T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA SOFT ÇİFTSEL b-AÇIK KÜMELER VE SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLERİ

Melike KARADEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin Öztürk

HAZİRAN 2017

KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA SOFT ÇİFTSEL b-AÇIK KÜMELER VE SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLERİ

Melike KARADEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin Öztürk

HAZİRAN 2017
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YL15-040 numaralı öğrencisi Melike KARADEMİR'in Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Soft İkili Topolojik Uzaylarda Soft Çiftsel b-açık Kümeler ve Sürekli Dönüşümleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy Birliği ile kabul edilmiştir.

21 /08 / 2017

Başkan : Prof Dr. Gabil YAGUB ....

Üye : Yrd. Doç Dr. Abdulgani ŞAHİN ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT İKİLİ TOPOLOJİK UZAYLARDA

SOFT ÇİFTSEL b-AÇIK KÜMELER VE

SÜREKLİ DÖNÜŞÜMLERİ

Melike KARADEMİR

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK

Sosyal bilimlerde, ekonomide, fen bilimlerinde, mühendislik v.b. alanlarda birçok problemin çözümünde klasik metotları kullanmak elverişli olmayabilir. Bir matematikçi matematiksel olarak yapacağı işler için genel olarak uzay diye adlandırılan kümenin üzerinde hangi yapılara ihtiyaç duyacağını belirleyerek işe başlar. Bilimin bir çok dalında güncel ve yoğun olarak üzerinde çalışılan problemlerden biri belirsizlik ve karar verme problemleridir. Bu bağlamda bir çok matematikçi farklı küme yapıları sunarak bu problemlere önemli katkılar sunmuştur. Bu küme yapılarından birisi de 1999 yılında Modoltsov tarafından tanımlanan soft (esnek) küme teorisidir. Dolayısıyla bu teorilerin topolojik uzaylara ve ikili topolojik uzaylara taşınması oldukça önemli ve güncel olarak çalışılan konulardır. Soft ikili topolojik uzaylarda soft çiftsel b-açık kümeler ve sürekli dönüşümleri topolojinin en önemli konularından biridir.

Bu tezde soft ikili topolojik uzaylarda diğer açık küme tanımlarına göre daha genel bir yapı sunan soft çiftsel b-açık kümeler tanımlanmış buna ait diğer temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Ayrıca soft ikili topolojik uzaylarda bu küme tanımına bağlı fonksiyonların sürekliliği incelenmiş, diğer uzaylarla da bağlantılar kurulmuş ve önemli örneklerle de desteklenmiştir.

2017, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Soft küme, soft topolojik uzay, soft bitopolojik uzay, soft b-açık küme, soft çiftsel b-açık küme, soft çiftsel b süreklilik, soft çiftsel b-açık fonksiyon, soft çiftsel b-kapalı fonksiyon, soft çiftsel b-homeomorfizm.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOFT PAIR-WISE b-OPEN SETS AND

SOFT PAIR-WISE b-CONTINITY

ON SOFT BITOPOLOJICAL SPACES

Melike KARADEMİR

Kafkas University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Taha Yasin ÖZTÜRK

It may not be efficient to use ordinary methods for solving problems in fields such as social science, economics, natural science, engineering, etc. A mathematician begins with determining what structures he/she needs for the works that will be examined on the sets which are usually called spaces. In most branches of the sciences, one of contemporary problems that has been intensively studied is decision making and uncertainty problems. In this matter, many mathematicians has made important contributions to these problems by offering different set structures. One of these set structures has been constructed by Modoltsov calling them soft set theory in 1999. That is why, moving these structures into topological spaces and binary topological spaces is quite important and daily studied subject. Working on soft pairwise b-open sets and continuous functions on these sets in soft binary topological spaces is one of very crucial subjects in topology.

In this thesis, theorems and definitions belonging soft pairwise b-open sets that provides more generalized structure than other open sets for soft binary topological spaces in literacy are presented. Furthermore, continuity of the functions defined on these sets in soft binary topological spaces is investigated and relations with other spaces are demonstrated by also supporting with important examples.

2017, 57 pages

Keywords: Soft set, soft topological spaces, soft bitopological spaces, soft b-open set, soft pairwise b-open set, soft pairwise b-continuity, soft pairwise b-open function, soft pairwise b-closed function, soft pairwise b-homeomorphism.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışmamda en büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, değerli bilim adamı, danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK'e ve bölümümün değerli hocalarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca her türlü maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Kars-2017 Melike KARADEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

X	: Herhangi bir evrensel küme
$P(X)$	: X ’in kuvvet kümesi
E	: Parametreler Kümesi
(F,E)	: Herhangi bir soft küme
$({}^{Y}F,E)$	: Y alt uzayında (F,E) nin soft alt kümesi
(X,τ,E)	: X üzerinde bir soft topolojik uzay
$cl(F,E)$	: (F,E) kümesinin soft kapanışı
$Int(F,E)$	: (F,E) kümesinin soft içi
(x_e,E)	: Soft nokta
$SS(X,E)$	: X üzerinde tüm soft kümelerin ailesi
$(F,E)^c$	: Soft küme tümleyeni
$(X,\tilde{\tau},E)$	: Soft topolojik uzay
$(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$	: Soft ikili topolojik uzay
$POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$	: Tüm soft p-açık kümeler ailesi
$PCS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$	: Tüm soft p-kapalı kümeler ailesi
$cl_p^s((G,E))$	: (G,E) yi içeren en küçük soft p-kapalı küme
$Int_p^s((G,E))$	: (G,E)nin içerdiği en büyük soft p-açık küme
$PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$	: Tüm soft $b_p - açık$ kümelerin ailesi
$PbC(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$	: Tüm soft $b_p - kapalı$ kümelerin ailesi

1. GİRİŞ

Sosyal bilimlerde, fen bilimlerinde, ekonomide, mühendislik ve tıptaki birçok problemin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yeterli olamayabilmektedir. Bu problemler genellikle karar verme ile ilgilidir. Son yıllarda geliştirilmiş olan fuzzy (bulanık) kümeler teorisi, intuitionistik (fuzzy sezgisel) bulanık kümeler teorisi, rough (kaba) kümeler teorisi, fuzzy soft (bulanık esnek) kümeler teorisi bu karar verme problemlerinin çözümü için önemli derecede katkı sağlamıştır [2, 7, 8, 12, 14, 19, 27, 31, 46, 68]. Bu teoriler matematiğin birçok alt dallarında araştırmacıların yoğun olarak çalışmış olduğu güncel konulardır.

Her teori kendine özgü problemleri çözse de bu teorilerden en önemlisi 1965 yılında Lotfi Zadeh tarafından geliştirilen fuzzy (bulanık) kümeler teorisidir [68]. Amerika'da yaşayan azeri asıllı L. Zadeh çalışmalarında fonksiyon kümesini [0,1] reel sayı aralığına genişleterek fuzzy mantık ve fuzzy kümeleri tanımladı. Fuzzy kümeler karar verme problemlerinde, sosyal bilimlerde, cebirde, geometride vb. gibi çok farklı alanlarda kullanılmıştır.

L. Zadeh'in fuzzy kümeler teorisi diğer teorilere kıyasla en dikkat çeken teori olmasına rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir fuzzy küme üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Molodtsov'a göre üyelik fonksiyonu oluşturulmasının çok fazla bireysel olmasından dolayı, herbir durum için bir üyelik fonksiyonu oluşturulması zorluğuyla karşılaşılır. Molodtsov bu nedenle bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç olduğunu düşünerek 1999 yılında soft küme teorisini matematiksel bir araç olarak ortaya koymuştur [44]. Daha sonraları Molodtsov'un dışında birçok araştırmacı soft küme teorisi üzerine farklı çalışmalar yapmıştır [5, 6, 9, 15, 16, 17, 18, 23, 26, 28, 29, 37, 41, 42, 43, 48, 51, 54, 55, 57, 64, 69].

2007 yılında ilk Aktaş ve Çağman soft grup kavramını tanımlayarak teorinin cebirde de çalışılmasına katkı sağlamıştırlar [4]. Daha sonra soft modül ve soft halka kavramları farklı araştırmacılar tarafından tanımlanmıştır [1, 11, 13, 24, 25, 47, 52, 53, 63, 65]. Topolojide soft küme teorisi ilk defa 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından tanımlanmış ve bu uzay ayırma aksiyomları sunulmuştur [64].

Soft küme teorisinin matematik de ilerleyebilmesi için en önemli yapı taşlarından olan soft nokta kavramı Bayramov ve Gündüz (Aras) tarafından diğer araştırmalardan farklı şekilde tanımlanarak bu teoriye büyük katkı sağlanmıştır. Bunun yanında bu teoriler birleştirilerek intuitionistik fuzzy soft modül ve fuzzy soft modül kavramları tanımlanarak üzerinde birçok çalışma yapılmıştır [11, 12, 13, 14].

Bunun yanında Soft topolojik uzaylarda daha genel farklı açık küme kavramları sunulmuştur.

Bu tezde soft ikili topolojik uzaylarda diğer açık küme tanımlarına göre daha genel bir yapı sunan soft çiftsel b-açık kümeler incelenmiş, buna ait diğer temel tanım ve teoremler araştırılmıştır. Ayrıca soft ikili topolojik uzaylarda bu küme tanımına bağlı fonksiyonların sürekliliği tanımlanmış, diğer uzaylarla da bağlantılar kurulmuş ve önemli örneklerle de desteklenmiştir.

Tezin kuramsal temeller bölümünde topolojik uzaylar, metrik uzaylar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş bu uzaylar üzerindeki işlemler sunulmuştur.

Tezin materyal ve yöntem kısmında soft (esnek) kümeler ve soft topolojik uzaylar ile ilgili önemli tanım ve teoremler sunulmuştur.

Tezin araştırma bulguları kısmında soft ikili topolojik uzaylarda soft çiftsel b-açık kümeler ve bu küme tanımına bağlı fonksiyonların sürekliliği tanımlanmış, teoremler ispatlanmıştır.Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için birçok örnek sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve teoremler sunulacaktır.

2.1. Bazı Topolojik Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [67] X boştan farklı bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt ailesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir.

t_1**)** $\varnothing, X \in \tau$,

t_2**)** τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

t_3**)** τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.

X in üzerindeki τ topolojisi ile birlikte (X,τ) çiftine topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.2. [67] τ_1 ve τ_2 X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. Eğer τ_1 in her elemanı τ_2 nin elemanı ise; yani $\tau_1 \subset \tau_2$ ise, τ_1 topolojisi τ_2 den daha kaba veya τ_2 topolojisi τ_1 den daha ince yapıya sahiptir denir.

Örnek 2.1.1. [67] X herhangi bir küme ve $\tau = \{\varnothing, X\}$ olsun. τ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki indiskret (ayrık olmayan) topoloji denir. Ayrıca τ topolojisi X üzerindeki topolojilerin en kaba yapılı topolojisidir.

Örnek 2.1.2. [67] Eleman sayısı birden fazla olan bir X kümesinin kuvvet kümesi $P(X)$ olsun. $P(X)$ ailesi (t_1), (t_2), (t_3) özelliklerini sağladığı açıktır. O halde $P(X)$,

X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye diskret (ayrık) topoloji, $(X, P(X))$ uzayına da diskret (ayrık) topolojik uzay denir. Bu topoloji en ince topolojidir.

Tanım 2.1.3. [67] (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X e göre tümleyeni açık olan kümeye, τ topolojisine göre kapalı küme denir, yani

$$B \subset X \text{ kapalı} \Leftrightarrow \overline{B} = X - B \in \tau \text{ açık}$$

τ topolojisine göre X in kapalılar ailesini $\mathbf{B} = \{B \subset X : B \text{ kapalı} \Leftrightarrow \overline{B} \in \tau\}$ ile gösterelim.

X in kapalı veya açık olmayan alt kümeleri de vardır. Ancak bütün topolojilerde $\varnothing$ ve X hem açık hem de kapalı kümelerdir.

