gradient was first introduced. İn section 3.1.2. the existence and uniqueness of the almost generalized solution of the first kind of initial boundary value problem has been proved by the Galerkin method. In section 4.1.1 of this work the theorem proving the existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem has been proven. In section 4.1.2 shows the existence of at least one solution of the optimal control problem. In section 4.2.1 we have shown that the function is differentiable and its formula for the gradient is obtained. Finally, in section 4.2.2 of the work it is proved that the solution of the optimal control problem is necessary in the form of variation inequality. It has been shown that the optimal control problem examined in the discussion and conclusion section is more general in terms of the conditions provided by the placement and data, and is significantly different from the optimal control problems in previous studies. It was also emphasized that the results obtained were up-to-date and did not overlap with the results of previous studies.

**2017, 74 Pages**

**Key Words:** Charged particles, Schrödinger equation, Optimal control, Final functional

## SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

| | |
|---|---|
| $\forall$ - | Herhangi |
| $\overset{0}{\forall}$ - | Hemen hemen her yerde |
| $l>0$- | Verilen sayı |
| $i=\sqrt{-1}$ - | Sanal birim |
| $x\in[0,l]$- | Uzay değişkeni |
| $t\in[0,T]$- | Zaman değişkeni |
| $\Omega_t=(0,l)\times(0,t),\ \Omega=\Omega_T$ - | Verilen bölge |
| $\tilde{\Omega}_t=(0,l)\times(t,T)$- | Verilen bölge |

# 1. GİRİŞ

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar [8,25,37]. Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri daha önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır [2–10,12–20,28,31–34,37–42,44–46]. Söylememiz gerekir ki, [8,37] çalışmalarında, yani A.G. Butkovski, Yu.İ. Samoylenko, M.A. Vorontsov ve V.İ. Şmalgauzen' in çalışmalarında kuantum mekanik süreçlerinin optimal kontrol teorisinin teknik temelleri atılmış ve ortaya çıkan problemler matematiğin klasik yöntemleri ile çözülmeğe çalışılmıştır. Ancak yukarıda telaffuz ettiğimiz çalışmalardan A.D. İskenderov ve G.Yagub' un 1980-90 lı yıllardaki çalışmalarını önemle dikkate almamız gerekir ki, bu çalışmalarda A.D İskenderov ve G. Yagub tarafından hem lineer hem lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisinin matematiksel temelleri ciddi bir biçimde atılmış ve ortaya çıkan problemlerin çağdaş çözüm yöntemleri oluşturulmuştur. Sonraki yıllarda A.D İskenderov, G. Yagub ve onların öğrencileri tarafından kuantum mekanik süreçler için optimal kontrol teorisi ve bu teorinin problemlerinin çözüm yöntemleri ciddi bir biçimde geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketini ifade eden sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu tür problemler yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda dağılması sürecinin incelenmesi sonucu ortaya çıkan optimal kontrol problemlerindendir [8]. Söylemek gerekir ki, sanal katsayılı gradiyent içeren lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk kez [1,33] çalışmalarında ele alınmıştır. Sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ise ilk kez [19,20] çalışmalarında incelenmiştir. Bu tezde ele alınan problem konulma açısından ve kontrollerin uzay değişkenine bağımlı olup daha geniş fonksiyonlar sınıfından olması açısından da önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi bir biçimde farklılık oluşturmaktadır. Ayrıca bir önceki çalışmalarda kontroller sınıfı ya uzay değişkenine bağımlı ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfındandır ya da zaman değişkenine bağımlı olup kendisi ve türevi karesel integrallenebilir fonksiyonlar sınıfındandır. Bu tezde ise ele alınan problemde olası kontroller kümesi uzay değişkenine bağımlı mutlak değerinin karesi ile integrallenebilir fonksiyonlar sınıfından seçilmiştir. Ele alınan problemde amaç fonksiyoneli olarak final fonksiyoneli tipli amaç fonksiyoneli kullanılmıştır. Bunların yanı sıra kontrol sistemlerini ifade eden sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemi de az incelendiğinden bu tez çalışmasında söz konusu denklem için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemi de araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasında ilk önce ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için I. çeşit sınır değer probleminin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği Galerkin yöntemiyle ispatlanmıştır. Bu teoremden yararlanarak söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği meseleleri incelenmiş ve optimal kontrollerin varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Daha sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve onun gradiyenti için formül elde edilmiştir. Gradiyent için olan formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız tanım (bak: $[22-24,26,36]$) ve teoremleri açıklayacağız.

**Tanım 2.1:** $L_2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlarin Lebesque uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}.$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir.

**Tanım 2.2:** $L_2(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega=(0,l)\times(0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesque uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

**Tanım 2.3:** $L_\infty(0,l)$ , Banach uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in(0,l)\}$$

normuna sahip $u=u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

**Tanım 2.4:** $L_\infty(\Omega)$, Banach uzayı olup $\Omega$ bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai \sup_{(x,t)\in\Omega} |\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

**Tanım 2.5:** $C^0([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları [0,T] aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B .$$

Burada $B \equiv R$ alınırsa $C[0,T] \equiv C^0([0,T];R)$ elde edilir.

**Tanım 2.6:** $L_2([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left[\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

**Tanım 2.7:** $W_2^1(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left( \psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

**Tanım 2.8:** $W_2^2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left( \psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{d^2\bar{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi \rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

**Tanım 2.9:** $W_2^{1,0}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların $x$ değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left( \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}.$$

**Tanım 2.10:** $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda $\Omega'$ nın sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

**Tanım 2.11:** $W_2^{0,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left( \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

**Tanım 2.12:** $W_2^{2,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların $x$ değişkenine göre ikinci mertebeye, $t$ değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[ \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt$$

$$+ \int_\Omega \left[ \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}} \ ,$$

$$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$$

dır.

**Tanım 2.13:** $V$, $X$ lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall \ u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha) v \in V$ oluyorsa, $V$ kümesine $X$ de konveks küme denir.

**Tanım 2.14:** Eğer $B$ Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$ , $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada $B^*$ uzayı $B$ nin eşlenik uzayıdır.

**Tanım 2.15:** $X$ , Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise $E$ kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

**Tanım 2.16:** $X$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer $X$ in her bir $x$ elemanı, $E$ nin elemanlarının dizisinin bir limiti ise $E$ ye $X$ de yoğundur denir.

**Tanım 2.17:** $U$ , $B$ Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde $U$ kümesine $B$ de zayıf kompakt küme, denir.

**Tanım 2.18:** $J(u)$ fonksiyoneli $B$ Banach uzayının $U$ alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer ,$u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline $u$ noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

**Tanım 2.19:** $F$ , bir $I$ aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)$>0 sayısı varsa $F$ ye $I$ üzerinde aynı dereceden sürekli(eş sürekli) dir, denir.

**Tanım 2.20:** Diyelim ki $B$ herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli $u$ noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left\langle J^{'}(u), h \right\rangle_B + o\langle h,u \rangle$ şartını sağlayan $J^{'}(u) \in B^{*}$ elemanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli $u$ noktasında Freschet anlamında diferansiyellenebilirdir. Burada $B^{*}$ uzayı $B$ nin eşlenik uzayıdır.

**Teorem 2.21** (bak $[36]$**):** Diyelimki $U$, $B$ Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_{*} = \left\{ u \in U : J(u) = J_{*} = \inf_{u} J(u) \right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^{*} \in U_{*}$ için $\left\langle J^{'}\left(u^{*}\right), u - u^{*} \right\rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

**Teorem 2.22** (Weierstrass teoremi, $[36]$**):** $U$, $B$ Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_{*} = \inf_{u} J(u) > -\infty$ , $U_{*} = \left\{ u \in U : J(u) = J_{*} \right\} \neq \phi$ zayıf kompakttır ve $U$ dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar..

**Teorem 2.23 (**Goebel teoremi, $[11]$**):** Kabul edelim ki , $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, $U$ kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli $U$ kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0, \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle $G$ alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için

$$J_{\alpha}(v) = \mathrm{I}(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli $U$ kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini $U$ kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

**Lemma 2.24** (Gronwall lemması, $[36]$**):** Eğer g(t) fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K \exp\left(L\left(t - t_0\right)\right)$$

dır. Burada $K$ ve $L$ negatif olmayan sabitlerdir.

**Lemma 2.25** (Cauchy –Bunjakovskii eşitsizliği, $[23{,}24]$ **):** $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}dxd\tau\right| \le \left(\int_\Omega |u|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1 Yüklü Parçacıkların Lineer ve Homojen olmayan Ortamda Hareketinin Optimal Kontrol Problemi.

Bu bölümde yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketini ifade eden sanal katsayılı gradyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemini tanımlayacak ve sanal katsayılı gradyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümüne Galerkin yöntemini uygulayarak problemin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği teoremini ispatlamağa çalışacağız. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır.

### 3.1.1 Optimal Kontrol Probleminin Konulması.

Bu alt bölümde yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin kontrolüne ait olan optimal kontrol problemini tanımlayalım. Farz edelim ki

$$J_\alpha(v) = \left\|\psi(.,T) - y\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\left\|v - \omega\right\|^2_{L_2(0,l)} \tag{3.1.1.1}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{v = v(x) : v \in L_2(0,l), \|v\|_{L_2(0,l)} \le b_0\right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(x)\psi + a_2|\psi|^2\psi = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{3.1.1.2}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), x \in (0,l) \tag{3.1.1.3}$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0,\ \forall t \in (0,T), \tag{3.1.1.4}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $l>0$, $T>0$, $b_0>0$, $\alpha\geq 0$, $a_0>0$ verilen sayılar; $0\leq x\leq l$, $0\leq t\leq T$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$, $a_2$-kompleks sayı olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$a_2=\operatorname{Re}a_2+i\operatorname{Im}a_2, \operatorname{Re}a_2<0, \operatorname{Im}a_2>0, \operatorname{Im}a_2\geq 2\left|\operatorname{Re}a_2\right| \tag{3.1.1.5}$$

$a(x)$, $a_1(x)$ reel değerli, ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$0\leq a(x)\leq \mu_1,, \ \overset{0}{\forall} x\in(0,l), \ \mu_1=sabit>0, \tag{3.1.1.6}$$

$$|a_1(x)|\leq \mu_2, \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right|\leq \mu_3, \overset{0}{\forall} x\in(0,l), \mu_2,\mu_3=sabit>0, \tag{3.1.1.7}$$

şartlarını sağlar; $\varphi(x), f(x,t), y(x)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi\in \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l), f\in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{3.1.1.8}$$

$$y\in L_2(0,l) \tag{3.1.1.9}$$

şartlarını sağlar. $\omega\in L_2(0,l)$ verilen elemandır.

Her bir $v\in V$ için (3.1.1.2)- (3.1.1.4) şartlarından $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (3.1.1.2) lineer olmayan Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemdir.

**Tanım 3.1.1.1:** Her bir $v\in V$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemlinin çözümü olarak $\psi\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olan ve (3.1.1.2)-(3.1.1.4) şartlarını $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Bu tanımı sağlayan çözüme (3.1.1.2)-(3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemlinin hemen hemen çözümü diyeceğiz. Bu çözümler sınıfında kullanılan amaç fonksiyonelinin birinci teriminin anlama sahip olduğu, başka bir değişle $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(0,l))$ uzayına gömüldüğünden fonksiyonelin birinci teriminin sonlu olduğu açıktır.

