T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yasemin ÖZEROĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2017
KARS

T. C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yasemin ÖZEROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

OCAK-2017

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yasemin ÖZEROĞLU' nun Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY 'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Bir Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

30/01/2017

Adı ve Soyadı		imza
Başkan :	Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Gökçe Dilek Küçük	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	N. Yıldırım

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2017 gün ve ..../ ....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada lineer olmayan Schrödinger denklemi için Dirichlet ve Neumann problemlerinin çözümü ele alınmıştır.

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, çalışmamın her alanında bana değerli vaktini ayırıp beni yönlendiren, sabır ve anlayışını esirgemeyen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama ve engin bilgi ve birikiminden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Ana Bilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan, maddi ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen değerli eşime sonsuz teşekkür ederim.

Kars- 2017 Yasemin ÖZEROĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN BİR SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yasemin ÖZEROĞLU

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

Bu tezde, lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümü Galerkin Metodu ile ele alınır. 1. bölümde lineer olmayan Schrödinger denklemi hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, 2. bölümde tezde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilir. 3. bölümde lineer olmayan Schrödinger denklemi için Dirichlet ve Neumann problemleri ifade edilir. 4. bölüm iki alt bölüme ayrılır. 4. 1 bölümünde lineer olmayan Schrödinger denklemi için Dirichlet probleminin çözümünün varlığı ve tekliği Galerkin Metodu kullanılarak ispatlanır. 4. 2 bölümünde lineer olmayan Schrödinger denklemi için Neumann problemi Galerkin Metodu kullanılarak çözümünün varlığı ve tekliği gösterilir. Beşinci bölümde ise tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanır.

2017, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi, Galerkin Metodu, Dirichlet Problemi, Neumann Problemi

ABSTRACT

Master Thesis

SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Yasemin ÖZEROĞLU

Kafkas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

In this thesis, the solution of the nonlinear Schrödinger equation is discussed with the Galerkin method. In the section 1, after giving a general introduction about the nonlinear Schrödinger equation, in the section 2, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the section 3, Dirichlet and Neumann problems for nonlinear Schrödinger equation are expressed. Section 4 is divided into two sub-divisions. In the section 4. 1, by applying Galerkin Method to the Dirichlet problem for nonlinear Schrödinger equation, the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. In the section 4. 2, by applying Galerkin Method to the Neumann problem for nonlinear Schrödinger equation, the existence and uniqueness of the solution of the problem are shown. Also, in section 5, the difference of this thesis from the previous works has been emphasized.

2017, 50 Pages

Keywords: Nonlinear Schrödinger Equation, Galerkin Method, Dirichlet Problem, Neumann Problem

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$t \in [0,T]$	Bağımsız değişken
$x \in (0,l)$	Bağımsız değişken
X^*	Dual Uzay
$\langle .,. \rangle$	İç Çarpım İşareti
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\lvert ... \rvert$	Mutlak Değer
$\mathbb{R}^N$	N Boyutlu Öklit Uzayı
Ω	N Boyutlu Öklit Uzayında Bir Bölge
$\lVert ... \rVert$	Norm
$i^2 = -1$	Sanal Birim
$D^\alpha u$	u Fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden zayıf manada türevi
$\Omega_t = (0,l) \times (0,t)$	Verilen Bölge

1. GİRİŞ

Lineer olmayan Schrödinger denklemi pek çok fiziksel lineer olmayan sistemleri tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem lineer olmayan optik, hidrodinamik ve nükleer fizik gibi pek çok alanda karşımıza çıkar. Kuadratik dispersiyonlu bir ortamda $\psi(x,t)$ fonksiyonunun yavaş değişimlerini tanımlayan genel denklem

$$\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}+r_2(x,t,\psi)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r_1(x,t,\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}+r_0(x,t,\psi)\psi=0 \quad (1)$$

biçimindedir. Burada $\varepsilon=\text{sabit}, j=0,1,2$ için $r_j(x,t,\psi)$ katsayıları ortamın varyasyonunu (değişimini) tanımlar. r_j fonksiyonlarının $\psi(x,t)$ ye bağlı olması ortamın lineer olmadığını gösterir [1]. (1) denkleminin özel bir durumu olarak

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0(x,t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+v_0(x,t)\psi+a_1|\psi|^2\psi=0 \quad (2)$$

lineer olmayan Schrödinger denklemini yazabiliriz. Burada $\psi(x,t)$ bir dalga fonksiyonu, a_1 ise bir reel veya kompleks sayıdır. (2) biçiminde lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri daha önceden [2-12] çalışmalarında incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0(x,t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}+v_0(x,t)\psi+a_2|\psi|^2\psi=f(x,t)$$

biçiminde lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerini göz önüne alırız. Bu denklem lineer olmayan optikte kuadratik dispersiyonlu kübik non-lineerliğe sahip bir ortamda saçılma problemlerinde ortaya çıkar [13]. Bu denklemin lineer biçimine karşılık gelen Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri [14-15] çalışmalarında incelenmiştir.

Tezin ilerleyen kısımlarında ilk olarak, 2. bölüm olan kuramsal temeller bölümünde L_p uzayları, Sobolev uzayları, bazı önemli eşitsizlikler, teoremler ve lemmaların tanımları verilmiştir.

3. bölüm olan materyal ve yöntem bölümünde problemin çözümünde kullanılan Galerkin metodu açıklanmış ve sırasıyla Dirichlet ve Neumann problemleri ifade edilmiştir.

4. bölüm olan araştırma bulguları bölümü iki alt bölüme ayrılmıştır. 4. 1. alt bölümünde lineer olmayan Schrödinger denklemi için Dirichlet problemine Galerkin metodu uygulanarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. 4. 2. alt bölümünde ise lineer olmayan Schrödinger denklemi için Neumann probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

5. bölüm olan sonuç bölümünde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2. 1. $L_p(\Omega)$ Lebesgue Uzayları ve Özellikleri

Tanım 2. 1. 1. Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge

$$S(\Omega)=\{u\in\Omega : u,\ \Omega \text{ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi}\}$$

ve $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$\int_{\Omega}|u(x)|^p\,dx<\infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L_p(\Omega)$ uzayı adı verilir. Bu $L_p(\Omega)$ uzayı

$$L_p(\Omega)=\left\{u\in S(\Omega) : \int_{\Omega}|u(x)|^p<\infty,\ 1\le p<\infty\right\}$$

biçiminde gösterilir.

Eğer $u\in L_p(\Omega)$ ve $c\in\mathbb{C}$ ise $cu\in L_p(\Omega)$ olur. Ayrıca $u,v\in L_p(\Omega)$ için

$$|u(x)+v(x)|^p\le\left(|u(x)|+|v(x)|\right)^p\le 2^p\left(|u(x)|^p+|v(x)|^p\right)$$

olduğundan $u+v\in L_p(\Omega)$ yazılabilir. Bu durumda, $L_p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olur. $L_p(\Omega)$ uzayı üzerinde

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty$$

biçiminde bir norm tanımlandığında $L_p(\Omega)$ uzayı bu norm altında bir Banach uzayıdır. $L_p(\Omega)$ uzayında $1\le p<\infty$, $p=2$ olarak alındığında $L_2(\Omega)$ uzayı oluşur. Bu uzay da norm

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

dır ve

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

iç çarpımıyla $L_2(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2. 1. 2. "Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \le K$ olacak şekilde bir $K \ge 0$ sabit sayısı varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan $K \ge 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas supremumu denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $L_\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

$L_\infty(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\left\{K \ge 0 : \text{hemen hemen } x\in\Omega \text{ için } |u(x)| \le K\right\}$$

olarak tanımlanır ve bu normla $L_\infty(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır" [16].

Tanım 2. 1. 3. $L_2([0,T],B)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2\, dt\right)^{1/2} < +\infty$$

biçiminde tanımlanmaktadır" [17].

Tanım 2. 1. 4. (Kompakt Uzay): H bir Hilbert uzayı ve $X \subset H$ olsun. Eğer X deki her $\{f_n\}$ dizisinin X deki bir elemana yakınsayan $\{f_{n_k}\}$ bir alt dizisi varsa X kümesine kompakttır denir.

Tanım 2. 1. 5. "$(X, \| \ \|)$ normlu uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X de kompakt bir küme adı verilir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X de kompakt bir küme ise E ye X de bir ön-kompakt küme denir" [16].

Tanım 2. 1. 6. X ve Y normlu uzaylar ve $f : X \to Y$ bir operatör olsun. X de sınırlı olan her E alt kümesi için $f(E)$, Y de ön-kompakt ise f ye kompakt operatör denir. Yani, bütün sınırlı $E \subset X$ için $\overline{f(E)}$, Y de kompakttır.

Tanım 2. 1. 7. "X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer,

i. X, Y nin bir alt vektör uzayı ve
ii. Her $x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I : X \to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse,

X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir. Yani, $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir" [17].

Teorem 2. 1. 8. $|\Omega| = \int\limits_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L_q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L_p(\Omega)$ olur ve

$$|u|_p \leq |\Omega|_q^{(1/p)-(1/q)} |u|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır [16].

Tanım 2. 1. 9. “ X , bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E ye X de yoğundur denir” [17].

Tanım 2. 1. 10. Bir X normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa X normlu uzayına ayrılabilir uzay denir.

Teorem 2. 1. 11. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L_p\left(\Omega\right)$ uzayı ayrılabilirdir [16].

Tanım 2. 1. 12. Her bir $\varepsilon \in (0,2]$ için $x, y \in X$ olmak üzere;

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| > \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa X Banach uzayı düzgün konvekstir denir.

