T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADJACENCY-PELL VE ADJACENCY-JACOBSTHAL TİPLİ DİZİLER

Gizem ARTUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

OCAK-2017

KARS

Bu tez çalışması 2016-FM-23 numaralı proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADJACENCY-PELL VE ADJACENCY-JACOBSTHAL TİPLİ DİZİLER

Gizem ARTUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

OCAK-2017

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Gizem ARTUN' un Doç. Dr. Ömür DEVECİ' nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Adjacency-Pell ve Adjacency-Jacobsthal Tipli Diziler" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği..... ile kabul edilmiştir.

05/01/2017

Adı ve Soyadı	imza
Başkan : Doç. Dr. Ömür DEVECİ	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../2017 günü ve ..../.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Özlem GÜRSOY KOL

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışmamda büyük emeği geçen, öğrencisi olmaktan her zaman onur duyduğum danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ' ye en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca desteğini eksik etmeyen aileme ve tezin hazırlanması aşamasında yine yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Yeşim AKÜZÜM' e de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2017 Gizem ARTUN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada, Jacobsthal dizisinin yapısal özellikleri ve $n \geq 4$ ve $m \geq 2$ olmak üzere C_n ve C_m devirli gruplarının $C_n \times C_m$ direkt çarpımları için oluşturulan Cayley diyagramının Adjacency matrisi kullanılarak Adjacency-Jacobsthal dizisi tanımlandı. Ayrıca, Adjacency-Pell dizisinin karakteristik polinomu yardımıyla belirlenen Circulant matrisi kullanılarak genelleştirilmiş Adjacency-Pell-Circulant dizisi tanımlandı. Buna ek olarak, genelleştirilmiş Adjacency-Pell-Circulant dizisi yardımıyla da Adjacency-Pell-Circulant dizisi türetildi. Tanımlanan dizilerin üreteç matrisleri Companion matrisler formatında belirlenerek gerek üreteç matrislerin gerekse dizilerin yapısal özellikleri yardımıyla bu dizilerin, Binet formülleri, permanental, üstel ve toplamsal temsilleri, üreteç fonksiyonları ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri belirlendi.

2017, 106 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Adjacency-Jacobsthal Dizileri, Matris, Grup, Periyot, Adjacency Matrisi, Circulant Matrisi, Pell Dizileri.

ABSTRACT

In this work, the Adjacency-Jacobsthal sequence is defined by using the structural properties of the Jacobsthal sequence and the Adjacency matrix of the Cayley diagram for direct product of two cyclic groups of order n ve m. Also, the generalized Adjacency-Pell-Circulant sequences are defined by using the Circulant matrix which is obtained from characteristic polynomials of the Adjacency-Pell sequences. Furthermore, the Adjacency-Pell-Circulant sequences are derived by the aid of the generalized Adjacency-Pell-Circulant sequences. The generating matrices of the sequences defined are decided in the Companion matrix forms and then the miscellanous properties of the sequences defined are obtained such as Binet formula, permanental, the exponential representation and the sums, generating functions and finite sums.

2017, 106 Page

Keywords: The Adjacency-Jacobsthal Sequence, Matrix, Group, Period, The Adjacency Matrix, The Circulant Matrix, Pell Sequence.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
G	Grup
$\lvert G \rvert$	Grubun mertebesi
$G=\langle A \rangle$	A dan üretilen grup
G/H	G nin H ye göre bölüm grubu
$H \leq G$	H, G nin alt grubu
$H \Delta G$	H, G nin normal alt grubu
$\langle H,+,.\rangle$	Halka
$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$	$m\times n$ boyutlu matris
$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$	$n\times n$ boyutlu kare matris
A'	A matrisinin transpozu
I_n	$n\times n$ mertebeden birim matris
E	Elemanter matris
$detA$	A matrisinin determinantı

$per(A)$	A matrisinin permanenti
$M \circ K$	M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{P_n^k\}$	Genelleştirilmiş $k-$Pell sayıları
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizisi
$\{J_n^i\}$	Genelleştirilmiş $k-$Jacobsthal sayıları
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$	$k-$basamak Fibonacci dizisi
$\{F_p(n)\}$	Fibonacci $p-$ dizisi
Q_p	Fibonacci $p-$matrisi
$\{P(n)\}$	Padovan dizisi
$Pap(n)$	Padovan $p-$ dizisi
$V_{m,n}$	Vandermonde matrisi
$\{x_k^{n,m}(\alpha)\}$	α modülüne göre Adjacency tipli diziler
$A(G:x,y)$	Adjacency tipli orbit
$a_{m,n}(k)$	Adjacency-Pell dizisi
x_m^{2n}	Dihedral tipli Adjacency dizisi
$DH_{(G:a,b)}$	Dihedral tipli orbit

$LDH_{(G:a,b)}$	$DH_{(G:a,b)}$ orbitinin periyodunun uzunluğu
$a_h^{m,n}$	Adjacency-Pell-Circulant dizisi
$\left\{x_k^{n,m}\right\}$	Adjacency-Jacobsthal dizisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Bilindiği gibi disiplinler arası ilişki noktasında indirgemeli dizilere sıkça rastlanmaktadır. Bu tür çalışmalara örnek olarak [1, 5, 32, 48, 56] daki bilimsel çıktıları verebiliriz.

Cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, üstel, permanental ve toplamsal temsilleri vb. gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmalardan güncel olanlara örnek olarak [6, 14, 16, 17, 32, 33, 36, 38, 40, 44, 49, 68, 70] deki çalışmalarını verebiliriz. Bu çalışmaların birçoğunda çeşitli sonuçlar elde edebilmek için indirgemeli dizilere karşılık gelen matrisler kullanılmıştır.

Bu durumun tam tersine matrisler kullanılarak indirgemeli dizilerin tanımlanması ise, ilk olarak [16, 17, 21, 38] deki çalışmalarında ortaya atılmış çok yeni bir yöntemdir.

Deveci, Aküzüm ve Artun, [27] deki çalışmalarında üreteç matrislerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Circulant matrisleri yardımıyla Adjacency-Pell-Circulant dizisini tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizinin üreteç fonksiyonlarını, üstel temsillerini ve yapısal özelliklerini kullanarak Binet formüllerini belirlemişlerdir.

Deveci ve Artun, [26] daki çalışmalarında uygun başlangıç değerleri ve indirgeme bağıntıları belirlenmek suretiyle Adjacency-Jacobsthal tipli indirgemeli dizileri tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizinin determinant ve permanent değerlerini, üreteç fonksiyonlarını, üreteç matrislerinin kuvvetlerini ve yapısal özelliklerini kullanarak Binet formüllerini, permanental, üstel ve toplamsal temsillerini ve sonlu toplamları gibi çeşitli özelliklerini belirlemişlerdir.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1.Grup Takdimleri

Tanım 2.1.1: K bir küme olsun. $K\times K$ dan K ya tanımlı

$$*:K\times K\rightarrow K\ , \qquad\qquad (x,y)\rightarrow x*y$$

fonksiyonuna K içinde bir ikili işlem denir. Bu takdirde $(K,*)$ ikili işlemine cebirsel yapı denir [45].

Örnek 2.1.1: Reel elemanlı 2×2 matrislerinden oluşan $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kümesi içinde matris toplamı ve matris çarpımı ikili işlem oluşturur [45].

Tanım 2.1.2: G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına (ya da G kümesine $*$ işlemine göre) bir grup denir.

$G_1)$ $\forall a,b\in G$ için $a*b\in G$ (Kapalılık şartı)

$G_2)$ $\forall a,b,c\in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ (Birleşme özelliği)

$G_3)$ $\forall a\in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde bir $e\in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

$G_4)$ G kümesindeki her bir a için e, G nin birim elemanı olmak üzere

$$a*a'=a'*a=e$$

olacak şekilde $a'\in G$ vardır (Ters elemanın varlığı) [66].

Örnek 2.1.2: $M_2(\mathbb{R})$ elemanları reel sayı olan bütün 2×2 matrislerin kümesi, yani

$$M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

ise o zaman bu küme matrislerin toplama işlemine göre bir gruptur [66].

Tanım 2.1.3: $(G,*)$ bir grup olmak üzere $\forall a,b \in G$ için

$$a*b=b*a$$

oluyorsa bu gruba değişmeli (komütatif ya da abelyan) grup denir [66].

Tanım 2.1.4: Eğer Tanım 2.1.2 deki sadece G_1 ve G_2 şartları sağlanırsa o zaman $(G,*)$ cebirsel yapısına bir yarı grup denir.

Örnek 2.1.3: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $*$ ikili işlemi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $a,b \in \mathbb{R}^*$ için

$$a*b = max\{a,b\}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $(\mathbb{R}^*,*)$ bir yarı gruptur [66].

Teorem 2.1.1: $(G,*)$ bir grup olsun. Buna göre

(i) G nin birimi tektir.

(ii) G nin her elemanının tersi tektir.

(iii) $a \in G$ için $a*a=a$ ise $a=e$ dir.

(iv) G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a,b,c \in G$ için

$$a*b=a*c \text{ ise } b=c \quad \text{(soldan kısaltma kuralı)}$$

$$b*a=c*a \text{ ise } b=c \quad \text{(sağdan kısaltma kuralı)}$$

(v) $a,b \in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.

(vi) $a \in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ dır [66].

Tanım 2.1.5: G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye, G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: $H = \{e\}$ ve $H = G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H = \{e\}$ alt grubuna aşikar alt grup ve G den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H, G nin bir öz alt grubu ise $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu takdirde $< A >$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ oluyorsa H ye, G nin bir normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: N, G nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G:N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 2.1.10: G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $H < G$ ve $H < K \leq G$ den $K = G$ elde edilirse H alt grubuna, G nin bir maksimal alt grubu denir.

$E = \{e\}$ olmak üzere $E < H$ ve $E \leq K < H$ dan $K = E$ elde edilirse H alt grubuna, minimal alt grup denir.

Tanım 2.1.11: G bir grup olmak üzere $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$a = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = H \text{ dir.}$$

Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir:

G bir grup olmak üzere G de $G=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elamanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elamanına G nin üreteci denir ve $G=\langle a\rangle$ şeklinde gösterilir [66].

Tanım 2.1.12: G bir grup ve $a\in G$ olsun. a nın ürettiği $\langle a\rangle$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir [11].

Teorem 2.1.2: Her devirli grup değişmelidir [66].

Teorem 2.1.3: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir [66].

Teorem 2.1.4: G bir grup, $a\in G$ ve a nın mertebesi n yani $o(a)=n$ olsun. Buna göre [66];

(i) Eğer a nın mertebesi sonsuz ise o takdirde a nın bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.

(ii) Eğer a nın mertebesi sonlu ise yani $a^n=e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı n ise o takdirde a nın ürettiği devirli grubun yani $\langle a\rangle$ nın mertebesi de n dir.

Diğer bir deyimle,

$$\langle a\rangle=\{e,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$$

dir.

(iii) a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k=a^l$ olması için gerek ve yeter şart $k\equiv l\,(mod\, n)$ olmasıdır.

(iv) $o(a)=n$ sonlu olmak üzere $a^k=e$ olması için gerek ve yeter şart $n|k$ olmasıdır.

Sonuç 2.1.1: $G = a$ sonlu bir devir grubu ve $o(G) = k < \infty$ olsun. $H \neq \{e\}$ ve $a^n \in H$ olacak şekilde $n > 0$ pozitif tamsayılarının en küçüğü m olmak üzere $H = a^m$ olduğu kabul edilsin. O halde,

$$m \mid k \text{ ve } o(H) = \frac{k}{m}$$

dir [66].

Uyarı 2.1.1: $G = \langle a \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grubu ise o takdirde a^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından $H = \langle a^m \rangle$ devir grubu da sonsuz olur [66].

Teorem 2.1.5: $G = \langle a \rangle$ ve $o(G) = n$ olan bir devirli grup olsun. O takdirde G nin a^k tarafından üretilmesi için yani $G = \langle a^k \rangle$ olması için gerek ve yeter şart k ile n nin aralarında relatif asal yani $(k,n) = 1$ olmasıdır [66].