Söylemek gerekir ki, lineer ve lineer olmayan Schrodinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri farklı biçimlerde önceden $[1,12,13,16,17,33,39,44]$ ve s. çalışmalarında geniş bir biçimde incelenmiştir. Ancak sanal katsayılı gradiyent içeren lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri çok az incelenmiştir $[1,29,33,43]$. Söz konusu $[1,33]$ çalışmalarında sanal katsayılı gradiyent içeren bir ve iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri denklemin katsayılarının karesel integrallenebilir fonksiyonlar olması halinde ele alınmış ve Galerkin yönteminin yardımıyla varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ise $[29,43]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda denklemin katsayıları uzay ve ya zaman değişkenine bağımlı olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır ve denklemin lineer olmayan kısmının katsayısı da sanal sayıdır. Bu nedenle de bu çalışmada ele alınan başlangıç sınır değer probleminin iyi konulmasının incelenmesi her açıdan bilimsel önem taşımaktadır.

### 3.1.2 Başlangıç Sınır Değer Probleminin çözümü için Galerkin yöntemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi=f(x,t),\,(x,t)\in\Omega\,, \quad (3.1.2.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x)\,,\,x\in(0,l)\,, \quad (3.1.2.2)$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0\,,\,t\in(0,T)\,. \quad (3.1.2.3)$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ sanal birim, $l>0$, $T>0$, $a_0>0$ verilen sayılar; $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$, $a_2$-kompleks sayı olup (3.1.1.5) şartını sağlar; $a(x)$, $a_1(x)$ ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar olup (3.1.1.6), (3.1.1.7) şartlarını sağlar; $\varphi(x)$, $f(x,t)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup (3.1.1.8) şartlarını sağlar; $v(x)$ fonksiyonu ise ölçülebilir, mutlak değerinin karesi integrallenebilir fonksiyon olup $V$ kümesinden seçilir.

Üstte söylediğimiz gibi her bir $v\in V$ için (3.1.2.1)-(3.1.2.3) şartlarından $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (3.1.2.1) denklemi için 1. çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan ve (3.1.2.1)- (3.1.2.3) şartlarını $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Şimdi bu biçimde olan çözümün varlık ve teklik teoremini ispatlayalım.

**Teorem 3.1.2.1.** Farz edelim ki $a_2-$ kompleks sabiti ve $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.5)-(3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v\in V$ için (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)}\right). \qquad (3.1.2.4)$$

Burada $c_0>0$ –bilinen sabittir.

**İspat.** Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak aşağıdaki

$$LX = -a_0 \frac{d^2 X}{dx^2} + a(x)X = \lambda X \ , X(0) = X(l) = 0 \tag{3.1.2.5}$$

öz değer probleminin $\lambda = \lambda_k$, k=1,2,… öz değerlerine karşılık gelen $X = u_k(x)$, k=1,2… öz fonksiyonlarını alalım. [23] çalışmasından bilindiği gibi $L$ operatörünün katsayısı olan $a(x)$ fonksiyonu $a(x) \geq 0$ olduğundan $\lambda_k$, k=1,2,… öz değerleri reel ve pozitiftirler, bunun yanı sıra $u_k = u_k(x)$ k=1,2,… öz fonksiyonları da reeldirler ve $L_2(0,l), \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında ortogonallık şartlarını sağlar [23]. Kolaylık olsun diye $u_k = u_k(x)$ $k$=1,2,… öz fonksiyonlarının $L_2(0,l)$'de ortonormal olduğunu varsayalım, yani

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m \ , k, m = 1,2,\ldots \tag{3.1.2.6}$$

formülünün geçerli olduğunu varsayalım, burada

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k=m \\ 0, k \neq m \end{cases}, k, m = 1,2, \ \ldots \ .$$

Kronecker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ de ortogonallık aşağıdaki gibi anlaşılır:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[ a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right] dx = \lambda_k \delta_k^m, \text{ k,m=1,2,...} \tag{3.1.2.7}$$

$$\{u_k, u_m\} = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \int_0^l L u_k L u_m dx = \lambda_k^2 \delta_k^m \ , k, m = 1,2,\ldots \ . \tag{3.1.2.8}$$

Ayrıca farz edelim ki $u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonları için aşağıdaki şart sağlasın:

$$\| u_k \|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \leq d_k \ , k = 1,2,\ldots . \tag{3.1.2.9}$$

Burada $d_k > 0$ $k = 1,2,\ldots$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde arayabiliriz:

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x). \tag{3.1.2.10}$$

Burada $C_k^N(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)}$ $k = \overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} = (L\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} - (v(.)\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left( ia_1(.)\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} - \left( a_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k \right)_{L_2(0,l)} + f_k(t),\ k = \overline{1,N}\ , \tag{3.1.2.11}$$

$$C_k^N(0) = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k,\ k = \overline{1,N}\ . \tag{3.1.2.12}$$

Burada $f_k(t) = \left( f(.,t), u_k \right)_{L_2(0,l)}$ dir.

Görüldüğü gibi (3.1.2.11) denklemler sistemi homojen olmayan, sabit katsayılı lineer olmayan adi diferansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemin sağ tarafındaki $f_k \in W_2^1(0,T), k = 1,2,\ldots, N$ fonksiyonları şartını sağlayan fonksiyonlardır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bildiğimize göre (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin $W_2^1(0,T)$ uzayında en az bir çözümü vardır [30,36] .

Şimdi $C_k^N(t)$ katsayıları için başka bir deyişle (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin $N$ ' e bağlı çözümleri için kestirim elde edelim.

**Lemma 3.1.2.1.** (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le$$

$$\le c_0 \left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)}\right). \qquad (3.1.2.13)$$

**İspat** : (3.1.2.11) sisteminin $k$. denklemini $\bar{C}_k^N(t)$ ile çarpıp, $k$ üzerinden $k=1$' den $k=N$'e kadar toplayıp $[0,t]$aralığı üzerinden integralleyelim.Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} \left( i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N - L\psi^N\bar{\psi}^N + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + a_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N + a_2\left|\psi^N\right|^4 \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f\bar{\psi}^N dx d\tau \;, \; \forall t \in [0,T].$$

Burada $L$ operatörünün biçimini dikkate alıp sol tarafta ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygulayıp,

$$u_k(0) = u_k(l) = 0 \,, k = 1,2,\ldots$$

şarlarını kullanırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} \left( i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N + a_2\left|\psi^N\right|^4 \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f\bar{\psi}^N dx d\tau \,.$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N+\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t} ia_1(x)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N+\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right)dxd\tau+$$

$$+i2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(f\bar{\psi}^N-\bar{f}\psi^N\right)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitlikten de kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t} a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+$$

$$+2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(f\bar{\psi}^N)dxd\tau\ ,\ \forall \mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}].$$

Bu eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$$

terimini ekleyelim. Bu taktirde son eşitlikten aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)\left|\psi^N\right|^2)dxd\tau+2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(f\bar{\psi}^N)dxd\tau\,.$$

Burada $u_k(0)=u_k(l)=0$, $k=1,2,\ldots$şartlarını kullanırsak kolaylıkla sonuncu eşitliğin sol tarafındaki 2. terimin sıfıra eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx - \int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^4 dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega^t} \frac{da_1(x)}{dx} \left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(f\bar{\psi}^N) dxd\tau .$$

Burada $a_1(x)$ için olan (3.1.1.7) şartını kullanıp Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le$$
$$\le \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + (\mu_3+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 . \tag{3.1.2.14}$$

(3.1.2.10) formülünden aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^N C_k^N(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k u_k(x) = \varphi^N(x) .$$

Buradan da Parseval özdeşliğini kullanarak:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^N |\varphi_k|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 \tag{3.1.2.15}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (3.1.2.14)' da dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^4 dx d\tau \le$$

$$\le \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_3+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\,,\ \forall t \in [0,T].$$

Burada Gronwall lemmasından yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^4 dx d\tau \le c_1(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}),\ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.16)$$

Burada $c_1 > 0$ sayısı $N'$den bağımsızdır.

Şimdi (3.1.2.11) sistemini aşağıdaki gibi yazalım:

$$i(\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} = \left(a_0 \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, \frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)} + (a(.)\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(v(.)\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} - i(a_1(.)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} - \left(a_2\left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k\right)_{L_2(0,l)} +$$

$$+ f_k(t), k = \overline{1,N}. \qquad (3.1.2.17)$$

Şimdi bu denklemin her iki tarafının $t$' ye göre türevini bulalım. Bu taktirde aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz:

$$i\left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2}, u_k\right)_{L_2(0,l)} = (a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x \partial t}, \frac{du_k}{dx})_{L_2(0,l)} + (a(.)\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(v(.)\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(a_1(.)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x},u_k\right)_{L_2(0,l)}-\frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N,u_k\right)_{L_2(0,l)}+$$

$$+\frac{df_k(t)}{dt},\ k=\overline{1,N}. \qquad (3.1.2.18)$$

Bu sistemin $k$. denklemini $\dfrac{d\bar{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpıp, $k$ üzerinden $k=1$' den $k=N$'e kadar toplayıp $[0,t]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}-a_0\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+ia_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+v(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\right.$$

$$\left.+a_2\left[2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right]\right)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau\ ,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau$$

terimini eklersek kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau+4\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau-2\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left[\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right]dxd\tau-$$

$$-2\operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left[\left(\psi^N\right)^2 \left(\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right] dx d\tau \ . \qquad (3.1.2.19)$$

$u_k(0) = u_k(l) = 0$ , k=1,2,… sınır şartlarını ve (3.1.2.10) formülünü kullanırsak aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$\frac{\partial \psi^N(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi^N(l,t)}{\partial t} = 0 \, , \forall t \in (0,T) \, . \qquad (3.1.2.20)$$

Bu şartları kullanarak (3.1.2.19)' un sol tarafındaki ikinci terimin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle (3.1.2.20) ve (3.1.1.5) şartlarını kullanarak (3.1.2.19) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau \le$$

$$\le \left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + (1+\mu_3)\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.21)$$

Şimdi ilk önce bu eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin $k$. denkleminde $t=0$ alıp elde edilen denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarpıp, $k$ üzerinden $k=1$' den $k=N$'e kadar toplayalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l i\left|\frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2 dx = \int_0^l \Big[L\psi^N(x,0) - ia_1(x)\frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial x} - v(x)\psi^N(x,0) -$$

$$-a_2\left|\psi^N(x,0)\right|^2 \psi^N(x,0) + f(x,0)\Big]\frac{\partial \overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t} dx \, .$$

Bu eşitlikten Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\int_0^l |a_1(x)|\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right| dx +$$

$$+5\int_0^l |v(x)|^2\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx + 5\int_0^l |f(x,0)|^2 dx + 5|a_2|^2\int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^6 dx .$$

$\psi^N(x,0)=\varphi^N(x)$ eşitliğini ve denklemin katsayıları üzerine konulan şartları kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\|L\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\mu_3^2\left\|\frac{\partial\varphi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+5b_0^2\left\|\varphi^N\right\|^2_{L_\infty(0,l)} + 5\|f(.,0)\|^2_{L_2(0,l)} + 5|a_2|^2\left\|\varphi^N\right\|^6_{L_6(0,l)}$$

Bu eşitsizlikte aşağıdaki

$$\left\|L\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} , \tag{3.1.2.22}$$

$$\left\|\frac{d\varphi^N}{dx}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_3\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} , \tag{3.1.2.23}$$

$$\left\|\varphi^N\right\|^6_{L_6(0,l)} \le c_4\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} , \tag{3.1.2.24}$$

$$\left\|\varphi^N\right\|^2_{L_\infty(0,l)} \le c_5\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} , \tag{3.1.2.25}$$

$$\|f(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_6\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} ,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.1.2.26}$$

eşitsizliklerini kullanarak bir sonraki kestirimi elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_7 \left( \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right). \tag{3.1.2.27}$$

Burada $c_7 > 0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır. Bu kestirimi (3.1.2.21) eşitsizliğinde dikkate alıp Gronwall lemmasını uygularsak, oradan kolaylıkla aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu görebiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq c_8 \left( \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right), \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.2.28}$$

Burada $c_8 > 0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır.