Teorem 2.1.1. [10] $X \neq \varnothing$ bir küme $\mathbf{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X in alt kümeler ailesi olsun. Eğer

1) $X, \varnothing \in \mathbf{B}$,

2) $\mathbf{B}$ ailesinin her sonlu alt ailesinin birleşimi $\mathbf{B}$ ye aittir,

3) Her $A' \subset A$ için $\bigcap_{\alpha \in A'} B_\alpha \in \mathbf{B}$

ise $\tau = \{U : \exists\, B \in \mathbf{B},\ U = \overline{B}\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir ve $\mathbf{B}$ ailesi bu topolojide kapalı kümeler ailesidir.

Tanım 2.1.4. [67] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin komşuluğu denir, yani;

$$(N,\ A \subset X \text{ nın bir komşuluğu}) \Leftrightarrow (\exists U \subset X \text{ açığı var } \ni A \subset U \subset N).$$

x noktasını içeren U açık altkümesine de x in açık komşuluğu denir.

Teorem 2.1.2. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ bir alt küme olsun.

$$A \text{ açıktır} \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ için } A \text{ kümesi } x \text{ noktasının bir komşuluğudur.}$$

Tanım 2.1.5. [67] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A nın bir değme noktası denir, yani

$$(x \in X, A \text{ nın değme noktası}) \Leftrightarrow \forall \;\; N \in N(x) \text{ için } \; N \bigcap A \neq \varnothing$$

Teorem 2.1.3. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun. B kapalıdır $\Leftrightarrow$ B kümesinin her değme noktası B ye aittir.

Teorem 2.1.4. [67] (X,τ) bir topolojik uzay $N(x)$, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda $N(x)$ komşuluk aksiyomları denilen aşağıdaki özellikleri sağlar:

N_1**)** $N(x)$ ailesine ait her küme x noktasını içerir, yani $\forall N \in N(x)$ için $x \in N$ dır.

N_2**)** $N(x)$ ailesine ait herhangi bir kümenin her üst kümesi de $N(x)$ aittir, yani $N \in N(x)$ ve $N \subset M$ ise, $M \in N(x)$ dır.

N_3**)** $N(x)$ ailesine ait sonlu sayıdaki her elemanın ara kesiti de yine $N(x)$ aittir, $N_1, N_2, ..., N_n \in N(x)$ için $,\bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N(x)$ dır.

N_4**)** Her $N \in N(x)$ için $U \subset N$ olacak şekilde öyle bir $U \in N(x)$ vardır ki $y \in U$ için $N \in N(y)$ dır, Yani N, x noktasına yeteri kadar yakın noktaların da komşuluğudur.

Teorem 2.1.5. [67] $X \neq \varnothing$ kümesinin her $x \in X$ elemanına X in alt kümeler ailesi $N(x)$ karşılık gelsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın :

1) $\forall A \in N(x) \Rightarrow x \in A,$

2) $A \in N(x),\; A \subset B \Rightarrow B \in N(x),$

3) $A, B \in N(x) \Rightarrow A \bigcap B \in N(x),$

4) $A \in N(x)$ $\exists U \in N(x),\ U \subset A$ ve $\forall y \in U$ için $U \in N(y)$

O zaman $\tau = \{U : \forall x \in U \ için\ U \in N(x)\}$ ailesi X de bir topolojidir ve $N(x)$ ailesi bu topolojiye göre x noktasının komşuluklar ailesidir.

Tanım 2.1.6. [67] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\mathbf{B}$ ise, τ topolojisine göre kümeler ailesi olsun. A kümesini kapsayan $\mathbf{B}$ ye ait bütün kapalı kümelerin

$\mathbf{B}_A = \{B \subset X : A \subset B \text{ ve } B \in \mathbf{B}\}$ arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve A^c ile gösterilir. Yani,

$$A^c = \bigcap \{B \subset X : A \subset B, B \in \mathbf{B}\} = \bigcap_{B \in \mathbf{B}_A} B \text{ dır.}$$

Teorem 2.1.6. [67] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve A^c, A nın kapanışı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlanır;

1) A^c kümesi kapalıdır.

2) $A \subset A^c$ dır.

3) A^c kümesi A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir, yani A yı kapsayan her $B \in \mathbf{B}$ kapalı kümesi için $A \subset A^c \subset B$ dır.

4) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A^c = A$ olmasıdır.

5) $A \subset B \Rightarrow A^c \subset B^c$.

6) $\left(A^c\right)^c = A^c$.

Teorem 2.1.7. [10] $X \neq \varnothing$ bir küme $c : 2^x \to 2^x$ bir dönüşüm olsun, Eğer

1) $c(\varnothing) = \varnothing$

2) $\forall A \subset X$ için $A \subset c(A)$

3) $c(c(A)) = c(A)$

4) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$

koşulları sağlanırsa $\tau=\{U\subset X:\ c(\bar{U})=\bar{U}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye göre c dönüşümü kapanma işlemine eşittir.

Tanım 2.1.7. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve $x\in A$ bir nokta olsun. Eğer x in uygun bir komşuluğu A nın içinde kalıyorsa bu x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve $Int(A)$ veya $\overset{0}{A}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.8. [10] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ iki küme olsun.

1) $Int(A)$ kümesi A ya ait olan en büyük açık kümedir.

2) A açıktır $\Leftrightarrow A=Int(A)$ dır.

3) $IntA=X-(X-A)^c=\overline{\left((\bar{A})^c\right)}$.

4) $Int(X)=X$.

5) $Int(Int(A))=Int(A)$.

6) $Int(A\cap B)=Int(A)\cap Int(B)$.

Teorem 2.1.9. [10] $X\neq\varnothing$ bir küme $J:2^x\rightarrow 2^x$ bir dönüşüm olsun. Eğer

1) $J(A)\subset A$

2) $J(X)=X$

3) $J(J(A))=J(A)$

4) $J(A\cap B)=J(A)\cap J(B)$

koşulları sağlanırsa $\tau=\{U\subset X:\ J(U)=U\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide her A için $J(A)=Int(A)$ dır.

Tanım 2.1.8. [67] (X,τ) bir topolojik uzay , $A\subset X$ ve $x\in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı noktaları varsa, x noktasına A nın bir yığılma noktası denir. A^d ile gösterilir.

A nın her yığılma noktası A nın bir değme noktasıdır. Fakat her değme noktası bir yığılma noktası değildir.

Tanım 2.1.9. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. $FrA = A^c \cap (\overline{A})^c$ kümesine A kümesinin sınırı denir.

Tanım 2.1.10. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathrm{B}\subset\tau$ bir alt aile olsun. Eğer her açık küme B nin bazı elemanlarının birleşimi olarak gösterilebiliyorsa bu B ailesine τ topolojisinin bir tabanıdır denir.

Teorem 2.1.10. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathrm{B}\subset\tau$ olsun.

1) B ailesi τ nun tabanıdır $\Leftrightarrow \forall G\in\tau$ ve $\forall x\in G$ için $x\in B_x\subset G$ sağlanacak şekilde $B_x\in\mathrm{B}$ bulunabilir.

2) $\mathrm{B}=\{B_i\}_{i\in I}$ ailesi τ nun tabanı ise her $B_{i_1}, B_{i_2}\in\mathrm{B}$ ve her $x\in B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ için $x\in B_{i_3}\subset B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ koşulunu sağlayan $B_{i_3}\in\mathrm{B}$ vardır.

Teorem 2.1.11 . [10] $X\neq\varnothing$ bir küme, $\mathrm{B}=\{B_i\}_{i\in I}$ X in alt kümeler ailesi olsun. Eğer,

1) $\bigcup_{i\in I} B_i = X$ **;**

2) Her $B_{i_1}, B_{i_2}\in\mathrm{B}$ ve her $x\in B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ için $x\in B_{i_3}\subset B_{i_1}\bigcap B_{i_2}$ sağlanacak şekilde $B_{i_3}\in\mathrm{B}$ vardır

koşulları sağlanırsa $\tau=\left\{\bigcup_{i\in I} B_i : I'\subset I\right\}$ ailesi X de bir topolojidir ve B ailesi bu topolojinin bir tabanıdır.

Tanım 2.1.11. [10] Eğer x noktasının her $U\in N(x)$ komşuluğu için $x\in V\subset U$ koşulunu sağlayan $V\in\tilde{\mathrm{B}}(x)$ varsa $\tilde{\mathrm{B}}(x)$ ailesine (X,τ) topolojik uzayında x noktasının bir komşuluk tabanı denir.

Teorem 2.1.12 . [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathrm{B} \subset \tau$ olsun. B ailesi τ nun tabanıdır $\Leftrightarrow$ $\tilde{\mathrm{B}}(x) = \{B \in \mathrm{B} : x \in B\}$ ailesi x noktasının bir komşuluk tabanıdır.

Teorem 2.1.13 . [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta olsun. x noktasının her $\tilde{\mathrm{B}}(x)$ komşuluk tabanı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $U \in \tilde{\mathrm{B}}(x)$ ise $x \in U$;

2) $U, V \in \tilde{\mathrm{B}}(x)$ ise $W \subset U \cap V$ olacak şekilde $W \in \tilde{\mathrm{B}}(x)$ vardır;

3) $U \in \tilde{\mathrm{B}}(x)$ ise öyle bir $V \in \tilde{\mathrm{B}}(x)$ vardır ki, her $y \in V$ için $\exists W \in \tilde{\mathrm{B}}(y)$, $y \in W \subset U$ sağlanır.

Tanım 2.1.12. [10] (X,τ) bir topolojik uzay, $\mathrm{P} \subset \tau$ bir alt aile olsun. P ailesinin elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir taban oluşturuyorsa bu P ailesine τ nın alt tabanı denir.

Teorem 2.1.14 . [10] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathrm{P} \subset 2^x$ alt kümeler ailesi olsun**.** P ailesi topolojinin bir alt tabanıdır.

2.2. Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. [67] (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ içeren Y deki her N' komşuluğu için X de x_0 içeren bir N komşuluğu var $\ni f(N) \subset N'$ ise, f fonksiyonuna x_0 noktasında sürekli (noktasal sürekli) denir, yani

f, $x_0 \in X$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall N' \in N(f(x_0))$ için $\exists N \in N(x_0)$ var $\ni f(N) \subset N'$ dır.

Teorem 2.2.1. [10] (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $f : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir ;

b) Her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dur;

c) Y nin her elemanının ters görüntüsü X de açıktır;

d) Y nin tabanının her elemanının ters görüntüsü X de açıktır;

e) X de $\{N(x)\}_{x\in X}$, Y de $\{N'(y)\}_{y\in Y}$ şeklinde x ve y noktalarının öyle komşuluklar ailesi mevcuttur ki her $x\in X$ ve $V\in N'(f(x))$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde $U\in N(x)$ vardır;

f) Y de kapalı B kümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi X de kapalıdır;

g) Her $A\subset X$ için $f(A^c)\subset(f(A))^c$ dır;

h) Her $B\subset Y$ için $(f^{-1}(B))^c\subset f^{-1}(B^c)$ dir;

i) Her $B\subset Y$ için $f^{-1}(Int(B))\subset Intf^{-1}(B)$ dir.

Teorem 2.2.2. [10] (X,τ), (Y,τ'), (Z,τ'') topolojik uzaylar olsun. Eğer $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ fonksiyonları sürekli ise $gof:X\to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

Tanım 2.2.2. [67] (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. X in her açık alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü Y de açık ise, f ye açık fonksiyon ve X in her kapalı alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü Y de kapalı ise, f ye kapalı fonksiyon denir.

Teorem 2.2.3. [67] (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f açık bir fonksiyondur.

2) $\forall A\subset X$ için $f\left(Int(A)\right)\subset Int\left(f(A)\right)$ dır.

Teorem 2.2.4. [67] (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f kapalı bir fonksiyondur.