İspat: $\Rightarrow$ Olmayana ergi yöntemi ile ispatı yapalım. Bir an için $(k,n) = d > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman buradan $d \mid k$ ve $d \mid n$ ya da sırası ile $k = dt$ ve $n = dr$ yazılır. Bu durumda,

$$\left(a^k\right)^r = \left(a^{dt}\right)^r = \left(a^{dr}\right)^t = \left(a^n\right)^t = e$$

öyle ki

$$o\left(a^k\right) \leq r < n$$

dir. Bu ise a^k nın G nin bir üreteci olmadığını gösterir. Çünkü

$$G = \langle a^k \rangle$$

olsaydı o zaman $G = \langle a \rangle$ olduğundan $o(a) = n$ dolayısı ile $o\left(a^k\right) = n$ olmalıydı. Bu bir çelişkidir. Dolayısı ile eğer $G = \langle a^k \rangle$ ise o zaman $(k,n) = 1$ olmalıdır.

$\Leftarrow (k,n)=1$ olsun. Buna göre $G=\langle a^k \rangle$ olduğu gösterilmelidir.

$$G \subseteq \langle a^k \rangle$$

olduğu açıktır. Çünkü $a^k \in G$ ve G bir grup olduğundan kapalılık özelliğinden dolayı a^k nın kuvvetleri G ye aittir. Şimdi ters kapsama gösterilir ise,

$$(k,n)=1 \Rightarrow ku+nv=1$$

olacak şekilde u,v tamsayıları vardır. O halde

$$a=a^{ku+nv}=a^{ku}a^{nv}$$

yazılır. Diğer taraftan $G=\langle a^k \rangle$ ve $o(G)=n$ olduğundan $o(a)=n$ dir. Böylece

$$a^{nv}=\left(a^n\right)^v=e^v=e$$

olup buradan $a=a^{ku}$ eşitliği elde edilir. Buna göre $a^m \in G$ ise o takdirde

$$a^m=\left(a^{ku}\right)^m=\left(a^k\right)^{um}\in \langle a^k \rangle$$

yazılır. Bu da,

$$G \subseteq \langle a^k \rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece $G=\langle a^k \rangle$ eşitliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 2.1.2: Bir k tamsayısının $(\mathbb{Z}_n,+)$ grubunun bir üretici olması için gerek ve yeter şart $(k,n)=1$ olmasıdır [66].

Bir H kümesi ile bu küme üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ ikili işlemlerinden oluşan cebirsel yapı $(H,+,.)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: Bir cebirsel yapı, $(H,+,.)$ verilmiş olsun. Eğer H kümesindeki her x,y,z elemanları için

$$x(y+z)=(xy)+(xz)$$

ise, $(H,+,.)$ da sol dağılma özelliği vardır denir. Her $x,y,z\in H$ için

$$(x+y)z=(xz)+(yz)$$

ise, $(H,+,.)$ da sağ dağılma özelliği vardır denir [45].

Tanım 2.1.14: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir [42].

Tanım 2.1.15: X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R\subseteq F(X)$ olsun. $G=\langle X:R\rangle$ ye G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r\in R$ için $r=e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir, r elemanlarına da bağıntılar denir. Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X:R\rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [42].

Tanım 2.1.16: $G=\langle X:R\rangle$ ve $H=\langle Y:S\rangle$ olmak üzere $G\times H$ direkt çarpımı, $[X,Y]=\{[x,y]:x\in X,\ y\in Y\}$

$$G\times H=\langle X,Y:R,S,[R,S]\rangle$$

şeklinde tanımlanır [42].

Tanım 2.1.17: G, $j-$gerenli bir grup ve $X=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_j)\in \underbrace{G\times G\times\cdots\times G}_{j} \mid \langle\{x_1,x_2,\ldots,x_j\}\rangle=G\right\}$ eşitliği verilsin. O halde $(x_1,x_2,\ldots,x_j)$ ye G nin bir geren $j-$lisi denir.

Tanım 2.1.18: $n\geq 3$ için Q_{2^n} Quaternion grubu,

$$Q_{2^n} = \left\langle x, y, z : x^{2^{n-1}} = e,\ y^2 = x^{2^{n-2}},\ y^{-1}xy = x^{-1} \right\rangle$$

şeklinde takdim edilir.

Tanım 2.1.19: $2n$ mertebeli D_{2n} Dihedral grubu,

$$D_{2n} = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \right\rangle,\ n \geq 3 \text{ için}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.20: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R,+,.)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

$R_1)$ $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.

$R_2)$ R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a,b \in R$ için $ab \in R$ dir.

$R_3)$ R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.

$R_4)$ Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

ve

$$(b+c)a = ba + ca$$

dır [66].

Örnek 2.1.4: F kümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bütün fonksiyonların kümesi olsun. Yani

$$F = \{ f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

olsun. Fonksiyonların bilinen toplamına göre yani $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in F$ için

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

işlemine göre $(F,+)$ değişmeli bir gruptur. Eğer çarpma işlemi de

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanırsa o takdirde $(F,+,.)$ cebirsel yapısının bir halka olduğu kolayca görülebilir [66].

Tanım 2.1.21: Birimli bir H halkasında $1_H \neq 0_H$ ise ve H' nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, H ye bir aykırı cisim denir [45].

Tanım 2.1.22: Eğer H değişmeli aykırı cisim ise, H ye bir cisim denir [45].

Örnek 2.1.5: $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C}+,.)$ cebirsel yapıları bir cisim olmasına karşılık $(\mathbb{Z},+,\ .)$ tamsayılar halkası bir cisim değildir. Gerçekten sözgelimi $2\in\mathbb{Z}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}$ olup $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan $(\mathbb{Z},+,\ .)$ bir cisim olamaz [66].

2.2.Matris Cebiri

Tanım 2.2.1: F bir cisim ve $a_{ij}\in F$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. $i=1,2,\ldots,m$ için $r_i=[a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}]$ ifadesine matrisin satırları ve $j=1,2,\ldots,n$ için

$$c_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı n sütunlu bir matrise $m \times n$ boyutlu (mertebeli) ya da kısaca bir $m \times n$ matrisi denir. $i-$inci satır ve $j-$inci sütunun kesişiminde bulunan cismin elemanına matrisin $(i, j)-$inci elemanı denir. Matris kısaca $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ notasyonu ile gösterilir [65].

Teorem 2.2.1: A, B ve C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

(i) $A+B=B+A$ (değişme özelliği)

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (birleşme özelliği)

(iii) $A+0=A$ (etkisiz eleman)

(iv) $A-A=0$

(v) $\lambda_1(A+B)=\lambda_1 A+\lambda_1 B$

(vi) $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$

(vii) $(\lambda_1\lambda_2)A=\lambda_1(\lambda_2 A)$

(viii) $1.A=A$

özellikleri vardır [3].

Tanım 2.2.2: Bir satır matris ile bir sütun matrisinin çarpılabilmesi için onların her birinin aynı elemana sahip olması gerekir. Eğer $u=[u_1,\ldots,u_m]$ ve $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ ise, o zaman uv aşağıdaki gibi tanımlanan 1×1 bir matristir [65]:

$$uv=[u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_mv_m]=\left[\sum_{j=1}^{m}u_iv_j\right]$$

Tanım 2.2.3: $A=\left[a_{ij}\right]$ bir $m\times r-$matris ve $B=\left[b_{ij}\right]$ bir $r\times n-$matris ise bunların çarpımı $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ için

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $AB = \left[c_{ij}\right],\ m \times n -$ matristir [3].

Teorem 2.2.2: Eğer $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times t}$ ve $C = (c_{ij})_{t\times q}$ ise, o zaman matrislerin çarpma işlemine göre birleşme (assosyatif) kuralı denilen aşağıdaki kural geçerlidir:

$$A(BC) = (AB)C \tag{2.1}$$

İspat: İspat için matrislerin eşitliği tanımı kullanılacaktır. Buna göre eğer (2.1) eşitliğinin her iki tarafındaki matris çarpımlarından elde edilen matrislerin mertebelerinin ve karşılıklı elemanlarının eşit olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

Önce (2.1) eşitliğinin sol tarafını göz önüne alalım. $BC = D$ ve D nin genel elemanını d_{ij} ile gösterilirse, o zaman

$$BC = \left(b_{ij}\right)_{n\times t}\left(c_{ij}\right)_{t\times q} = \left(d_{ij}\right)_{n\times q} = D$$

ve

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{t} b_{ij}c_{jk} \tag{2.2}$$

yazılır. Şimdi ise $det\left(AB\right) = \left(detA\right)\left(detB\right)$ $A\left(BC\right) = AD = E$ ve E nin genel elemanı e_{ij} olarak alınırsa, bu takdirde

$$AD = (a_{ij})_{m\times n}(d_{ij})_{n\times q} = (e_{ij})_{m\times q} = E \tag{2.3}$$

ve

$$e_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}d_{sj} \tag{2.4}$$

yazılır. (2.2) ifadesinden

$$d_{sj} = \sum_{k=1}^{t} b_{sk} c_{kj} \tag{2.5}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. (2.5) ifadesi (2.4) de yerine yazılırsa

$$e_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{k=1}^{t} b_{sk} c_{kj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(b_{sk} c_{kj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{t} \sum_{s=1}^{n} \left(a_{is} b_{sk} \right) c_{kj} \tag{2.6}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin sağ tarafını göz önüne alalım. $AB = F$ ve F nin genel elemanına f_{ij} denilirse, o zaman

$$AB = \left(a_{ij} \right)_{m \times n} \left(b_{ij} \right)_{n \times t} = \left(f_{ij} \right)_{m \times t} = F$$

ve

$$f_{ij} \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \tag{2.7}$$

yazılır. Bu defa da $(AB)C = FC = G$ ve G nin genel elemanına g_{ij} denirse, o zaman da

$$(AB)C = FC = (f_{ij})_{m \times t} (c_{ij})_{t \times q} = (g_{ij})_{m \times q} = G \tag{2.8}$$

ve

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{t} f_{ik} c_{kj} \tag{2.9}$$

yazılır. (2.7) ifadesinden

$$f_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} \tag{2.10}$$

yazmak mümkündür. (2.10) ifadesi (2.9) da yerine yazılırsa

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}\right)c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{t}\sum_{s=1}^{n}(a_{is}b_{sk})c_{kj} \qquad (2.11)$$

elde edilir. Böylece (2.3) ve (2.8) ifadelerinden E ve G matrislerinin mertebelerinin eşit olduğu, (2.6) ve (2.11) den E ve G nin karşılıklı elemanlarının eşit olduğu sonucu ortaya çıkar. Yani $E = G$ olur. Bu ise (2.1) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir [65].

Teorem 2.2.3: (i) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times t}$ ve $C = (c_{ij})_{n\times t}$ olmak üzere, sol dağılma kuralı denilen

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (2.12)$$

kuralı geçerlidir.

(ii) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{t\times m}$ ve $C = (c_{ij})_{t\times m}$ olmak üzere, sağ dağılma kuralı denilen

$$(B+C)A = BA + CA \qquad (2.13)$$

kuralı geçerlidir [65].

İspat: (i) Önce (2.12) nin sol tarafını göz önüne alalım. $B + C = D$ ve D nin genel elemanı d_{ij} olsun. Bu durumda

$$B + C = (b_{ij})_{n\times t} + (c_{ij})_{n\times t} = (d_{ij})_{n\times t} = D$$

ve

$$d_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \tag{2.14}$$

yazılır. Şimdi de $A(B+C) = AD = E$ ve E nin genel elemanın e_{ij} olduğunu farzedelim. Buna göre

$$AD = (a_{ij})_{m\times n}(d_{ij})_{n\times t} = (e_{ij})_{m\times t} = E \tag{2.15}$$

ve

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} \tag{2.16}$$

yazılır ve (2.14) den

$$d_{kj} = b_{kj} + c_{kj} \tag{2.17}$$

yazılabileceği kolaylıkla görülür. Böylece (2.17) ifadesi (2.16) da yerine yazılırsa

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \tag{2.18}$$

elde edilir. Şimdi de (2.12) ifadesinin sağ tarafı göz önüne alalım. Burada da $AB = Y$; Y nin genel elemanı y_{ij}, $AC = Z$ ve Z nin genel elemanın z_{ij} olduğu kabul edilsin. Buna göre

$$AB = (a_{ij})_{m\times n}(b_{ij})_{n\times t} = (y_{ij})_{m\times t} = Y \tag{2.19}$$

ve

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{2.20}$$

yazılır. Yine aynı şekilde

$$AC = (a_{ij})_{m\times n}(c_{ij})_{n\times t} = (z_{ij})_{m\times t} = Z \tag{2.21}$$

ve

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \tag{2.22}$$

ifadeleri yazılır. Son olarak $AB + AC = T$ ve T nin genel elemanı t_{ij} ile gösterilirse o zaman

$$AB + AC = Y + Z = \left(y_{ij}\right)_{m\times t} + \left(z_{ij}\right)_{m\times t}$$

$$(y_{ij} + z_{ij})_{m\times t} = (t_{ij})_{m\times t} = T \tag{2.23}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \tag{2.24}$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda (2.15) ve (2.23) den E ve T matrislerinin mertebeleri eşit olduğu, yine (2.18) ve (2.24) den E ve T matrislerinin elemanlarının eşit olduğu sonucu elde edilir. Bu da matrislerin eşitliği tanımına göre $E = T$ olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise (2.12) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

(ii) için ispat benzerdir.