Şimdi $\frac{\partial \psi^N}{\partial x}$ i değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11)’ nın $k$. denklemini $\lambda_k \bar{C}_k^N(t)$ ile çarpıp, $k$ üzerinden $k = 1$’ den $k = N$’e kadar toplayıp $[0,t]$ aralığı üzerinden integrallemiş olursak sonuçta aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \left( i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} L\bar{\psi}^N - \left| L\psi^N \right|^2 + i a_1(x) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N + v(x)\psi^N L\bar{\psi}^N + a_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f L\bar{\psi}^N dx d\tau \ , \ \forall t \in [0,T].$$

$L$ operatörü için olan formülü ve (3.1.2.20) şartlarını kullanırsak kısmi integrasyon formülünün yardımıyla sonuncu eşitlikten aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(ia_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}+ia(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N-\left|L\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N+v(x)\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau+a_2\int_{\Omega_t}a(x)\left|\psi^N\right|^4dxd\tau+$$

$$+a_0a_2\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}dxd\tau=\int_{\Omega_t}fL\overline{\psi}^N dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}a(x)\left|\psi^N\right|^4dxd\tau+$$

$$+4a_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau=-2a_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\operatorname{Re}\left[\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}a_1(x)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}v(x)\operatorname{Im}(\psi^N L\overline{\psi}^N)dxd\tau+$$

$$-2a_0\operatorname{Re}a_2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left[\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}(fL\overline{\psi}^N)dxd\tau\ ,\ \forall t\in[0,T].$$

$a(x)$ ve $a_1(x)$ üzerine konulan şartları ve (3.1.1.5) şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+a_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau\leq$$

$$\leq a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+2\mu_2\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+2\int\limits_{\Omega_t}|v(x)|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+$$

$$+2\int\limits_{\Omega_t}|f|\left|L\psi^N\right|dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini uygulayıp $v(x)$ fonksiyonu için olan şartı dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+a_0\operatorname{Im}a_2\int\limits_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau\leq$$

$$\leq a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\mu_2\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+(2+\mu_2)\int\limits_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+$$

$$+2b_0^2\int\limits_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}d\tau,\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.1.2.29}$$

[23,24] çalışmalarından bildiğimiz eşitsizliğe göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}\leq\beta\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)}. \tag{3.1.2.30}$$

Burada $\beta > 0$ sabiti $N$'den bağımsızdır. Bu eşitsizliği, (3.1.2.15) bağıntısını, $\psi^N(x,0) = \varphi^N(x)$ formülünü ve (3.1.2.24) eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.30)' den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq c_9 \left( \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \right) + c_{10} \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau +$$

$$+ c_{11} \int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.31)$$

Burada $c_9 > 0$, $c_{10} > 0$, $c_{11} > 0$ sabitleri $N$' den bağımsızdırlar. Şimdi bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan sonuncu terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin $k$. denklemini $\lambda_k \bar{C}_k^N(t)$ ile çarpıp, $k$ üzerinden $k=1$' den $k=N$'e kadar toplarsak sonuçta aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l \left| L\psi^N(x,t) \right|^2 dx = \int_0^l \left[ i \frac{\partial \psi^N(x,t)}{dt} + i a_1(x) \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x} + v(x) \psi^N(x,t) + \right.$$

$$\left. + a_2 \left| \psi^N(x,t) \right|^2 \psi^N(x,t) - f(x,t) \right] L\bar{\psi}^N(x,t) dx, \forall t \in [0,T].$$

Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 5 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + 5\mu_2^2 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$

$$+ 5|a_2|^2 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_6(0,l)}^6 + 5b_0^2 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_\infty(0,l)}^2 + 5 \| f(.,t) \|_{L_2(0,l)}^2, \ \forall t \in [0,T].$$

(3.1.2.26), (3.1.2.30) eşitsizliklerini ve (3.1.2.16), (3.1.2.28) kestirimlerini kullanarak sonuncu eşitsizlikten [23,24] çalışmasından bilinen

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)} \le \tilde{\beta}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^{1/3}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^{2/3}, \forall t\in[0,T], \tilde{\beta}=sabit>0$$

eşitsizliğinin yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{12}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2+\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right)+$$

$$+c_{13}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2, \forall t\in[0,T]. \qquad (3.1.2.32)$$

Burada $c_{12}>0$, $c_{13}>0$ sabitleri $N$ ' den bağımsızdır. Bu eşitsizliği (3.1.2.31) de dikkate alırsak oradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + a_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\le c_{14}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2+\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right)+c_{15}\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau\ , \ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + a_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\leq c_{16}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \forall t\in[0,T]. \quad (3.1.2.33)$$

Burada $c_{16}>0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır. Bu kestirimin yardımıyla (37) den aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{17}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \forall t\in[0,T], \quad (3.1.2.34)$$

Burada $c_{17}>0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır.

$L$ operatörü için olan formülden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} = \left\|-a_0\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}+a(.)\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \geq$$

$$\geq a_0\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)} - \mu_1\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Buradan

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{a_0}\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} + \frac{\mu_1}{a_0}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (21) ve (39) kestirimlerini dikkate alırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{18}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right). \quad (3.1.2.35)$$

Burada $c_{18} > 0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır.

Böylece (3.1.2.16), (3.1.2.28), (3.1.2.33), (3.1.2.35) kestirimlerini taraf tarafa toplayıp [0,T] aralığı üzerinden integrallersek aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{19}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)}\right). \qquad (3.1.2.36)$$

Burada $c_{19} > 0$ sabiti $N$ ’ den bağımsızdır.

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left(\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right)^2 = \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}$$

eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.36) kestiriminin yardımıyla lemmanın hükmümün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 3.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirelim. Aşağıdaki gibi fonksiyonlar tanımlayalım:

$$l_{N,k}(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)}, k, N = 1, 2, \dots . \qquad (3.1.2.37)$$

Bu formülü, Cauchy - Bunjakovskii eşitsizliğini ve $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının ortonormallik şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_k\right\|_{2(0,l)} = \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T] \ .$$

Burada

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{20}\left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)} \qquad (3.1.2.38)$$

eşitsizliğini ve (3.1.2.13) kestirimini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{21}, \forall t \in [0,T], k, N = 1,2,... \tag{3.1.2.39}$$

Bu bağıntı $l_{\mathrm{N,k}}(t), k, N = 1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Şimdi bu ailenin $\left[0,T\right]$ aralığında tespit edilmiş $k$ ve $\forall N \ge k$ için eş sürekli (aynı dereceden sürekli ) fonksiyonlar ailesi olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.1.2.11) sisteminin $k$. denklemini $(t, t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralleyip kısmi integrasyon formülünü uygularsak elde edilen eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebilir:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t)\right| \le a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\mu_2 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} + \mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+b_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_\infty(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} + |a_2| \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^3 d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \|f(.,\tau)\|_{L_2(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.2.40}$$

$\left[23,26,27\right]$ çalışmalarından bildiğimize göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ uzayına, $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $L_\infty(0,l)$ uzayına gömüldüğünden

$$\left\|\psi^N\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \le c_{22} \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \tag{3.1.2.41}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (3.1.2.13) kestirimini ve $u_k$ lar için kabullendiğimiz (3.1.2.9) şartını kullanırsak (3.1.2.40)' den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left| l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t) \right| \le c_{23} d_k \left| \Delta t \right|^{1/2}, \forall t \in [0,T], k, N = 1,2,... \qquad (3.1.2.42)$$

Burada $c_{23}>0$ sabiti, $N,k$ ve $\Delta t$' den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlikten $k$ tesbit edildiğinde $\forall N \ge k$ için $\{ l_{N,k}(t) \}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında eş sürekli olduğu elde edilir. Böylece $\{ l_{N,k}(t) \}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu ispatlandı. Bu taktirde köşegen sürecin yardımıyla öyle $N_m, m=1,2,...$ alt dizisi seçebiliriz ki bu alt dizi üzerinden $\{ l_{N_m,k}(t) \}$ dizisi $[0,T]$ aralığında her bir $k=1,2,...$ için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki gibi $\psi(x,t)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) u_k(x) \qquad (3.1.2.43)$$

Şimdi $\{ \psi^{N_m}(x,t) \}$ alt dizisinin bu $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsak olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $\forall g \in L_2(0,l)$ için $\forall t \in [0,T]$ için [10] çalışmasındaki yöntemi kullanarak $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\left| (\psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t), g)_{L_2(0,l)} \right| < \varepsilon \qquad (3.1.2.44)$$

yazabiliriz. Buradan gereken hükmü kolaylıkla elde ederiz. (3.1.2.13) kestirimine dayanarak $\{ \psi^{N_m}(x,t) \}$ alt dizisinden (3.1.2.43) formülüyle tanımlanan $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi $\{ \psi^{N_m}(x,t) \}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$\psi^{N_m} \to \psi \quad L_2(\Omega) \text{'da zayıf}, \qquad (3.1.2.45)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} \to \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf }, \tag{3.1.2.46}$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf}, \tag{3.1.2.47}$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} \to \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf} \tag{3.1.2.48}$$

olur. Diğer yandan [7,23,26,27] çalışmalarından bildiğimiz kompakt gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T;L_\infty(0,l))$ uzayına kompakt gömülür. Bu taktirde (3.1.2.45)-(3.1.2.48) limit bağıntılarını sağlayan $\{\psi^{N_m}\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:

$$m \to \infty \text{ için } \left\| \psi^{N_m} - \psi \right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \to 0. \tag{3.1.2.49}$$

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.2.1)-(3.1.2.3) probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. İlk önce $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.1) denklemini $\forall (x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin $k$. denklemini $[0,T]$ aralığında sürekli olan $\forall \overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonuyla çarpıp $k$ üzerinden $k=1$' den $k = N' \le N$' e kadar toplayıp , $[0,T]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_\Omega [i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} - a(x)\psi^N + ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x} +$$

$$+v(x)\psi^N + a_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N - f(x,t)]\overline{\eta}^{N'}(x,t)dxdt = 0, \tag{3.1.2.50}$$

$$\forall \overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \eta_k(t) u_k(x). \tag{3.1.2.51}$$

(3.1.2.45)-(3.1.2.49) limit bağıntılarını kullanarak (3.1.2.50) integral özdeşliğinde $N = N_m$ alıp $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[ i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(x)\psi + a_2|\psi|^2\psi - f(x,t)\right]\times$$

$$\times\ \bar{\eta}^{N'}(x,t)dxdt = 0\,. \qquad (3.1.2.52)$$

Bilindiği üzere (3.1.2.51) biçiminde olan fonksiyonlar $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bundan dolayı $N' \to \infty$ için (3.1.2.52) integral özdeşliğinde limite geçersek $\forall\eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[ i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(x)\psi + a_2|\psi|^2\psi - f(x,t)\right]\bar{\eta}(x,t)dxdt = 0$$

özdeşliğini elde ederiz. Buradan da $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.1) denklemini $\forall(x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını hükmedebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.2) başlangıç şartını sağladığını ispatlayalım. [7] çalışmasına göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T], L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0\,,\ \forall t \in [0,T]$$

limit bağıntısını yazabiliriz. $t = 0$ alırsak $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,0) - \psi(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0$$

olur. Bu limit bağıntısını, $\psi^{N_m}(x,0)=\varphi_1^{N_m}(x), \quad x\in(0,l)$ eşitliğini göz önünde bulundurup

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi(.,0)-\psi^{N_m}(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi_1\right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinde limite geçersek kolaylıkla

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall} x\in(0,l)$ için (3.1.2.2) başlangıç şartını sağladığını görebiliriz.