2) $\forall A\subset X$ için $\left(f(A)\right)^c\subset f(A^c)$ dır.

Tanım 2.2.3. [67] $(X,\tau\ )$ ve (Y,τ') topolojik uzaylar ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} sürekli ise, f ye bir homeomorfizm veya topolojik dönüşüm denir. Eğer X ile Y uzayları arasında bir homeomorfizm varsa X ve Y topolojik uzaylarına homeomorf (topolojik denk) uzaylar denir.

Teorem 2.2.5. [10] $(X,\tau\ )$ ve (Y,τ') topolojik uzaylar $f:X\rightarrow Y$ bire-bir, örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f homeomorfizmadır;

2) f fonksiyonu sürekli ve kapalıdır,

3) f sürekli ve açıktır;

4) $f\left(A\right)\subset Y$ açıktır $\Leftrightarrow A\subset X$ açıktır;

5) $f\left(A\right)\subset Y$ kapalıdır $\Leftrightarrow A\subset X$ kapalıdır;

6) Her $B\subset X$ için $f\left(B^{c}\right)=\left(f\left(B\right)\right)^{c}$ dir;

7) Her $B\subset X$ için $f\left(Int\left(B\right)\right)=Int\left(f\left(B\right)\right)$ dir.

2.3 Alt Uzaylar

Teorem 2.3.1. [67] $(X,\tau\ )$ topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda $\tau_{\mathrm{A}}=\left\{W'=\mathrm{A}\cap W:W\in\tau\right\}$ ailesi, A kümesi üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) dır.

Tanım 2.3.1. [67] A kümesi üzerinde τ tarafından oluşturulan τ_{A} topolojisine τ dan indirgenen (rölatif) topoloji, $\left(A,\tau_{A}\right)$ topolojik uzayına $(X,\tau\ )$ topolojik uzayının alt uzayı denir.

Teorem 2.3.2. [67] $(X,\tau\ )$ topolojik uzay ve $\left(A,\tau_{A}\right)$, X in alt uzayı olsun. Bu durumda $K'\subset A$ alt kümesinin τ_{A} ya göre kapalı olması için gerek ve yeter şart $K\subset X$ alt kümesi τ ya göre kapalı olmak üzere $K'=A\cap K$ olmasıdır.

Teorem 2.3.3. [67] (X,τ) topolojik uzay ve $\left(A,\tau_A\right)$ X in alt uzay ve $B \subset A$ olsun. B nin τ ya göre kapanışı B_X^c , τ_A ya göre kapanışı B_A^c olmak üzere,

$$B_A^c = A \cap B_X^c \text{ dir.}$$

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Soft Kümeler

X 'i bir evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun.

Tanım 3.1.1 [44] $F: E \to P(X)$ dönüşümü ile tanımlanan (F,E) ikilisine X üzerinde bir soft küme denir.

Diğer bir deyişle X üzerinde bir soft küme, X uzayının parametrelendirilmiş alt kümeler ailesidir. $e \in E$ için $F(e)$, (F,E) soft kümesinin $e-$yaklaşık elemanlarının kümesi olarak değerlendirilebilir.

X üzerindeki bütün soft kümelerin ailesini kısaca $SS(X)_E$ ile gösterelim.

Örnek 3.1.1. Bir (F,E) soft kümesi X şahsının almak istediği özellikteki araba olsun. $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$ durumunda dört araç vardır ve $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerinin kümesi olsun. $e_i\,(i=1,2,3,4)$ sırasıyla "*sedan*", "*hatchback*", "*dizel*", "*benzinli*" parametrelerine karşılık gelir. $(.), e_i \in E$ parametrelerinin birini işaret etmek üzere F dönüşümü "araç (.)" şeklinde verildiği düşünülsün. Örneğin $F(e_1)$, "*araç*$(dizel)$" anlamındadır ve onun fonksiyon değeri $\{h \in U : h \text{ dizel araçtır}\}$ kümesidir.

Farz edelim ki $f(e_1)=\{h_1,h_2\}$, $f(e_2)=\{h_1,h_3\}$, $f(e_3)=\{h_2,h_3,h_4\}$ $f(e_4)=\varnothing$ dur.

O halde $(F,E)=\begin{Bmatrix} (Sedan\ araç,\{h_1,h_2\}),(Hatchback,\{h_1,h_3\}),(Dizel,\{h_2,h_3,h_4\}), \\ (Benzinli,\varnothing) \end{Bmatrix}$

olarak yazarız.

Tanım 3.1.2 [64] (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun ve Y, X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. O halde Y üzerinde (F,E) soft alt kümesi her $e \in E$ için ${}^{Y}F(e) = Y \cap F(e)$ şeklinde tanımlanır ve $\left({}^{Y}F,E\right)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3 [44] (F,E), $(G,E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise; (F,E), (G,E) nin bir soft altkümesi denir ve $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ ile gösterilir.

2) Eğer $\forall e \in E$ için $F(e) = G(e)$ ise; (F,E) ve (G,E) soft kümelerine eşittir denir ve $(F,E) \tilde{=} (G,E)$ ile gösterilir.

3) $\forall e \in E$ için bir $H(e) = F(e) \bigcup G(e)$ olacak şekilde (H,E) soft kümesine (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin soft birleşimi denir ve $(F,E) \tilde{\bigcup} (G,E)$ ile gösterilir.

4) $\forall e \in E$ için bir $M(e) = F(e) \bigcap G(e)$ olacak şekilde (M,E) soft kümesine (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin kesişimi denir ve $(F,E) \tilde{\bigcap} (G,E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4 [64] $(F,E),(G,E) \in SS(X)_E$ olsun. İki soft kümenin farkı (H,E) olmak üzere her $e \in E$ için $H(e) = F(e) - G(e)$ olarak tanımlanır $(F,E) - (G,E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5 [44] $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ parametreler kümesi olsun. E kümesinin değili $\rceil$E şeklinde belirtilir ve her i için $\rceil e_i \neq e_i$ olmak üzere, $\rceil$E$=$ $\rceil e_1, \rceil e_2, \ldots, \rceil e_n$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.1 [44]

1) $\rceil \rceil A = A$

2) $\rceil A \cup B = \rceil A \cup \rceil B$

3) $\rceil\ A\cap B\ = \rceil A \cap \rceil B$

Tanım 3.1.6 [64] $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. (F,E) soft kümesinin tümleyeni $(F,E)^c$ ile gösterilir ve $(F,E)^c=(F^c,E)$ olarak tanımlanır. $F^c:E\to \mathrm{P}(U)$, her $e\in E$ için $F^c(e)=U-F(e)$ ile verilen dönüşümdür.

Tanım 3.1.7 [44] Eğer her $e\in E$ için $F(e)=\varnothing$ ise X üzerinde (F,E) soft kümesine boş soft küme denir ve $(\varnothing,E)$ ile ya da kısaca Φ ile gösterilir.

Tanım 3.1.8 [44] Eğer her $e\in E$ için $F(e)=X$ ise X üzerinde (F,E) soft kümesine mutlak soft küme denir ve (X,E) ile ya da kısaca $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Açıktır ki, $(\varnothing,E)^c=(X,E)$ ve $(X,E)^c=(\varnothing,E)$ dır.

Önerme 3.1.2 [64] $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ soft kümeler olsun. O halde

1) $\left((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right)^c \tilde{=} (F,E)^c\,\tilde{\cap}(G,E)^c$;

2) $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)^c \tilde{=} (F,E)^c\,\tilde{\cup}(G,E)^c$ dir.

Tanım 3.1.9. **[23]** $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer $e\in E$ için $F(e)=\{x_e\}$ ve her bir $e'\in E\text{-}\{e\}$ için $F(e')=\varnothing$ ise $(F,E)\in SS(X)_E$ soft kümesi (X,E) üzerinde bir soft nokta olarak adlandırılır ve (x_e,E) ya da kısaca x_e ile gösterilir.

Tanım 3.1.10. **[23]** (x_e,E) ve $(y_{e'},E)$ iki soft nokta olsun. Eğer $x\neq y$ veya $e\neq e'$ ise noktalara farklı noktalar denir.

Önerme 3.1.3. **[23]** $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. O zaman (F,E), kendisinin soft noktalarının birleşimidir. Yani;

$$(F,E)=\bigcup_{e\in E}\bigcup_{x\in F(e)} x_e$$

dir.

Tanım 3.1.11. [37] $SS(X)_E$ ve $SS(Y)_{E'}$ soft kümelerin aileleri olsun. $u:X\to Y$ ve $p:E\to E'$ dönüşümler olsun. (F,E), X üzerinde bir soft küme, $(f(F,E),B)$, $B=p(E)\tilde{\subseteq}E'$ Y üzerinde bir soft küme olsun. $f_{pu}:SS(X)_E\to SS(Y)_{E'}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) (F,E), $SS(X)_E$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin görüntüsü $\forall\beta\in B$ için

$$f_{pu}(F)(\beta)=\begin{cases}\bigcup\limits_{x\in p^{-1}(\beta)\cap E} u(F(\alpha))\,, & p^{-1}(\beta)\cap E\neq\varnothing\\ \varnothing & ,\ \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde bir kümedir ve $f_{pu}(F,E)=(f_{pu}(F),p(E))$ ile gösterilir.

2) (G,E'), $SS(Y)_{E'}$ da bir soft küme, $D=p^{-1}(C)$ olsun. Bu soft kümenin ters görüntüsü $\forall\alpha\in D$ için

$$f_{pu}^{-1}(G)(\alpha)=\begin{cases}u^{-1}\big(G\big(p(\alpha)\big)\big)\,, & p(\alpha)\in E'\\ \varnothing & ,\ \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

şeklinde bir soft kümedir ve $f_{pu}^{-1}(G,E')=(f_{pu}^{-1}(G),p^{-1}(E'))$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1. [37] $SS(X)_E$ ve $SS(Y)_{E'}$ soft kümelerin aileleri olsun. $f_{pu}:SS(X)_E\to SS(Y)_{E'}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $f_{pu}(\Phi_E)=\Phi_{E'}$

b) $f_{pu}(X_E)\tilde{\subseteq}Y_{E'}$

c) $f_{pu}\left((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right)=f_{pu}(F,E)\tilde{\cup}f_{pu}(G,E)$

$(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ dır.

Genel olarak; $f_{pu}\left(\tilde{\bigcup_i}(F_i,E)\right)=\tilde{\bigcup_i}f_{pu}(F_i,E_i)$ burada $(F_i,E)\in SS(X)_E$ dır.

d) Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise, $f_{pu}(F,E)\tilde{\subseteq}f_{pu}(G,E)$ dır. Burada $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olur.

e) Eğer $(G,E)\tilde{\subseteq}(H,E)$ ise, $f_{pu}^{-1}((G,E))\tilde{\subseteq}f_{pu}^{-1}((H,E))$ dir. Burada $(G,E),(H,E)\in SS(Y)_{E'}$ olur.

Eğer p ve u surjektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna surjektif denir. Eğer p ve u injektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna injektif denir.

3.2. Soft Topoloji ve Soft Topolojik Uzaylar

X 'i evrensel küme ve E 'yi boş olmayan bir parametreler kümesi olarak alalım.

Tanım 3.2.1 [64] $\tilde{\tau}$, X üzerinde soft kümelerin ailesi olsun. $\tilde{\tau}$ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

1) $\Phi,\tilde{X}\in\tilde{\tau}$

2) $\tilde{\tau}$ ya ait herhangi bir sayıdaki soft kümenin birleşimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

3) $\tilde{\tau}$ ya ait sonlu sayıdaki soft kümenin kesişimi $\tilde{\tau}$ ya aittir.

$\tilde{\tau}$ ya X üzerinde bir soft topoloji denir.

$(X,\tilde{\tau},E)$ üçlüsü soft topolojik uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.2 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun. O halde $\tilde{\tau}$ nun elemanlarına soft açık kümeler denir.