Tanım 2. 1. 13. (Dual Uzay): X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X,\mathbb{R})$ cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq\theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturur. Bu uzaya X in dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2. 1. 14. (İkinci Dual): “ X^*, X Banach uzayının duali olmak üzere $B\left(X^*,\mathbb{R}\right)$ uzayına X uzayının ikinci duali denir ve X^{**} ile gösterilir. X^{**} da bir Banach uzayıdır” [18].

Tanım 2. 1. 15. X normlu bir uzay olmak üzere $X^{**} = X$ ise X uzayına yansımalı (refleksif) uzay denir.

Teorem 2. 1. 16. (Milman, Pettis Teoremi): Düzgün konveks her uzay refleksif (yansımalı) tir [18].

Örnek: Her Hilbert uzayı paralelkenar kuralı gereği düzgün konvekstir. Gerçekten de X bir Hilbert uzayı olmak üzere her $x, y \in S(X)$ ve her $\varepsilon \in [0,2]$ için paralelkenar kuralı uygulandığında

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

olduğu görülür.

Teorem 2. 1. 17. "Eğer $1 < p < \infty$ ise $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır"[16].

Tanım 2. 1. 18. $C^k([0,T], B)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış $k.$ mertebeden sürekli türevlere sahip ve değerleri $B-$ Banach uzayına ait fonksiyonlarının uzayıdır. Burada norm

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{0 \le t \le T} \left\| \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right\| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2. 2. $W_p^m(\Omega)$ Sobolev Uzayları ve Özellikleri

Tanım 2. 2. 1. “Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlarının uzayına $L_p^{loc}(\Omega)$ uzayı adı verilir. Bu uzay $p=1$ için $L_1^{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir” [16].

Tanım 2. 2. 2. u fonksiyonu D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve D de u nun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesi K olsun. Bu K kümesinin kapanışı olan $\bar{K}$ kümesine u nun supportu denir. Eğer $\bar{K}$ kümesi kompakt ise u ya D üzerinde kompakt supporta sahiptir denir.

Tanım 2. 2. 3. D, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge olsun. D üzerinde her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir, kompakt supporta sahip $\phi : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu test fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların uzayı $C_0^\infty(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2. 2. 4. α bir çoklu-indis olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge olmak üzere $L_1^{loc}(\Omega)$ kümesinde tanımlı u ve v fonksiyonları için

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \eta(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x)\eta(x)\,dx, \;\; \eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

oluyorsa $D^\alpha u(x)$ fonksiyonu, u fonksiyonunun α. mertebeden zayıf manada türevidir denir ve sembolik olarak $v = D^\alpha u$ şeklinde gösterilir. Eğer u fonksiyonu $D^\alpha u$ şeklindeki sürekli türevine sahip olacak kadar düzgün ise

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \eta(x)\,dx = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u(x)\eta(x)\,dx, \;\; \eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ negatif olmayan $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$ şeklinde bir çoklu indisdir.

Tanım 2. 2. 5. $m\in N$ ve α bir çoklu-indis olsun. $|\alpha|\le k$ ve $u_m \in C^k(\Omega)$ olmak üzere L_1^{loc} uzayında

$$u_m \to u \text{ iken } D^\alpha u_m \to v$$

olacak şekilde $u,v\in L_1^{loc}(\Omega)$ fonksiyonları tanımlı olsun. O zaman v fonksiyonu u fonksiyonunun zayıf manada türevidir denir.

Tanım 2. 2. 6. "$u\in L_1^{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. Eğer, her $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v\in L_p^{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun $\alpha.$ zayıf türevi denir. Bu durumda v fonksiyonuna, u fonksiyonunun genelleşmiş türevi denir ve $v\in D^\alpha u$ şeklinde yazılır" [16].

Tanım 2. 2. 7. Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tam sayı ve $1\le p\le\infty$ olmak üzere

$$W_p^m(\Omega)=\{u\in L_p(\Omega): D^\alpha u\in L_p(\Omega),\ 0\le|\alpha|\le m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Bu uzayda norm;
$1\le p<\infty$ için

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)}=\left(\sum_{0\le|\alpha|\le m}|D^\alpha u|_p^p\right)^{1/p};\ 1\le p<\infty$$

ve $p=\infty$ için

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)}=\max_{0\le|\alpha|\le m}|D^\alpha u|;\ p=\infty$$

şeklinde tanımlanır. $W_p^m(\Omega)$ uzayı yukarıdaki normlarla bir Banach uzayıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W_p^m(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ uzayı olur.

Uzayların tanımlarının bir sonucu olarak, $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ yazılabilir. Ayrıca, $1 \le p < \infty$ iken $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan dolayı $\overset{0}{W}{}_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, bu uzaylar arasında negatif olmayan herhangi m tam sayısı için

$$\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega) \to W_p^m(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

sürekli gömülmeleri vardır.

Teorem 2. 2. 8. (Sobolev Eşitsizliği) “Ω, $\mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \le p < \infty,\ mp < N$ ve $u \in \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ ise bu durumda $p^* = \dfrac{Np}{N - mp}$ olmak üzere

$$|u|_{p^*} \le C \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C(n, m, p)$ sabiti vardır” [16].

Tanım 2. 2. 9. Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve j negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde, $|\alpha| \le j$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $C^j(\Omega)$ vektör uzayıdır.

$$C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$$

ve

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(\Omega)$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2. 2. 10. Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir bölge ve j negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. Ω bölgesinde $D^\alpha u$ kısmi türevlerin sınırlı olduğu $u \in C^j(\Omega)$ fonksiyonlarının belirtiği uzaya $C_B^j(\Omega)$ vektör uzayı adı verilir. $C_B^j(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le j} \sup_{x\in\Omega} \left|D^\alpha u(x)\right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 2. 2. 11. (Sobolev Gömülme Teoremi) Ω, $\mathbb{R}^N$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \ge 1$ ve $j \ge 0$ şeklinde tam sayılar ve $1 \le p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler yazılabilir. Eğer;

i) $mp < N$ ise

$$W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega), \; p \le q \le q^* = \frac{Np}{N-mp}$$

ya da özel olarak

$$W_p^{j+m}(\Omega) \to L_q(\Omega), \; p \le q \le q^* = \frac{Np}{N-mp}$$

elde edilir.

ii) $mp = N$ ise

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega), \; p \le q < \infty$$

olur. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W_1^{j+m}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp > N$ ise

$$W_p^{j+m}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$$

yazılabilir [16].

2. 3. Yakınsamalar

Tanım 2. 3. 1. (Yakınsak Dizi): $\left(X,\|\ \|\right)$ bir normlu uzay ve $x=\left(x_n\right)$, X de bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve her $n>N\left(\varepsilon\right)$ için $\|x_n-x\|<\varepsilon$ olacak şekilde $N\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ varsa $\left(x_n\right)$ dizisine $x\in X$ e yakınsıyor denir.

Tanım 2. 3. 2. (Zayıf Yakınsama): "$\left\{x_n\right\}$**,** H hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y\in H$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n,y\right)_H=\left(x,y\right)_H$ oluyorsa $\left\{x_n\right\}$ dizisi $x\in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir ve $x_n \xrightarrow{\text{zayıf}} y$ ile gösterilir" [17].

Tanım 2. 3. 3. (Kuvvetli Yakınsama): " X bir normlu lineer uzay ve $\left(x_n\right)\in X$ olmak üzere Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa $\left(x_n\right)$, kuvvetli yakınsama olarak adlandırılır" [18].

Tanım 2. 3. 4. (Noktasal Yakınsama): $\left\{f_n\right\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her bir $x\in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$ oluyorsa, $\left\{f_n\right\}$ dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Yani, verilen $x\in X$ ve $\varepsilon>0$ için $n\geq N$ olduğunda $\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N\left(x,\varepsilon\right)>0$ sayısı vardır.

Tanım 2. 3. 5. (Düzgün Yakınsama): Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\left\{f_n\right\}$ fonksiyonlar dizisi verilsin ve $f:E\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ sağlanıyorsa $\left\{f_n\right\}$ dizisi E üzerinde f

fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir ve $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ şeklinde gösterilir. Burada $\| f \| = \sup_{x \in E} \left| f(x) \right|$ şeklinde tanımlı supremum normdur.

Tanım 2. 3. 6. "F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $\left| t_1 - t_2 \right| \le \delta(\varepsilon)$ olduğunda $\left| f(t_1) - f(t_2) \right| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eşsürekli) dir denir" [17].

Tanım 2. 3. 7. "F**,** bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $\left| f(t) \right| \le M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F ye I üzerinde sınırlıdır denir" [17].

Teorem 2. 3. 8. (Arzela-Ascoli): Sınırlı bir I aralığı üzerinde $F, f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer F sonsuz, sınırlı ve aynı dereceden sürekli ise F, I üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir [19].

2. 4. Eşitsizlikler

2. 4. 1. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği:

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < \infty,\ f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_q(\Omega)$ olsun. $f.g \in L^1(\Omega)$ dır ve

$$\left| \int_{\Omega} \left| f(x) g(x) \right| dx \right| \le \int_{\Omega} \left| f(x) g(x) \right| dx \le \left(\int_{\Omega} \left| f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \left| g(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

biçiminde Hölder eşitsizliği vardır. Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa

$$\int_{\Omega}|f.g|\,dx \le \left(\int_{\Omega}|f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|g|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2. 4. 2. $D \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Herhangi $u(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D)$ fonksiyonu ve $m \ge 1,\ r \ge 1$ sayıları için $\alpha = \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{r}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_q(D)} \le \beta \|u_x\|_{L_m(D)}^{\alpha} \|u\|_{L_p(D)}^{1-\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

1. $m \ge n = 1$ için $q \in [r,\infty]$ ve $\beta = \left(1+\frac{(m-1)r}{m}\right)^{\alpha}$ dır.