Nihayet $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.2.33) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,l],L_2(0,T))$ uzayına kompakt gömüldüğünden ( bak [23,26]) $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(s,.)-\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\to 0, \text{ s=0,l}$$

olur. Bu limit bağıntılarını ve $\psi^{N_m}(s,t)=0$, $s=0,l$, $t\in(0,T)$ eşitliğini dikkate alıp

$$\left\|\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} \le \left\|\psi(s,.)-\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}$$

eşitsizliğinde $m\to\infty$ için limite geçersek

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad \forall t\in(0,T)$$

sınır şartlarını elde ederiz. Böylece $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.1)-(3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ sınıfından çözümü olduğu ispatlandı. (3.1.2.13) kestiriminde $N = N_m$ alıp $m \to \infty$ için limite geçersek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak (3.1.2.4) kestiriminin geçerli olduğunu ispatlarız. Nihayet bu kestirimi kullanarak çözümün bir tek olduğunu da ispatlayalım. Bu amaçla farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\Phi(x,t)$ fonksiyonları (3.1.2.1)-(3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin herhangi iki çözümü olsun. Bu fonksiyonların farkını $w(x,t) \equiv \psi(x,t) - \Phi(x,t)$ ile gösterelim. Bu taktide $w(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki problemin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. + ia_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} - a(x)w + v(x)w + a_2\left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right) +$$

$$+ a_2\psi\Phi\overline{w} = 0, (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1.2.53)$$

$$w(x,0) = 0, x \in (0,l),\ w(0,t) = w(l,t) = 0, t \in (0,T). \qquad (3.1.2.54)$$

Bu problemin çözümünü değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.2.53) denkleminin her iki tarafını $\overline{w}(x,t)$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen eşitliği $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu taktirde

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial w}{\partial \tau}\overline{w} + a_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\overline{w} + ia_1(x)\frac{\partial w}{\partial x}\overline{w} - a(x)|w|^2 + v(x)|w|^2\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} a_2\left(|\Phi|^2 + |\psi|^2\right)|w|^2\,dxd\tau + \int_{\Omega_\tau} a_2\psi\Phi(\overline{w})^2\,dxd\tau\ , \forall t \in [0,T]$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafında yer alan ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygulayıp (3.1.2.56)'da yer alan başlangıç ve sınır değer kullanıp elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l |w(x,t)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right)|w|^2 dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx} |w|^2 dxd\tau - 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left[a_2\psi\Phi(\bar{w})^2\right] dxd\tau, \forall t \in [0,T] \quad .$$

Buradan da (6) şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yaza biliriz:

$$\int_0^l |w(x,t)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left(|\psi|^2 + |\Phi|^2\right)|w|^2 dxd\tau \le$$

$$\le \mu_3 \int_{\Omega_t} |w(x,\tau)|^2 dxd\tau + 2|a_2| \int_{\Omega_t} |\psi||\Phi||w|^2 dxd\tau \quad . \forall t \in [0,T] \quad . \qquad (3.1.2.55)$$

(3.1.1.54) şartından kolaylıkla $|a_2| \le \frac{3}{2}\operatorname{Im} a_2$ eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizliği dikkate alarak (3.1.2.55)'ten aşağıdaki eşitsizliği geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(0,)} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_z} \left(|\Phi|^2 + |\psi|^2\right)|w|^2 dxd\tau \le \mu_3 \int_{\Omega_t} |w(x,\tau)|^2 dxd\tau, \forall t \in [0,T]$$

.

Bu eşitsizlikten yaralanıp Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\|w(.,t)\|^2_{L_2(0,t)} = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

Buradan $w(x,t) \equiv \psi(x,t) - \Phi(x,t)$=0, $\overset{0}{\forall} x \in (0,l), \forall t \in [0,T]$ olduğu çıkar, yani (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü tektir. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.

### 4.1. Yüklü Parçacıkların Lineer ve Homojen olmayan Ortamda Hareketinin Optimal Kontrol Probleminin iyi konulması.

Bu alt bölümde yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrol problemi olan (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili soruları, başka bir değişle problemin çözümünün varlığıyla ilgili olan soruları inceleyeceğiz. İlk önce $\alpha > 0$ olduğunda optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu göstereceğiz. Sonra ise (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin $\alpha \geq 0$ olduğunda en az bir çözüme sahip olduğunu ispatlayacağız.

### 4.1.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ilgili olan soruları inceleyeceğiz. Bu nedenle $\alpha > 0$ olduğunda (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösterelim.

**Teorem 4.1.1.1**: Farz edelim ki teorem 3.1.2.1 ün şartları sağlansın ve $y \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyon olsun. Bu taktirde $L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olan $G$ alt kümesi vardır ki, $\forall \omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahiptir.

**İspat:** Önce

$$J_0(v) = \|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)} \tag{4.1.1.1}$$

fonksiyonelinin $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla farz edelim ki, $\Delta v \in L_2(0,l)$ elemanı $v + \Delta v \in V$ olacak biçimde $\forall v \in V$ ye verilen artış olsun. Bu taktirde $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ artışına sahip oluyor. Burada $\psi(x,t;v), \psi(x,t;v+\Delta v)$ fonksiyonları (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin sırasıyla $v \in V$ ve $v + \Delta v \in V$ ye karşılık gelen çözümleridir. (3.1.1.2)- (3.1.1.4) şartlarından $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi + (v(x)+\Delta v(x))\psi +$$

$$+a_2\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + a_2\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi} = -\Delta v(x)\psi(x,t;v), (x,t)\in\Omega, \qquad (4.1.1.2)$$

$$\Delta\psi(x,0)=0 \ , \ x\in(0,l), \qquad (4.1.1.3)$$

$$\Delta\psi(0,t)=\Delta\psi(l,t)=0 \ t\in(0,T). \qquad (4.1.1.4)$$

Burada $\psi_\Delta = \psi_\Delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$fonksiyonu (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v+\Delta v\in V$ ye karşılık gelen çözümüdür.

Şimdi bu problemin çözümü için kestirim elde edelim. Bu amaçla (4.1.1.2) denkleminin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}\Delta\overline{\psi} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\Delta\overline{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left((v(x)+\Delta v(x))|\Delta\psi|^2 + a_2\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 + a_2\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\overline{\psi}(x,\tau)dxd\tau \ , \forall t\in[0,T].$$

Burada (4.1.1.4) sınır değer şartlarını kullanarak sol tarafın birinci integralindeki ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygularsak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left( i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} - a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\Delta\overline{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left((v(x)+\Delta v(x))|\Delta\psi|^2 + a_2\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 + a_2\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\overline{\psi}(x,\tau)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak, elde edilen eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}|\Delta\psi|^2 dxd\tau + 2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dxd\tau =$$

$$= -2\operatorname{Re}a_2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau - 2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\operatorname{Re}\left(\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\Delta\overline{\psi}(x,t)\right)\Delta v(x)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2 dxd\tau$$

terimini ekleyip çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)|\Delta\psi|^2)dxd\tau + 2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dxd\tau =$$

$$= -2\operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\psi_\Delta \psi (\Delta\overline{\psi})^2\right) dx d\tau - 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}\left(\psi_\Delta \psi (\Delta\overline{\psi})^2\right) dx d\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi(x,t)\Delta\overline{\psi}(x,t))\Delta v(x) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx} |\Delta\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitliği sol tarafındaki ikinci terim (4.1.1.4) şartları altında sıfıra dönüşen terimdir. Bunu göz önünde bulundurursak (4.1.1.3) şartını kullanırsak son eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_0^l |\Delta\psi(x,t)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dx d\tau =$$

$$= -2\operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\psi_\Delta \psi (\Delta\overline{\psi})^2\right) dx d\tau - 2\operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}\left(\psi_\Delta \psi (\Delta\overline{\psi})^2\right) dx d\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi(x,t)\Delta\overline{\psi}(x,t))\Delta v(x) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx} |\Delta\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Burada (3.1.1.5) şartını ve $a_1(x)$ fonksiyonu için (3.1.1.7) şartını uygularsak, Cauchy-Bunjakovski .eşitsizliğinden yararlanırsak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\operatorname{Im} a_2}{2} \int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\psi|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq (1+\mu_3)\int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \int_{\Omega_t} |\Delta v(x)|^2 |\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0,T]. \qquad (4.1.1.5)$$

Şimdi bu eşitliğin sağ tarafında yer alan ikinci terimi değerlendirelim. $\Delta v \in L_2(0,l)$ olduğundan söz konusu terimi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\int_{\Omega_t} |\Delta v(x)|^2 |\psi|^2 \, dxd\tau \le \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} \int_0^t \max_{x\in[0,l]} |\psi(x,\tau)|^2 \, d\tau \,, \forall t \in [0,T]. \qquad (4.1.1.6)$$

$\psi \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan gömülme teoremine göre $\psi \in L_2\left(0,T,\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ bağıntısı geçerlidir (bak $[27]$). Diğer yandan $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $C[0,l]$ uzayına gömülür. Bu söylediklerimizi dikkate aldığımızda

$$\|\psi\|^2_{L_2(0,T,C[0,l])} \le c_{24} \|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (4.1.1.7)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu eşitsizliği ve (3.1.2.4) kestirimini kullanırsak (4.1.1.6) eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega_t} |\Delta v(x)|^2 |\psi|^2 \, dxd\tau \le c_{25} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu buluruz. Bu eşitsizliği (4.1.1.5) de dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\operatorname{Im} a_2}{2} \int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\psi|^2 \, dxd\tau \le$$

$$\le (1+\mu_3) \int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{25} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (4.1.1.8)$$

Buradan da

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le (1+\mu_3) \int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{25} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (4.1.1.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak ve elde edileneşitsizliği (4.1.1.8) eşitsizliğinde kullanırsak, aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu ispatlamış oluruz:

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\operatorname{Im} a_2}{2}\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\psi|^2\,dxd\tau \le c_{26}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T]. \qquad (4.1.1.10)$$

Burada $c_{26} > 0$ sabiti $\Delta v$ 'den bağımsızdır.