Tanım 2.2.4: Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir. Sıfır matris 0 ile gösterilir [3].

Tanım 2.2.5: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise kare matris denir.

$$E = \begin{bmatrix} i-1 & 0 \\ 2 & i-5 \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 mertebeden bir kare matristir [3].

Tanım 2.2.6: $A = \left[a_{ij}\right]$, $n\times n$ mertebesinden bir kare matris ise $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir. Köşegen matrise örnek olarak

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi verilebilir [3].

Tanım 2.2.7: Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{nn} = k$ ise matrise skaler matris denir. Örneğin;

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi bir skaler matristir [3].

Tanım 2.2.8: Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki bütün elemanları 1 ise o matrise birim matris denir. $n \times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir [3].

Örneğin;

$$I_1 = [1],\ I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer birim matristir.

Tanım 2.2.9: Bir n-kare $A = \left[a_{ij}\right]$matrisi; $j > i$ olan her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $a_{ij} = 0$ iken alt üçgen matris ve $j < i$ olan her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $a_{ij} = 0$ iken üst üçgen matris diye adlandırılır.

Buna göre; n-kare $A = \left[a_{ij}\right]$ alt ve $B = \left[b_{ij}\right]$ üst üçgen matrisler;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.2.10: Bir n-kare A matrisi; $A^T = A$ olması halinde simetrik matris ve $A^T = -A$ olması halinde de ters simetrik matris diye adlandırılır.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ters simetrik matris ve } B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ simetrik bir matristir.}$$

Tanım 2.2.11: Eğer $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi için $a_{i,j+1}=1,\ a_{n1}=1$ ve diğer bütün elemanlar sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matris denir [65].

Tanım 2.2.12: Eğer A, $n\times n$ bir kare matris ve I, $n\times n$ birim matris olmak üzere,

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir $n\times n$ tipli bir B matrisi varsa, o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün, tekil olmayan) matrisler denir [65].

Teorem 2.2.4: Bir kare matrisin tersi varsa o zaman bu ters tektir [65].

İspat: Bir A kare matrisin B ve C gibi iki tane tersinin olduğunu varsayalım. Bu durumda ters matrisin tanımından dolayı A matrisinin tersi B ise,

$$AB = BA = I \tag{2.25}$$

ve eğer A matrisinin tersi C ise,

$$AC = CA = I \tag{2.26}$$

yazılır. Eğer $B=C$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunu için (2.25) ve (2.26) ifadelerini ve matrislerin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini göz önüne alarak

$$B=I\ B=(CA)B=C(AB)=C\ I=C$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.13: Bir terse sahip olan bir A kare matrisine tekil olmayan veya ters çevrilebilir bir matris denir. Eğer A matrisi bir terse sahip değilse, o takdirde A matrisine tekil veya ters çevrilemez matris denir [65].

Teorem 2.2.5: Eğer A ve B ters çevrilebilir iki $n\times n$ tipli matris ise, o zaman AB çarpımı da ters çevrilebilirdir ve

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

dir [65].

İspat: Eğer A ve B matrisleri ters çevrilebilir matrisler ise, o takdirde ters matris tanımından

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \quad \text{ve} \quad BB^{-1}=B^{-1}B=I$$

yazılır. Diğer taraftan matris çarpımının birleşme özelliğini kullanarak

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=I \quad \text{ve} \quad \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=I$$

yazılır. Böylece bunları birleştirerek

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=I$$

yazmak mümkündür. Bu son ifade ise ters matris tanımı gereğince AB matrisinin tersinin $B^{-1}A^{-1}$ olduğunu ifade eder. Böylece AB ters çevrilebilirdir ve bu ters(invers) tek olduğundan

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.14: A sıfır olmayan bir n kare matris olmak üzere

$$AB = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B, n kare matris varsa, o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir n kare matris olmak üzere

$$CA = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir C, n-kare matris varsa, o zaman da A matrisine sağ sıfır bölen matrisi denir. Eğer A matrisi hem sol sıfır bölen matrisi hem de sağ sıfır bölen matrisi ise, o takdirde A matrisine sadece sıfır bölen matris denir [65].

Teorem 2.2.6: A sıfır olmayan bir kare matris olmak üzere eğer tersi mevcut ise, o takdirde A matrisi bir sıfır bölen matrisi değildir [65].

İspat: Eğer $AB = 0$ ya da $CA = 0$ ve A matrisinin tersi A^{-1} ise, o takdirde

$$A^{-1}(AB) = \left(A^{-1}A\right)B = IB = B = 0$$

veya

$$(CA)A^{-1} = C\left(AA^{-1}\right) = CI = C = 0$$

yazılır. Bu ise A matrisinin bir sıfır bölen matrisi olmadığını gösterir.

Tanım 2.2.15: Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır denir [3]:

(i) İlk k tane satır sıfırdan farklı ve $(k+1)$-inci satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

(ii) Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir ve bu 1 ler $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ olacak şekilde s_j-inci sütunda bulunurlar.

(iii) Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij}=1$ ise j-inci sütundaki a_{ij} nin altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Yukarıdaki (iii) koşulu "a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır" şeklinde alınırsa, (i)-(ii) koşullarını sağlayan matrise satırca indirgenmiş eşolon formdadır denir. Satır yerine sütunlar alınarak sütunca indirgenmiş form ve sütunca indirgenmiş eşolon form elde edilir [3].

Tanım 2.2.16: I, $n\times n$ birim matris olmak üzere I dan sadece bir elemanter satır işlemi ile elde edilen bir $n\times n$ matrise bir elemanter matris denir ve E ile gösterilir [65].

Teorem 2.2.7: (i) Eğer B, $m\times n$ matrisi; bir elemanter satır işleminin uygulanması ile A, $m\times n$ matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde B matrisi A matrisi ile bu elemanter satır işlemlerine karşılık gelen $m\times m$ elemanter matrisin çarpımına eşittir. Yani eğer ε ile elemanter satır işlemi gösterilirse, o zaman

$$B=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

dır.

(ii) Her elemanter matris ters çevrilebilirdir. Üstelik her elemanter matrisin tersi de yine bir elemanter matristir [65].

İspat: (i) E_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, $\alpha\neq 0$ olmak üzere $E_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris ve $E_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i+\alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matris olmak üzere,

$$E_{ij}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olur. Bu da $E_{ij}A$ matrisinin i-inci satırı ile j-inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen bir matris olduğunu gösterir. Gerçekten I, $m\times m$ birim matris olmak üzere bu birim matrisin i-inci satırı ile j-inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise $\varepsilon(I_m)$ denilir ise ve bu matris ile A matrisi soldan çarpılırsa yine $E_{ij}A$ matrisi elde edilir. Bu da E_{ij} elemanter matrisi için

$$B=E_{ij}A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$B=E_i(\alpha)A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

ve

$$B=E_{ij}(\alpha)A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

olduğu gösterilebilir.

(ii) Basit bir hesap ile

$$(E_{ij})^{-1}=E_{ij}$$

$$(E_i(\alpha))^{-1}=E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$(E_{ij}(\alpha))^{-1}=E_{ij}(-\alpha)$$

olduğu görülebilir. Buradan gerçekten elemanter matrislerin ters çevrilebilir olduğu ve aynı zamanda elemanter matrisin tersinin de bir elemanter matris olduğu sonucu çıkar.

Tanım 2.2.17: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reel sayılar olmak üzere 2×2 tipinde bir

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır [65].

Not 2.2.1: Determinant her bir 2×2 matrisine bir reel sayı karşılık getiren bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ilk üçü bir 2×2 matrisin üzerinde satır işlemlerinin etkin olduğu, aşağıdaki dört önemli özelliğe sahiptir [65]:

(i) Eğer B matrisi; bir k reel sayısı ile A matrisinin bir satırının çarpılması ile A matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde

$$detB = k.detA$$

dır.

(ii) Eğer B matrisi; A matrisinin satırlarının yer değiştirilmesi ile A dan elde edilen bir matris ise, o zaman

$$detB = -detA$$

dır.

(iii) Eğer B matrisi; A nın bir satırının bir skaler katının A nın diğer satırına ilave edilmesi ile A matrisinden elde edilen bir matris ise, o zaman

$$detB = detA$$

dır.

(iv) $det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=1$ dir.

Teorem 2.2.8: Her $n\times n$ matrise bir reel sayıyı karşılık getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon, det vardır [65]:

(i) B matrisi; verilen bir $n\times n$ tipli A matrisinin bir satırının bir $\alpha\neq 0$ reel sayısı ile çarpılması sonucu A matrisinden elde edildiği her zaman

$$detB=\alpha detA$$

(ii) B matrisi; verilen bir $n\times n$ tipli A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A dan elde edildiği her zaman

$$detB=-detA$$

(iii) B, $n\times n$ tipli A matrisinin bir satırının bir skaler katının diğer bir satıra ilave edilmesi ile A dan elde edildiği matris olduğunda

$$detB=detA$$

(iv) I , $n\times n$ birim matris olmak üzere

$$\det I=1$$

dir.

Teorem 2.2.9: A bir $n\times n$ kare matris olsun. Buna göre [65];

(i) Eğer A matrisinin iki satırı eşit ise , o zaman $detA=0$ dır.

(ii) Eğer A matrisi bir sıfır satırına sahipse, o zaman $detA=0$ dır.

İspat: (i) A matrisinin iki satırının eşit olduğunu farzedelim. B matrisi eşit satırların yer değiştirilmesi ile A dan elde edilen bir matris olsun. Bu durumda $detB=-detA$ yazılabilir. Halbuki yer değiştirilen satırlar eşit olduğundan $B=A$ dır. Sonuç olarak buradan $detA=detB$ olduğu görülür. Böylece

$$detA=detB=-detA$$

ifadesinden $detA = 0$ bulunur.

(ii) A matrisinin bir satırının sıfır olduğunu varsayalım. A nın herhangi bir başka satırını seçelim ve onu bir B matrisi elde etmek için sıfır satırına ilave edilsin. Bu durumda $detA = detB$ yazılabilir. Halbuki B matrisi iki eşit satıra sahip olduğundan $detB = 0$ yazmak mümkündür. Bundan dolayı $detA = 0$ olur.

Teorem 2.2.10: Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [65].

İspat: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olsun. $detB = \alpha detA$ özelliği kullanılarak;

$$detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{a}_{11} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \dots = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{nn} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{nn}.\det \mathrm{I}$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{nn}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.11: Bir üst üçgen (ya da alt üçgen) matrisin determinantı, matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [65].

İspat: İspat üst üçgen matris için yapılır. Benzer düşünce ile alt üçgen matrisler için ispat yapılabilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olsun. $detB=\alpha detA$ ve $detB=detA$ özelliklerini kullanarak;

$$detA=det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\mathrm{a_{nn}}det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$...=\mathrm{a_{22}a_{33}...a_{nn}}det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{a_{11}a_{22}...a_{nn}}det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}}det\ I$$

$$=\mathrm{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}}$$

yazılır.

Teorem 2.2.12: Bir A kare matrisinin determinantı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır. Yani

$$detA=detA^T$$

dır [65].

Tanım 2.2.18: $A(a_{ij})$ bir $n \times n$ kare matris olsun. A matrisinin $i-$inci satır ve $j-$inci sütununun silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir ve A_{ij} ile gösterilir [65].

Teorem 2.2.13: Eğer E, bir elemanter matris ise, o zaman [65];

(i) $detE \neq 0$,

(ii) $detE^T = detE$,

(iii) E^{-1} bir elemanter matristir.