2. $n > 1$ ve $m < n$ için $\beta = \left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$ ve eğer, $r \le \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[r, \frac{nm}{n-m}\right]$ ve $r \ge \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[\frac{nm}{n-m}, r\right]$ dir.

3. $m > n > 1$ için $q \in \left[r,\infty\right)$ ve $\beta = \max\left\{\frac{q(n-1)}{n}, 1+(m-1)mr\right\}^{\alpha}$ dır [20].

Lemma 2. 4. 3. (Gronwall Eşitsizliği): "Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K \exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir" [19].

2. 4. 4. Young Eşitsizliği: “Keyfi a,b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir” [20].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde lineer olmayan Schrödinger denklemi için sırasıyla Dirichlet ve Neumann problemleri oluşturulur. Bir sonraki bölümde, oluşturulan bu başangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği Galerkin metodu kullanılarak elde edilir.

Galerkin metodunun temeli, baz fonksiyonlarının bir kümesi tarafından gerilen bir sonlu boyutlu uzayda yaklaşık bir çözüm bulmaya dayanır. Yaklaşık çözümü elde etmek için kısmi diferansiyel denklemin bir sonlu boyutlu alt uzayına izdüşümünü oluştururuz. Bu da bize yaklaşık çözümler için bir adi diferansiyel denklemler sistemi verir ki bu sistem standart adi diferansiyel denklemler teorisi ile bir çözüme sahiptir. Böylece yaklaşık çözümler için bazı değerlendirmeler elde edilir. Elde edilen bu değerlendirmeler de kısmi diferansiyel denklemin bir çözümünü elde etmeye olanak sağlar.

3. 1. Schrödinger Denklemi İçin Dirichlet Problemi

Bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denklemi için Dirichlet problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(t)\psi+ia_2|\psi|^2\psi=f(x,t) \tag{3}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l) \tag{4}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\ t\in(0,T). \tag{5}$$

Burada ψ bir dalga fonksiyonu, $l>0,\ T>0$ verilen sayılar, $0<x<l,\ 0\le t\le T,\ \Omega_t=(0,l)\times(0,t),\ \Omega=\Omega_T,\ i^2=-1$ sanal birim, $a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0$ verilen reel sayılar, $a(x)$

$$\textit{hemen hemen } x\in(0,l)\ \textit{için}\ 0\le a(x)\le\mu_0,\ \mu_0=sabit>0 \tag{6}$$

şartını sağlayan ölçülebilir reel değerli sınırlı bir fonksiyon, $v(t)$

$$\textit{hemen hemen } t\in(0,T)\ \textit{için}\ |v(t)|\le b_0,\ \left|\frac{dv(t)}{dt}\right|\le b_1,\ \ b_0,b_1=sabit>0 \tag{7}$$

şartını sağlayan ölçülebilir reel değerli sınırlı bir fonksiyondur. $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise verilen ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonlar olup

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{8}$$

dır.

Burada verilen $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ ve $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayları Sobolev uzayları olup kuramsal temeller bölümünde tanımlanmıştır.

Şimdi, (3)-(5) başlangıç sınır değer probleminin çözümünü tanımlayalım. (3)-(5) probleminin çözümü olarak $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1([0,T],L_2(0,l))$ uzayından olan bir $\psi(x,t)$ fonksiyonu göz önüne alınır. Öyle ki bu ψ fonksiyonu (3) denklemini hemen hemen $x\in(0,l)$ ve herhangi $t\in(0,T)$ için, (4) başlangıç şartını hemen hemen $x\in(0,l)$ için ve (5) sınır şartlarını hemen hemen $t\in(0,T)$ için sağlar.

3.2. Schrödinger Denklemi İçin Neumann Problemi

Bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denklemi için Neumann problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v(t)\psi+ia_2|\psi|^2\psi = f(x,t) \tag{9}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T). \tag{11}$$

Burada ψ bir dalga fonksiyonu, $l>0,\ T>0$ verilen sayılar, $0<x<l,\ 0\le t\le T,\ \Omega_t=(0,l)\times(0,t),\ \Omega=\Omega_T,\ i^2=-1$ sanal birim $a_0>0,\ a_2>0$ verilen reel sayılar, $a(x)$

$$\textit{hemen hemen } x\in(0,l) \textit{ için } \mu_0\le a(x)\le\mu_1,\quad \mu_0,\mu_1=sabit>0 \tag{12}$$

şartını sağlayan ölçülebilir reel değerli sınırlı bir fonksiyon, $a_1(x)$

$$a_1(0) = a_1(l) = 0 \text{ } ve \text{ } hemen \text{ } hemen \text{ } x \in (0,l) \text{ } için \text{ } \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right| \le \mu_2, \quad \mu_2 = sabit > 0 \tag{13}$$

şartını sağlayan ölçülebilir bir fonksiyon, $v(t)$

$$hemen \text{ } hemen \text{ } t \in (0,T) \text{ } için \text{ } v(t) : |v(t)| \le b_0, \quad \left|\frac{dv(t)}{dt}\right| \le b_1, \quad b_0, b_1 = sabit > 0 \tag{14}$$

şartını sağlayan ölçülebilir reel değerli sınırlı bir fonksiyondur. $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise verilen ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonlar olup

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0, \; f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{15}$$

dır.

Şimdi (9)-(11) başlangıç sınır değer probleminin çözümünü tanımlayalım. (9)-(11) problemin çözümü olarak $C^0([0,T], \mathrm{W}_2^2(0,l)) \cap C^1([0,T], L_2(0,l))$ uzayından olan bir $\psi(x,t)$ fonksiyonu göz önüne alınır. Öyle ki bu ψ fonksiyonu (9) denklemini hemen hemen $x \in (0,l)$ ve herhangi $t \in (0,T)$ için, (10) başlangıç şartını hemen hemen $x \in (0,l)$ için ve (11) sınır şartlarını hemen hemen $t \in (0,T)$ için sağlar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak, Galerkin metodu kullanılarak (3)-(5) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilir. Başlangıç sınır değer probleminin çözümü için bir değerlendirme elde edilir. Sonra (9)-(11) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ifade eden teorem verilerek çözüm için bir değerlendirme elde edilir.

4.1. Drichlet Probleminin Çözümü

(3)-(5) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 4. 1. 1. $a(x), v(t), \varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (6), (7) ve (8) şartlarını sağlasın. Bu durumda (3)-(5) sınır değer problemi $B_0 \equiv C^0\left(\left[0,T\right], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left(\left[0,T\right], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan bir tek ψ çözümüne sahiptir ve bu çözüm için herhangi $t \in [0,T]$ için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\left\|\psi(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right.$$
$$\left. + \left\|\varphi\right\|^{18}_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|f\right\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \tag{16}$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti φ, f ve t den bağımsızdır.

İspat: İspat için Galerkin metodunu kullanacağız. $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$Lu_k(x) = -a_0 \frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) = \lambda_k u_k(x),\ x \in (0,l)$$
$$k = 1, 2...\ \text{için}\ u_k(0) = u_k(l) = 0$$

özdeğer probleminin λ_k öz değerlerine karşılık gelen $k=1,2,...$ için $u_k = u_k(x)$ öz fonksiyonlarını alalım.

Bilindiği gibi $k=1,2,...$ için λ_k öz değerleri reeldir ve negatif değildir [21]. Ayrıca λ_k öz değerlerine karşılık gelen $u_k = u_k(x)$ özfonksiyonları reeldir ve $L_2(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında ortogonaldır. Farz edelim ki $k=1,2,...$ için $u_k = u_k(x)$ öz fonksiyonları $L_2(0,l)$ uzayında ortonormal bir taban olsun ve $k=1,2,...$ için

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \le d_k \tag{17}$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $k=1,2,...$ ve $d_k > 0$ sabitlerdir.

Galerkin metoduna göre (3)-(5) denkleminin yaklaşık çözümleri

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x)$$

biçiminde aranır. Buradaki $C_k^N(t)$ katsayıları $C_k^N(t) = \left\langle \psi^N(.,t), u_k \right\rangle_{L_2(0,l)} = \left\langle \psi^N, u_k \right\rangle$ biçiminde olup

$$\begin{aligned} \left\langle i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k \right\rangle &= \left\langle a_0 \frac{\partial \psi^N}{\partial x}, \frac{du_k}{dx} \right\rangle - i\left\langle a_1 \frac{\partial \psi^N}{\partial x}, u_k \right\rangle + \left\langle a(x)\psi^N, u_k \right\rangle \\ &- \left\langle v(t)\psi^N, u_k \right\rangle - i\left\langle a_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k \right\rangle + \left\langle f, u_k \right\rangle,\ k=1,2,...,N \end{aligned} \tag{18}$$

$$C_k^N(0) = \left\langle \psi^N(.,0), u_k \right\rangle_{L_2(0,l)} = \left\langle \varphi, u_k \right\rangle = \varphi_k,\ k=1,2,...N \tag{19}$$

adi diferansiyel denklem sistemi için Cauchy probleminin çözümleridir. Burada $\varphi_k \to \varphi$ fonksiyonları $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında φ ye güçlü yakınsar. (18)-(19) problemi $k=1,2,...$ için bilinmeyen $C_k^N(t)$ katsayılarına göre birinci mertebeden sabit katsayılı lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem sistemi için bir Cauchy problemidir. [22] den kolaylıkla söyleyebiliriz ki (18)-(19) problemi $[0,T]$ aralığı üzerinde en az bir lokal çözüme sahiptir. (18)-(19) probleminin $[0,T]$ aralığında global çözümünün varlığı için

(18)-(19) probleminin mümkün bütün çözümlerinin $[0,T]$ aralığı üzerinde düzgün sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 4. 1. 2. (18)-(19) Cauchy probleminin çözümü herhangi $t \in [0,T]$ ve $N = 1,2,...$ için

$$\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2 + \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}$$
$$\le c_1\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|\varphi\|^{18}_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|f\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{20}$$

değerlendirmesini sağlar. Burada $c_1 > 0$ sabiti N ve t den bağımsızdır.