Tanım 3.2.3 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer (F,E) nin tümleyeni soft açık küme ise, (F,E) soft kümesine soft kapalı küme denir.

Önerme 3.2.1 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun. O halde

1) Φ ve $\tilde{X}$ soft kapalı kümelerdir,
2) Herhangi bir sayıdaki soft kapalı kümelerin kesişimi soft kapalı kümedir,
3) Herhangi iki soft kapalı kümenin birleşimi soft kapalı kümedir.

Örnek 3.2.1 [64] $\tilde{\tau}=\{\Phi,\tilde{X}\}$ olsun. O halde $\tilde{\tau}$ soft indiskret topoloji olarak adlandırılır ve $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft indiskret uzay olarak adlandırılır. $\tilde{\tau}$, X üzerinde tanımlanabilecek tüm soft kümelerin ailesi olsun. O halde $\tilde{\tau}$, X üzerinde soft diskret topoloji ve $(X,\tilde{\tau},E)$ soft diskret uzay olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.2 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun. O halde her $e\in E$ için, $\tilde{\tau}_e=\{F(e) \mid (F,E)\in\tilde{\tau}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Tanım 3.2.4 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. (F,E) soft kümesini içeren tüm soft kapalı kümelerin arakesitine (F,E) nin soft kapanışı denir ve $cl(F,E)$ ile gösterilir.

Açıktır ki, $cl(F,E)$, (F,E)'yi içeren en küçük soft kapalı kümedir.

Teorem 3.2.1 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır;

1) $cl(\Phi)=\Phi$ ve $cl(X)=X$;
2) $(F,E)\tilde{\subseteq} cl(F,E)$;
3) (F,E) bir soft kapalı kümedir $\Leftrightarrow (F,E)=cl((F,E))$;

4) $cl\left(cl\left(\left(F,E\right)\right)\right)=cl\left(\left(F,E\right)\right)$;

5) $\left(F,E\right)\tilde{\subseteq}\left(G,E\right)$, $cl\left(\left(F,E\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(\left(G,E\right)\right)$;

6) $cl\left(\left(F,E\right)\tilde{\bigcup}\left(G,E\right)\right)=cl\left(\left(F,E\right)\right)\tilde{\bigcup}cl\left(\left(G,E\right)\right)$;

7) $cl\left(\left(F,E\right)\tilde{\bigcap}\left(G,E\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(\left(F,E\right)\right)\tilde{\bigcap}cl\left(\left(G,E\right)\right)$ dir.

Teorem 3.2.2 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS\left(X\right)_E$ olsun. Her $e\in E$ için $cl\left(F\right)\left(e\right)=cl\left(F\left(e\right)\right)$ ile verilir. Burada $cl\left(\left(F,E\right)\right)$ herbir $e\in E$ için $\tilde{\tau}_e$ da $F\left(e\right)$ nın kapanışıdır.

Önerme 3.2.3 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS\left(X\right)_E$ olsun. Böylece $\left(cl\left(F\right),\left(E\right)\right)\tilde{\subseteq}cl\left(\left(F,E\right)\right)$ dir.

Tanım 3.2.5 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay, $\left(F,E\right),\left(G,E\right)\in SS\left(X\right)_E$ ve $x_e\tilde{\in}SS\left(X\right)_E$ olsun. Eğer $x_e\tilde{\in}\left(F,E\right)\tilde{\subseteq}\left(G,E\right)$ olacak şekilde $\left(F,E\right)$ soft açık kümesi mevcutsa x_e'ye $\left(G,E\right)$'nin soft iç noktası denir.

Tanım 3.2.6 [64] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay, $\left(G,E\right)\in SS\left(X\right)_E$ ve $x_e\tilde{\in}X$ olsun. Eğer $x_e\tilde{\in}\left(F,E\right)\tilde{\subseteq}\left(G,E\right)$ olacak şekilde $\left(F,E\right)$ soft açık kümesi varsa $\left(G,E\right)$ ye x_e'in soft komşuluğu denir.

3.3 Soft Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.3.1. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $x_e\neq y_{e'}$ olsun. Eğer $x_e\tilde{\in}(F,E)$ ve $y_{e'}\tilde{\notin}(F,E)$ veya $y_{e'}\tilde{\in}(G,E)$ ve $x_e\tilde{\notin}(G,E)$ olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına bir soft T_0-uzayı denir.

Tanım 3.3.2. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $x_e \neq y_{e'}$ olsun. Eğer $x_e \tilde{\in} (F,E)$, $y_{e'} \tilde{\notin} (F,E)$ ve $y_{e'} \tilde{\in} (G,E)$, $x_e \tilde{\notin} (G,E)$ olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına bir soft T_1-uzayı denir.

Önerme 3.3.1. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun.

1) Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft T_0-uzayı ise $\forall e \in E$ için $(X,\tilde{\tau}_e)$ bir soft T_0-uzayıdır.

2) Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft T_1-uzayı ise $\forall e \in E$ için $(X,\tilde{\tau}_e)$ bir soft T_1-uzayıdır.

Tanım 3.3.3. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $x_e \neq y_{e'}$ olsun. Eğer

$$x_e \tilde{\in} (F,E),\ y_{e'} \tilde{\in} (G,E) \text{ ve } (F,E)\tilde{\bigcap}(G,E) = \Phi$$

olacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına bir soft T_2-uzayı denir.

Önerme 3.3.2. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft T_2-uzayı ise $\forall e \in E$ için $(X,\tilde{\tau}_e)$ bir soft T_2-uzayıdır.

Tanım 3.3.4. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde soft kapalı bir küme, $x_e \tilde{\notin} (F,E)$ olsun. Eğer

$$x_e \tilde{\in} (G_1,E),\ (F,E) \tilde{\subseteq} (G_2,E) \text{ ve } (G_1,E)\tilde{\bigcap}(G_2,E) = \Phi$$

olacak şekilde (G_1,E) ve (G_2,E) soft açık kümeleri varsa $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayına bir soft regüler uzay denir.

Tanım 3.3.5. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay olsun. Eğer $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft regüler ve soft T_1-uzayı ise $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayına soft T_3-uzayı denir.

Tanım 3.3.6. [23] $(X,\tilde{\tau},E)$, bir soft topolojik uzay olsun. (F,E) ve (G,E), X üzerinde iki soft kapalı küme ve $(F,E)\tilde{\bigcap}(G,E) = \Phi$ koşulu sağlansın. Eğer

$$(F,E) \tilde{\subseteq} (F_1,E),\ (G,E) \tilde{\subseteq} (F_2,E) \text{ ve } (F_1,E)\tilde{\bigcap}(F_2,E) = \Phi$$

olacak şekilde (F_1, E) ve (F_2, E) soft açık kümeleri varsa $(X, \tilde{\tau}, E)$ uzayına bir soft normal uzay denir.

$(X, \tilde{\tau}, E)$, X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer $(X, \tilde{\tau}, E)$ bir soft normal uzay ve soft T_1-uzayı ise $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayına soft T_4-uzayı denir.

3.4. Soft Sürekli Dönüşümler

Tanım 3.4.1 [26] $f:(X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\tau}', E)$ bir fonksiyon, $(X, \tilde{\tau}, E)$, $(Y, \tilde{\tau}', E)$ iki soft topolojik uzay olsun. $f(x)_e$ nin herhangi (H, E) soft komşuluğu için $f((F, E)) \tilde{\subseteq} (H, E)$ sağlanacak şekilde x_e nin bir (F, E) soft komşuluğu bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_e de soft sürekli fonksiyon denir.

Eğer $f:(X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\tau}', E)$ soft fonksiyonu her soft noktada sürekli ise f fonksiyonuna soft süreklidir denir.

Teorem 3.4.1. [26] $(X, \tilde{\tau}, E)$ ve $(Y, \tilde{\tau}', E)$ iki soft topolojik uzay, $f:(X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\tau}', E)$ bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

1) $f:(X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\tau}', E)$ soft sürekli dönüşümdür,

2) Y üzerinde herbir (G, E) soft açık küme için $f^{-1}((G, E))$, X üzerinde soft açık kümedir,

3) Y üzerinde herbir (H, E) soft kapalı küme için $f^{-1}((H, E))$, X üzerinde soft kapalı kümedir,

4) X üzerinde herbir (F, E) soft küme için, $f\left(cl((F, E))\right) \tilde{\subseteq} \left(cl\left(f(F, E)\right)\right)$,

5) Y üzerinde herbir (G, E) soft küme için $\left(cl\left(\left(f^{-1}(G, E)\right)\right)\right) \tilde{\subseteq} f^{-1}\left(cl(G, E)\right)$,

6) Y üzerinde herbir (G, E) soft küme için $f^{-1}\left(Int(G, E)\right) \tilde{\subseteq} Int\left(f^{-1}(G, E)\right)$.

Tanım 3.4.2. [26] $f: X \to Y$ bir dönüşüm, $(X, \tilde{\tau}, E)$, $(Y, \tilde{\tau}', E)$ iki soft topolojik uzay olsun. Eğer f, birebir (1-1), örten , soft sürekli ve f^{-1} soft sürekli bir dönüşüm ise f , X den Y ye bir soft homeomorfizm olarak tanımlanır.

3.5. Soft b-Açık Kümeler

Tanım 3.5.1 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) Eğer (F,E) soft kümesi $(F,E)\tilde{\subseteq} Int(cl((F,E)))\tilde{\bigcup} cl(Int((F,E)))$ koşulunu sağlıyor ise (F,E) soft kümesine *soft* $b-açık$ $(sb-açık)$ küme denir.

2) Eğer (F,E) soft kümesi $(F,E)\tilde{\supseteq} Int(cl((F,E)))\tilde{\bigcap} cl(Int((F,E)))$ koşulunu sağlıyor ise (F,E) soft kümesine, *soft* $b-kapalı$ $(sb-kapalı)$ küme denir.

Teorem 3.5.1 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) Eğer $(F,E)^c$ soft kümesi, $sb-kapalı$ küme ise, (F,E) $sb-açık$ kümedir.

2) Eğer $(F,E)^c$ soft kümesi, $sb-açık$ küme ise, (F,E) $sb-kapalı$ kümedir.

Tanım 3.5.2 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ bir soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun.

1) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında bir (F,E) soft kümesinin soft b-kapanışı $sbcl((F,E))=\tilde{\bigcap}\{(G,E)\tilde{\supseteq}(F,E):(G,E)\ X\text{'in } sb-kapalı \text{ kümesidir}\}$ ile tanımlanır.

2) $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzayında bir (F,E) soft kümesinin soft b-içi $sbInt((F,E))=\tilde{\bigcup}\{(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E):(G,E)\ X\text{'in } sb\text{-}açık \text{ kümesidir}\}$ ile tanımlanır.

Açıktır ki $sbcl((F,E))$, $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayındaki (F,E) soft kümesini içeren $sb-kapalı$ kümelerin en küçüğü; $sbInt((F,E))$, (F,E) kümesinin içerdiği $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayındaki en büyük $sb-açık$ kümedir.

Teorem 3.5.2 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ soft topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. O halde,

1) $sbcl\left((F,E)^c\right)=X\tilde{-}sbInt\left((F,E)\right)$,

2) $sbInt\left((F,E)^c\right)=X\tilde{-}sbcl\left((F,E)\right)$ dir.

Teorem 3.5.3. [3] $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzayında

1) Keyfi sayıdaki $sb-açık$ kümenin birleşimi $sb-açık$ kümedir;

2) Keyfi sayıdaki $sb-kapalı$ kümenin kesişimi $sb-kapalı$ kümedir.

Teorem 3.5.4. [3] $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F, E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) (F, E) $soft\ b-kapalıdır \Leftrightarrow$ $(F, E) = sbcl((F, E))$.

2) (F, E) $soft\ b-açıktır \Leftrightarrow$ $(F, E) = sbInt((F, E))$.