İspat: $\alpha \neq 0$ olmak üzere $P_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, P_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemlerine karşılık gelen elemanter matris ve $P_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i + \alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre bu üç farklı tipten elemanter matrislerin determinantları alınır ise, o takdirde

$$detP_i(\alpha) = detP_i(\alpha)^T = \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$detP_{ij} = detP_{ij}^T = -1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$detP_{ij}(\alpha) = detP_{ij}(\alpha)^T = 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) yi ispatlar. (iii) ü ispatlamak için sırasıyla

$$P_i(\alpha)^{-1} = P_i(\alpha^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 2.2.14: Eğer E, $n\times n$ tipli bir elemanter matris ise, o zaman her $n\times n$ tipli A matrisi için

$$det(EA)=(detE)(detA)$$

dır [65].

Teorem 2.2.15: Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $detA\neq 0$ olmasıdır [65].

İspat: Eğer A ters çevrilebilir bir matris ise, o zaman

$$E_1E_2\ldots E_kA=I$$

olacak şekilde $E_1,E_2,\ldots,E_k$ elemanter matrisleri vardır. Böylece

$$det(E_1)det(E_2)\ldots det(E_k)det(A)=\det I=1$$

yazılır. Bundan dolayı $detA\neq 0$ sonucu elde edilir.

Tersine; eğer A ters çevrilebilir bir matris değilse, o zaman

$$E_1E_2\ldots E_kA=R$$

olacak şekilde $E_1,E_2,\ldots,E_k$ elemanter matrisleri vardır. Burada R, bir sıfır satırını kapsayan $n\times n$ bir eşolon matristir.

Böylece $detR=0$ olur ve $detE_i\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ olduğundan $detA=0$ olduğu görülür.

Teorem 2.2.16: A ve B, $n\times n$ iki matris olsun. O takdirde

$$det(AB)=(detA)(detB)$$

dir [65].

İspat: Eğer A bir elemanter matris ise, o zaman iddianın doğru olduğu söylenebilir. A matrisi elemanter matrislerin bir çarpımı olduğundan eşitlik yine doğrudur. Gerçekten E_1 ve E_2 elemanter matrisler olmak üzere

$$A = E_1E_2$$

ise, o zaman elemanter matris için determinant özelliği iki kez art arda uygulanması ile

$$\begin{aligned} det(AB) = det(E_1E_2B) &= det(E_1)det(E_2B) \\ &= det(E_1)det(E_2)det(B) \\ &= det(E_1E_2)det(B) \\ &= det(A)det(B) \end{aligned}$$

yazılır. $k > 2$ olmak üzere

$$A = E_1E_2\ldots E_k$$

olduğu zaman da ispat benzer olarak yapılabilir. Diğer taraftan her ters çevrilebilir matris elemanter matrislerin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden A matrisinin ters çevrilebilir olduğu her zaman

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer A matrisi ters çevrilebilir değilse, o takdirde $detA = 0$ ve $det(AB) = 0$ dır. Böylece bu durumda da $det(AB) = (detA)(detB)$ ifadesi geçerlidir.

Tanım 2.2.19: $P_1, P_2, \ldots, P_k$ diyagramın köşeleri olmak üzere bu diyagramın $k \times k$ tipli matrisi $M = [m_{ij}]_{k\times k}$ Adjacency matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } P_i \to P_j, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

Tanım 2.2.20: $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ sayılarının $n \times n$ tipli Circulant matrisi;

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $(n-1)$-inci dereceden $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$ polinomu da C_n matrisinin yardımcı polinomu olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.21: $K(k_1, k_2, \ldots, k_v)$ matrisi $v \times v$ tipli bir Companion matris olsun. O halde aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$K(k_1, k_2, \ldots, k_v) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_v \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2.22: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n \times n$ tipli Vandermonde matrisi;

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \cdots & x_1^{\,n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & \cdots & x_2^{\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \cdots & x_n^{\,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.23: Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti $p(A)$ veya $per(A)$ ile gösterilir ve

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_n simetrik grubu ve σ permütasyonu gösterir.

Tanım 2.2.24: Bir M matrisi için $perM = \det(M \circ K)$ olacak şekilde bir $n \times n$ tipli (1, -1) K matrisi var ise, o takdirde $M \circ K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilir ve M matrisi değiştirilebilir(convertible) matris olarak adlandırılır.

2.3.Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.3.1: R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n \tag{2.27}$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, ..., c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz [32].

Tanım 2.3.2: $$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + ... + c_{k-1} x + c_k$$

şeklindeki $k.$dereceden polinoma, (2.27) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla tamsayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k, R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.27) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, ...,$ şeklinde devam eder [32].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.3.3: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n \tag{2.28}$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir.

(2.28) bağıntısı için

$$F(x) = \left(x^k - c_1 x^{k-1}, ..., c_{k-1} x - c_k\right)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir [32].

Tanım 2.3.4: $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + ... + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklindeki $k-$basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanları;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir [44].

2.4.Pell Dizileri

Tanım 2.4.1: $\{P_n\}$ Pell dizisi, $n \geq 0$ ve $P_0 = 0,\ P_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklinde tanımlanır. O halde Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,...$$

şeklindedir [39].

Pell sayıları aşağıdaki matris tarafından üretilmiştir [6];

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{Z}$ için,

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell sayılarının bir k dizisi,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1-i \text{ ise} \\ 1 & n \neq 1-i \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleriyle, $n>0$ ve $1-k \leq n \leq 0$ için;

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + ... + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanmıştır [49].

Burada P_n^i, $i-$inci dizinin $n-$inci terimidir. $i=k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş $k-$Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k=2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir ve $i=k$ için, P_n^k ya genelleştirilmiş $k-$Pell sayıları denir.

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell matrisi;

$$R = \left[r_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Aynı zamanda

$$E_n = \left[e_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R.E_n$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir. Burada R, $k\times k$ tipindeki matris, genelleştirilmiş $k-$mertebeden Pell matrisi olarak adlandırılmıştır [49].

Lemma 2.4.1: R ve E_n sırasıyla (2.29) ve (2.30) daki gibi olsunlar. Bu durumda tüm $n \geq 0$ tamsayıları için,

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

eşitliği yazılabilir [49].

Genelleştirilmiş Pell dizilerini matematiksel tümevarımla da ispatlanabilen, $\alpha > 0$ sabit katsayıları için,

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(M^{(\alpha)}\right)^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisiyle de oluşturulabileceği gösterilmiştir [20].

$P_n^{(\alpha)k}$, $k-$basamak genelleştirilmiş Pell dizisi,

$\alpha > 0$ sabit katsayılar, $n \geq 0$ ve $1 \leq j \leq k-1$ için $\beta_j = \binom{\alpha+j}{j+1}$ olacak şekilde

$$P_0^{(\alpha).k} = 0, \ldots, P_{k-2}^{(\alpha).k} = 0, P_{k-1}^{(\alpha).k} = 1$$

başlangıç elemanları ile

$$P_{n+k}^{(\alpha).k} = \left(\alpha+1\right) P_{n+k-1}^{(\alpha).k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha).k} + \ldots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha).k}$$

şeklinde tanımlanmıştır [20].

Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha).2}\right\} = \left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ eşitliğine dikkat edilmelidir.

$k-$basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için,

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha).k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha).k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha).k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\alpha+1\right) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha).k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha).k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha).k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine, $k-$basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir [20].

2.5.Jacobsthal Dizileri

Tanım 2.5.1: $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi, $n\geq 0$ ve $J_0=0,\ J_1=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$J_{n+2}=J_{n+1}+2J_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Jacobsthal dizisi

$$0,1,1,3,5,11,21,43,...$$

şeklindedir.

Jacobsthal sayıları

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ F^n=\begin{bmatrix}J_{n-1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matris tarafından üretilebileceği gösterilmiştir [52].

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri,

$$J_n^i=\begin{cases}1 & i+n=1 \text{ ise}, \qquad 1-k\leq n\leq 0,\\ 0 & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

başlangıç koşullarıyla $n>0$ ve $1\leq i\leq k$ için

$$J_n^i = J_{n-1}^i + 2J_{n-2}^i + J_{n-3}^i + \ldots + J_{n-k}^i,$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada J_n^i, dizinin $n-$inci terimidir. $k=2$ ve $i=1$ için genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir [70].

Genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları için aşağıdaki gibi bir denklem elde edilmiştir;

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^i \\ J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ \vdots \\ J_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ J_{n-2}^i \\ \vdots \\ J_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

burada C, $k \times k$ tipindeki matris;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmıştır [52].

Genelleştirilmiş $k-$mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri için,

$$B_n = \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$B_n = C^n$$

şeklinde denklem elde edilmiştir [52].

2.6.Fibonacci Dizileri

Tanım 2.6.1: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $n \geq 0$ ve $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$$

şeklindedir.

Fibonacci dizileri

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matris tarafından üretilebileceği gösterilmiştir [62].

Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceğini göstermiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci $Q-$matrisi denir [40].

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$.

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ eşitliğine "Binet formülü" denir. Bu formül n nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir. $\alpha^n\beta^n=(-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.6.2: $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ $k-$basamak Fibonacci dizisi, $n\geq 0$ ve $F_0=F_1=...=F_{k-2}=0,\ F_{k-1}=1$ olmak üzere;

$$F_{n+k}^{(k)}=F_{n+k-1}^{(k)}+F_{n+k-2}^{(k)}+...+F_n^{(k)} \tag{2.31}$$

şeklindedir.

$k-$basamak Fibonacci dizisi bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+...+c_{k-1}a_{n+k-1} \tag{2.32}$$

dizisinin özel bir halidir. Burada $c_0,c_1,...,c_{k-1}$ reel sabitlerdir.

$$A_k=[a_{ij}]_{k\times k}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (2.32) deki lineer indirgemeli diziler için

$$A_k^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir. Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^{(k)} \\ F_{n+1}^{(k)} \\ F_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ F_{n+k-2}^{(k)} \\ F_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

eşitliği kolayca görülebilir [44].

2.7.Fibonacci $p-$Dizileri

Tanım 2.7.1: Verilen bir p $(p=1,2,3,...)$ için $\{F_p(n)\}$ Fibonacci $p-$dizisi $F_p(0)=0, F_p(1)=...=F_p(p)=1$ olmak üzere $n>p$ için

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1)$$

şeklinde tanımlanır [63,64].

[63] de Q_p Fibonacci $p-$matrisi;

$$Q_p\left[a_{ij}\right]_{(p+1)\times(p+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış olup Q_p Fibonacci $p-$matrisi ile Fibonacci $p-$dizisinin terimleri arasında

$$
Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix} \tag{2.33}
$$

şeklinde bağıntı elde edilmiştir.

2.8.Padovan Dizileri

Tanım 2.8.1: $\{P(n)\}$ Padovan dizisi $n \geq 3$ ve $P(0)=P(1)=P(2)=1$ olmak üzere

$$
P(n)=P(n-2)+P(n-3)
$$

şeklindedir. Yani Padovan dizisi

$$
1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,...
$$

şeklindedir.

Padovan sayıları

$$
Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

olmak üzere

$$
Q^n = \begin{bmatrix} P(n-5) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-4) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-1) & P(n-2) \end{bmatrix}
$$

elde edilmiştir [56].

2.9. Padovan $p-$Dizileri

Tanım 2.9.1: Verilen bir $p\ (p=2,3,4,...)$ için Padovan $p-$dizisi, $Pap(1)=Pap(2)=\cdots=Pap(p)=0$, $Pap(p+1)=1$ ve $Pap(p+2)=0$ olmak üzere $n\geq 1$ için $Pap(n+p+2)=Pap(n+p)+Pap(n)$ şeklinde tanımlanır [21].

Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra sadece sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodiktir ve tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,c,d,e,c,d,e,...$ dizisi periyodik olup başlangıç elemanı a ve periyodu 3 tür.

Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye $k-$periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,a,b,c,d,e,...$ dizisi periyodu 5 olan basit periyodiktir.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.Adjacency Tipli Diziler

Tanım 3.1.1: $G = \langle x \mid x^n \rangle$ ve $H = \langle y \mid y^m \rangle$ olmak üzere G ve H devirli grupların direkt çarpımı,

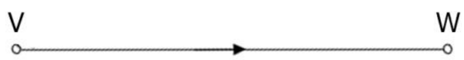
$$G \times H = \langle x, y \mid x^n = y^m = e, xy = yx \rangle$$

şeklinde tanımlanır [19].