İspat. (18) sisteminde ki k. denklemi $\bar{C}_k^N(t)$ ile çarpalım ve elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım ve sonra Ω_t üzerinden integralini alalım. Böylece

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + ia_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v(t)\left|\psi^N\right|^2 + ia_2\left|\psi^N\right|^4\right]dxd\tau$$
$$= \int_{\Omega_t} f\bar{\psi}^N dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin kompleks eşleniğini ondan çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N + \frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau + ia_1\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N + \frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right)dxd\tau$$
$$+2ia_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau = 2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau$$

olup böylece

$$\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\right) + a_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N\right|^2\right) + 2a_2\left|\psi^N\right|^4\right]dxd\tau = 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx - \int_0^l\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx + a_1\int_0^t\left(\left|\psi^N(l,t)\right|^2 - \left|\psi^N(0,t)\right|^2\right)d\tau$$
$$+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dxd\tau = 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte

$$\psi^N(0,t)=\sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(0)=0, \quad \psi^N(l,t)=\sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(l)=0$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2+2\int_{\Omega_t}|f|\left|\psi^N\right|dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Young eşitsizliğinden [20]

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\int_{\Omega_t}|f|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği elde ederiz. Burada

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2=\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(0)\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k^N(0)\right|^2=\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 \tag{21}$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2+\|f\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^t\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau \tag{22}$$

yazılır. (22) de $a_2>0$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2+\|f\|_{L_2(\Omega)}^2+\int_0^t\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau$$

olup burada Gronwall lemmasını [19] kullanırsak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_2\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}^2+\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2\right) \tag{23}$$

elde edilir. (22) in sağ tarafındaki sonuncu terime (23) eşitsizliğini uygularsak herhangi $t\in[0,T]$ için

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dxd\tau \le c_3\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}^2+\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2\right) \tag{24}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_2>0$ ve $c_3>0$ sabitleri N ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}$ türevini değerlendirelim. Bunun için önce, (18) sisteminin t değişkenine göre türevini alalım ve (18) sistemini $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpalım. Sonra, elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım ve Ω_t üzerinden integralleyelim. Böylece

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial^3\psi^N}{\partial t\partial x^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_1\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(v(t)\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau \tag{25}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial^3\psi^N}{\partial t\partial x^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau=a_0\int_0^t\left[\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\Bigg|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}dx\right]d\tau=-a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\right|^2dxd\tau$$

olup bunu (25) de yerine yazarsak

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a_0\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\right|^2+ia_1\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\frac{dv}{dt}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right.$$
$$\left.+v(t)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+ia_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin kompleks eşleniğini kendisinden çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\left[\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)+ia_1\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{dv}{dt}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-\overline{\psi}^N\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)+ia_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)\right]dxd\tau \tag{26}$$
$$=2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

eşitliği yazılır. Burada

$$\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)+\frac{\partial}{\partial t}\psi^N\left|\psi^N\right|^2\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)+\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi}^N\left|\psi^N\right|^2\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}$$

$$+\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)\overline{\psi}^N\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\left|\psi^N\right|^2$$

$$=\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\left|\psi^N\right|^2+\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2+\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left(\overline{\psi}^N\right)^2\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)^2$$

$$+\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\left|\psi^N\right|^2$$

$$=4\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2+\left(\overline{\psi}^N\right)^2\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)^2$$

$$=4\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+2\operatorname{Re}\left(\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right)$$

eşitliklerini dikkate alırsak (26) dan

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t} i\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t} i\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}\frac{dv}{dt}\operatorname{Im}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau\\&+4a_2 i\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+2a_2 i\int_{\Omega_t}\operatorname{Re}\left(\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right)dxd\tau\\&=2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau\end{aligned}\tag{27}$$

eşitliği yazılır. Burada $k=1,2,...$ için $u_k(0)=u_k(l)=0$ olduğundan

$$\frac{\partial\psi^N(0,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{dC_k^N(t)}{dt}u_k(0)=0,\quad \frac{\partial\psi^N(l,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{dC_k^N(t)}{dt}u_k(l)=0$$

şartlarını (27) de kullanırsak

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}-\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega_t}\left[\frac{dv}{dt}2\operatorname{Im}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)+4a_2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right.\\&\left.+2a_2\operatorname{Re}\left(\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right)\right]dxd\tau=2\operatorname{Im}\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+4a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau=\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}-2\int_{\Omega_t}\frac{dv}{dt}\operatorname{Im}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

$$-2a_2\int_{\Omega_t}\operatorname{Re}\left(\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right)dxd\tau+2\operatorname{Im}\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau$$

$$\leq\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\int_{\Omega_t}\left|\frac{dv}{dt}\right|\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau$$

$$+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau$$

eşitsizliği yazılır. Burada (7) şartını ve Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+4|a_2|\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau\leq\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+b_1\int_0^t\int_0^l\left|\psi^N\right|^2dxd\tau$$

$$b_1\int_0^t\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+2|a_2|\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau$$

olup buradan da

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2|a_2|\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau\leq$$

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+b_1\int_0^t\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+(1+b_1)\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte (23) değerlendirmesini kullanarak

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau\leq\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\\&+(1+b_1)\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+c_4\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}\right)\end{aligned}\qquad(28)$$

elde edilir. Burada $c_4>0$ sabittir.

Şimdi (28) de ki $\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}$ terimini değerlendirelim. Bunun için (18) sistemini herhangi $t\in[0,T]$ ve $k=1,2,...,N$ için aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left\langle i\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right\rangle=\left\langle L\psi^N(.,t),\mathrm{u}_k\right\rangle-i\left\langle a_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x},u_k\right\rangle-\left\langle v(t)\psi^N,u_k\right\rangle$$
$$-i\left\langle a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N,u_k\right\rangle+\left\langle f,u_k\right\rangle. \tag{29}$$

Burada

$$L\psi^N=-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}+a(x)\psi^N$$

olarak tanımlanır. (29) sisteminde $t=0$ alarak k. denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarpalım ve elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım. Böylece

$$i\int_0^l\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx-\int_0^l\left(-a_0\frac{\partial^2\psi^N(x,0)}{\partial x^2}+a(x)\psi^N(x,0)\right)\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}dx$$
$$+ia_1\int_0^l\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx+\int_0^l v(0)\psi^N(x,0)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx$$
$$+ia_2\int_0^l\left|\psi^N(x,0)\right|^2\psi^N(x,0)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx=\int_0^l f(x,0)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx$$

olup buradan

$$\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2dx=\int_0^l\Big[L\psi^N(x,0)-ia_1\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}-v(0)\psi^N(x,0)$$
$$-ia_2\left|\psi^N(x,0)\right|^2\psi^N(x,0)+f(x,0)\Big]\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx$$

eşitliğini elde ederiz. Burada sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliklerini uygularsak

$$\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2dx\le\left\|L\psi^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}$$
$$+|a_1|\left\|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}$$
$$+|v(0)|\left\|\psi^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}$$
$$+|a_2|\left\|\psi^N(x,0)\right\|_{L_6(0,l)}^3\left\|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}$$

$$+\left\| f(x,0) \right\|_{L_2(0,l)} \left\| \frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \frac{1}{2}\left[\left\| L\psi^N(x,0) \right\|_{L_2(0,l)} + |a_1| \left\| \frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)} + |v(0)| \left\| \psi^N(x,0) \right\|_{L_2(0,l)} \right.$$

$$\left. + |a_2| \left\| \psi^N(x,0) \right\|^3_{L_2(0,l)} + \left\| f(x,0) \right\|_{L_2(0,l)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)}$$

olup

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5 \left\| L\psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + 5|a_1|^2 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)}$$

$$+5|v(0)|^2 \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + 5|a_2|^2 \left\| \psi^N(.,0) \right\|^6_{L_6(0,l)} + 5\left\| f(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} \tag{30}$$

yazılır. Herhangi $t \in [0,T]$ için

$$|v(t)|^2 \le c_5 \left(\|v\|^2_{L_2(0,T)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,T)} \right) = c_5 \|v\|^2_{W_2^1(0,T)}$$

olduğundan $|v(t)| \le b_0$, $\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right| \le b_1$ şartlarını kullanarak

$$|v(0)|^2 \le c_5 \left(\int_0^T |v(t)|^2 \, d\tau + \int_0^T \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 d\tau \right) \le c_5 \left[b_0^2 \int_0^T d\tau + b_1^2 \int_0^T d\tau \right] = c_5 \left[b_0^2 T + b_1^2 T \right]$$

eşitsizliğinden

$$|v(0)|^2 \le c_5 T \left(b_0^2 + b_1^2 \right) \tag{31}$$

yazılır. Burada $c_5 > 0$ sabiti t den bağımsızdır. [20] çalışmasından bilinen eşitsizliğe göre herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_6(0,l)} \le \beta_1 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^{\frac{1}{3}}_{L_2(0,l)} \left\| \psi^N(.,t) \right\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(0,l)} \tag{32}$$

elde ederiz. $t = 0$ için (32) den

$$\left\| \psi^N(.,0) \right\|_{L_6(0,l)} \le \beta_1 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x} \right\|^{\frac{1}{3}}_{L_2(0,l)} \left\| \psi^N(.,0) \right\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(0,l)}$$

yazılır. Böylece

$$
\begin{aligned}
\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_6(0,l)}^6 &\le \beta_1^6 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^4 \\
&\le \beta_1^6 \left(2\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 2\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \\
&\times \left(\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \right)^2 \\
&= 2\beta_1^6 \left(\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 \right) \left(\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 \right)^2 \\
&= 2\beta_1^6 \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 \\
&= 2\beta_1^6 \left(\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \right)^3
\end{aligned}
\tag{33}
$$

eşitsizliği yazılır. Burada β_1 sabiti bilinen bir sabittir. (33) de (21) eşitsizliğini ve (17) den