Teorem 3.5.5. [3] $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve $(F, E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) $sbcl(\Phi) = \Phi$,

2) $sbInt(\Phi) = \Phi$,

3) $sbcl(F, E)$**,** $sb-kapalı$ kümedir,

4) $sbcl(sbcl(F, E)) = sbcl((F, E))$.

Teorem 3.5.6. [3] $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve (F, E), $(G, E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) $sbcl((F, E) \tilde{\cup} (G, E)) \tilde{\supseteq} sbcl((F, E)) \tilde{\cup} sbcl((G, E))$,

2) $sbcl((F, E) \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\subseteq} sbcl((F, E)) \tilde{\cap} sbcl((G, E))$.

Teorem 3.5.7. [3] $(X, \tilde{\tau}, E)$ soft topolojik uzay ve (F, E), $(G, E) \in SS(X)_E$ olsun.

1) $sbInt((F, E) \tilde{\cup} (G, E)) \tilde{\supseteq} sbInt((F, E)) \tilde{\cup} sbInt((G, E))$,

2) $sbInt((F, E) \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\subseteq} sbInt((F, E)) \tilde{\cap} sbInt((G, E))$.

3.6. Soft b-Süreklilik

$(X, \tilde{\tau}, E)$ ve $(Y, \tilde{\tau}', E')$ iki soft topolojik uzay ve $f : (X, \tilde{\tau}, E) \to (Y, \tilde{\tau}', E')$ soft fonksiyon olsun.

Tanım 3.6.1 [3] Eğer $(Y,\tilde{\tau}',E')$ uzayındaki her $soft-açık$ kümenin ters görüntüsü $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayında $sb-açık$ ise f soft fonksiyonuna $soft-b\ sürekli$ fonksiyon (kısaca $sb-sürekli$ fonksiyon) denir.

Teorem 3.6.1 [3] $f:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\tau}',E')$,
$f\ sb-süreklidir \Leftrightarrow (Y,\tilde{\tau}',E')$ deki her $soft-kapalı$ kümenin ters görüntüsü $(X,\tilde{\tau},E)$ de bir $sb-kapalı$ kümedir.

Teorem 3.6.2 [3] Her soft sürekli fonksiyon aynı zamanda $sb-sürekli$ foksiyondur.

Teorem 3.6.3 [3] $f:(X,\tilde{\tau},E)\rightarrow(Y,\tilde{\tau}',E')$, $g:(Y,\tilde{\tau}',E')\rightarrow(Z,\tilde{\tau}'',E'')$ soft $sb-sürekli$ iki fonksiyon olsun. Eğer $f\ sb-sürekli$ ve g $sb-sürekli$ ise $gof:(X,\tau,E)\rightarrow(Z,\tilde{\tau}'',E'')$ $sb-sürekli$ dir.

Tanım 3.6.2 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayında her $soft-açık$ kümenin f altındaki görüntüsü $sb-açık$ küme ise f soft fonksiyonuna $sb-açık\ fonksiyon$ denir.

Tanım 3.6.3 [3] $(X,\tilde{\tau},E)$ uzayında her $soft-kapalı$ kümenin f altındaki görüntüsü $sb-kapalı$ küme ise f soft fonksiyonuna $sb-kapalı\ fonksiyon$ denir.

3.7. Soft İkili Topolojik Uzaylar

X evrensel küme, E paremetre kümesi ve $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ X üzerinde iki soft topolojik uzay olsun.

Tanım 3.7.1 [30] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ dörtlü sistemine soft ikili topolojik uzay denir.

Tanım 3.7.2 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay, $(G,E)\in SS(X)_E$ olsun. $(G_1,E)\in\tilde{\tau}_1$ ve $(G_2,E)\in\tilde{\tau}_2$ soft açık kümeleri için $(G,E)=(G_1,E)\tilde{\bigcup}(G_2,E)$ şeklinde yazılabiliyor ise (G,E) soft kümesine $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili uzayında *soft çiftsel açık küme* (kısaca *soft $p-$açık* küme) denir.

Tanım 3.7.3 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay, $(H,E)\in SS(X)_E$ olsun. Eğer (H,E) soft kümesinin tümleyeni bir *soft $p-$açık* küme ise (H,E) soft kümesine $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında *soft çiftsel kapalı küme* (kısaca *soft $p-$kapalı* küme) denir.

Açıktır ki $\tilde{\tau}_i^c=\{(H,E)^c\in SS(X)_E:(H,E)\in\tau_i\}_{i=1,2}$, $(H_1,E)\in\tilde{\tau}_1^c$ ve $(H_2,E)\in\tilde{\tau}_2^c$ olmak üzere; $(H,E)=(H_1,E)\tilde{\bigcap}(H_2,E)$ şeklinde yazılabiliyorsa (H,E) soft kümesine $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında *soft $p-$kapalı* küme denir. $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında tüm *soft $p-$açık* (*soft $p-$kapalı*) kümeler ailesi sırasıyla POS $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ $(PCS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E)$ gösterilir.

Teorem 3.7.1 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay olsun.

1) Φ, $\tilde{X}$ soft kümeleri hem *soft $p-$açık* kümeler hem de *soft $p-$kapalı* kümelerdir.

2) Keyfi sayıdaki *soft $p-$açık* kümenin birleşimi bir *soft $p-$açık* kümedir.

3) Keyfi sayıdaki *soft $p-$kapalı* kümenin kesişimi bir *soft $p-$kapalı* kümedir.

4) Eğer $(G,E)\tilde{\in}\tilde{\tau}_1\tilde{\bigcap}\tilde{\tau}_2$ ve $(H,E)\tilde{\in}POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ ise $(G,E)\tilde{\bigcap}(H,E)\tilde{\in}POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ dir.

Sonuç 3.7.1 [36] μ, X üzerindeki soft kümelerin bir alt ailesi olsun. $\left[\text{i.e., } \mu\tilde{\subseteq}SS(X)_E\right]$.

1) Φ, $\tilde{X}\in\mu$,

2) μ den alınan herhangi sayıdaki soft kümenin birleşimi μ ye ait ise μ ye X üzerinde soft supra topoloji denir.

Sonuç 3.7.2 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay olsun. Tüm $soft\ p-açık$ kümeler ailesi X üzerinde bir soft supra topoloji oluşturur. Bu soft supra topolojiyi $\tilde{\tau}_{12}$ olarak gösteririz.

$\tilde{\tau}_{12} = POS(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E = \{(G,E) = (G_1,E)\tilde{\bigcup}(G_2,E) : (G_i,E)\tilde{\in}\tilde{\tau}_i, i=1,2\}$ ile gösterilir.

Teorem 3.7.2 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay olsun.

1) Her soft $\tilde{\tau}_i$ - açık küme bir $soft\ p-açık$ kümedir. i=1,2.

2) Her soft $\tilde{\tau}_i$ -kapalı küme bir $soft\ p-kapalı$ kümedir. i=1,2.

Tanım 3.7.4 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayın (G,E) soft kümesini içeren tüm $soft\ p-kapalı$ kümelerin arakesitine (G,E) nin soft çiftsel kapanışı denir ve $cl_p^s((G,E))$ olarak gösterilir.

$$cl_p^s((G,E)) = \tilde{\bigcap}\{(F,E)\in\tilde{\tau}_{12}^c : (G,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}.$$

Açıktır ki $cl_p^s((G,E))$, (G,E) yi içeren en küçük $soft\ p-kapalı$ kümedir.

Tanım 3.7.5 [36] $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayın (G,E) soft kümesinin içerdiği tüm $soft\ p-açık$ kümelerin birleşimine (G,E) nin soft çiftsel içi denir ve $Int_p^s((G,E))$ olarak gösterilir.

$$Int_p^s((G,E)) = \tilde{\bigcup}\{(F,E)\in\tilde{\tau}_{12} : (F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)\}.$$

Açıktır ki $Int_p^s((G,E))$, (G,E) nin içerdiği en büyük $soft\ p-açık$ kümedir.

Tanım 3.7.6 ([56]) $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ ve $(Y,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_{2,}E)$ iki soft topolojik uzay olsun, $(f,1_E):(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_{2,}E)$ (kısaca f olarak gösterilen) bir soft fonksiyon ve $x_e\tilde{\in}SS(X)_E$ olsun. Eğer $f(x_e)$ noktasının her (G,E) $soft\ p-komşuluğu$ için $f((F,E))\tilde{\subseteq}(G,E)$ olacak şekilde x_e soft noktasının bir (F,E) $soft\ p-komşuluğu$ varsa f fonksiyonuna x_e noktasında soft çiftsel süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu her $x_e \tilde{\in} SS(X)_E$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna *soft* $p-$*sürekli* fonksiyon denir.

Tanım 3.7.7 [8] $(X, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, E)$ soft ikili topolojik uzay ve $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E)$ olsun.

1) Eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} Int_p^s(cl_p^s(Int_p^s((F,E))))$ ise (F,E) ye *soft çiftsel* α*-açık* denir.

2) Eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s(F,E)))$ ise (F,E) ye *soft çiftsel yarı*$-$*açık* denir.

3) Eğer $(F,E) \tilde{\subseteq} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ ise (F,E) ye *soft çiftsel ön*$-$*açık* denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde bazı derlemeler ve sonuçlar ortaya konulmuştur.

4.1 Soft Çiftsel b-Açık Kümeler

Tanım 4.1.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve $\left(F,E\right)\in SS\left(X\right)_E$ olsun. Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\bigcup} Int_p^s((cl_p^s((F,E)))$ ise (F,E) soft kümesine $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında *soft çiftsel* $b-$*açık* küme kısaca (*soft* b_p-*açık* küme) denir. *Soft* b_p-*açık* kümesinin tümleyenine de *soft çiftsel* $b-$*kapalı* küme kısaca *soft* b_p-*kapalı* küme denir.

$(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ uzayında bütün *soft* b_p-*açık* $\left(kapalı\right)$ kümelerin ailesi sırasıyla $PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ $(PbC(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1. $X=\{a,b,c\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi ve X üzerindeki soft kümeler aşağıdaki gibi verilsin.

$$(F_1,E)=\{(e_1,\ \{a,b\}),\ (e_2,\ \{a,c\})\}$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\ \{b,c\}),\ (e_2,\ \{b\})\}$$

$$(F_3,E)=\{(e_{1,}\ \{b\}),\ (e_2,\ \varnothing)\}$$

$$(G_1,E)=\{(e_1,\ \{a\},\ (e_2,\ \{a,c\})\}$$

$$(G_2,E)=\{(e_1,\ \{b,c\}),\ (e_2,\ \{b,c\})\}$$

$$(G_3,E)=\{(e_1,\ \varnothing),\ (e_2,\ \{c\})\}\ .$$

$\tilde{\tau}_1=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ve $\tilde{\tau}_2=\{\Phi,\ X,\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E)\}$ birer soft topolojik uzay olmak üzere $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzaydır.

$(H,\ E)=(F_3,\ E)\tilde{\bigcup}(G_3,\ E)=\{(e_1,\ \{b\}),(e_2,\ \{c\})\}$ olmak üzere

$\tilde{\tau}_{12}=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E),\ (G_1,E),\ (G_2,E),\ (G_3,E),\ (H,E)\}$ şeklinde elde edilir.

X üzerindeki bir $(K,\ E)=\{(e_1,\ \{b\}),\ (e_2,\ \{b\})\}$ soft kümesi ele alındığında bu soft kümenin bir *soft* b_p-*açık* küme olduğu görülür.

Önerme 4.1.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. (F,E) bir *soft* $b_p-kapalı$ kümedir $\Leftrightarrow cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\bigcap} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))\tilde{\subseteq}(F,E)$ dir.

Teorem 4.1.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzay olsun. O halde

1) Φ, $\tilde{X}$ hem *soft* $b_p-açık$ kümeler hem de *soft* $b_p-kapalı$ kümelerdir.

2) Herhangi sayıdaki *soft* $b_p-açık$ kümenin birleşimi daima *soft* $b_p-açık$ kümedir.