[9] çalışmasında, verilen bir G grubu için grubun üreteçlerinin çarpımsal tablosu, grubun her bir elemanı bir köşeye karşılık gelecek şekilde bir diyagram ile gösterilmiştir. Diyagram, her bir $g \in G$ üreteci g-kenar olarak adlandırılan doğrusal kenarlarla ilişkilendirilerek temsil edilir ve bu doğrusalların yönleri bir ok yardımıyla gösterilir.

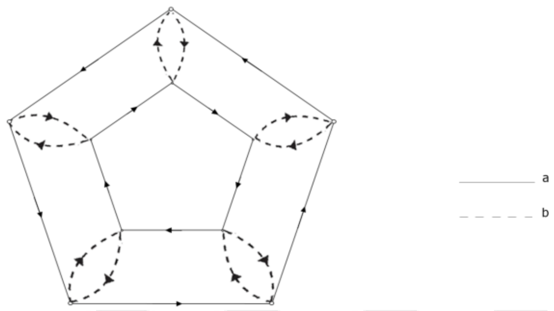
v ve w sembolleri ile herhangi iki elemana karşılık gelen köşeler gösterilirse $w = vg$ olduğunda v ve w köşeleri arasındaki doğrusal g-kenarı aşağıdaki gibi gösterilir:

Şekil 3.1.1



Örneğin; $D_{10} = \left\langle a,b : a^5 = b^2 = (ab)^2 = e \right\rangle$ dihedral grubu için Cayley diyagramı aşağıdaki gibidir:

Şekil 3.1.2



Tanım 2.2.19 da verilen Adjacency matrisi tanımındaki P_k köşeleri,

$$P_1 = e, P_2 = x, P_3 = x^2, \dots, P_n = x^{n-1},$$

$$P_{n+1} = y, P_{n+2} = y^2, \dots, P_{n+m-1} = y^{m-1},$$

$$P_{n+m} = xy, P_{n+m+1} = x^2 y, \dots, P_{2n+m-2} = x^{n-1} y,$$

$$P_{2n+m-1} = xy^2, P_{2n+m} = x^2 y^2, \dots, P_{3n+m-3} = x^{n-1} y^2, \dots,$$

$$P_{nm-2n+3} = xy^{m-2}, P_{nm-2n+4} = x^2 y^{m-2}, \dots, P_{nm-n+1} = x^{n-1} y^{m-2},$$

$$P_{nm-n+2} = xy^{m-1}, P_{nm-n+3} = x^2 y^{m-1}, \dots, P_{nm} = x^{n-1} y^{m-1}$$

olarak seçilsin ve

A, B, C, D ve E koşulları aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi olsun:

$i \Lambda j$ için koşullar	i	j
A	1	$2,\ n+1$
	2	$3,\ n+m$
	3	$4,\ n+m+1$
	$\dots$	$\dots$
	$n-1$	$n,\ 2n+m-3$
B	n	$1,\ 2n+m-2$
	$n+1$	$n+2,\ n+m$
	$n+2$	$n+3,\ 2n+m-1$
	$\dots$	$\dots$
	$n+m-2$	$n+m-1,\ nm-2n+3$
C	$n+m-1$	$1,\ nm-n+2$
	$n+m$	$n+m+1,\ 2n+m-1$
	$n+m+1$	$n+m+2,\ 2n+m$
	$\dots$	$\dots$
	$2n+m-3$	$2n+m-2,\ 3n+m-4$
D	$2n+m-2$	$n+1,\ 3n+m-3$
	$\dots$	$\dots$
	$nm-2n+3$	$nm-2n+4,\ nm-n+2$
	$nm-2n+4$	$nm-2n+5,\ nm-n+3$
	$\dots$	$\dots$
	$nm-n$	$nm-n+1,\ nm-1$
E	$nm-n+1$	$n+m-2,\ nm$
	$nm-n+2$	$nm-n+3,\ 2$
	$nm-n+3$	$nm-n+4,\ 3$
	$\dots$	$\dots$
	$nm-1$	$nm,\ n-1$
	nm	$n+m-1,\ n$

O halde $G \times H$ direkt çarpımı için Cayley diyagramının Adjacency matrisi,

$$A = \left[a_{ij} \right]_{nm \times nm} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} \vee \mathrm{D} \vee \mathrm{E} \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklindedir.

A matrisi kullanılarak Adjacency tipli dizi, $n, m \geq 2$ olmak üzere $x_1^{n,m} = \cdots = x_{nm-n+1}^{n,m} = 0, x_{nm-n+2}^{n,m} = 1, x_{nm-n+3}^{n,m} = \cdots = x_{nm}^{n,m} = 0$ başlangıç değerleri ve

$$x_{nm+k}^{n,m} = x_{nm-n+1+k}^{n,m} + x_k^{n,m}, (k \geq 1) \tag{3.1}$$

şeklindeki $(nm)-$inci mertebeden lineer homojen indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [19].

Eğer $n = 2$ olarak seçilir ise, $\alpha \geq 2m$ için $x_\alpha^{2,m} = F_{2m-1}(\alpha - 2m + 1)$ eşitliği elde edilir.

Eğer $n = 3$ olarak seçilir ise, $\alpha \geq 1$ için $x_\alpha^{3,m} = P_{a3m-2}(\alpha)$ eşitliği elde edilir.

Bu çalışmada $n \geq 4$ ve $m \geq 2$ olarak ele alınmıştır.

[19] çalışmasında (3.1) ifadesi yardımıyla, adjacency tipli dizi için Companion matris formundaki üreteç matris;

$$M^{n,m} = \left[m_{ij}^{n,m} \right]_{nm \times nm} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & & \overset{(n-1)\text{-inci}}{\downarrow} & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Adjacency tipli matris olarak adlandırılmıştır.

$u \geq 0$ için

$$\left(M^{n,m}\right)^u \begin{bmatrix} x_{nm}^{n,m} \\ x_{nm-1}^{n,m} \\ \vdots \\ x_1^{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{nm+u}^{n,m} \\ x_{nm+u-1}^{n,m} \\ \vdots \\ x_{u+1}^{n,m} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. u üzerinde tümevarım uygulanarak $u \geq 1$ için Adjacency tipli matrisin u-uncu kuvveti

$$\left(M^{n,m}\right)^u = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \underset{\downarrow}{u-\text{uncu}} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{nm-n+u+2}^{n,m} & \cdots & x_{nm+u-1}^{n,m} & x_{nm+u}^{n,m} & x_{u+1}^{n,m} & \cdots & x_{nm-n+u+1}^{n,m} \\ x_{nm-n+u+1}^{n,m} & \cdots & x_{nm+u-2}^{n,m} & x_{nm+u-1}^{n,m} & x_{u}^{n,m} & \cdots & x_{nm-n+u}^{n,m} \\ x_{nm-n+u}^{n,m} & \cdots & x_{nm+u-3}^{n,m} & x_{nm+u-2}^{n,m} & x_{u-1}^{n,m} & \cdots & x_{nm-n+u-1}^{n,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{u-n+3}^{n,m} & \cdots & x_{u}^{n,m} & x_{u+1}^{n,m} & x_{u-nm+2}^{n,m} & \cdots & x_{u-n+2}^{n,m} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilmiştir. $\det M^{n,m} = (-1)^{nm+1}$ oduğundan $\det\left(M^{n,m}\right)^u = (-1)^{unm+u}$ olduğu görülmektedir [19].

Lemma 3.1.1: Adjacency tipli matrisin karakteristik denklemi $z^{nm} - z^{nm-n+1} - 1 = 0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [19].

İspat: $f(z) = z^{nm} - z^{nm-n+1} - 1$ ve α nın, $f(z)$ nin bir çok katlı kökü olduğunu düşünelim. Bu durumda $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ ve $\alpha \neq -1$ olmalıdır. α, $f(z)$ nin bir çok katlı kökü olduğundan $f(\alpha) = 0$ ve $f'(\alpha) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\alpha^{nm} - \alpha^{nm-n+1} = 1$ ve $nm\alpha^{nm-1} - (nm-n+1)\alpha^{nm-n} = 0$ olur ki, bu eşitliklerden $\alpha^{nm-n+1} = \dfrac{nm}{1-n}$ ve $\alpha^{1-n} = \dfrac{nm-n+1}{nm}$ olduğu görülmektedir. O takdirde $\alpha^{nm} = \alpha^{n-1}$ yazılır. $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ ve $\alpha \neq -1$ olduğundan $\alpha^{nm} = \alpha^{n-1}$ eşitliği bir çelişki belirtmektedir. Bu çelişki ile lemma ispatlanmıştır.

Eğer $z^{nm} - z^{nm-n+1} - 1 = 0$ denkleminin kökleri z_1, z_2, $\dots$, z_{nm} ise, Lemma 3.1.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu basit bir şekilde görülmektedir.

$(nm)\times(nm)$ tipli $V_{m,n}$ Vandermonde matrisinin

$$V_{n,m} = \begin{bmatrix} z_1^{nm-1} & z_2^{nm-1} & \cdots & z_{nm}^{nm-1} \\ z_1^{nm-2} & z_2^{nm-2} & \cdots & z_{nm}^{nm-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1 & z_2 & & z_{nm} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini düşünelim.

$(nm)\times 1$ tipli $W_{n,m}(i, j)$ matrisi;

$$W_{n,m}(i, j) = \begin{bmatrix} z_1^{u+nm-1} \\ z_2^{u+nm-1} \\ \vdots \\ z_{nm}^{u+nm-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{n,m}(i, j)$ matrisi, $V_{n,m}$ matrisinin $j-$inci sütununun $W_{n,m}(i, j)$ sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Bu durumda, Adjacency tipli sayıların Binet formülü için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.1: $u \geq 1$ için $\left(M^{n,m}\right)^u = \left[m_{i,,j}^{n,m,u}\right]$ olsun, bu durumda $m_{i,j}^{n,m,u} = \dfrac{\det V_{n,m}(i, j)}{\det V_{n,m}}$ dır [19].

İspat: z_1, z_2, $\dots$, z_{nm} birbirinden farklı olduğu için $M^{n,m}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir (diagonalizable). $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{nm})$ olsun, bu durumda $M^{n,m}V_{n,m} = V_{n,m}Z$ eşitliği elde edilir. $\det V_{n,m} \neq 0$ olduğu için $V_{n,m}$ matrisi tersinir bir matristir. O zaman, $\left(V_{n,m}\right)^{-1} M^{n,m}V_{n,m} = Z$ eşitliği elde edilir ki, bu da $M_{m,n}$ matrisinin

Z ye benzer olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $u \geq 1$ için $\left(M^{n,m}\right)^u V_{n,m} = V_{n,m}(Z)^u$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} m_{i,1}^{n,m,u} z_1^{nm-1} + m_{i,2}^{n,m,u} z_1^{nm-2} + \cdots + m_{i,nm}^{n,m,u} = z_1^{u+nm-1} \\ m_{i,1}^{n,m,u} z_2^{nm-1} + m_{i,2}^{n,m,u} z_2^{nm-2} + \cdots + m_{i,nm}^{n,m,u} = z_2^{u+nm-1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_{i,1}^{n,m,u} z_{nm}^{nm-1} + m_{i,2}^{n,m,u} z_{nm}^{nm-1} + \cdots + m_{i,nm}^{n,m,u} = z_{nm}^{u+nm-1} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Lineer denklem sisteminin çözümünden de, her $i, j = 1, 2, \ldots, nm$ için

$$m_{i,j}^{n,m,u} = \frac{\det V_{n,m}(i,j)}{\det V_{n,m}}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 3.1.1: Varsayalım ki $x_u^{n,m}$, $n-$inci Adjacency tipli sayı olsun. Bu durumda,

$$x_u^{n,m} = \frac{\det V_{n,m}(2,n)}{\det V_{n,m}} = \frac{\det V_{n,m}(3,n+1)}{\det V_{n,m}} = \cdots = \frac{\det V_{n,m}(nm-n+2,nm)}{\det V_{n,m}}$$

ve

$$x_u^{n,m} = \frac{\det V_{n,m}(nm,n-2)}{\det V_{n,m}} = \frac{\det V_{n,m}(nm-1,n-1)}{\det V_{n,m}}$$

dır [19].

Tanım 3.1.3: Eğer bir $u \times v$ tipli $M = \left[m_{i,j}\right]$ gerçel matrisinin $k-$ıncı sütunu(veya satırı) iki tane sıfırdan farklı eleman içeriyor ise bu matrise $k-$ıncı sütuna (veya satıra) göre indirgenebilir (contractible) matris denir.