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le d_k^2 \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_6(0,l)}^6 \le c_6 \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 \tag{34}$$

eşitsizliği elde edilir.

$f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ olduğundan herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\left\| f(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_7 \left\| f\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \tag{35}$$

değerlendirmesi yazılır. Ayrıca

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_8 \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 \tag{36}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır.

$$\left\|L\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^N \left|\left\langle L\varphi, u_k\right\rangle u_k(x)\right|^2 \le \left\|L\varphi\right\|_{L_2(0,l)}^2$$

eşitsizliği geçerli olduğundan L operatörünün tanımını kullanırsak

$$\left\| L\psi^N(.,0) \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_9 \left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 \tag{37}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_k > 0,\ k = \overline{4,9}$ sabitlerdir.

Böylece (30) da (23), (31), (34), (35), (36) ve (37) eşitliklerini kullanarak

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{10} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \tag{38}$$

değerlendirmesini elde ederiz.

(28) de (38) değerlendirmesini dikkate alırsak

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} \left| \psi^N \right|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \le (1+b_1) \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau$$
$$+ c_{11} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\begin{gathered} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} \left| \psi^N \right|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \\ \le c_{12} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 + \left\| f \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) \end{gathered} \tag{39}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada $c_{10} > 0,\ c_{11} > 0,\ c_{12} > 0$ sabitlerdir.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial x}$ türevini değerlendirelim. Bunun için (18) sistemindeki $k.$ denklemi $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayarak Ω_t üzerinden integrallersek

$$\int_{\Omega_t}\left[i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a(x)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right.$$
$$\left.v(t)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}f\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau \tag{40}$$

eşitliğini elde ederiz.

Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki 2. terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau=a_0\left(\int_0^t\left[\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\psi^N(x,\tau}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}dx\left]d\tau\right) \tag{41}$$

olur.

$\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}u_k(x)$ eşitliğini dikkate alarak burada $u_k(l)=u_k(0)=0$ şartlarını kullanırsak

$$\frac{\partial\overline{\psi}^N(l,t)}{\partial t}=\frac{\partial\overline{\psi}^N(0,t)}{\partial t}=0$$

elde edilir. Bu şartları (41) de yerine yazarsak

$$\int_{\Omega_t}a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau=-a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği (40) da dikkate alarak elde edilen eşitliğin kompleks eşleniğini onunla toplarsak

$$-a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau-2a_1\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}a(x)\mathrm{Re}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$
$$+2\int_{\Omega_t}v(t)\mathrm{Re}\left(\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau-2a_2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(f\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$a_0\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x}\right|^2dx=a_0\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right|^2dx-2a_1\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

$$-2\int_{\Omega_t} a(x)\,\mathrm{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau + 2\int_{\Omega_t} v(t)\,\mathrm{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau$$
$$-2a_2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\left|\psi^N\right|^2 \psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau - 2\int_{\Omega_t} \mathrm{Re}\left(f \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\int_{\Omega_t} |f|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau$$
$$+2a_1\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau + 2\int_{\Omega_t}\left|a(x)\right|\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau$$
$$+2\int_{\Omega_t}\left|v(t)\right|\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau + 2a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\psi^N\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (6)-(7) şartlarını kullanırsak ve sonra elde edilen eşitsizliğe Young eşitsizliğini uygularsak

$$a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + a_1\int_0^t\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau$$
$$+\left(1+a_1+b_0+\mu_0\right)\int_0^t\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \left(b_0+\mu_0\right)\int_0^t\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau$$
$$+a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4 dx d\tau + a_2\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t}|f|^2 dx d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte (24), (35), (36) ve (39) değerlendirmelerini kullanırsak herhangi $t\in[0,T]$ için

$$a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_1\int_0^t\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{13}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{42}$$

yazılır. Böylece (42) de Gronwall lemmasını uygularsak herhangi $t\in[0,T]$ için

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{14}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{43}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada $c_{13}>0,\ c_{14}>0$ sabitlerdir.

Şimdi $\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$ türevini değerlendirelim. Bunun için $L\psi^N$ terimini değerlendirmek yeterlidir. (29) sistemindeki k. denklemi $\lambda_k \overline{C}_k^N(t)$ ile çarparsak ve sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplarsak herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\int_0^l \left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = \int_0^l \left[i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} + ia_1 \frac{\partial \psi^N}{\partial x} + v(t)\psi^N + ia_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N - f \right]\left(L\overline{\psi}^N(x,t)\right)dx$$

eşitliği elde edilir. Burada Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_0^l \left|L\psi^N\right|^2 dx \le \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left| i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} + ia_1 \frac{\partial \psi^N}{\partial x} + v(t)\psi^N + ia_2 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N - f \right|\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left|L\psi^N\right|^2 dx$$

$$\int_0^l \left|L\psi^N\right|^2 dx \le \int_0^l \left[\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| + |a_1|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right| + |v(t)|\left|\psi^N\right| + |a_2|\left|\psi^N\right|^3 - |f|\right]^2 dx$$

$$\le \int_0^l 5\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx + 5|a_1|^2 \int_0^l \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 dx + 5\int_0^l |v(t)|^2 \left|\psi^N\right|^2 dx$$

$$+5|a_2|^2 \int_0^l \left|\psi^N\right|^6 dx + 5\int_0^l |f|^2 dx$$

olup yukarıdaki eşitsizlikte (7) şartını kullanarak herhangi $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le{}& 5\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 5|a_1|^2 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \\ &+5b_0^2 \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 5|a_2|^2 \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 + 5\left\|f(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \end{aligned} \tag{44}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (44) de (32) eşitsizliğini, (23), (39) ve (43) değerlendirmelerini kullanırsak herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{15}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^6 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^{18} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^6 \right) \tag{45}$$

değerlendirmesi yazılır. (45) de L operatörü için formülü kullanırsak herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^2 \psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{16}\Big(& \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^6 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 \\ &+ \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^{18} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^6 \Big) \end{aligned} \tag{46}$$

değerlendirmesini elde ederiz. Burada $c_{15} > 0,\ c_{16} > 0$ bilinen sabitlerdir.

Böylece (23), (39), (43) ve (46) değerlendirmelerinden herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{17} \Big(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \\ + \left\|\varphi\right\|^{18}_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \left\| f \right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\| f \right\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)} \Big) \tag{47}$$

değerlendirmesinin geçerli olduğu bulunur ki burada $c_{17} > 0$ sabiti $\varphi,\ f$ ve N den bağımsızdır.

Eğer $k = 1,2,...,N$ için $C_k^N(t)$ katsayıları için olan formülü dikkate alırsak

$$\sum_{k=1}^{N} \left| C_k^N(t) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{dC_k^N(t)}{dt} \right|^2 \le \left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \tag{48}$$

eşitsizliğini yazarız. Böylece (47) ve (48) eşitsizliklerini bir arada değerlendirirsek

$$\sum_{k=1}^{N} \left| C_k^N(t) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{dC_k^N(t)}{dt} \right|^2 \le \left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)}$$

$$\le c_{18} \Big(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \left\|\varphi\right\|^{18}_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \left\| f \right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\| f \right\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)} \Big)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan da $c_1 = c_{18}$ olarak dikkate alınırsa (20) değerlendirmesinin geçerli olduğu elde edilir. Böylece lemma 4. 1. 2 ispatlanmış oldu.

Şimdi teorem 4. 1. 1 in ispatına devam edelim. Lemma 4. 1. 2 den (18)-(19) Cauchy probleminin $[0,T]$ aralığı üzerinde bir global çözüme sahip olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. $k, N = 1,2,...$ için

$$l_{N,k}(t) = \left\langle \psi^N(.,t), u_k \right\rangle_{L_2(0,l)}$$

fonksiyonlar ailesini göz önüne alalım. (20) değerlendirmesinden $k, N = 1,2,...$ için $l_{N,k}(t)$ ve $\dfrac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığı üzerinde düzgün sınırlı olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Yani

$$\max_{0\le t\le T}\left|l_{N,k}(t)\right|\le c_{19},\ \max_{0\le t\le T}\left|\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right|\le c_{19}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada c_{19} sabiti $N,\ k$ dan bağımsızdır.