Şimdi (4.1.1.1) fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde artışını bulalım. (4.1.1.1) formülünü kullanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü yazabilir:

$$\Delta J_0(v) = \Delta J_0(v+\Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_0^l \operatorname{Re}\left[(\psi(x,T) - y(x))\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}. \qquad (4.1.1.11)$$

Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanıp değerlendirme yaparsak ve (3.1.2.4), (4.1.1.10) kestirimlerini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{27}\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right). \qquad (4.1.1.12)$$

Burada $c_{27} > 0$ sabiti $\Delta v$ 'den bağımsızdır.Son bağıntıdan fonksiyonelin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde sürekli olduğunu görebiliriz. Yani

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0 \text{ için } |\Delta J_0(v)| \to 0 \qquad (4.1.1.13)$$

olur. $v\in V$ herhangi eleman olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin $V$ kümesinde sürekli olduğu elde edilir. Diğer taraftan $\forall v\in V$ için $J_0(v)\ge 0$ şartı sağlanır. Yani $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde alttan sınırlıdır. $V$ kümesi $L_2(0,l)$ de kapalı, sınırlı, konveks küme, $L_2(0,l)$ uzayı ise düzgün konveks uzay (bak [21]) olduğundan [11] çalışmasından bildiğimiz teoremin (Kuramsal Temeller, Teorem 2.24 ) tüm şartlarının sağlandığını hükmedebiliriz. Bu teoreme dayanarak $L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olan $G$ alt kümesinin var olduğunu ve bu alt kümeden seçilen herhangi $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlarız. Teorem 4.1.1.1 ispatlandı.

### 4.1.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı.

Bir önceki alt bölümde $\alpha > 0$ olduğunda hemen hemen $\omega \in L_2(0,l)$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözüme sahip olduğunu ispatladık. Şimdi $\alpha \geq 0$ olduğunda herhangi $\omega \in L_2(0,l)$ için (3.1.1.1) - (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu ispatlayalım.

**Teorem 4.1.2.1.** Farz edelim ki, teorem 4.1.1.1 ün şartı sağlansın ve $\alpha \geq 0$ verilen sayı olsun. Bu taktirde $\forall \omega \in L_2(0,l)$ için (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

**İspat:** Herhangi $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini alalım:

$$\lim_{m \leftarrow \infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v).$$

Farz edelim ki $\psi_m(x,t) = \psi(x,t;v^m), m = 1,2,...$ olsun. Her bir $v^m \in V$ olduğundan teorem 3.1.1.1 e göre (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\psi_m(x,t), m = 1,2,...,$ çözümüne sahip olduğunu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\|\psi_m\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_0 \left( \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)} \right) = c_{28}, m = 1,2,... \; . \quad (4.1.2.1)$$

Burada $c_{28} > 0$ sabiti $m$' den bağımsızdır. $V$ kümesi $L_2(0,l)$ uzayında kapalı, sınırlı, konveks küme ve $L_2(0,l)$ uzayı ise refleksive Banach uzay olduğundan bu küme

$L_2(0,l)$ de zayıf kompakt ve zayıf kapalı küme olur $[22]$. Bu nedenle $\{v^m\} \subset V$ dizisinden $v \in V$ ye zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine de $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu taktirde $\forall q \in L_2(0,l)$ için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^l v^m(x) q(x) dx = \int_0^l v(x) q(x) dx \ . \qquad (4.1.2.2)$$

(4.1.2.1) kestiriminden $\{\psi^m(x,t)\}$dizisinin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında düzgün sınırlı olduğunu elde ederiz. Bu nedenle $\{\psi^m(x,t)\}$dizisinden $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt dizi seçebiliriz ki bu alt diziyi de kolaylık olsun diye yine de $\{\psi^m(x,t)\}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$\psi_m \to \psi, \ L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf,} \qquad (4.1.2.3)$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x} \to \frac{\partial \psi}{\partial x}, \ L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf,} \qquad (4.1.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \ L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf,} \qquad (4.1.2.5)$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \to \frac{\partial \psi}{\partial t}, \ L_2(\Omega) \text{ 'da zayıf} \qquad (4.1.2.6)$$

dir.

Şimdi limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin üstte tanımladığımız anlamda çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.2) denklemini $\forall (x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim.(4.1.2.3)- (4.1.2.6) limit bağıntılarını kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz. $m \to \infty$ için $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ olduğunda

$$\int_\Omega \left( i\frac{\partial \psi_m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_m}{\partial x} - a(x)\psi_m \right)\overline{\eta}(x,t)dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega \left( i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi \right)\overline{\eta}(x,t)dxdt \qquad (4.1.2.7)$$

dir.

Şimdi $m \to \infty$ için $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ olduğunda

$$\int_\Omega v^m(x)\psi_m(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt \to \int_\Omega v(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt \qquad (4.1.2.8)$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlayalım. Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\int_\Omega v^m(x)\psi_m(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt = \int_\Omega (v^m(x) - v(x))\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt +$$

$$+ \int_\Omega v^m(x)(\psi_m(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x,t)dxdt + \int_\Omega v(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt \qquad (4.1.2.9)$$

(4.1.2.2) limit bağıntısını ve $\psi \in W_2^{21}(\Omega)$, $\eta \in L_2(\Omega)$ şartını sağlayan $\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)$ fonksiyonu için

$$q(x) = \int_0^T \psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dt$$

fonksiyonunun $L_2(0,l)$ den olduğunu dikkate alırsak (4.1.2.9) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimin $m \to \infty$ için limitinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Yani

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Omega} (v^m(x) - v(x))\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt = 0 \,. \qquad (4.1.2.10)$$

[7,23,24,26,27)] çalışmalarından bildiğimize göre $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T;L_\infty(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$\|\psi_m - \psi\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \to 0 \qquad (4.1.2.11)$$

dir.

Şimdi bu limit bağıntısını kullanarak (4.1.2.9) un sağ tarafındaki ikinci terimin limitini bulmaya çalışalım. Bu terimi değerlendirirsek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left| \int_{\Omega} v^m(x)(\psi_m(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x,t)dxdt \right| \le \|v^m\|_{L_2(0,l)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_m - \psi\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \le$$

$$\le b_0 \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_m - \psi\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}$$

(4.1.2.11) limit bağıntısını kullanıp bu eşitsizliğin her iki tarafında limite geçersek (4.1.2.9) nin sağ tarafındaki terimin limitinin sıfır olduğu elde edilir. Yani

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Omega} v^m(x)(\psi_m(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x,t)dxdt = 0 \,. \qquad (1.1.2.12)$$

Böylece (4.1.2.10), (4.1.2.12) limit bağıntılarını kullanıp (4.1.2.9) un her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek (4.1.2.8) nin geçerli olduğunu elde ederiz. Nihayet (4.1.2.7), (4.1.2.8) limit bağıntılarını kullanıp

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi_m}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_m}{\partial x}-a(x)\psi_m+v^m(x)\psi_m+a_2|\psi_m|^2\psi_m-f(x,t)\right]\times$$

$$\times\overline{\eta}(x,t)dxdt=0$$

integral özdeşliklerinde $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ olduğunda m $\to\infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(x)\psi+a_2|\psi|^2\psi-f(x,t)\right]\overline{\eta}(x,t)dxdt=0.$$

Buradan da $\psi(x.t)$ fonksiyonunun (3.1.1.2) denklemini sağladığını elde ediyoruz.

Şimdi $\psi(x.t)$ fonksiyonlarının (3.1.1.3) başlangıç şartlarını sağladığını ispatlayalım.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $[7]$ aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz. $m\to\infty$ ve $\forall t\in[0,T]$için

$$\|\psi_m(.,t)-\psi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\to 0 \tag{4.1.2.13}$$

dir. Bu limit bağıntısını $t=0$ için ve

$$\psi_m(x,0)=\varphi(x), x\in(0,l), m=1,2,...$$

başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\|\psi(.,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)}\le\|\psi(.,0)-\psi_m(.,0)\|_{L_2(0,l)}+\|\psi_m(.,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinden $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\|\psi(.,0)-\varphi\|_{L_2(0,l)} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \forall x \in \overset{0}{(0,l)}$$

başlangıç şartları bulunur. Nihayet $\psi(x.t)$ limit fonksiyonunun (3.1.1.4) sınır değer şartlarını sağladığını ispatlayalım. Fonksiyonların izi hakkındaki teoreme göre $\psi_m \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), m = 1,2,...$ fonksiyonlarının $L_2(0,T)$ den olan izi vardır ve aşağıdaki limit bağıntıları geçerlidir. $m \to \infty$ için

$$\|\psi_m(s,.)-\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)} \to 0, s = 0,l \qquad (4.1.2.14)$$

olur. Bu limit bağıntılarını,

$$\psi_m(0,t) = \psi_m(l,t) = 0, t \in (0,T), m = 1,2,...$$

sınır şartlarını kullanıp

$$\|\psi(.s,.)\|_{L_2(0,T)} \leq \|\psi(s,.)-\psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)} + \|\psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)}, s = 0,l$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\|\psi(.s,.)\|_{L_2(0,T)} = 0, \text{ s=0}, l$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$$

sınır değer şartlarının geçerli olduğu elde edilir.

Böylece $\psi(x.t)$ fonksiyonunun (3.1.1.1)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\{v^m\}\subset V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v=v(x)\in V$ ye karşılık gelen çözümü olduğu ve bu fonksiyonun $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olduğu elde edilir. Yani

$$\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$$

dir. Bu fonksiyon için (3.1.2.4) kestiriminin geçerli olduğu da (4.1.2.1) den limite geçilerek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate almakla elde edilir.

$\{v^m\}\subset V$ minimalleştirici alt dizisinin $L_2(0,l)$ de, $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisinin $L_2(\Omega)$ da $\psi(x.t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığını, $\alpha\geq 0$ olduğunu, $L_2(0,l)$ uzaylarında normların alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $v\in V$ elemanı üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olduğunu elde ederiz. Yani,

$$J_{\alpha*}\leq J_\alpha(v)\leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m)=J_{\alpha*}$$

dir.

Buradan $J_\alpha(v)=J_{\alpha*}$ elde edilir. Yani $v\in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ yi minimum yapan elemandır. Başka bir deyişle $v\in V$ (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümüdür. Teorem 4.1.2.1 ispatlandı.

## 4.2. Yüklü Parçacıkların Lineer ve Homojen olmayan Ortamda Hareketinin Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Gerek Şart.

Bu alt bölümde **y**üklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde etmeğe çalışacağız. Bu amaçla ilk önce problemde yer alan amaç fonksiyonelini Frechet anlamında diferansiyellene bilir olduğunu gösterip onun gradiyenti için formül elde edeceğiz. Bu formülden yararlanarak varyasyon eşitliği biçiminde gerek şart ispatlayacağız.

### 4.2.1. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)-(3.1.1.4) probleminde amaç fonksiyonelinin diferansiyellene bilirliğini inceleyeceğiz. Bu amaçla aşağıdaki eşlenik problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\phi\right)-a(x)\phi+v(x)\phi+$$

$$+2\overline{a}_2|\psi|^2\phi+a_2(\psi)^2\overline{\phi}=0,(x,t)\in\Omega, \tag{4.2.1.1}$$

$$\phi(x,T)=-2i(\psi(x,T)-y(x)),x\in(0,l), \tag{4.2.1.2}$$

$$\phi(0,t)=\phi(l,t)=0,t\in(0,T). \tag{4.2.1.3}$$

Burada $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.1.1.2)-( 3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ için çözümüdür.