3) Herhangi sayıdaki *soft* $b_p-kapalı$ kümenin kesişimi daima *soft* $b_p-kapalı$ kümedir.

İspat)

1) Her durumda $\Phi\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s(\Phi))\tilde{\bigcup} Int_p^s(cl_p^s(\Phi))$ ve $X\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s(X))\tilde{\bigcup} Int_p^s(cl_p^s(X))$ sağlandığından Φ, X *soft* $b_p-açık$ kümedir.

2) $\{(F_{i,}E):i\in\Delta\}\subseteq PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E$ olsun. Her $i\in\Delta$ için (F_i,E) birer *soft* $b_p-açık$ küme olduğundan $(F_i,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F_i,E)))\tilde{\bigcup} Int_p^s(cl_p^s((F_i,E)))$ sağlanır. O halde

$$\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}}(F_i,E)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}}[cl_p^s(Int_p^s((F_i,E)))\tilde{\bigcup} Int_p^s(cl_p^s((F_i,E)))]$$

$$=\left[\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}} cl_p^s(Int_p^s((F_i,E)))\right]\tilde{\bigcup}\left[\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}} Int_p^s(cl_p^s((F_i,E)))\right]$$

$$\tilde{\subseteq}\left[cl_p^s\left(\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}} Int_p^s((F_i,E))\right)\right]\tilde{\bigcup}\left[Int_p^s\left(\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}} cl_p^s((F_{i,}E))\right)\right]$$

$$=\left[cl_p^s\left(Int_p^s\left(\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}}(F_i,E)\right)\right)\right]\tilde{\bigcup}\left[Int_p^s\left(cl_p^s\left(\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}}(F_i,E)\right)\right)\right].$$

Dolasıyla, $\tilde{\bigcup_{i\in\Delta}}(F_i,E)$ bir *soft* $b_p-açık$ kümedir.

3) *Soft* $b_p - kapalı$ kümenin tanımından yukarıda ki ispata benzer şekilde kolaylıkla elde edilir.

Not 4.1.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. O halde

1) Sonlu $soft\ b_p - açık$ kümenin arakesiti bir $soft\ b_p - açık$ küme olmak zorunda değildir.

2) Keyfi sayıda ki $soft\ b_p - kapalı$ kümenin birleşimi $soft\ b_p - kapalı$ küme olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.2 $X=\{a,b,c\}$**,** $E=\{e\}$ parametreler kümesi ve X üzerindeki soft kümeler aşağıdaki gibi verilsin.

$$(F_1,E)=\{(e,\ \{a,b\})\}\ ,$$
$$(F_2,E)=\{(e,\ \{a,c\})\},$$
$$(F_3,E)=\{(e,\ \{a\})\}\ ,$$
$$(G_1,E)=\{(e,\ \{a\})\},$$
$$(G_2,E)=\{(e,\ \{b,c\})\},$$

$\tilde{\tau}_1=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E)\}$ ve

$\tilde{\tau}_2=\{\Phi,\ X,\ (G_1,E),\ (G_2,E)\}$ birer soft topolojik uzay olmak üzere $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzaydır.

$\tilde{\tau}_{12}=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E),\ (G_1,E),\ (G_2,E)\}$ şeklinde elde edilir.

$(K_1,E)=\{(e,\ \{a,b\})\}$ ve $(K_2,E)=\{(e,\ \{b,c\})\}$ X üzerinde herhangi iki soft küme olsun. Açıktır ki (K_1,E) ve (K_2,E) birer $soft\ b_p - açık$ küme olmasına rağmen $(K_1,E)\tilde{\bigcap}(K_2,E)$ $soft\ b_p - açık$ küme değildir.

Bu nedenle tüm $soft\ b_p - açık$ kümelerin ailesi soft topoloji oluşturmayabilir.

Uyarı 4.1.1 Bir $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında tüm $soft\ b_p - açık$ kümelerin ailesi bir soft supra topoloji oluşturur.

Tanım 4.1.2 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$, $\left(F,E\right)$yi içeren tüm *soft* $b_p-kapalı$ kümelerin arakesitine (F,E)nin *soft* $b_p-kapanışı$ denir ve $cl_b^p((F,E))$ile gösterilir. Yani,

$$cl_b^p((F,E))=\tilde{\bigcap}\left\{(G,E)\in PbC(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E:(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E))\right\}.$$

Açıktır ki $cl_b^p((F,E)),(F,E)$yi içeren en küçük *soft* $b_p-kapalı$ kümedir.

Teorem 4.1.2 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve (F,E), $\left(G,E\right)\in SS(X)_E$ olsun. O halde

1) $cl_b^p(X)=X$ ve $cl_b^p(\Phi)=\Phi$

2) $(F,E)\tilde{\subseteq}cl_b^p((F,E))$,

3) Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $cl_b^p((F,E))\tilde{\subseteq}cl_b^p((G,E))$,

4) $cl_b^p(cl_b^p((F,E)))=cl_b^p((F,E))$

5) $cl_b^p((F,E))\tilde{\bigcup}cl_b^p((G,E))\tilde{\subseteq}cl_b^p((F,E)\tilde{\bigcup}(G,E))$.

İspat) İspatı açıktır**.**

Tanım 4.1.3 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. (F,E)nin bütün *soft* $b_p-açık$ altkümelerinin birleşimine (F,E)nin *soft* $b_p-içi$ denir ve bu şekilde $Int_b^p((F,E))$gösterilir. Yani,

$$Int_b^p((F,E))=\tilde{\bigcup}\left\{(G,E)\in PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E:(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E))\right\}.$$

Açıktır ki $Int_b^p((F,E)),(F,E)$ nin kapsadığı en büyük *soft* $b_p-açık$ kümedir.

Teorem 4.1.3 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve (F,E), $\left(G,E\right)\in SS(X)_E$olsun. O halde

1) $Int_b^p(X)=X$ ve $Int_b^p(\Phi)=\Phi$,

2) $Int_b^p((F,E))\tilde{\subseteq}(F,E)$,

3) Eğer $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $Int_b^p((F,E))\tilde{\subseteq}Int_b^p((G,E))$,

4) $Int_b^p(Int_b^p((F,E))) = Int_b^p((F,E))$,

5) $Int_b^p((F,E)\tilde{\cap}(G,E)) \tilde{\subseteq} Int_b^p((F,E))\tilde{\cap} Int_b^p((G,E))$**.**

İspat) İspatı açıktır.

Önerme 4.1.2 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay ve $(F,E)\in SS(X)_E$ olsun. O halde

1) $cl_b^p((F,E)^c) = X - Int_b^p((F,E))$,

2) $Int_b^p((F,E)^c) = X - cl_b^p((F,E))$.

İspat)

1) $X - Int_b^p((F,E)) = \left[\tilde{\bigcup}(G,E):(G,E)\tilde{\subseteq}(F,E),(G,E)\in PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E\right]^c$

$=\tilde{\bigcap}\left\{(G^c,E):(F^c,E)\tilde{\subseteq}(G^c,E),\ (G^c,E)\in PbC(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E\right\}$

$=cl_b^p((F,E)^c)$**.**

2) $X - cl_b^p((F,E)) = \left[\tilde{\bigcap}(G,E):(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E),(G,E)\in PbC(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E\right]^c$

$=\tilde{\bigcup}\left\{(G^c,E):(G^c,E)\tilde{\subseteq}(F^c,E),(G^c,E)\in PbO(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2)_E\right\}$

$= Int_b^p((F,E)^c)$

Teorem 4.1.4 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzay olsun. O halde

1) Her $soft\ p-açık\ (kapalı)$ küme bir $soft\ b_p-açık\ (b_p-kapalı)$ kümedir.

2) Her $soft\ çiftsel\ \alpha-açık\ (\alpha-kapalı)$ küme bir $soft\ b_p-açık\ (b_p-kapalı)$ kümedir.

3) Her $soft\ çiftsel\ yarı\ açık\ (yarı\ kapalı)$ küme bir $soft\ b_p-açık\ (b_p-kapalı)$ kümedir.

4) Her $soft\ çiftsel-ön\ açık\ (ön\ kapalı)$ küme bir $soft\ b_p-açık\ (b_p-kapalı)$ kümedir.

İspat)

1) $(F,E)\in SS(X)_E$ herhangi bir *soft* $p-$*açık* küme olsun. Bu durumda $(F,E)=Int_p^s((F,E))$ şeklinde yazılabilir. $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s((F,E))=cl_p^s(Int_p^s((F,E)))$ olduğundan $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ dir. Bu nedenle (F,E) bir *soft* b_p-*açık* kümedir.

2) $(F,E)\in SS(X)_E$ herhangi bir *soft çiftsel* $\alpha-$*açık* küme olsun. O halde $(F,E)\tilde{\subseteq} Int_p^s(cl_p^s(Int_p^s((F,E))))$ şeklinde yazılabilir. $Int_p^s(cl_p^s(Int_p^s(F,E))))\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E))))\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E))))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E))))$, olduğundan $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E))))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ dir. Bu nedenle (F,E) bir *soft* b_p-*açık* kümedir.

3) $(F,E)\in SS(X)_E$ herhangi bir *soft çiftsel yarı açık* küme olsun. $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))$ şeklinde yazılabilir. $cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ olduğundan $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ dır. Bu nedenle (F,E) bir *soft* b_p-*açık* kümedir.

4) $(F,E)\in SS(X)_E$ herhangi bir *soft çiftsel* $-$ *ön açık* küme olsun. $(F,E)\tilde{\subseteq} Int_p^s(cl_p^s((F,E))$ şeklinde yazılabilir. $Int_p^s(cl_p^s((F,E)))\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E)))$ olduğundan $(F,E)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Int_p^s((F,E)))\tilde{\cup} Int_p^s(cl_p^s((F,E))$ dır. (F,E) bir *soft* b_p-*açık* kümedir.

Uyarı 4.1.2

Yukarıdaki ifadelerin tersinin herzaman doğru olmadığına ait aşağıda örnekler verelim.

Örnek 4.1.3

1) Örnek 4.1.1 gözönüne alındığında soft kümeler (K,E) *soft* $b_p-açık$ kümesinin, *soft açık* ve *soft* $p-açık$ küme olmadığı görülür.

2) $X=\{a,b,c\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi olsun Aşağıdaki soft kümeleri X üzerinde ki soft kümeler

$$(F,E)=\{(e_1,\ \{a,c\}),\ (e_2,\ \{b,c\})\}\ ,$$

$$(G,E)=\{(e_1,\ \{b,c\}),\ (e_2,\ \{a,c\})\}\ ,$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $\tilde{\tau}_1=\{\Phi,\ X,\ (F,E)\}$ ve $\tilde{\tau}_2=\{\Phi,\ X,\ (G,E)\}$ birer soft topolojik uzay olmak üzere $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzaydır.

Açıktır ki, $\tilde{\tau}_{12}=\{\Phi,\ X,\ (F,E),\ (G,E)\}$ şeklindedir. X üzerindeki herhangi bir $(H,E)=\{(e_1,\ \{a,b\}),\ (e_2,\ \{a,b\})\}$ soft kümesi *soft* $b_p-açık$ kümedir ancak *soft* $b_p-açık$ küme bir *soft çiftsel* $\alpha-açık$ küme değildir.

3) Örnek 4.1.3 (2) gözönüne alındığında (H,E) bir *soft* $b_p-açık$ kümedir ancak *soft çiftsel yarı açık* küme değildir.

4) $X=\{a,b,c,d\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ paremetreler kümesi olsun. X üzerindeki aşağıdaki soft kümeleri kabul edelim,

$$(F_1,E)=\{(e_1,\{a\}),(e_{2,}\{b\})\},$$

$$(F_2,E)=\{(e_1,\{b\}),(e_2,\{a\})\},$$

$$(F_3,E)=\{(e_3,\{a,b\}),(e_2,\{a,b\})\}$$

$$(F_4,E)=\{(e_1,\{a,b,c\}),(e_2,\{a,b,c\})\}$$

$\tilde{\tau}_1=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E),\ (F_4,E)\}$ ve $\tilde{\tau}_2=\{\Phi,\ X,\ (G,E)\}$ birer soft topolojik uzay olmak üzere $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ bir soft ikili topolojik uzaydır.