Şimdi $l_{N,k}(t)$ ve $\dfrac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlarının belirli k ve $N\ge k;\ N,k=1,2,...$için $[0,T]$ aralığı üzerinde eşsürekli olduğunu gösterelim. Bunun için (18) sistemindeki k. denklemi $(t,t+\Delta t)$ aralığı üzerinde integrallersek

$$i\left(l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right)=a_0\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{du_k}{dx}dxd\tau-ia_1\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\frac{\partial\psi^N}{\partial x}u_kdxd\tau$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a(x)\psi^Nu_kdxd\tau-\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l v(t)\psi^Nu_kdxd\tau-ia_2\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\psi^N\right|^2\psi^Nu_kdxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l fu_kdxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitliğin mutlak değerini alırsak ve sonra elde edilen eşitliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak ve (6)-(7) şartlarını kullanırsak

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|\frac{du_k}{dx}\right|dxd\tau+\left|a_1\right|\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|u_k\right|dxd\tau$$
$$+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|\left|u_k(x)\right|dxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|v(t)\right|\left|\psi^N\right|\left|u_k(x)\right|dxd\tau$$
$$+\left|a_2\right|\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\psi^N\right|^3\left|u_k(x)\right|dxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|f\right|\left|u_k\right|dxd\tau$$
$$\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|\frac{du_k}{dx}\right|^2dx\right)^{\frac12}d\tau$$
$$+\left|a_1\right|\int_t^{t+\Delta t}\left[\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|u_k\right|^2dx\right)^{\frac12}\right]d\tau$$
$$+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\psi^N\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|u_k\right|^2dx\right)^{\frac12}d\tau$$
$$+b_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\psi^N\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|u_k\right|^2dx\right)^{\frac12}d\tau$$
$$+\left|a_2\right|\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\psi^N\right|^6dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^l\left|u_k\right|^2dx\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l |u_k|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau$$

$$+|a_1|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}\,d\tau+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}\,d\tau$$

$$+b_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}\,d\tau+|a_2|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^3_{L_6(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}\,d\tau$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\|f(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}\,d\tau$$

eşitsizliği yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte (17) eşitsizliğini dikkate alarak bütün terimlere t ye göre Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le a_0 d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+|a_1|d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\mu_0 d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+b_0 d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+|a_2|d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+d_k\left(\int_t^{t+\Delta t}1d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+\Delta t}\|f\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le d_k\sqrt{\Delta t}\left[a_0\left(\int_0^T\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+|a_1|\left(\int_0^T\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+\mu_0\left(\int_0^T \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + b_0\left(\int_0^T \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.+\left|a_2\right|\left(\int_0^T \left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \left\|f\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (20) değerlendirmesini kullanırsak $k,\ N=1,2,...$ için

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_{20} d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ki $c_{20}>0$ sabiti $N,\ k,\ \Delta t$ den bağımsızdır. Böylece (49) den $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlarının $[0,T]$ aralığı üzerinde eşsürekli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

Şimdi $\dfrac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlarının $[0,T]$ aralığı üzerinde eşsürekli olduğunu ispatlayalım. (18) sistemindeki $k.$ denkleme kısmi integrasyon formülünü uygulayarak $k=1,2,...,N$ için aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left\langle i\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right\rangle = -a_0\left\langle \psi^N,\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\rangle - i\left\langle a_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x},u_k\right\rangle + \left\langle a(x)\psi^N,u_k\right\rangle$$

$$-\left\langle v(t)\psi^N,u_k\right\rangle - i\left\langle a_2\left|\psi^N\right|^2\psi^N,u_k\right\rangle + \left\langle f,u_k\right\rangle$$

Bu eşitliğin t değişkenine göre diferansiyelini alırsak ve elde edilen eşitliği $(t,t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integrallersek

$$i\left(\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right) = -a_0\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{d^2u_k}{dx^2}dxd\tau + ia_1\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{du_k}{dx}dxd\tau$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}u_k dxd\tau - \int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \left(\frac{dv}{dt}\psi^N + \frac{\partial\psi^N}{\partial t}v(t)\right)u_k dxd\tau$$

$$-ia_2\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \left[2\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 + \frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\left(\psi^N\right)^2\right]u_k dxd\tau$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \frac{\partial f}{\partial t}u_k dxd\tau$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin mutlak değerini alırsak ve sonra elde edilen eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak ve (6)-(7) şartlarını kullanırsak

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{l_{N,k}(t)}{dt}\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\left|\frac{du_k}{dx}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+|a_1|\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\left|\frac{du_k}{dx}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l|u_k|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+b_1\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l|u_k(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+b_0\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l|u_k|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+3|a_2|\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|\left|\psi^N\right|^2|u_k(x)|dxd\tau$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l|u_k|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau$$
$$+|a_1|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau$$
$$+b_1\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau+b_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau \tag{50}$$
$$+3|a_2|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau$$

eşitsizliğini yazarız.

[20] çalışmasından bilinen eşitsizliğe göre herhangi $t\in[0,T]$ için

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\le\beta_2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \tag{51}$$

eşitsizliği yazılır. (50) eşitsizliğin sağ tarafındaki altıncı terim için (51) eşitsizliğini ve (20) değerlendirmesini kullanırsak ve $u_k(x)$, $k=1,2,...$ fonksiyonları için (17) eşitsizliğini dikkate alarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{l_{N,k}(t)}{dt}\right| \le a_0 d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + a_1 d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\mu_0 d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + b_1 d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+b_0 d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+3a_2 d_k c_{21} (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada (20) değerlendirmesini kullanırsak $k, N=1,2,...$ için

$$\left|\frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right| \le c_{22} d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \tag{52}$$

elde edilir. Burada $c_{21}>0$, $c_{22}>0$ sabiti N, k, Δt den bağımsızdır. Bu eşitsizliğe dayanarak $\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlarının $[0,T]$ aralığı üzerinde eşsürekli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Böylece Arzela-Ascoli teoremine [19] göre belirli k ve $m=1,2,...$ için $[0,T]$ aralığı üzerinde $\{l_{N,k}(t)\}$ ve $\left\{\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right\}$ dizilerinden

$$l_{N_m,k}(t) \xrightarrow{düzgün} l_k(t)$$

$$\frac{dl_{N_m,k}(t)}{dt} \xrightarrow{düzgün} \frac{dl_k(t)}{dt}$$

olacak şekilde $\{l_{N_m,k}(t)\}$ ve $\left\{\frac{dl_{N_m,k(t)}}{dt}\right\}$ alt dizilerini seçebiliriz.

Şimdi $l_k(t)$ fonksiyonunu kullanarak

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)u_k(x) \tag{53}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan kolaylıkla

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dl_k(t)}{dt}u_k(x) \tag{54}$$

eşitliği yazılır.

Kolaylıkla gösterilir ki $\{\psi^{N_m}\}$ alt dizisi $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında (53) bağıntısıyla tanımlanan $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsar ve $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t}\right\}$ alt dizisi $L_2(0,l)$ de (54) bağıntısıyla tanımlanan $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonuna zayıf yakınsar ki bu yakınsamaların her ikisi de t ye göre düzgündür. Yani $m=1,2,...$ için aşağıdaki limit bağıntıları geçerlidir:

$$\{\psi^{N_m}\}\xrightarrow{\text{zayıf}}\psi(x,t) \text{ ye } \overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \text{ de } t \text{ ye göre düzgün olarak} \tag{55}$$

$$\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t}\right\}\xrightarrow{\text{zayıf}}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \text{ ye } L_2(0,l) \text{ de } t \text{ ye göre düzgün olarak.} \tag{56}$$

$\{l_{N_m,k}(t)\}$ ve $\left\{\dfrac{dl_{N_m,k}(t)}{dt}\right\}$ alt dizileri t ye göre sürekli olduğundan $\{\psi^{N_m}\}\in B_0\equiv C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ dır. Böylece (55)-(56) yakınsaklık bağıntılarını göz önüne alarak kolaylıkla söyleyebiliriz ki $\psi(x,t)\in C^0\left([0,T],W_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ dır.

Şimdi, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun herhangi $t\in[0,T]$ ve hemen hemen $x\in(0,l)$ için (3) denklemini sağladığını gösterelim. Bu amaçla, $N=N_m$ için (18) sistemindeki k. denklemi herhangi sürekli $\overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonuyla çarpalım ve sonra elde edilen eşitlikleri

k üzerinden 1 den $N' \le N_m$ ye kadar toplayalım. Böylece kısmi integrasyon formülünü kullanarak herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\int_0^t \left[i \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} + i a_1 \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} - a(x)\psi^{N_m} + v(t)\psi^{N_m} + i a_2 \left|\psi^{N_m}\right|^2 \psi^{N_m} - f \right] \times \bar{\eta}^{N'}(x,t)\,dx = 0 \tag{57}$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Burada $\bar{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x),\ N' \le N_m$ dir.

Burada (55) limit bağıntısı geçerli olduğundan ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden, $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \xrightarrow{\ t \text{ ye göre düzgün}\ } 0 \tag{58}$$

limit bağıntısını yazabiliriz. Yani $\{\psi^{N_m}\}$ alt dizisi $L_2(0,l)$ de $\psi(x,t)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsar ki bu yakınsama t değişkenine göre düzgündür.