**Tanım 4.2.1.1.** (4.2.1.1)-(4.2.1.3) eşlenik problemin çözümü olarak $C^0([0,T],L_2(0,l))$ uzayına ait olan ve $\eta_1(x,0)=0$ şartını sağlayan $\forall\eta_1\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \phi\left(-i\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\eta}_1}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial x}-a(x)\overline{\eta}_1+v(x)\overline{\eta}_1+2\overline{a}_2|\psi|^2\overline{\eta}_1\right)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega} a_2\left(\psi^2\right)\bar{\phi}\bar{\eta}_1 dxdt = -2\int_0^l \left(\psi(x,T)-y(x)\right)\bar{\eta}_1(x,T)dx \qquad (4.2.1.4)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi = \phi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

$[16,7,23,39]$ çalışmalarındaki gibi Galerkin yöntemini kullanarak aşağıdaki hükmü ispatlaya biliriz.

**Teorem 4.2.1.1.** Farz edelim ki, $a_2-$ kompleks sabiti ve $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$, $y(x)$ fonksiyonları (3.1.1.5)-(3.1.1.9) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v \in V$ için (4.2.1.3)-( 4.2.1.5) eşlenik probleminin $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{29}\left\|\psi(.,T)-y\right\|^2_{L_2(0,l)}. \qquad (4.2.1.5)$$

Burada $c_{29} > 0$ -sayısı belirli bir sayıdır.

Bu teoremden yaralanarak amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim. Bu amaçla eşlenik problemin çözümü için aşağıdaki şartın sağlandığını da varsayalım:

$$\left\|\phi\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{30}. \qquad (4.2.1.6)$$

Söylemek gerekir ki, bu biçimde eşitsizlikler eşlenik problemin çözümü için veriler üzerine şartı fazlalaştırarak elde edile bilir. Ancak incelemelerin basitliği için bu varsayımı kabulleniyoruz. Zaten böyle varsayımlar lineer olmayan denklemler için optimal kontrol problemlerinde gerek şartlar elde edildiği zaman kullanılan varsayımlardır. Bu nedenle bu çalışmada incelemeleri zorlaştırmamak için üstte söylediğimiz gibi (4.2.1.6) varsayımını kabul ediyoruz.

**Teorem 4.2.1.2:** Farz edelim ki, teorem 4.2.1.1 şartları sağlansın ve $\omega \in L_2(0,l)$ verilen eleman olsun. Bunların yanı sıra farz edelim ki, eşlenik problemin çözümü için (4.2.1.6) şartı sağlansın. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $V$ kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(v) = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right). \tag{4.2.1.7}$$

Burada $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v), \phi(x,t) \equiv \phi(x,t;v)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer ve (4.2.1.3)-( 4.2.1.5) eşlenik problemlerinin $v \in V$ çözümleridir.

**İspat.** $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde artışını bulalım. (3.1.1.1) ve (4.1.1.11) formüllerini kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx +$$

$$+ 2\alpha\int_0^l \left(v(x) - \omega(x)\right)\Delta v(x)dx + \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{4.2.1.8}$$

Burada $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonu (4.1.1.2)-(4.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ için çözümüdür. $\psi(x,t)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}^{2,1}_2(\Omega)$ uzayına ait olan çözüm olduğundan kolaylıkla $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için aşağıdaki integral özdeşliğini yazabiliriz:

$$\int_\Omega \left( i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi \right)\overline{\eta}(x,t)dxdt +$$

$$+ \int_\Omega \left(\left(v(x) + \Delta v(x)\right)\Delta\psi + a_2\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\Delta\psi + a_2\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\right)\overline{\eta}(x,t)dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \Delta v(x)\psi(x,t;v)\overline{\eta}(x,t)dxdt\,. \tag{4.2.1.9}$$

Bu integral özdeşliğinin yanı sıra $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonu (4.1.1.3) başlangıç şartını ve (4.1.1.4) sınır değer şartlarını sağlar. Bu integral özdeşliğinde $\eta \in L_2(\Omega)$ yerine $\phi(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_\Omega \left( i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi \right)\overline{\phi}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \left( (v(x)+\Delta v(x))\Delta\psi + a_2\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + a_2\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\right)\overline{\phi}(x,t)dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \Delta v(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)dxdt\,. \tag{4.2.1.10}$$

Diğer taraftan $\phi(x,t)$ fonksiyonu eşlenik problemin çözümü olduğundan (4.2.1.4) integral özdeşliğini sağlar. $\Delta\psi \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan ve (4.1.1.3) başlangıç ve (4.1.1.4) sınır değer şartlarını sağladığından (4.2.1.4) integral özdeşliğinde $\eta_1(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunu alırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \phi\left( -i\frac{\partial\Delta\overline{\psi}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\overline{\psi}}{\partial x^2} - ia_1(x)\frac{\partial\Delta\overline{\psi}}{\partial x} - a(x)\Delta\overline{\psi} + v(x)\Delta\overline{\psi} + 2\overline{a}_2|\psi|^2\Delta\overline{\psi}\right)dxdt +$$

$$+\int_\Omega a_2\left(\psi^2\right)\overline{\phi}\Delta\overline{\psi}dxdt = -2\int_0^l (\psi(x,T)-y(x))\Delta\overline{\psi}(x,T)dx \tag{4.2.1.11}$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{\Omega}\left( i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi + v(x)\Delta\psi + 2a_2|\psi|^2\Delta\psi\right)\overline{\phi}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\overline{a}_2\left(\overline{\psi}^2\right)\phi\Delta\psi dxdt = -2\int_0^l\left(\overline{\psi}(x,T) - \overline{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx . \qquad (4.2.1.12)$$

(4.2.1.10) eşitliğinden (4.2.1.12) eşitliğini taraf tarafa çıkartırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_0^l\left(\overline{\psi}(x,T) - \overline{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx = \int_{\Omega}\Delta v(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\Delta v(x)\Delta\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)dxdt \; + \int_{\Omega}\left(a_2\left(\psi_{\Delta}\overline{\phi}|\Delta\psi|^2\right) + a_2\overline{\psi}\overline{\phi}(\Delta\psi)^2\right)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\left(a_2\psi_{\Delta}\psi\Delta\overline{\psi}\right)\overline{\phi}(x,t)dxdt - \int_{\Omega}\overline{a}_2\left(\overline{\psi}^2\right)\phi\Delta\psi dxdt . \qquad (4.2.1.13)$$

Bu eşitliğin kompleks eşitliğini yazarsak, aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$2\int_0^l\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx = \int_{\Omega}\Delta v(x)\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\Delta v(x)\Delta\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)dxdt \; + \int_{\Omega}\left(\overline{a}_2\left(\overline{\psi}_{\Delta}\phi|\Delta\psi|^2\right) + \overline{a}_2\psi\phi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\left(\overline{a}_2\overline{\psi}_{\Delta}\overline{\psi}\Delta\psi\right)\phi(x,t)dxdt - \int_{\Omega}a_2\left(\psi^2\right)\overline{\phi}\Delta\overline{\psi}dxdt . \qquad (4.2.1.14)$$

(4.2.1.13), (4.2.1.14) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_0^l (\psi(x,T)-y(x))\Delta\bar{\psi}(x,T)dx + 2\int_0^l (\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}(x))\Delta\psi(x,T)dx =$$

$$=\int_\Omega \Delta v(x)\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt + \int_\Omega \Delta v(x)\bar{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \Delta v(x)\Delta\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt + \int_\Omega \Delta v(x)\Delta\bar{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \left(a_2\left(\psi_\Delta\bar{\phi}|\Delta\psi|^2\right)+a_2\bar{\psi}\bar{\phi}(\Delta\psi)^2\right)dxdt + \int_\Omega \left(\bar{a}_2\left(\bar{\psi}_\Delta\phi|\Delta\psi|^2\right)+\bar{a}_2\psi\phi(\Delta\bar{\psi})^2\right)dxdt +$$

$$+\int_\Omega a_2\psi\bar{\phi}|\Delta\psi|^2 dxdt + \int_\Omega \bar{a}_2\bar{\psi}\phi|\Delta\psi|^2 dxdt .$$

Böylelikle bu eşitlikten aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left[(\psi(x,T)-y(x))\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx = \int_\Omega \Delta v(x)\mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \Delta v(x)\mathrm{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt + \int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\left(\psi_\Delta\bar{\phi}|\Delta\psi|^2\right)\right)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\left(\bar{\psi}\bar{\phi}(\Delta\psi)^2\right)\right)dxdt + \int_\Omega \mathrm{Re}(a_2\psi\bar{\phi}|\Delta\psi|^2)dxdt . \qquad (4.2.1.15)$$

Bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (4.2.1.8) formülünde dikkate alırsak fonksiyonelin artışını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \int_\Omega \Delta v(x)\mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt +$$

$$+2\alpha\int_0^l (v(x)-\omega(x))\Delta v(x)dx + R(\Delta v). \qquad (4.2.1.16)$$

Burada

$$R(\Delta v)=\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+\int_\Omega \Delta v(x)\operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt+$$

$$+\int_\Omega \operatorname{Re}\left(a_2\left(\psi_\Delta\overline{\phi}|\Delta\psi|^2\right)\right)dxdt+\int_\Omega \operatorname{Re}\left(a_2\left(\overline{\psi}\overline{\phi}(\Delta\psi)^2\right)\right)dxdt+$$

$$+\int_\Omega \operatorname{Re}(a_2\psi\overline{\phi}|\Delta\psi|^2)dxdt\,. \qquad (4.2.1.17)$$

dir.

Şimdi $R(\Delta v)$ yi değerlendirelim. Cauchy- Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak $R(\Delta v)$ kalan terimini aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R(\Delta v)|\le\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+\sqrt{T}\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}+$$

$$+|a_2|\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}+2|a_2|\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (4.2.1.18)$$

$\psi,\psi_\Delta\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan ve $[23,24,26,27]$ çalışmalarından bildiğimiz gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_\infty\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ uzayına sürekli gömüldüğünden ve $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı da $L_\infty(0,l)$uzayına gömüldüğünden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_{31}\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (4.2.1.19)$$

$$\|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{31}\|\psi_\Delta\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}. \qquad (4.2.1.20)$$

Burada $c_{31} > 0$ sayısı $\psi, \psi_\Delta$ fonksiyonlarından bağımsızdır. Bu eşitsizliklerde $\psi, \psi_\Delta$ fonksiyonları için (3.2.1.4) kestirimini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{32}, \|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{32}. \qquad (4.2.1.21)$$

Bu eşitsizlikleri, (4.2.1.6) şartını ve (4.1.1.10) kestirimini dikkate $R(\Delta v)$ yi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R(\Delta v)| \le c_{33}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}. \qquad (4.2.1.22)$$

Burada $c_{33} > 0$ sayısı $\Delta v$ ' den bağımsızdır. Bu eşitsizlik

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right). \qquad (4.2.1.23)$$

olduğunu gösterir. Yani $R(\Delta v)$ kalanı $\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}$ miktarına göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür:

$$\lim_{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to \infty} \frac{o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)}{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}} = 0$$

dır. Bu taktirde (4.2.1.23) bağıntısını dikkate aldığımızda fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_\Omega \Delta v(x) \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right) dxdt +$$

$$+2\alpha\int_0^l \left(v(x)-\omega(x)\right)\Delta v(x)dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right). \qquad (4.2.1.24)$$

Fonksiyonellerin $L_2(0,l)$ uzayında Frechet anlamında diferensiyellenebilirliğin tanımını kullanırsak (4.2.1.24) bağıntısından kolaylıkla $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde Frechet anlamında diferensiyellenebilir olduğu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v(x)-\omega(x)\right)$$

Formülünü elde edilir. $v \in V$ herhangi eleman oluğundan bu formülün $V$ kümesi üzerinde geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 4.2.1.2 ispatlandı.