Açıktır ki; $\tilde{\tau}_{12}=\{\Phi,\ X,\ (F_1,E),\ (F_2,E),\ (F_3,E),\ (F_4,E),\ (G,E)\}$ şeklinde elde edilir.

X üzerindeki herhangibir $(H,E)=\{(e_1,\ \{a,c\}),\ (e_2,\ \{b,c\})\}$ soft kümesi *soft* $b_p-açık$ kümedir ancak *soft çiftsel*$-$*ön açık* küme değildir.

Sonuç 4.1.1 Herhangibir $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ soft ikili topolojik uzayında

$soft\ açık \rightarrow soft\ çiftsel\ açık \rightarrow soft\ çiftsel\ \alpha-açık \rightarrow soft\ çiftsel\ yarı-açık \rightarrow$
$soft\ çiftsel\ b-açık \leftarrow soft\ çiftsel-ön\ açık$

ifadesi yazılabilir.

4.2 Soft Çiftsel b-Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\rightarrow(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun.

1) Eğer Y üzerindeki her $soft\ p-açık$ kümenin ters görüntüsü X üzerinde $soft\ çiftsel\ \alpha-açık$ küme ise f fonksiyonuna bir $soft\ çiftsel\ \alpha-sürekli$ fonksiyon denir.

2) Eğer Y üzerindeki her $soft\ p-açık$ kümenin ters görüntüsü X üzerinde bir $soft\ çiftsel\ yarı\ açık$ küme ise f fonksiyonuna bir $soft\ çiftsel\ yarı\ sürekli$ fonksiyon denir.

3) Eğer Y üzerindeki her $soft\ p-açık$ kümenin ters görüntüsü X üzerinde bir $soft\ çiftsel\ ön-açık$ küme ise f fonksiyonuna bir $soft\ çiftsel\ ön-sürekli$ fonksiyon denir.

Tanım 4.2.2 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\rightarrow(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun. Eğer Y üzerindeki her $soft\ p-açık$ kümenin ters görüntüsü X üzerinde bir $soft\ b_p-açık$ küme ise f fonksiyonuna bir $soft\ b_p-sürekli$ fonksiyon denir.

Teorem 4.2.1 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\rightarrow(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

1) f , bir $soft\ b_p-sürekli$ fonksiyondur;

2) Y üzerinde $soft\ p-kapalı$ kümenin ters görüntüsü X üzerinde bir $soft\ b_p-kapalı$ kümedir.

3) Y üzerinde her (G,E) soft kümesi için $cl_b^p(f^{-1}((G,E)))\tilde{\subseteq} f^{-1}(cl_p^s((G,E))$ için sağlanır.

4) X üzerinde her (F,E) soft kümesi için $f(cl_b^p((F,E)))\tilde{\subseteq} cl_p^s(f((F,E)))$ sağlanır.

5) Y üzerinde her (G,E) soft kümesi için $f^{-1}(Int_p^s((G,E))\tilde{\subseteq} Int_b^p(f^{-1}((G,E)))$ sağlanır.

İspat)

$1.)\Rightarrow 2.)$ (G,E) Y üzerinde bir $soft\ p-kapalı$ küme olsun. Bu durumda $Y-(G,E)$ Y üzerinde bir $soft\ p-açık$ kümedir. $f^{-1}(Y-(G,E))=X-f^{-1}((G,E))$ X üzerinde $soft\ b_p-açık$ kümedir. Bu nedenle $f^{-1}((G,E))$ X üzerinde bir $soft\ b_p-kapalı$ kümedir.

$2.)\Rightarrow 3.)$ (G,E), Y üzerinde herhangi bir soft küme olsun. $cl_p^s((G,E))$ Y üzerinde $soft\ p-kapalı$ olduğundan $f^{-1}(cl_p^s((G,E)))$ X üzerinde bir $soft\ b_p-kapalı$ kümedir.

$cl_b^p(f^{-1}((G,E)\tilde{\subseteq} cl_b^p(f^{-1}(cl_p^s((G,E))))=f^{-1}(cl_p^s((G,E)))$.

$3.)\Rightarrow 4.)$ (F,E) X üzerinde herhangibir soft küme olsun, teoremin kabulünden $f^{-1}(cl_p^s(f((F,E))))\tilde{\supseteq} cl_b^p(f^{-1}(f((F,E))))\tilde{\supseteq} cl_b^p((F,E)))$ yazarız.

Bu nedenle, $f(cl_b^p((F,E)))\tilde{\subseteq} cl_p^s(f((F,E)))$ dır.

$4.)\Rightarrow 5.)$ (G,E) Y üzerinde herhangi bir soft küme olsun. Teoremin kabulünden ve önerme 4.1.2 den $f\left(cl_b^p\left(X-f^{-1}((G,E))\right)\right)\tilde{\subseteq} cl_p^s(f(X-f^{-1}((G,E))))$ ve

$f\left(X-Int_b^p(f^{-1}((G,E)))\right)\tilde{\subseteq} cl_p^s(Y-(G,E))=Y-Int_p^s(G,E)$. Bu nedenle

$$X-Int_b^p(f^{-1}((G,E)))\tilde{\subseteq} f^{-1}\left(Y-Int_p^s(G,E)\right)$$

$$f^{-1}(Int_p^s(G,E))\tilde{\subseteq} Int_b^p\left(f^{-1}((G,E))\right) \text{ dir.}$$

5.) $\Rightarrow$ 1.) (G,E) Y üzerinde bir *soft* $p-açık$ küme olsun. $(G,E)=Int((G,E))$ ve $f^{-1}(Int_p^s((G,E)))=f^{-1}(G,E)\tilde{\subseteq} Int_b^p(f^{-1}((G,E)))$ yazılabilir. Diğer bir taraftan $Int_b^p(f^{-1}((G,E)))\subseteq f^{-1}((G,E))$ dir. Böylece $Int_b^p(f^{-1}((G,E)))=f^{-1}((G,E))$ dır. Böylece f bir *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyondur.

Teorem 4.2.2 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E),(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ ve (Z,σ_1,σ_2,E) üç soft ikili topolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyon ve $g:(Y,\eta_1,\eta_2,E)\to(Z,\sigma_1,\sigma_2,E)$ bir *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyon ise, $gof:(X,\tau_1,\tau_2,E)\to(Z,\sigma_1,\sigma_2,E)$ bir *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyondur.

İspat) İspatı açıktır.

Teorem 4.2.3 Her *soft* $p-sürekli$ fonksiyon bir *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyondur.

İspat) $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ f soft p-sürekli fonksiyon olsun ve (G,E), Y üzerinde *soft* $p-açık$ küme olsun. $f^{-1}((G,E))$, X üzerinde bir *soft* $p-açık$ kümedir. Her *soft* $p-açık$ küme bir *soft* $b_p-açık$ küme olduğundan $f^{-1}((G,E))$ de bir *soft* $b_p-açık$ kümedir. Bu nedenle f *soft* $b_p-sürekli$ fonksiyondur.

Teorem 4.2.3 ün tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.1

$X=\{x^1,\ x^2,\ x^3\}$, $Y=\{y^1,\ y^2,\ y^3\}$ ve $E=\{e_1,\ e_2\}$ olsun. $\tilde{\tau}_1=\{\Phi,\ X,\ (F,E)\}$, $\tilde{\tau}_2=\{\Phi,\ X,\ (G,E)\}$ X üzerinde iki soft topolojik uzay ve $\eta_1=\{\Phi,\ Y,\ (H,E)\}$, $\eta_2=\{\Phi,\ Y,\ (K,E)\}$ Y üzerinde iki soft topolojik uzay olmak üzere X ve Y üzerindeki soft kümeler aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$(F,E)=\{(e_1,\ \{x^1,\ x^3\}),\ (e_2,\ \{x^{2,},\ x^3\})\}\ ,$$

$$(G,E)=\{(e_1,\ \{x^2,\ x^3\}),\ (e_2,\ \{x^1,\ x^3\})\}\ \text{,ve}$$

$$(H,E)=\left\{(e_1,\ \{y^1,\ y^2\}),\ (e_2,\ \{y^1,\ y^2\})\right\},$$

$$(K,E)=\left\{(e_1,\ \{y^2,\ y^3\}),\ (e_2,\ \{y^1,\ y^3\})\right\}.$$

O halde $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzaydır. Açıktır ki $\tilde{\tau}_{12}=\{\Phi,\ X,\ (F,E),\ (G,E)\}$ ve $\eta_{12}=\{\Phi,\ Y,\ (H,E),\ (K,E)\}$ dir.

Bu durumda $f:X\to Y$ fonksiyonu $f(x^i_{e_j})=y^i_{e_j}$ $i=\overline{1,3}$, $j=1,2$ şeklinde tanımlandığında f *soft* b_p-*sürekli* fonksiyondur. Ancak f *soft* $p-$*sürekli* değildir.

Sonuç 4.2.1 $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyonu için,

soft çiftsel sürekli $\to$ *soft çiftsel* α*-sürekli* $\to$ *soft çiftsel yarı*$-$*sürekli* $\to$

soft çiftsel b$-$*sürekli* $\leftarrow$ *soft çiftsel ön*$-$*sürekli*

diyagramı verilebilir.

Tanım 4.2.3 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun.

1) X üzerindeki her (F,E) *soft* $p-$*açık* kümesinin f altındaki görüntüsü $f((F,E))$, Y üzerinde *soft* b_p-*açık* küme ise f fonksiyonuna *soft çiftsel b*$-$*açık* fonksiyon kısaca (*soft* b_p-*açık*) fonksiyon denir.

2) X üzerindeki her (F,E) *soft* $p-$*kapalı* kümesinin f altındaki görüntüsü $f((F,E))$, Y üzerinde *soft* b_p-*kapalı* küme ise f fonksiyonuna *soft çiftsel b*$-$*kapalı* fonksiyon kısaca (*soft* b_p-*kapalı*) fonksiyon denir.

Teorem 4.2.4 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$, (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)\to(Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun.

1) f *soft* b_p-*açık* fonksiyondur $\Leftrightarrow$ Her $(F,E)\in SS(X)_E$ için $f(Int^s_p((F,E))\,\tilde{\subseteq}\, Int^p_b(f((F,E))$ dir.

2) f $soft\ b_p - kapalı$ fonksiyondur $\Leftrightarrow$ Her $(F,E) \in SS(X)_E$ için $(cl_b^p(f((F,E))) \tilde{\subseteq} f(cl_p^s((F,E)))$ dir.

İspat)

1) f bir $soft\ b_p - açık$ fonksiyon ve $(F,E) \in SS(X)_E$ olsun. $Int_p^s\left((F,E)\right)$ bir $soft\ p - açık$ ve $Int_p^s((F,E)) \tilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Teoremin kabulünden $f(Int_p^s((F,E)))\ Y$ üzerinde bir $soft\ b_p - açık$ küme ve $Int_b^p(f((F,E)))$ soft kümesi $f((F,E))$ nin içerdiği en büyük $soft\ b_p - açık$ küme dir. Bu nedenle, $f(Int_p^s((F,E))) \tilde{\subseteq} Int_b^p(f((F,E)))$ elde edilir.

Tersine, Farz edelim ki (G,E) bir $soft\ b_p - açık$ küme olsun. $Int_p^s((G,E)) = (G,E)$ yazılır. Hipotezden $f(Int_p^s((G,E))) \tilde{\subseteq} Int_b^p(f((G,E)))$ sağlanır. Bu nedenle,

$$f((G,E)) = f(Int_p^s((G,E))) \tilde{\subseteq} Int_b^p(f((G,E))) \tilde{\subseteq} f((G,E))$$

$$\Rightarrow f((G,E)) = Int_p^s(f((G,E)))$$

Yani, $f((G,E))$ $soft\ b_p - açık$ ve f $soft\ b_p - açık$ fonksiyondur.