$x_1, x_2, \ldots, x_u$ lar M matrisinin satır vektörleri olsun. M matrisi, $m_{i,k} \neq 0, m_{j,k} \neq 0$ ve $i \neq j$ olacak şekilde $k-$ıncı sütuna göre indirgenebilir ise $(u-1)\times(v-1)$ tipli $M_{ij:k}$ matrisi, M 'nin $i-$inci satırının $m_{i,k}x_j + m_{j,k}x_i$ ile değiştirilip $j-$inci satırının silinmesi sonucu elde edilebilir. $k-$ıncı sütun, $i-$inci satır ve $j-$inci satır ile bağıntılı indirgeme sütunu olarak adlandırılır.

Eğer M, α mertebeden ($\alpha > 1$) bir gerçel matris ve N, M nin bir indirgemesi ise $per(M) = per(N)$ dir [7].

$\alpha \times \alpha$ tipli $A_{n,m}^{\alpha} = \left[a_{i,j}^{n,m}\right]$ süper köşegen matrisi;

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & \overset{(n-1)-\text{inci}}{\downarrow} & & & & & \overset{(nm)-\text{inci}}{\downarrow} & & \end{array} \\
A_{n,m}^{\alpha} = & \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

şeklinde tanımlansın [19].

Teorem 3.1.2: $\alpha \geqslant nm$ olmak üzere $A_{n,m}^{\alpha}$ matrisinin permanenti $x_{\alpha+nm-n+2}^{n,m}$ ye eşittir. $x_{\alpha+nm-n+2}^{n,m}$, $(\alpha + nm - n + 2)-$inci adjacency tipli sayıdır [19].

İspat: Denklemin $\alpha \geqslant nm$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $\alpha+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $A_{n,m}^{\alpha}$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(A_{n,m}^{\alpha}\right)$ genişletilir ise,

$$per\left(A_{n,m}^{\alpha+1}\right) = per\left(A_{n,m}^{\alpha-1}\right) + per\left(A_{n,m}^{\alpha-nm+1}\right)$$

eşitliği elde edilir.

$per\left(A_{n,m}^{\alpha+1}\right) = x_{\alpha+nm-n+3}^{n,m}$, $per\left(A_{n,m}^{\alpha-1}\right) = x_{\alpha+nm-n+1}^{n,m}$, $per\left(A_{n,m}^{\alpha-nm+1}\right) = x_{\alpha-n+3}^{n,m}$ ve $x_{\alpha+nm-n+3}^{n,m} = x_{\alpha+nm-n+1}^{n,m} + x_{\alpha-n+3}^{n,m}$ olduğundan, $per\left(A_{n,m}^{\alpha+1}\right) = x_{\alpha+nm-n+3}^{n,m}$ eşitliği elde edilir. Böylece α üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

Adjacency tipli sayıların üreteç fonksiyonu, $0 \le x^{n-1} + x^{nm} < 1$ olacak şekilde

$$g(x) = \frac{1}{1-x^{n-1}-x^{nm}}$$

dır [19].

Teorem 3.1.3: Adjacency tipli dizilerin üstel (exponential) temsili aşağıdaki gibidir [19]:

$$g(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(x^{n-1}\right)^i}{i}\left(1+x^{nm-n+1}\right)^i\right).$$

İspat: $\ln g(x) = \ln\left(1-x^{n-1}-x^{nm}\right)^{-1} = -\ln\left(1-x^{n-1}-x^{nm}\right)$

$$= -\left[-\left(x^{n-1}+x^{nm}\right) - \frac{1}{2}\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{k}\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)^k - \cdots\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(x^{n-1}\right)^i}{i}\left(1+x^{nm-n+1}\right)^i$$

olduğundan

$$g(x)=\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(x^{n-1}\right)^i}{i}\left(1+x^{nm-n+1}\right)^i\right)$$

dır.

Teorem 3.1.4: k ve t pozitif tamsayıları için,

$$x_{nm-n+k+2}^{n,m}=\sum_{\frac{k}{nm}\le t\le k}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}$$

dır. Burada i, $(n-1)t+(nm-n+1)i=k$ ve $i\le t$ şartlarını sağlayan bir tam sayıdır [19].

İspat: $g(x)=x_{nm-n+2}^{n,m}+x_{nm-n+3}^{n,m}x+x_{nm-n+4}^{n,m}x^2+\cdots+x_{nm+2}^{n,m}x^n+\cdots$ olduğundan $g(x)$ de x^k nın katsayısı $x_{nm-n+k+2}^{n,m}$ dır. Binom açılımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{1}{1-\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)}=1+\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)^k+\cdots\\&=1+\left(x^{n-1}\right)\left(1+x^{nm-n+1}\right)+\cdots+\left(x^{n-1}\right)^k\left(1+x^{nm-n+1}\right)^k+\cdots\\&=1+\left(x^{n-1}\right)\left(1+x^{nm-n+1}\right)+\cdots+\left(x^{n-1}\right)^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{(nm-n+1)i}+\cdots.\end{aligned}$$

x^k nın katsayısına ihtiyaç duyulduğu için yukarıdaki denklemin sadece sağ tarafındaki ilk $(k+1)$- inci terim göz önüne alınacaktır. Ayrıca

$$\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)^t=\left(x^{n-1}\right)^t\left(1+x^{nm-n+1}\right)^t=\left(x^{n-1}\right)^t\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}x^{(nm-n+1)i}$$

olduğundan pozitif k ve t tamsayıları için $\left(x^{n-1}+x^{nm}\right)^t$ deki x^k nın katsayısı, $(n-1)t+(nm-n+1)i=k$ ve $i\le t$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i},\quad \frac{k}{nm}\le t\le k$$

şeklinde elde edilir. Böylece sonuca ulaşılmış olur.

Teorem 3.1.5: $k_{i,j}^{(u)}(k_1,k_2,\ldots,k_v)$, $K^u(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ matrisinin $(i,j)-$inci elemanı olmak üzere, $k_{i,j}^{(u)}(k_1,k_2,\ldots,k_v)$ aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$k_{i,j}^{(u)}(k_1,k_2,\ldots,k_v)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_v)}\frac{t_j+t_{j+1}+\cdots+t_v}{t_1+t_2+\cdots+t_v}\times\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}k_1^{t_1}\cdots k_v^{t_v} \tag{3.4}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+vt_v=u-i+j$ koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1+\cdots+t_v}{t_1,\ldots,t_v}=\frac{(t_1+\cdots+t_v)!}{t_1!\cdots t_v!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer $u=i-j$ ise (3.4) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır [10].

Sonuç 3.1.2: $x_u^{n,m}$, $u-$uncu Adjacency tipli sayı olsun. O halde [19];

(i)

$$\begin{aligned}x_u^{n,m}&=\sum_{(t_1,t_2\ldots,t_{nm})}\frac{t_n+t_{n+1}+\cdots+t_{nm}}{t_1+t_2+\cdots+t_{nm}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{nm}}{t_1,\ldots,t_{nm}}\\&=\sum_{(t_1,t_2\ldots,t_{nm})}\frac{t_{n+1}+t_{n+2}+\cdots+t_{nm}}{t_1+t_2+\cdots+t_{nm}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{nm}}{t_1,\ldots,t_{nm}}\\&=\cdots\\&=\sum_{(t_1,t_2\ldots,t_{nm})}\frac{t_{nm}}{t_1+t_2+\cdots+t_{nm}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{nm}}{t_1,\ldots,t_{nm}}\end{aligned}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+nmt_{nm}=u+n-2$ koşulunu sağlamaktadır.

(ii)

$$x_u^{n,m}=\sum_{(t_1,t_2\ldots,t_{nm})}\frac{t_{n-2}+t_{n-1}+\cdots+t_{nm}}{t_1+t_2+\cdots+t_{nm}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{nm}}{t_1,\ldots,t_{nm}}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+nmt_{nm}=u+n-nm-2$ koşulunu sağlamaktadır.

(iii)

$$x_u^{n,m} = \sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{nm})} \frac{t_{n-1}+t_n+\cdots+t_{nm}}{t_1+t_2+\cdots+t_{nm}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{nm}}{t_1,\ldots,t_{nm}}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+nmt_{nm}=u+n-nm$ koşulunu sağlamaktadır.

İspat: Sonuç 3.1.2 de,

(i) $n \le \delta \le nm$ olacak şekilde $v=nm$, $i=\delta-n+2$ ve $i=\delta$,

(ii) $v=nm,\ i=nm$ ve $j=n-2$,

(iii) $v=nm,\ i=nm-1$ ve $j=n-1$ seçilirse, (3.3) eşitliğinden sonuç açık olarak görülmektedir.

Şimdi de Adjacency tipli sayılarının toplamsal temsillerini ele alalım.

$S_u = \sum_{i=1}^{u-nm+n-2} x_{nm-n+2+i}^{n,m}$ olmak üzere $(nm+1)\times(nm+1)$ tipli B ve C_u matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & M^{n,m} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_u & & & \\ S_{u-1} & & \left(M^{n,m}\right)^u & \\ \vdots & & & \\ S_{u-nm+1} & & & \end{bmatrix}.$$

O zaman, tümevarım yöntemi kullanılarak, $B^u = C_u$ eşitliği kolaylıkla görülebilir [19].

Teorem 3.1.6: $S_u = x_{nm-n+2}^{n,m}+\cdots+x_u^{n,m}$ olmak üzere

$$S_u = \sum_{i=0}^{nm-1}\left(x_{u+nm-i}^{n,m}\right)-1$$

dır [19].

İspat: $(nm+1)\times(nm+1)$ tipli Z ve D^* matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilsin:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & \\ -1 & & V_{n,m} & \\ \vdots & & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$D^* = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & z_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_{nm} \end{bmatrix},$$

burada z_1, z_2, $\ldots$, z_{nm} değerleri $z^{nm} - z^{nm-n+1} - 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Z matrisinin birinci satırına göre determinantın Laplace açılımı uygulanarak $\det(Z)$ nin genişletilmesiyle

$$\det(Z) = \det(V_{n,m}).$$

eşitliği elde edilir.

1, z_1, z_2, $\ldots$, z_{nm} sayıları, Z matrisinin özdeğerleri olup $1 \neq z_1 \neq z_2 \neq \ldots \neq z_{nm}$ olduğu için Z matrisi köşegenleştirilebilirdir. Böylece $BZ = ZD^*$ eşitliği yazılır. Ayrıca Z matrisi tersinir matris olduğundan $Z^{-1}BZ = D^*$ eşitliğine ulaşılır**.** O halde B matrisi, D^* köşegen matrisi ile benzerdir. Dolayısıyla $B^u Z = Z\left(D^*\right)^u$ eşitliği yazılır ve böylece, $C_u Z = Z\left(D^*\right)^u$ elde edilir. S_u, C_u matrisinin $(2,1)$-inci elemanı olduğundan matrisler üzerinde çarpma işlemi yardımıyla

$$S_u - \sum_{i=0}^{nm-1}\left(x_{u+nm-i}^{n,m}\right) = -1$$

eşitliği elde edilir.

3.1.1. α Modülüne Göre Adjacency Tipli Sayılar

$\left\{x_k^{n,m}\right\}$ Adjacency tipli dizi α modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{x_k^{n,m}(\alpha)\right\} = \left\{x_1^{n,m}(\alpha), x_2^{n,m}(\alpha), \ldots, x_i^{n,m}(\alpha), \ldots\right\}$$

dizisi elde edilir ve burada $x_i^{n,m}(\alpha) =$ $x_i^{n,m}\left(mod\alpha\right)$ dir.

Teorem 3.1.1.1: $\left\{x_k^{n,m}(\alpha)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [19].

İspat: $S = \left\{\left(s_1, s_2, \ldots, s_{nm}\right) \mid 0 \le s_i \le \alpha - 1\right\}$ olsun. Z_α nın elemanlarının α^{nm} tane farklı nm-tiplisi mevcut olduğundan, bu nm-tiplilerden en az bir tanesi $\left\{x_k^{n,m}(\alpha)\right\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $nm-$lileri takip eden alt dizi tekrarlanır; böylece dizi periyodiktir. $k > t$ olduğu kabul edilerek aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$x_{k+1}^{n,m}(\alpha) = x_{t+1}^{n,m}(\alpha), x_{k+2}^{n,m}(\alpha) = x_{t+2}^{n,m}(\alpha), \ldots, x_{k+nm}^{n,m}(\alpha) = x_{t+nm}^{n,m}(\alpha)$$

O halde $k \equiv t(modnm)$ dir. (3.1) denkleminden, $x_k^{n,m} = x_{nm+k}^{n,m} - x_{nm-n+1+k}^{n,m}$ eşitliği yazılır. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$x_k^{n,m}(\alpha) = x_t^{n,m}(\alpha), x_{k-1}^{n,m}(\alpha) = x_{t-1}^{n,m}(\alpha), \ldots, x_{k-t+1}^{n,m}(\alpha) = x_1^{n,m}(\alpha).$$

Dolayısıyla dizi basit periyodiktir.