Burada

$$\begin{aligned}
&\left\| \left|\psi^{N_m}(.,t)\right|^2 \psi^{N_m}(.,t) - \left|\psi(.,t)\right|^2 \psi(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}^2 \\
&= \int_0^l \left| \left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2 \psi^{N_m}(x,t) - \left|\psi(x,t)\right|^2 \psi(x,t) \right|^2 dx \\
&\le \frac{9}{2} \int_0^l \left(\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^4 + \left|\psi(x,t)\right|^4 \right) \left|\psi^{N_m}(x,t) - \psi(x,t)\right|^2 dx \\
&\le \frac{9}{2} \left(\left\|\psi^{N_m}\right\|_{L_\infty(0,l)}^4 + \left\|\psi\right\|_{L_\infty(0,l)}^4 \right) \int_0^l \left|\psi^{N_m} - \psi\right|^2 dx \\
&= \frac{9}{2} \left(\left\|\psi^{N_m}\right\|_{L_\infty(0,l)}^4 + \left\|\psi\right\|_{L_\infty(0,l)}^4 \right) \left\|\psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2
\end{aligned} \tag{59}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. $\{\psi^{N_m}\} \in B_0$ olduğundan $N = N_m$ için (51) eşitsizliği ile (20) değerlendirmesini kullanarak $m \to \infty$ için (59) eşitsizliğinin limitini alalım. Ayrıca $\psi \in C^0\left([0,T], \mathrm{W}_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ olduğundan $\|\psi\|_{L_\infty(0,l)} \le +\infty$ eşitsizliğini dikkate alırsak ve (58) limit bağıntılarını kullanırsak $m \to \infty$ için

$$\left\| \left|\psi^{N_m}(.,t)\right|^2 \psi^{N_m}(.,t) - \left|\psi(.,t)\right|^2 \psi(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \to 0$$

limit bağıntısını elde ederiz. Yani $L_2(0,l)$ uzayında $m \to \infty$ için

$$\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2 \psi^{N_m}(x,t) \; \underrightarrow{\text{kuvvetli}} \; |\psi|^2 \psi \tag{60}$$

bağıntısı yazılır. (60) limit bağıntısında da $m \to \infty$ için

$$\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2 \psi^{N_m}(x,t) \; \underrightarrow{\text{zayıf}} \; |\psi|^2 \psi$$

$L_2(0,l)$ de yakınsaması yazılır. Böylece, herhangi $t \in [0,T]$ için $\overline{\eta}^{N'}(x,t) \in L_2(0,l)$ fonksiyonu ve $m \to \infty$ için

$$\int_0^l \left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2 \psi^{N_m}(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx \to \int_0^l \left|\psi(x,t)\right|^2 \psi(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx \tag{61}$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu kolaylıkla yazabiliriz. Burada $\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}(t) u_k(x),\ N' \le N_m$ dir.

Böylece, herhangi $t \in [0,T]$ ve $m \to \infty$ için (57) özdeşliğinin limitini alırsak (55), (56) ve (61) limit bağıntılarını kullanarak

$$\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(t)\psi + ia_2 |\psi|^2 \psi - f \right] \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dx = 0$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Burada $\overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}(t) u_k(x),\ N' \le N_m$ dır. Herhangi $t \in [0,T]$ için $\overline{\eta}^{N'}(x,t)$ fonksiyonlarının kümesi $L_2(0,l)$ uzayında yoğun olduğundan $N' \to \infty$ için yukarıdaki integral özdeşliğinin limitini alırsak, herhangi $t \in [0,T]$ ve $\overline{\eta}(.,t) \in L_2(0,l)$ için

$$\begin{aligned} &\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(t)\psi + ia_2 |\psi|^2 \psi - f \right] \\ &\times \overline{\eta}(x,t)\,dx = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

özdeşliği elde edilir. Böylece (62) integral özdeşliğinden (53) ile tanımlı $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3) denklemini herhangi $t \in [0,T]$ ve hemen hemen $x \in (0,l)$ için sağladığını kolaylıkla söyleyebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (4) başlangıç şartını sağladığını gösterelim:

$$0 \le \int_0^l \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^l \left|\psi(x,0)-\psi^{N_m}(x,0)\right|^2 dx$$
$$+2\int_0^l \left|\psi^{N_m}(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx \tag{63}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. $t=0$ için (58) limit bağıntısını ve

$$\psi^{N_m}(x,0)=\sum_{k=1}^{N_m} C_k^{N_m}(0)u_k(x)=\sum_{k=1}^{N_m}\varphi_k u_k(x)=\varphi^{N_m}(x),\ x\in(0,l)$$

başlangıç şartını kullanarak $m\to\infty$ için (63) eşitsizliğinin limitini alırsak

$$0 \le \int_0^l \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx = \left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan da hemen hemen $x\in(0,l)$ için

$$\psi(x,0)=\varphi(x)$$

eşitliği yazılır.

Bu durumda $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (4) başlangıç şartını sağladığı görülür.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (5) sınır şartlarını sağladığını gösterelim. B_0 uzayının $L_2\left([0,T],W_2^1(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğü açıktır [23]. Ayrıca $W_2^1(0,l)$ uzayı $C[0,l]$ uzayına kompakt gömüldüğünden, $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $L_2\left([0,T],C[0,l]\right)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsadığını söyleyebiliriz. Yani herhangi $x\in[0,l]$ ve $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(x,.)-\psi(x,.)\right\|^2_{L_2[0,T]}\to 0 \tag{64}$$

limit bağıntısı geçerlidir. (64) den $x=0$ ve $x=l$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(0,.)-\psi(0,.)\right\|^2_{L_2[0,T]}\to 0,\ \left\|\psi^{N_m}(l,.)-\psi(l,.)\right\|^2_{L_2[0,T]}\to 0 \tag{65}$$

limit bağıntıları yazılır.

Eğer $m\to\infty$ için

$$0 \le \int_0^T |\psi(0,t)|^2 dt \le 2\int_0^T |\psi(0,t) - \psi^{N_m}(0,t)|^2 dt + 2\int_0^T |\psi^{N_m}(0,t)|^2 dt,$$
$$0 \le \int_0^T |\psi(l,t)|^2 dt \le 2\int_0^T |\psi(l,t) - \psi^{N_m}(l,t)|^2 dt + 2\int_0^T |\psi^{N_m}(l,t)|^2 dt$$

eşitsizliklerinde limite geçersek ve herhangi $t \in [0,T]$ için

$\psi^{N_m}(0,t) = \psi^{N_m}(l,t) = 0$ sınır şartlarını ve (65) limit bağıntılarını kullanırsak

$$0 \le \int_0^T |\psi(0,t)|^2 dt = \|\psi(0,.)\|^2_{L_2[0,T]} \le 0$$
$$0 \le \int_0^T |\psi(l,t)|^2 dt = \|\psi(l,.)\|^2_{L_2[0,T]} \le 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan da hemen hemen $t \in [0,T]$ için

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$$

yazılır.Yani $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu (5) sınır şartlarını sağlar. Dolayısıyla $\psi(x,t) \in B_0$ olur.

(55) ve (56) limit bağıntılarını kullanarak $N = N_m$ ve $m \to \infty$ için (20) eşitsizliğinin alt limitini alırsak, $\psi(x,t) \in B_0$ limit fonksiyonu için (16) değerlendirmesinin geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi, (3)-(5) sınır değer probleminin B_0 uzayında tek çözüme sahip olduğunu gösterelim:

Farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonları (3)-(5) probleminin B_0 uzayında iki farklı çözümü olsun ve $\omega(x,t) = \psi(x,t) - \phi(x,t)$ ile gösterelim. $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonları (3)-(5) probleminin çözümleri olduğundan

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(t)\psi + ia_2 |\psi|^2 \psi = f(x,t) \qquad (66)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l) \qquad (67)$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T) \qquad (68)$$

ve

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\phi}{\partial x}-a(x)\phi+v(t)\phi+ia_2|\phi|^2\phi=f(x,t) \qquad (69)$$

$$\phi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l) \qquad (70)$$

$$\phi(0,t)=\phi(l,t)=0,\quad t\in(0,T) \qquad (71)$$

problemleri yazılır.

Böylece (66) ve (69) denklemlerinin, (67) ve (70) başlangıç şartlarını ve (68), (71) sınır şartlarını kullanarak $\omega=\omega(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğunu elde ederiz:

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\omega}{\partial x}-a(x)\omega+v(t)\omega+ia_2\omega\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)+ia_2\phi\overline{\omega}\psi=0 \qquad (72)$$

$$\omega(x,0)=0,\quad x\in(0,l) \qquad (73)$$

$$\omega(0,t)=\omega(l,t)=0,\quad t\in(0,T). \qquad (74)$$

Şimdi, (72)-(74) probleminin çözünü değerlendirelim. Bunun için (72) denkleminin her iki tarafını $\overline{\omega}(x,t)$ ile çarpalım ve sonra Ω_t bölgesi üzerinden integralleyelim bu durumda

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\omega}{\partial t}\overline{\omega}+a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\overline{\omega}+ia_1\frac{\partial\omega}{\partial x}\overline{\omega}-a(x)|\omega|^2+v(t)|\omega|^2$$
$$+ia_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)+ia_2\phi\psi(\overline{\omega})^2\Bigg]dxd\tau=0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon uygularsak ve (74) şartını kullanırsak