2) İspatı 1' in ispatı ile benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.2.4 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ ve (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E) \to (Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft fonksiyon olsun.

1) f $soft\ bire\ bir\ örten$,

2) f $soft\ b_p - sürekli$,

3) f^{-1} $soft\ b_p - sürekli$ ise

f ' e $soft\ çiftsel\ b - homeomorfizm$ (kısaca $soft\ b_p - homeomorfizm$) denir.

Teorem 4.2.5 $(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E)$ ve (Y,η_1,η_2,E) iki soft ikili topolojik uzay ve $f:(X,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,E) \to (Y,\eta_1,\eta_2,E)$ bir soft birebir örten fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) f bir $soft\ b_p - homeomorfizm$,

2) f bir $soft\ b_p - sürekli$ ve $soft\ b_p - kapalı$ fonksiyon,

3) f bir soft b_p - sürekli ve soft b_p -açık fonksiyon.

İspat) İspatı kolayca elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Acar U., Koyuncu F., Tanay B., “Soft sets and soft rings”, Comput. Math. Appl. 59, (2010), 3458-3463

[2] Ahmad B., Kharal A., “On fuzzy soft sets”, Adv. Fuzzy Syst., 6, (2009), doi:10.1155/2009/586507

[3] Akdağ M., Özkan A**.,** “Soft b-open sets and Soft b-continuous functions”, Comput. Math. Appl.(2014) 8:124

[4] Aktaş H., Çağman N., “Soft sets and soft group”, Information Science, 177, (2007), 2726-2735

[5] Ali M. I., Feng F., Liu X. Y., Min W. K., Shabir M., “On some new operations in soft set theory”, Computers and Math. with Appl., 57, (2009) 1547-1553.

[6] Aygünoğlu A., Aygün H., “Some notes on soft topological spaces”, Neurall Comput. Applic., 21, (2011), 113-119.

[7] Atanassov K., “Intuitionistic fuzzy sets”, Fuzzy Sets and Systems, 20, (1986) 87-96.

[8] Atanassov K., “New operations defined over the ıntuitionistic fuzzy sets ”, Fuzzy Sets and Systems, 61, (1999) 137-142.

[9] Babitha KV., Sunil JJ., “Soft Set Relations and Functions”, Comput. Math. Appl. 60 (2010), 1840-1849.

[10] Bayramov S., Gündüz (Aras) C., “Genel Topoloji”, ISBN:975-436-056-1, Çağlayan Basımevi, İstanbul, (2004).

[11] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “On isomorphism theorems of fuzzy soft groups” ICMS, Bolu, Turkey, (2010), 23-27

[12] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “Intuitionistic fuzzy soft topological spaces”, TWMS, J. Pure and Appl, Math. (2014), V5, No 5, 66-79

[13] Bayramov S., “Fuzzy and fuzzy soft structure in algebra”, Lambert Academic Publishing, 175 p, (2012) Deutscland, Germany.

[14] Bayramov S., Gündüz(Aras) Ç., “Some results on fuzzy soft topological spaces”, Numerical and Soft Computing Methods for Characteristic Value Problems of ODE and ODEs Systems, 2013

[15] Chen D, Tsong E.E.C., et al., “The parametrization reduction of soft sets and its applications”, Comput. Math. Appl., 49, (2005), 757-763

[16] Çağman N., Karataş S., Enginoğlu E., “Soft Topology”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 351-358

[17] Das. S., Samanta SK., “Soft real sets, soft real numbers and their properties”, J Fuzzy Math., 20, (2012), 551-576

[18] Das. S., Samanta SK., “Soft metric” Ann. Fuzzy Math. Infor., 6, (2013), 77-94

[19] Dubois D., Prade H., and Pawlak Z., “Rough sets” Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, (1991)

[20] Egelking R., “General Topology”, Polish Scientifiz Publishers, Warszawa, 1997

[21] Feng F., Jun Y. B., Zhao X., “Soft semirings”, Comput. Math. Appl., 56, (2008), 2621-2628

[22] Feng F., Li C. X., Davvaz B., Ali M. I., “Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach” Soft Comput., 14, (2010), 267-275

[23] Gunduz(Aras) C., Bayramov S., “Soft locally compact and soft paracompact spaces”, Journal of Mathematics and System Science, Vol. 3, (2013) ,122-130

[24] Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., “Fuzzy soft modules”, International Mathematical Forum, 6(11), (2011), 517-527

[25] Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., “Intuitionistic fuzzy soft modules”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 2480-2486

[26] Gunduz (Aras) C., Sonmez A., Çakallı H., “On soft Mappings”, Comput. Math. Appl. 60(9), 2013

[27] G. J Klir, T. A. Folger, “Fuzzy sets”, Uncertainty and ınformation. Prentice-Hall, (1988)

[28] Hazra H., Majumdar P., Samanta S. K., “Soft Topology”, Fuzzy Inf. Eng. 1, (2012), 105-115

[29] Hussain S., Ahmad B., “Some properties of soft topological spaces”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 4058-4067

[30] Ittanagi B.M., “Soft Bitopological Spaces” Comput. Math. Appl. (2014),0975 8887

[31] Iwinski T., “Algebraic approach to rough sets” Bull. Polish Acad. Sci. Math., 35, (1987), 673-683

[32] James I. M., “Introduction to uniform spaces”, ISBN:0-521-38620-9, Cambridge University Press, USA, 1990

[33] Jing-liang L., Rui-xia Y., Bing-xue Y., “Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups” Chinese Control and Decision Conference, (2008), 2626-2629

[34] Jun Y. B., “Soft BCK/BCI-Algebras”, Comput. Math. Appl., 56(5), (2008), 1408-1413

[35] Jun Y. B., Park C. H., “Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-Algebras”, Inform Sci., 178(11), (2008), 2466-2475

[36] Kandil A.,Tantawy O. A. E.,El-Sheıkh S.A., Hazza S.,A., “Pairwise open (closed) soft sets in soft bitopolojical spaces” Comput. Math. Appl.(2015) 2093-9310

[37] Kharal A., Ahmad B., “Mapping of soft classes”, to appear in New Math. Nat. Comput.

[38] Koçak M., “Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri”, ISBN:978-975-6428-82-5, Nisan Kitapevi Yayınları, Eskişehir, 2015

[39] Kong Z., Wong L., Li S., “The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm”, J. Comput. Appl. Math., 56, (2008), 3029-3037

[40] Maji P. K., Bismas R., Roy A. T., “Fuzzy soft sets”, Journal of Fuzzy Mathematics 9(3), (2001), 589-602

[41] Maji P. K., Bismas R., Roy A. T., “An application of soft sets in a decision making problem”, Comput. Math. Appl., 44, (2002), 1077-1083

[42] Maji P. K., Bismas R., Roy A. R., “Soft set theory”, Comput. Math. Appl., 45 (2003) 555-562.

[43] Min W. K., “A note on soft topological spaces”, Comput. Math. Appl., 62, (2011), 3524-3528

[44] Molodtsov D., “Soft set theory – first results”, Comput. Math. Appl., 37 (1999) 19-31.

[45] Molodtsov D., Leonov V. Y., Kovkov D. V., “Soft sets technique and its application”, Nechetkie Sistemy Myagkie Vychisleniya, 1(1), (2006), 8-39

[46] Negoita C. V., Ralescu D. A., “Applications of fuzzy subsets to system analysis”, The Journal of Symbolic Logic, v44, no.2, (1979), 284-286

[47] Ozturk T. Y., “Soft ve fuzzy soft modüllerin homoloji modülleri”, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2013

[48] Ozturk T. Y., “A new approach to soft uniform spaces”, Turk J. Math. (2015), DOI:10.3906/mat-1506-98

[49] Ozturk T. Y., “Soft pair-wise b-open sets on soft bitopological spaces”, AIP Conference Proceedings 1726, 020046 (2016); doi: 10.1063/1.4945872.

[50] Ozturk T. Y., Karademir M., “Soft pair-wise b-continuity on soft bitopological spaces”, AIP Conference Proceedings 1833, 020055 (2017); doi: 10.1063/1.4981703.

[51] Ozturk T.Y., Bayramov S., “Topology on soft continuous function spaces”, Math. and Comput. Appl. (2017), 22, 32, DOI:10.3390/mca 22020032.

[52] Ozturk T.Y., Bayramov S., “Category of chain complexes of soft modules”, International Mathematical Forum, 7, (2012), 981-992

[53] Ozturk T. Y., Gunduz(Aras) Ç., Bayramov S., “Inverse and direct systems of soft modules”, Ann. Fuzzy Math. Infor., 5, (2013), 73-85

[54] Ozturk T. Y., Yolcu A., “On soft uniform spaces”, Eastern Anatolian Journal of Science, Vol.II, 1, (2016), 7-13

[55] Ozturk T.Y., Bayramov S., “Soft mapping spaces,”,The Scientific World Journal, Article ID 307292, (2014) 8p.

[56] Ozturk T.Y., Gunduz C.,“Soft pairwise continuity in soft bitopological spaces”, CBÜ Fen Bil. Dergi., Cilt 13, Sayı 2, s 413-422 Mart (2017).

[57] Pie D., Miao D., “From soft sets to information Systems”, Granular computing, IEEE Inter. Conf., 2, (2005), 617-621

[58] Ravi O., Thivagar M. L.,“On stronger forms of (1,2) quotient mappings in bitopological spaces, Inter. J. Math. Game Theory and Algebra, 14 (2004) 481-492.

[59] Ravi O., Thivagar M. L.,“Remarks on extensions (1,2) g-closed mappings in bitopological spaces,

[60] Revathi N., Bageerathi K.,“On soft b-open sets ın soft bitopological space”, International Journey of Applied Research 1(11) (2015) 615-623.

[61] Roy A. R., Maji P. K., “ A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems”, Journal of Computational and Applied Math., 203, (2007), 412-418.

[62] Senel G., Cagman N., Soft closed sets on soft bitopological spaces, Journal of New theory, 5 (2014) 57-66.

[63] Shabir M., Irfan Ali M., “Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups”, New Math. Nat. Comput., 5, (2009), 599-615

[64] Shabir M., Naz M., “On soft topological spaces”, Comput. Math. Appl., 61, (2011) 1786-1799.

[65] Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., “ Soft sets and soft modules”, Lecture Nothes in Comput. Sci. 5009, (2008), 403-409

[66] Tanay B., Kandemir M. B., “Topological structure of fuzzy soft sets”, Comput. Math. Appl. 61, (2011), 2952-2956

[67] Yıldız C., “Genel Topoloji”, ISBN:975-8895-80-X, gazi kitabevi, Ankara ,(2005).

[68] Zadeh L. A., “Fuzzy Sets”, Information and Control 8 (1965) 338-353

[69] Zorlutuna İ., Akdağ M., Min W. K., Atmaca S., “Remarks on soft topological spaces”, Annals of fuzzy Mathematics and Informatics 3(2), (2012), 171-185

[70] Zou Y., Xiao Z. “Data analysis approaches of soft sets under incomplete information”, Knowl.-Based Syst., 21, (2008), 941-945

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Melike KARADEMİR

Doğum Yeri ve Tarihi :Kahramanmaraş Merkez 18.07.1985

Yabancı Dili :İngilizce

İletişim (e-posta) :mlkkarademir@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) Lisans Mezunu 2007 (Gazi Üniversitesi Ankara)

Lise :Anadolu lisesi

Lisans : Matematik Bölümü

Yüksek Lisans :Matematik Topoloji Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :Emniyet / Polis Memuru 2012

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. Ozturk T. Y., **Karademir M.**, “Soft pair-wise b-continuity on soft bitopological spaces”, AIP Conference Proceedings 1833, 020055 (2017); doi: 10.1063/1.4981703.