### 4.2.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gerek Şart

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartla ilgili soruyu inceleyeceğiz. Bir önceki alt bölümdeki fonksiyonelin gradyenti için elde ettiğimiz formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edeceğiz.

**Teorem 4.2.2.1.** Farz edelim ki teorem 4.2.1.2 nin şartları sağlansın ve

$$V_* = \left\{v^* \in V : J_\alpha\left(v^*\right) = J_{\alpha *} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v)\right\}$$

kümesi (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümler kümesi olsun. Bu taktirde $\forall v^* \in V_*$ için

$$\int_0^l \left[\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v^*(v)-\omega(x)\right)\right]\times\left[v(x)-v^*(x)\right]dx \geq 0,\ \forall v \in V. \quad (4.2.2.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$ ve $\phi^*(x,t) \equiv \phi(x,t;v^*)$ sırasıyla (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin ve (4.2.1.1)-(4.2.1.3) eşlenik probleminin $v^* \in V$ için çözümleridir.

**İspat.** Teorem 4.2.1.2 nin şartları sağlandığından $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $V$ kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için (4.2.1.7) formülünü ispatladık. Şimdi gradyentin $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlamaya çalışalım. Bu amaçla $\forall v \in V$ için

$$\left\| J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{34} \left\| \Delta v \right\|_{L_2(0,l)} \tag{4.2.2.2}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir. Burada $c_{34} > 0$ sayısı $\Delta v$ den bağımsızdır. Gerçekten (4.2.1.7) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) = \int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi_\Delta(x,t)\Delta\overline{\phi}(x,t)\right)dt + \int_0^T \operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dt +$$

$$+ 2\alpha\Delta v(x). \tag{4.2.2.3}$$

Burada $\psi_\Delta(x,t)$ fonksiyon (3.1.1.2)- (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $(v+\Delta v) \in V$ için çözümü, $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonu (4.1.1.2)- (4.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü, $\Delta\phi(x,t) = \phi_\Delta(x,t) - \phi(x,t) \equiv \phi(x,t;v+\Delta v) - \phi(x,t;v)$ fonksiyonu ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Delta\phi\right) - a(x)\Delta\phi + \left(v(x) + \Delta v(x)\right)\Delta\phi +$$

$$+ 2\overline{a}_2 \left|\psi_\Delta\right|^2 \phi_\Delta + a_2 \left(\psi_\Delta\right)^2 \overline{\phi}_\Delta - 2\overline{a}_2 |\psi|^2 \phi - a_2 (\psi)^2 \overline{\phi} = -\Delta v(x)\phi(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{4.2.2.4}$$

$$\Delta\phi(x,T) = -2i\Delta\psi(x,T), x \in (0,l), \tag{4.2.2.5}$$

$$\Delta\phi(0,t)=\Delta\phi(l,t)=0, t\in(0,T). \qquad (4.2.2.6)$$

Burada $\phi(x,t)$ fonksiyonu (4.2.1.1)- (4.2.1.3) eşlenik probleminin çözümü olup (4.2.1.5) kestirimini sağlar ve bu fonksiyon için (4.2.1.6) şartı sağlanır. Bu özelliği kullanarak (4.2.2.4)- (4.2.2.6) sınır değer probleminin çözümünü değerlendirelim.

Bu amaçla eşlenik problemin verilerinde düzgünleştirme işlemi yapıp $\phi(x,t)$ fonksiyonunun düzgünleştirmesini $\phi_k(x,t), k=1,2,...$ işaret edelim ki, bu fonksiyonlar eşlenik problemin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan çözümleri olsun ve $k\to\infty$ için

$$\|\phi_k(.,t)-\phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\to 0, \forall t\in[0,T] \qquad (4.2.2.7)$$

şartı sağlansın. Bunun yanı sıra farz edelim ki $v(x)$ fonksiyonunun düzgünleştirilmişi $v_k(x)$,1,2,... dizisi olsun, öyle ki, $k\to\infty$ için

$$\|v_k-v\|_{L_2(0,l)}\to 0 \qquad (4.2.2.8)$$

limit bağıntısı geçerli olsun. Ayrıca $\psi_k(x,t), k=1,2,...$ dizisi de $\psi(x,t)$ nin düzgünleştirilmişi olsun ve $k\to\infty$ için

$$\|\psi_k-\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\to 0 \qquad (4.2.2.9)$$

limit bağıntısı sağlansın. Bu taktirde (4.2.2.4) denkleminde $v(x), \phi(x,t), \psi(x,t)$ fonksiyonlarının yerine $v_k(x), \phi_k(x,t), \psi_k(x,t), k=1,2,...$ dizilerini alıp denklemin her iki tarafını $\Delta\overline{\phi}_k(x,t)$ ile çarpıp $\tilde{\Omega}_t=(0,l)\times(t,T)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde $x$ değişkenine göre kısmi integrasyon formülünü uygulayıp, $\Delta\phi_k(x,t)$, $k=1,2,...$ fonksiyonları için sınır değer şartlarını kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left( i\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial t}\Delta\overline{\phi}_k - a_0\left|\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial x}\right|^2 + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Delta\phi_k\right)\Delta\overline{\phi}_k - a(x)\left|\Delta\phi_k\right|^2 + (v+\Delta v)\left|\Delta\phi_k\right|^2\right)dxd\tau +$$

$$+2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_{k\Delta}\right|^2\left|\Delta\phi_k\right|^2 dxd\tau + 2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\overline{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau + 2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_{k\Delta}\phi_k\Delta\overline{\psi}_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}(\psi_{k\Delta})^2(\Delta\overline{\phi}_k)^2 dxd\tau + a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\overline{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau + a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_{k\Delta}\overline{\phi}_k\Delta\psi_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau =$$

$$= -\int_{\tilde{\Omega}_t}\Delta v_k(x)\phi_k(x,\tau)\Delta\overline{\phi}_k(x,\tau)dxd\tau, k=1,2,...$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak:

$$i\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial t}\Delta\overline{\phi}_k + \frac{\partial \Delta\overline{\phi}_k}{\partial t}\Delta\phi_k\right)dxd\tau +$$

$$+i\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Delta\phi_k\right)\Delta\overline{\phi}_k + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Delta\overline{\phi}_k\right)\Delta\phi_k\right)dxd\tau +$$

$$+2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_{k\Delta}\right|^2\left|\Delta\phi_k\right|^2 dxd\tau - 2a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_{k\Delta}\right|^2\left|\Delta\phi_k\right|^2 dxd\tau +$$

$$+2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\overline{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau - 2a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_k\overline{\phi}_k\Delta\overline{\psi}_k\Delta\phi_k dxd\tau +$$

$$+2\overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_{k\Delta}\phi_k\Delta\overline{\psi}_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau - 2a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\overline{\psi}_{k\Delta}\overline{\phi}_k\Delta\psi_k\Delta\phi_k dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}(\psi_{k\Delta})^2(\Delta\overline{\phi}_k)^2 dxd\tau - \overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}(\overline{\psi}_{k\Delta})^2(\Delta\phi_k)^2 dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\overline{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\overline{\phi}_k dxd\tau - \overline{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_k\overline{\phi}_k\Delta\overline{\psi}_k\Delta\phi_k dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\Omega_t}\psi_{k\Delta}\bar{\phi}_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k dxd\tau-\bar{a}_2\int_{\Omega_t}\bar{\psi}_{k\Delta}\phi_k\Delta\bar{\psi}_k\Delta\phi_k dxd\tau=$$

$$=-\int_{\Omega_t}\Delta v_k(x)\phi_k(x,\tau)\Delta\bar{\phi}_k(x,\tau)dxd\tau-\int_{\Omega_t}\Delta v_k(x)\bar{\phi}_k(x,\tau)\Delta\phi_k(x,\tau)dxd\tau,\ k=1,2,... \quad (4.2.2.10)$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\phi_k|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)|\Delta\phi_k|^2\right)dxd\tau+4\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}|\psi_{k\Delta}|^2|\Delta\phi_k|^2 dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\phi_k|^2 dxd\tau-\int_{\Omega_t}\Delta v_k(x)\mathrm{Re}(\phi_k(x,\tau)\Delta\bar{\phi}_k(x,\tau))dxd\tau-$$

$$-4\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(\bar{a}_2\bar{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau-4\int_{\Omega_t}(\bar{a}_2\psi_{k\Delta}\phi_k\Delta\bar{\psi}_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2(\psi_{k\Delta})^2(\Delta\bar{\phi}_k)^2)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\bar{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\psi_{k\Delta}\bar{\phi}_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau,\ k=1,2,...$$

Burada düzgünleştirilmiş fonksiyonlar için $\Delta\phi_k(x,T)=-2i\Delta\psi_k(x,T)$, $\Delta\phi_k(0,t)=\Delta\phi_k(l,t)=0,\ k=1,2,...$ şartlarını kullandığımızda

$$\|\Delta\phi_k(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}=-\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\phi_k|^2 dxd\tau+\|\Delta\psi_k(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+\int_{\Omega_t}\Delta v_k(x)\mathrm{Re}(\phi_k(x,\tau)\Delta\bar{\phi}_k(x,\tau))dxd\tau\quad+4\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}|\psi_{k\Delta}|^2|\Delta\phi_k|^2 dxd\tau+$$

$$+4\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(\bar{a}_2\bar{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau+4\int_{\Omega_t}(\bar{a}_2\psi_{k\Delta}\phi_k\Delta\bar{\psi}_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2(\psi_{k\Delta})^2(\Delta\bar{\phi}_k)^2)dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\bar{\psi}_k\phi_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\psi_{k\Delta}\bar{\phi}_k\Delta\psi_k\Delta\bar{\phi}_k)dxd\tau,\ k=1,2,... \qquad (4.2.2.11)$$

Bu eşitlikte üstte kabul ettiğimiz düzgünleştirme şartlarını göz önünde bulundurarak $k\to\infty$ için limite geçersek, aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|\Delta\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}=-\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\phi|^2dxd\tau+4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\mathrm{Re}(\phi(x,\tau)\Delta\bar{\phi}(x,\tau))dxd\tau\quad+4\,\mathrm{Im}\,a_2\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\phi|^2dxd\tau+$$

$$+4\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(\bar{a}_2\bar{\psi}\phi\Delta\psi\Delta\bar{\phi})dxd\tau+4\int_{\Omega_t}(\bar{a}_2\psi_\Delta\phi\Delta\bar{\psi}\Delta\bar{\phi})dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2(\psi_\Delta)^2(\Delta\bar{\phi})^2)dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\bar{\psi}\phi\Delta\psi\Delta\bar{\phi})dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}(a_2\psi_\Delta\bar{\phi}\Delta\psi\Delta\bar{\phi})dxd\tau\ .$$

Bu eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left\|\Delta\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\mu_3\int_{\Omega_t}|\Delta\phi(x,\tau)|^2dxd\tau+4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+\int_{\Omega_t}|\Delta v(x)||\phi(x,\tau)||\Delta\phi(x,\tau)|dxd\tau+\left(4\operatorname{Im}a_2+2|a_2|\right)\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\phi|^2\,dxd\tau+$$

$$+6|a_2|\int_{\Omega_t}|\psi||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|dxd\tau+6|a_2|\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|dxd\tau\,. \qquad (4.2.2.12)$$

Burada Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğini kullanıp (4.1.1.10), (4.2.1.6), (4.2.1.19) eşitsizliklerinden yaralanırsak, sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\leq c_{35}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+\int_t^T\|\Delta\phi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\forall t\in[0,T]. \qquad (4.2.2.13)$$

Burada $c_{35}>0$ sabiti $\Delta v$'den bağımsızdır. Burada Gronwall lemmasını uygularsak, aşağıdaki kestirimi ispatlamış oluruz:

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\leq c_{36}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)},\forall t\in[0,T]. \qquad (4.2.2.14)$$

Burada $c_{36}>0$ sabiti $\Delta v$'den bağımsızdır.