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\omega}{\partial t}\overline{\omega}-a_0\left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|^2+ia_1\frac{\partial\omega}{\partial x}\overline{\omega}-a(x)|\omega|^2+v(t)|\omega|^2$$
$$+ia_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)+ia_2\phi\psi(\overline{\omega})^2\Bigg]dxd\tau=0$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(|\omega|^2\right)dxd\tau+ia_1\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\overline{\omega}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial x}\omega\right)dxd\tau+2ia_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)$$

$$+ia_2\left(\phi\psi\left(\overline{\omega}\right)^2+\overline{\phi}\overline{\psi}\left(\omega\right)^2\right)=0$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}ia_1\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\overline{\omega}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial x}\omega\right)dxd\tau&=ia_1\int_0^t\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(|\omega|^2\right)dxd\tau\\&=ia_1\int_0^t\left[\left|\omega(x,t)\right|^2\Big|_0^l\right]d\tau\\&=0\end{aligned}$$

ve

$$ia_2\left(\phi\psi\left(\overline{\omega}\right)^2+\overline{\phi}\overline{\psi}\left(\omega\right)^2\right)=ia_2 2\,\mathrm{Re}(\phi\psi\left(\overline{\omega}\right)^2)$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(|\omega|^2\right)+2a_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)+2a_2\,\mathrm{Re}\left(\phi\psi\left(\overline{\omega}\right)^2\right)\right]dxd\tau=0$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan (73) başlangıç şartını kullanarak

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega_t}2a_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)dxd\tau=-\int_{\Omega_t}2a_2\,\mathrm{Re}\left(\phi\psi\left(\overline{\omega}\right)^2\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alalım ve Young eşitsizliğini uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega_t}2a_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)dxd\tau&\le 2a_2\int_{\Omega_t}|\phi||\psi||\omega|^2\,dxd\tau\\&\le\int_{\Omega_t}a_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)dxd\tau\end{aligned}$$

olup

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega_t}a_2|\omega|^2\left(|\phi|^2+|\psi|^2\right)dxd\tau\le 0 \qquad (75)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(75) bağıntısından

$$\text{herhangi } t\in[0,T] \text{ için } \|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}=0$$

yazılır. Buradan da herhangi $t \in [0,T]$ ve hemen hemen $x \in (0,l)$ için $\psi(x,t) = \phi(x,t)$ eşitliği yazılır. Yani (3)-(5) sınır değer problemi B_0 uzayında tek çözüme sahiptir.

4. 2. Neumann Probleminin Çözümü

(9)-(11) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 4. 2. 1. Farz edelim ki $a(x),\ v(t),\ \varphi(x),\ f(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (12), (13), (14) ve (15) şartlarını sağlasın. Bu durumda (9)-(11) sınır değer probleminin $\psi \in B_1 \equiv C^0\left([0,T], W_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm, herhangi $t \in [0,T]$ için

$$\left\|\psi(.,t)\right\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{23}\Big(\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}^6 + \|\varphi\|_{W_2^1(0,l)}^6$$
$$+\|\varphi\|_{W_2^1(0,l)}^{18} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^6\Big)$$

değerlendirmesini sağlar. Burada $c_{23} > 0$ sabiti φ, f, t den bağımsızdır.

Teorem 4. 2. 1 in ispatı teorem 4. 1. 1 in ispatına benzer olarak kolaylıkla gösterilebilir.

Not: Teorem 4. 2. 1 in ispatı için $W_2^2(0,l)$ uzayında fonksiyonların temel bir sistemi olarak

$$Lu_k(x) = -a_0 \frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) = \lambda_k u_k(x),\ x \in (0,l)$$
$$k = 1,2... \text{ için } \frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$$

öz değer probleminin $\lambda_k,\ k = 1,2,...$ öz değerlerine karşılık gelen $u_k = u_k(x)$ öz fonksiyonları göz önüne alınır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada;

$$\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}+r_2\left(x,t,\psi\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+r_1\left(x,t,\psi\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}+r_0\left(x,t,\psi\right)\psi=0$$

denkleminin özel bir durumu olan

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-a\left(x\right)\psi+v\left(t\right)\psi+ia_2\left|\psi\right|^2\psi=f\left(x,t\right)$$

biçiminde bir Schrödinger denklemi için Dirichlet ve Neumann problemleri incelenmiştir.

[2]-[12] çalışmalarında hep $r_2\left(x,t,\psi\right)=r_2\left(x,t\right),\ r_1\left(x,t,\psi\right)=0,\ r_0\left(x,t,\psi\right)=r_0\left(x,t,\psi\right)$ olduğunda elde edilen Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri çalışılmıştır. Bu çalışmada ise yukarıdaki çaışmalardan farklı olarak $r_2\left(x,t,\psi\right)=r_2\left(x,t\right),\ r_1\left(x,t,\psi\right)=r_1\left(x,t\right),\ r_0\left(x,t,\psi\right)=r_0\left(x,t,\psi\right)$ olduğunda elde edilen Schrödinger denklemi için sırasıyla Dirichlet ve Neumann problemleri incelenmiştir. Her iki problem için Galerkin metodu kullanılarak sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Göz önüne alınan lineer olmayan Schrödinger denklemi ve şartların farklılığı nedeniyle bu tez çalışması önceki çalışmalarda incelenen Schrödinger denkleminden daha genel ve daha günceldir.

6. KAYNAKLAR

[1] Zhuravlev, V. M., “Models of nonlinear wave processes that allow for soliton solutions”, JETP, 83 (6), s1235-s1245(1996).

[2] Bu, C., “An initial-boundary value problem of the nonlinear Schrödinger equation”, Appl. Anal., 53, s241-s254 (1994).

[3] Bu, C., Tsuyata, K. and Zhang, C., “Nonlinear Schrödinger equation with inhomogeneous Dirichlet-Boundary data”, J. Math. Phys., 46, 083504 (2005).

[4] Holmer, J., “The initial-boundary value problem for the 1-d nonlinear Schrödinger equation on the half-line, Diff. Integ. Equation”, 18, s647-s668 (2005).

[5] Iskenderov, A. D. and Yagubov, G. Y. “Optimal control Problem with unbounded potential for multidimensional, nonlinear and nonstationary Schrödinger equation”, Proceedings of the Lankaran State University, Natural Sciences series, s3-s56 (2007).

[6] Kaikina, E. I., “Inhomogeneous Neumann initial-boundary value problem for the, nonlinear Schrödinger equation, Journal of Differential Equation”, 255, s3338-s3356 (2013).

[7] Mahmudov, N. M., “Solvability of Boundary Value Problems for a Schrödinger Equation with Pure Imaginary Coefficient in the Nonlinear Part of This Equation”, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol.27, issue 35, s25-s36 (2007).

[8] Pozzi, G. A., “Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazioni di evoluzione del tipodi Schrödinger lineari e non lineari”, Parte prima, Ann. Mat. Pura Appl., Vol.79, iss.4, s179-s258 (1968).

[9] Pozzi, G. A., “Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazioni di evoluzione del tipodi Schrödinger lineari e non lineari”, Parte seconda, Ann. Mat. Pura Appl., Vol.81, iss.4, s205-s248 (1969).

[10] Strauss, W. and Bu, C., “An Inhomogeneous Boundary Value Problem for Nonlinear Schrödinger Equations, Journal of Differential Equations”, 173, s79-s91 (2001).

[11] Tsutsumi, M., “On Global Solutions to the Initial Boundary Value Problem for Nonlinear Schrödinger Equation in Exterior Domain, Comm. Partial Differential Equations”, 6, s885-s907 (1991).

[12] Yıldırım Aksoy, N., Yıldız, B., and Yetişkin, H., “Variational Problem with Complex Coefficient of a Nonlinear Schrödinger Equation”, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), Vol.22, iss. 3, s469-s484 (2012).

[13] Zhuravlev, V. M., “Nonlinear waves in multicomponent systems with dispersion and diffusion”, Ulyanovsk State University Press., Ulyanovsk, (2002).

[14] Akbaba, G. D., “Sanal Katsayılı Gradiyent İçeren Schrödinger Denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011.

[15] Toyoğlu, F., “İki Boyutlu Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Nümerik Çözümü”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012.

[16] Yücedağ, Z., “Değişken Üstlü Lebesgue Sobolev Uzaylarında Nehari Manifold Yaklaşımı ve Mountain Pass Teoremini Kullanarak $p(x)-$ Laplace Denklemlerin Çözümleri”, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010.

[17] Yıldırım Aksoy, N. , “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.

[18] Altun, F., “Banach Uzaylarında Bazı Geometrik Kavramlar”, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012.

[19] Hsieh, P. F. and Sibuya, Y., “Basic Theory of Ordinary Differential Equations”, Springer Verlag, s468 , New York (1999).

[20] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. and Uralceva, N. N., “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type”, Amer. Math. Soc. (English Trans.), Providence, RI, (1968).

[21] Ladyzhenskaya, O. A., “The Boundary Value Problems of Mathematical Physics”, Springer Verlag, ISBN: 0-387-90898-3, New York (1985).

[22] Pontryagin, L. S., “Ordinary Differential Equtions", Addison-Wesley Publishing Comp., (1962). (translated from the Russian).

[23] Baudouin, L., Kavian, O., and Puel, J. P., “Regularity for a Schrödinger Equation With Singular Potential and Application to Bilinear Optimal Control”, J. Differential Equations, 216, s188-s222 (2005).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yasemin Özeroğlu

Doğum Yeri: Kars

Doğum Tarihi: 28. 06. 1984

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Hali)

Lise : K. Maraş Atatürk Lisesi (1999-2001)

Lisans : Dicle Üniversitesi Siirt Eğitim Fakültesi (2002-2006)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (2012-2017)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Kars Akbaba Köyü İlköğretim Okulu (2006-2009)

Kars Merkez İsmet Paşa İlköğretim Okulu (2009-2013)

Kars Merkez Fevzi Paşa Ortaokulu (2013-…)