$P^{n,m}(\alpha)$ notasyonu ile $\left\{x_k^{n,m}(\alpha)\right\}$ dizisinin periyodu gösterilmiş olsun.

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nın her elemanının $mod\alpha$ ya göre indirgenmesi $A(mod\alpha)$ şeklinde ifade edilir. Yani $A(mod\alpha)=(a_{ij}(mod\alpha))$ dir. $\langle A\rangle_\alpha=\{A^i(mod\alpha)\mid i\geq 0\}$ olsun. Eğer obeb$(\alpha,\det A)=1$ ise o zaman $\langle A\rangle_\alpha$ bir devirli grup, obeb$(\alpha,\det A)\neq 1$ ise o zaman da $\langle A\rangle_\alpha$ bir yarı gruptur. $\det M_{m,n}=(-1)^{mn+1}$ için kolayca görülür ki her pozitif tam sayı olan α için $\langle M_{m,n}\rangle_\alpha$ devirli bir gruptur. Devirli grubun mertebesi $\langle A\rangle_\alpha$ olmak üzere $|\langle A\rangle_\alpha|$ ile gösterilir. $\det M^{n,m}=(-1)^{nm+1}$ olmak üzere pozitif tam sayı olan α değeri için $\langle M^{n,m}\rangle_\alpha$ devirli bir gruptur. Dolayısıyla (3.2) ifadesi ile $P^{n,m}(\alpha)=|\langle M^{n,m}\rangle_\alpha|$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1.2: p bir asal sayı ve u, $P^{n,m}(p)=P^{n,m}(p^u)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olsun. Bu takdirde $k\geq u$ için $P^{n,m}(p^k)=p^{k-u}\cdot P^{n,m}(p)$ eşitliği elde edilir [19].

İspat: t, $\left(M^{n,m}\right)^{P^{n,m}\left(p^{t+1}\right)}\equiv I\left(modp^{t+1}\right)$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun. Burada I, $(mn)\times(mn)$ tipli bir birim matristir. $\left(M^{n,m}\right)^{P^{n,m}\left(p^{t+1}\right)}\equiv I\left(modp^{t+1}\right)$ olduğundan $P^{n,m}(p^{t+1})$, $P^{n,m}(p^t)$ tarafından bölünebilirdir.

Öte yandan $\left(M^{n,m}\right)^{P^{n,m}\left(p^{t}\right)}=I+\left(m_{i,,j}^{n,m,(t)}p^t\right)$ eşitliği yazılarak, Binom açılımından,

$$\left(M^{n,m}\right)^{P^{n,m}\left(p^{t}\right)\cdot p}=\left(I+\left(m_{i,,j}^{n,m,(t)}p^t\right)\right)^p=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(m_{i,,j}^{n,m,(t)}p^t\right)^i\equiv I\left(modp^{t+1}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlik ile $P^{n,m}(p^{t+1})$, $P^{n,m}(p^t)\cdot p$ tarafından bölünebilir olduğu gösterilir. Böylece bu da ya $P^{n,m}(p^{t+1})=P^{n,m}(p^t)$ ya da $P^{n,m}(p^{t+1})=P^{n,m}(p^t)\cdot p$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durum, ancak ve ancak p tarafından bölünemeyen bir $m_{i,j}^{n,m,(t)}$ nin varlığı ile mümkündür. $P^{n,m}(p)=P^{n,m}(p^u)$, $P^{n,m}(p^u)\neq P^{n,m}(p^{u+1})$ olmak üzere u en büyük pozitif tam sayıdır. Yani p tarafından bölünemeyen bir

$m_{i,,j}^{n,m,(u+1)}$ nin varlığı ile mümkündür. Bundan dolayı $P^{n,m}\left(p^{u+1}\right) \neq P^{n,m}\left(p^{u+2}\right)$ eşitsizliği yazılır. u üzerinde tümevarım yöntemi ile her $k \geq u$ için $P^{n,m}\left(p^{k}\right) = p^{k-u} \cdot P^{n,m}(p)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1.3: $u \geq 1$ olmak üzere $\alpha = \prod_{i=1}^{u} p_i^{r_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. $P^{n,m}(\alpha)$, $P^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)$ lerin en küçük ortak katına eşittir [19].

İspat: $\left\{x_k^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)\right\}$ dizisinin periyodu $P^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi $\lambda \cdot P^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)$, $(\lambda \in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $P^{n,m}(\alpha)$, $\left\{x_k^{n,m}(\alpha)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{x_k^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)\right\}$ dizisi $P^{n,m}(\alpha)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $P^{n,m}(\alpha)$ periyodu $\lambda \cdot P^{n,m}\left(p_i^{r_i}\right)$ formudur. Dolayısıyla

$$P^{n,m}(\alpha) = \text{okek}\left[P^{n,m}\left(p_1^{r_1}\right), \ldots, P^{n,m}\left(p_u^{r_u}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1.4: Eğer nm bir çift tam sayı ise o zaman her α pozitif tam sayısı için $P^{n,m}(\alpha)$ bir çift sayıdır [19].

İspat: $\det M^{n,m} = -1$ ise, nm bir çift tam sayı ve $P^{n,m}(\alpha) = \left|\left\langle M^{n,m}\right\rangle_{\alpha}\right|$ dir.

3.1.2.Gruplarda Adjacency Tipli Diziler

G grubu sonlu 2-gerenli bir grup ve $X = \left\{(x,y) \mid \left\langle\{x,y\}\right\rangle = G\right\}$ olsun. Burada (x,y) ikilisi G nin geren çifti olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2.1: G grubu sonlu 2-gerenli bir grup ve (x,y) ikilisi $|x| = n$, $|y| = m$ olmak üzere $n \geq 4$, $m \geq 2$ için G nin bir geren çifti olsun. $A(G : x,y)$ Adjacency tipli orbit

$$a_1^{n,m} = x, a_2^{n,m} = \cdots = a_{nm-n+1}^{n,m} = e, a_{nm-n+2}^{n,m} = y, a_{nm-n+3}^{n,m} = \cdots = a_{nm}^{n,m} = e$$

başlangıç değerleri için

$$a_{nm+k}^{n,m} = a_k^{n,m} a_{nm-n+1+k}^{n,m} \ , k \geq 1$$

olarak tanımlanır [19].

Teorem 3.1.2.1: Eğer G sonlu bir grup ise $A(G:x,y)$ Adjacency tipli orbit basit periyodiktir [19].

İspat: η, G grubunun mertebesi olsun. O halde G grubunun elemanlarının farklı sıralı nm-lilerin sayısı η^{nm} olduğundan $nm-$lilerin en az bir tanesi adjacency tipli orbit olan $A(G:x,y)$ de iki kez ortaya çıkar. Bu tekrardan dolayı adjacency tipli orbit $A(G:x,y)$ periyodiktir.

Adjacency tipli orbit periyodik olduğu için $a_{l+1}^{n,m} = a_{t+1}^{n,m}, a_{l+2}^{n,m} = a_{t+2}^{n,m}, \ldots, a_{l+nm}^{n,m} = a_{t+nm}^{n,m}$ olacak şekilde l ve t doğal sayıları vardır. Burada $l \equiv t\left(modnm\right)$ dır. Adjacency tipli orbit tanımından $a_l^{n,m} = a_{nm+l}^{n,m}\left(a_{nm-n+1+l}^{n,m}\right)^{-1}$ ve $a_t^{n,m} = a_{nm+t}^{n,m}\left(a_{nm-n+1+t}^{n,m}\right)^{-1}$ eşitlikleri yazılır. Böylece $a_l^{n,m} = a_t^{n,m}, a_{l-1}^{n,m} = a_{t-1}^{n,m}, \ldots, a_{l-t+1}^{n,m} = a_t^{n,m}$ elde edilir.

Burada $PA(G:x,y)$ notasyonu ile $A(G:x,y)$ dizisinin periyodu gösterilmektedir.

Tanım 3.1.2.2: $|x| = n$ ve $|y| = m$ olmak üzere $n \geq 4$ ve $m \geq 2$ için G grubu sonlu 2-gerenli bir grup ve (x,y) ikilisi G nin geren çifti olsun. Eğer G nin her elemanı G nin Adjacency tipli orbit $A(G:x,y)$ de ortaya çıkıyor ise o zaman G grubuna (x,y) geren çifti için Adjacency tipli dizilenebilirdir denir [19].

Quaternion grup Q_8 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left\langle x, y \mid x^4 = e, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \right\rangle.$$

Teorem 3.1.2.2: Quaternion grup Q_8 in Adjacency tipli orbiti olan $A(Q_8 : x, y)$ nin periyodu 434 tür [19].

İspat: $a_1^{4,4} = x, a_2^{4,4} = \cdots = a_5^{4,4} = e, a_6^{4,4} = y, a_7^{4,4} = a_8^{4,4} = e$ başlangıç şartları ile $k \geq 1$ için Quaternion grup Q_8 in Adjacency tipli orbit $A(Q_8 : x, y)$ aşağıdaki gibi gösterilir:

$$a_{8+k}^{4,4} = a_k^{4,4} a_{5+k}^{4,4}$$

Dolayısıyla aşağıdaki diziler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a_1^{4,4} = x, a_2^{4,4} = e, a_3^{4,4} = e, a_4^{4,4} = e, a_5^{4,4} = e, a_6^{4,4} = y, a_7^{4,4} = e, a_8^{4,4} = e,\\
&a_9^{4,4} = xy, a_{10}^{4,4} = e, a_{11}^{4,4} = e, a_{12}^{4,4} = xy, a_{13}^{4,4} = e, a_{14}^{4,4} = y, a_{15}^{4,4} = xy, a_{16}^{4,4} = e, \ldots,\\
&a_{300}^{4,4} = x^{-1}, a_{301}^{4,4} = e, a_{302}^{4,4} = x^2, a_{303}^{4,4} = x^2, a_{304}^{4,4} = y, a_{305}^{4,4} = y^{-1}, a_{306}^{4,4} = e,\\
&a_{307}^{4,4} = yx, a_{308}^{4,4} = xy, a_{309}^{4,4} = e, a_{310}^{4,4} = xy, a_{311}^{4,4} = yx, a_{312}^{4,4} = y, a_{313}^{4,4} = x^{-1},\\
&a_{314}^{4,4} = yx, a_{315}^{4,4} = x, a_{316}^{4,4} = y^{-1}, \ldots, a_{427}^{4,4} = yx, a_{428}^{4,4} = e, a_{429}^{4,4} = e, a_{430}^{4,4} = x^{-1},\\
&a_{431}^{4,4} = e, a_{432}^{4,4} = y, a_{433}^{4,4} = e, a_{434}^{4,4} = e, a_{435}^{4,4} = x = a_1^{4,4}, a_{436}^{4,4} = a_2^{4,4} = e, a_{437}^{4,4} = a_3^{4,4} = e,\\
&a_{438}^{4,4} = a_4^{4,4} = e, a_{439}^{4,4} = a_5^{4,4} = e, a_{440}^{4,4} = a_6^{4,4} = y, a_{441}^{4,4} = a_7^{4,4} = e, a_{442}^{4,4} = a_8^{4,4} = e.
\end{aligned}$$

Böylece $PA(Q_8 : x, y) = 434$ eşitliği elde edilir.

3.2.Adjacency-Pell Dizileri

Tanım 3.2.1: Adjacency-Pell dizisi, $m \geq 2$ ve $n \geq 4$ olmak üzere $a_{m,n}(1) = \cdots = a_{m,n}(mn-1) = 0$ ve $a_{m,n}(mn) = 1$ başlangıç değerleri ve

$$a_{m,n}(mn+k) = 2a_{m,n}(mn-n+k+1) + a_{m,n}(k), \quad (k \geq 1) \tag{3.5}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [18].