(3.1.5.3) formülünde yer alan gradyentin artışını değerlendirirsek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\right|\leq\int_0^T|\psi_\Delta||\Delta\phi|dt+\int_0^T|\phi||\Delta\psi|dt+2\alpha|\Delta v(x)|.$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını kareye yükseltip $(0,l)$ aralığı üzerinde $x$ değişkenine göre integrallersek ve değerlendirme yaparsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlşği yaza biliriz:

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\|^2_{L_2(0,l)}\leq+3T\|\psi_\Delta\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta\phi\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+3T\|\phi\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}+12\alpha^2\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Burada (4.1.1.10), (4.2.1.6), (4.2.1.19) ve (4.2.2.14) eşitsizliklerinden yaralanırsak, fonksiyonelin gradiyentinin sürekli olduğunu gösteren aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{37}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}. \quad (4.2.2.15)$$

Burada Burada $c_{37}>0$ sabiti $\Delta v$'den bağımsızdır. Buradan da gereken (4.2.2.2) eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradyentinin $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu elde ettik. Diğer taraftan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli , $J_0(v)$ sürekli fonksiyoneli ile $\alpha\|v-\omega\|^2_{L_2(0,l)}$ sürekli fonksiyonelinin toplamı olduğundan $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Elde edilen sonuçları dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $V$ kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu hükmedebiliriz. Yani

$$J_\alpha(v)\in C^1(V)$$

dir. Diğer taraftan $V$ kümesi $L_2(0,l)$de merkezi sıfırda olan $b_0$ yarıçaplı kapalı küre olduğundan kapalı, sınırlı, konveks küme olur. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin ve $V$ kümesinin [36] çalışmasından bildiğimiz teoremin (bak kuramsal temeller teorem 2.21) şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu teoreme dayanarak $\forall v^*\in V_*$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\langle J'_\alpha(v^*), v-v^*\rangle_{L_2(0,l)}\ge 0,\ \forall v\in V\ . \quad (4.2.2.16)$$

Burada gradiyent için olan (4.2.1.7) formülünü dikkate alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 4.2.2.1 ispatlandı.

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketini ifade eden sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan bir boyutlu Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi bir biçimde farklıdır. Her şeyden önce söylemek gerekir ki, olası kontroller kümesi, uzay değişkenine bağımlı olan ölçülebilir ve mutlak değerinin karesi ile integrallenebilir fonksiyonlar sınıfından seçilmiştir. Böyle kontroller önce [1,33] çalışmalarında sanal katsayılı gradiyent içeren lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde ele alınmıştır. Bu tür geniş sınıf kontroller sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde ilk kez bu çalışmada kullanılmıştır. Kontrollerin uzay ve ya zaman değişkenine bağlı olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olması durumu ise sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde önceki [19,20] çalışmalarında incelenmiştir. Bu tez çalışmasında incelenen problem güncel ve konulma açısından ciddi bir biçimde önceki çalışmalarda incelenen problemlerden farklı olduğundan bu çalışmada elde edilen sonuçlar da güncel olup gerek teorik gerekse de pratik açıdan bilimsel önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında alınan sonuçlar önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla örtüşmez.

## 6. KAYNAKLAR


**1)** Akbaba D.G. (2011) Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problrmi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

**2)** Aksoy Y.N., Yagubov G.Ya., Yıldız B. (2012) The finite difference approximationş of theoptimal control problem for a nonlinear Schrödinger equation. IJMMNO 3(3), pp.158-183

**3)** Aksoy Y.N., Yıldız B., Yetişkin H. (2012) Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathjematical Sciences, 122(3), pp. 469-484.

**4)** Aksoy Y.N. (2015) The variational formulation of an inverse problem for multi-dimensional nonlinear time dependent Schrödinger equation. DOİ:10.1515/jiip-2015-0029.

**5)** Aksoy Y.N., Din N.H., Yagub G. (2016) Finite difference method for an optimal control problemfor a nonlinear time-dependent Schrödinger equation. Numerical Funktional Analysis and Optimization, DOI: 10.1080/01630563.2016.1266656, 28 p.

**6)** Aksoy Y.N., Yagub G., Aksoy E. (2016) An identification problem for nonlinear Schrödinger equation. AIP Conferance Proceedings 1726,020079; doi: 10.1063/1.4945905, 4 p.

**7)** Baudoin L., KavianO., Puel J.P. (2005) Regularityfor a Schrödinger equation with singular potentials and applicationto bilinearoptimal control // J. Differential Equations, 216, pp.-188-222.

**8)** Butkovskiy A.G., Samoilenko Y.I. (1984) Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. M.: Nauka, 256 s. (Rusça)

**9)** Cances E., Le Bris C., Pilot M. (2000) Controle optimal bilineaire d'una equation de Schrödinger // C.R. Acad. SCİ, Paris, t.330,Serie 1. Controle optimal, pp.-567-571.

**10)** Dın Nıo Hao (1986) Kuantum Objektlerin Optimal Kontrolü//Otomatik ve Telemekanik.1986, No 2, S.1420 (Rusça)

**11)** Goebel , M. (1979) On Existence Of Optimal Control//Math.Nacr.,Vol.53-s.67-73

**12)** İskenderov,A.D., Yagubov, G.Ya.(1988) Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi//DAN SSSR, vol. 303, No: 5, s.1044- 1048 (Rusça).

**13)** İskenderov A.D., Yagubov, G.Ya. (1989) Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü//Otomatik ve Telemekanik, No:12, s.27-38 (Rusça).

**14)** İskenderov A.D., Mahmudov N.M. (1995) Kuantum Mekaik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol // AMEA ’nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-c.16,No:5-6-30-35 (Rusça)

**15)** İskenderov A.D., Yagubov G.Ya.(1998) Kuantum mekanik potansiyelle optimal kontrol// Azerbaycan BA MME'nin eserleri, vol. VIII, s.46-51( Rusça)

**16)** İskenderov A.D., Yagubov G.Ya.(2007) Durgun ve lineer olmayan çok boyutlt Schrödinger denkleminde sınırlı olmayan potansiyelle optimal kontrol // Procedings Lenkara State University. Series Natural Sciences. Lenkaran, pp. 3-56.

**17)** İskenderov A.D., Yagubov G.Ya., Musayeva M.A.(2012) Kuantum potansiyellerinin identifikasyonu. Baku, Çaşıoğlu, 552 s. (Rusça).

**18)** Iskenderov A.D., Yagubov G.Ya.,İbragimov N.S.,Y.Aksoy N. (2014) Variation formulation of the inverse problem of determining the complex-coefficient of equation of quasioptics. // Euroasian Journal of mathematical and computer applications, vol. 2, issue 2 , pp.102-121.

**19)** Iskenderov A.D.,Yagub G., Y.Aksoy N. (2015) An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15- pp.27-28.

**20)** İskenderov A.D., Yagub G., Zengin M. (2016) Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27 , - pp.79-80

**21)** Iyosida,K.(1967) Functional Analysis-M,:Mir-s.624 (Rusça)

**22)** Kolmogorov A.N., Formin S.V. (1989) Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. M.Nauka.1989-s.624 (Rusça)

**23)** Ladyzenskaja O.A. (1973) Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri-M:Nauka, (Rusça)

**24)** Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A.,Uraltseva N.N. (1968) Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Amer. Math. Soc. (english trans) Providence, R.I.Nauka, 765 s.

**25)** Landau L.D., Lifşis E.M. (1963) Kuantum Mekaniği. Cilt 3. - s.702 (Rusça).

**26)** Lions J.-L., Magenes E. (1972) Non-homogeneous boundary value problems and applications, vol. 2. Berlin, 307 p.

**27)** Lions J.L.(1987) Dağılmış parametreli singuler sistemlerle kontrol. M.:Nauka,308 s. (Rusça).

**28)** Mahmudov N.M. (1997) Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri- c.7.s.392 (Rusça).

**29)** Özeroğlu Y. (2017) Lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

**30)** Pontryagin L.S. (1982) Adi diferansiyel denklemler. Moskova, Nauka, 332 s. (Rusça).

**31)** Razgulin A.V.(1988) Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 1 (Nümerik Analiz ve Sibernetik), No 2 ,s.28-33 (Rusça).

**32)** Silla N. (1991) Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, Bakü,165 s. (Rusça)

**33)** Toyoğlu F. (2012) İki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümü.Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

**34)** Toyoğlu F., Yagubov G. (2015) Numerical solution of an optimal control problem governed by two dimensional Schrödinger equation // Applied and Computational Mathematics, vol.4, issue 2, pp.30-38.

**35)** Vasilyev F.P. (1980) Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metotları. Moskova, Nauka, 518 s. (Rusça).

**36)** Vasilyev F.P. (1981) Extremal Problemlerin ÇözümMetodları. M: Nauka, 400 s. (Rusça).

**37)** Vorontsov M.A., Shmalgauzen,V.I. (1984) Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka, 288 s Rusça).

**38)** Yagubov G.Ya. (1984) Schrödinger tip denklem için optimal kontrol problemi // 'Sayısal yöntemler ve bilgisayarlaın matematiksel donanımı' , Bakü, ADU nun yayın evi, s. 116-125 (Rusça).

**39)** Yagubov G.Ya. (1994) Kuazi Lineer Schrödinger denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. Bilimler Doktoru Tezi. Kiev Devlet Universitesi, Kiyev., 318 s.(Rusça)

**40)** Yagubov G.Ya., Musayeva M.A. (1995) Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri, vol. 16, No:1-2, s.46-51(Rusça)

**41)** Yagubov G.Ya., Musayeva M.A.(1997) Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında // Diferansiyel Denklemler. Vol. 33, No:12, s.1691-1698 (Rusça).

**42)** Yagubov G.Ya., Haşimov S.A.(2008) Lineer olmayan Schrödinger denkleminde zamana bağımlı sınırlı olmayan potansiyelle optimal kontrol problemi hakkında // Azerbaycan MBA nin Haberleri. Fiz. -Tekn.-Matem.-İnformat. serisi, vol. 28, No 6, s.19-24 (Rusça).

**43)** Yagub G. Ibrahimov N.S, Zengin M.(2015) Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15 , pp.53-54.

**44)** Yetişkin H. (2005) Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

**45)** Yıldırım A. Nigar (2009) Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayılarla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

**46)** Yıldız B., Yagubov G.Ya. (1997) On an optimal control problem// Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.38, pp. 275-287.

## ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Samsun Çarşamba ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Samsun Çarşamba ilçesinde tamamladı. 2010 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladıktan sonra 2014 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Kafkas Üniversitesinde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2015-2016 eğitim öğretim yılında Romanya'nın Constanta Üniversitesinde Ersmus Programında eğitimine devem etti. 2016-2017 eğitim-öğretim yılında yüksek lisans öğrenimine Kafkas Üniversitesinde devam etti. 2017 Mayıs ayında yüksek lisans tezini tamamladı.