Tanım 3.2.2 : Adjacency-Pell dizisinin karakteristik polinomu

$$f(x) = x^{mn} - 2x^{mn-n+1} - 1$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

[18] çalışmasında (3.5) ifadesi yardımıyla , Adjacency-Pell dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisi;

$$M_{m,n}=\left[m_{ij}\right]_{(mn)\times(mn)}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & \overset{(n-1)\text{-inci}}{\downarrow} & & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Adjacency-Pell matrisi olarak adlandırılmaktadır.

$\alpha \geq 0$ için

$$\left(M_{m,n}\right)^{\alpha}\begin{bmatrix} a_{m,n}(mn) \\ a_{m,n}(mn-1) \\ \vdots \\ a_{m,n}(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{m,n}(\alpha+mn) \\ a_{m,n}(\alpha+mn-1) \\ \vdots \\ a_{m,n}(\alpha+1) \end{bmatrix}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. u üzerinde tümevarım uygulanarak $u \geq 1$ için Adjacency-Pell matrisinin $\alpha-$ıncı kuvveti

$$\left(M_{m,n}\right)^{\alpha}=\begin{bmatrix}
a_{mn+\alpha}^{m,n} & a_{mn+\alpha+1}^{m,n} & \cdots & a_{mn+n+\alpha-2}^{m,n} & a_{\alpha+m+1}^{m,n} & a_{\alpha+m+2}^{m,n} & \cdots & \cdots & a_{\alpha+mn-1}^{m,n} \\
a_{mn+\alpha-1}^{m,n} & a_{mn+\alpha}^{m,n} & \cdots & a_{mn+n+\alpha-1}^{m,n} & a_{\alpha+m}^{m,n} & a_{\alpha+m+1}^{m,n} & \cdots & \cdots & a_{\alpha+mn-2}^{m,n} \\
a_{mn+\alpha-2}^{m,n} & a_{mn+\alpha-1}^{m,n} & \ddots & \vdots & \vdots & a_{\alpha+m}^{m,n} & \ddots & & a_{\alpha+mn-3}^{m,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{mn+\alpha}^{m,n} & a_{\alpha+1}^{m,n} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{\alpha+m+2}^{m,n} & \vdots & & a_{mn+\alpha-1}^{m,n} & a_{\alpha}^{m,n} & a_{\alpha+1}^{m,n} & & \ddots & a_{\alpha+m+1}^{m,n} \\
a_{\alpha+m+1}^{m,n} & a_{\alpha+m+2}^{m,n} & & \vdots & \vdots & a_{\alpha}^{m,n} & \ddots & & a_{\alpha+m}^{m,n} \\
\vdots & a_{\alpha+m+1}^{m,n} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{\alpha+2}^{m,n} & \vdots & \ddots & a_{\alpha+m+2}^{m,n} & a_{\alpha-mn+n+1}^{m,n} & a_{\alpha-mn+n+2}^{m,n} & & \ddots & a_{\alpha+1}^{m,n} \\
a_{\alpha+1}^{m,n} & a_{\alpha+2}^{m,n} & \cdots & a_{\alpha+m+1}^{m,n} & a_{\alpha-mn+n}^{m,n} & a_{\alpha-mn+n+1}^{m,n} & \cdots & \cdots & a_{\alpha}^{m,n}
\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilmiştir. $\det M_{m,n}=(-1)^{mn+1}$ olduğundan $\det\left(M_{m,n}\right)^{\alpha}=(-1)^{mn\alpha+\alpha}$ olduğu görülmektedir. Burada $a_{\alpha}^{m,n}$ notasyonu ile $a_{m,n}(\alpha)$ gösterilmektedir [18].

Lemma 3.2.1: Adjacency-Pell dizisinin karakteristik denklemi $x^{mn}-2x^{mn-n+1}-1=0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [18].

İspat: $P(x)=x^{mn}-2x^{mn-n+1}-1$ ve u nun, $P(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu düşünelim. Bu durumda $P(u)=u^{mn}-2u^{mn-n+1}-1=0$ ve $P'(u)=(mn)u^{mn-1}-2(mn-n+1)u^{mn-n}=0$ olmalıdır. Dolayısıyla $u^{n-1}=\dfrac{2(mn-n+1)}{mn}$ ve $u^{mn}=\dfrac{mn-n+1}{-n+1}$ olur ki, bu eşitliklerden $u^{mn}<0$ olduğu görülmektedir. $u^{mn}<0$ olması ancak m ve n nin birer tek sayı olması durumunda gerçeklenmektedir. m ve n nin birer tek sayı olduğu durumda ise -1 in $P(x)$ polinomunun bir kökü olacağından $-mn=-2n+2$ eşitliği elde edilir ki, bu da mn nin çift sayı olduğunu göstermektedir. Bu çelişki ile lemma ispatlanmıştır.

Eğer $u^{mn}-2u^{mn-n+1}-1=0$ denkleminin kökleri $u_1, u_2, \ldots, u_{mn}$ ise, Lemma 3.2.1 ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu basit bir şekilde görülmektedir.

$(mn)\times(mn)$ tipli $V_{m,n}$ Vandermonde matrisinin

$$V_{m,n}=\begin{bmatrix} (u_1)^{mn-1} & (u_2)^{mn-1} & \cdots & (u_{mn})^{mn-1} \\ (u_1)^{mn-2} & (u_2)^{mn-2} & \cdots & (u_{mn})^{mn-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & & u_{mn} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini düşünelim.

$(mn)\times 1$ tipli $W_{m,n}(i,j)$ matrisi;

$$W_{m,n}(i,j)=\begin{bmatrix} u_1^{\alpha+mn-1} \\ u_2^{\alpha+mn-1} \\ \vdots \\ u_{mn}^{\alpha+mn-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{m,n}(i,j)$ matrisi, $V_{m,n}$ matrisinin $j-$inci sütununun $W_{m,n}(i,j)$ sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Teorem 3.2.1: $\alpha \geq 1$ için $\left(M_{m,n}\right)^{\alpha} = \left[g_{m,n,\alpha}^{i,j}\right]$ olsun, bu durumda $g_{m,n,\alpha}^{i,j} = \dfrac{\det V_{m,n}(i,j)}{\det V_{m,n}}$ dır [18].

İspat: u_1, u_2, $\ldots, u_{mn}$ birbirinden farklı olduğu için $M_{m,n}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. $U_{m,n} = (u_1, u_2, \ldots, u_{mn})$ olsun, bu durumda $M_{m,n}V_{m,n} = V_{m,n}U_{m,n}$ eşitliği elde edilir. $V_{m,n}$ matrisi tersinir matris olduğu için $\left(V_{m,n}\right)^{-1} M_{m,n}V_{m,n} = U_{m,n}$ eşitliği sağlanır ki, bu da $M_{m,n}$ matrisinin $U_{m,n}$ ye benzer olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $\alpha \geq 1$ için $\left(M_{m,n}\right)^{\alpha} V_{m,n} = V_{m,n}\left(U_{m,n}\right)^{\alpha}$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} g_{m,n,\alpha}^{i,1}u_1^{mn-1} + g_{m,n,\alpha}^{i,2}u_1^{mn-2} + \cdots + g_{m,n,\alpha}^{i,mn} = u_1^{\alpha+mn-1} \\ g_{m,n,\alpha}^{i,1}u_2^{mn-1} + g_{m,n,\alpha}^{i,2}u_2^{mn-2} + \cdots + g_{m,n,\alpha}^{i,mn} = u_2^{\alpha+mn-1} \\ \vdots \\ g_{m,n,\alpha}^{i,1}u_{mn}^{mn-1} + g_{m,n,\alpha}^{i,2}u_{mn}^{mn-2} + \cdots + g_{m,n,\alpha}^{i,mn} = u_{mn}^{\alpha+mn-1} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Lineer denklem sisteminin çözümünden de, her $i, j = 1, 2, \ldots, mn$ için

$$g_{m,n,\alpha}^{i,j} = \frac{\det V_{m,n}(i,j)}{\det V_{m,n}}$$

olduğu görülmektedir.

Adjacency-Pell sayıları için Binet formülü sonuç olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

Sonuç 3.2.1: Varsayalım ki $a_{m,n}(\alpha)$, $\alpha-$ıncı Adjacency-Pell sayısı olsun. Bu durumda

$$a_{m,n}(\alpha) = \frac{\det V_{m,n}(mn, mn)}{\det V_{m,n}}$$

dır [18].

$k \times k$ tipli $H\left(k,(m,n)\right) = \left[h_{i,j}^{m,n,k}\right]$ süper köşegen matrisi;

$$h_{i,j}^{m,n,k} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u+n-2 \text{ için } 1 \le u \le k-n+2, \\ & \text{eğer } i = u+1 \quad j = u \text{ için } 1 \le u \le k-1 \\ 1 & \text{ve} \\ & i = u \text{ ve } j = u+mn-1 \text{ için } 1 \le u \le k-mn+1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$H\left(k,(m,n)\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} & & & \overset{(n-1)\text{-inci}}{\downarrow} & & & & \overset{(mn)\text{-inci}}{\downarrow} & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın [18].

Teorem 3.2.2: $k \geqslant mn$ olmak üzere

$$perH\left(k,(m,n)\right) = a_{m,n}(mn+k)$$

eşitliği elde edilir [18].

İspat: Denklemin $k \geq mn$ için $perH\left(k,(m,n)\right) = a_{m,n}\left(mn+k\right)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $k+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $H\left(k,(m,n)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perH\left(k,(m,n)\right)$ genişletilir ise,

$$perH\left(k+1,(m,n)\right) = 2\,perH\left(k-n+2,(m,n)\right) + perH\left(k-mn+1,(m,n)\right)$$

eşitliği elde edilir.

$$perH\left(k-n+2,(m,n)\right) = a_{m,n}\left(k+mn-n+2\right)$$

ve

$$perH\left(k-mn+1,(m,n)\right) = a_{m,n}\left(k+1\right)$$

olduğundan, $perH\left(k+1,(m,n)\right) = a_{m,n}\left(mn+k+1\right)$ eşitliği elde edilir. Böylece k üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

$k > mn$ için $k \times k$ tipli $Y\left(k,(m,n)\right) = \left[y_{i,j}^{m,n,k}\right]$ matrisi;

$$y_{i,j}^{m,n,k} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=u \text{ ve } j=u+n-2 \text{ için } 1 \leq u \leq k-mn+1, \\ & \text{eğer } i=u+1 \text{ ve } j=u \text{ için } 1 \leq u \leq k-1 \\ 1 & \text{ve} \\ & i=u \text{ ve } j=u+mn-1 \text{ için } 1 \leq u \leq k-mn+1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [18].

$k \times k$ tipli $A\left(k,(m,n)\right) = \left[a_{i,j}^{m,n,k}\right]$ matrisi;

$$A\left(k,(m,n)\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & (u-mn)\text{-inci} & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & Y\left(k-1,(m,n)\right) & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır [18].

Teorem 3.2.3: (i) $k > mn$ için $perY\left(k,(m,n)\right) = a_{m,n}(k)$ dır.

(ii) $k > mn+1$ için $perA\left(k,(m,n)\right) = \sum_{u=1}^{k-1} a_{m,n}(u)$ dır.

İspat: (i) Denklemin $k > mn$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $k+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $Y\left(k,(m,n)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perY\left(k,(m,n)\right)$ genişletilir ise,

$$perY\left(k,(m,n)\right) = a_{m,n}(k)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Eğer $Y\left(k,(m,n)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perY\left(k,(m,n)\right)$ genişletilir ise,

$$perA\left(k,(m,n)\right) = perA(k-1,(m,n)) + perY(k-1,(m,n))$$

eşitliği elde edilir.

$k > mn$ için $k \times k$ tipli R matrisi;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Dolayısıyla $k > mn$ için $perH(k,(m,n)) = \det(H(k,(m,n)) \circ R)$,

$perY(k,(m,n)) = \det(Y(k,(m,n)) \circ R)$ ve $perA(k,(m,n)) = \det(A(k,(m,n)) \circ R)$

eşitlikleri elde edilir [18].

Sonuç 3.2.2.: $k > mn$ olmak üzere

$$\det(H(k,(m,n)) \circ R) = a_{m,n}(mn+k),$$

$$\det(Y(k,(m,n)) \circ R) = a_{m,n}(k)$$

ve

$$\det(A(k,(m,n)) \circ R) = \sum_{u=1}^{k-1} a_{m,n}(u)$$

dır [18].

Sonuç 3.2.3: $a_{m,n}(u)$, $u-$uncu Adjacency-Pell sayısı olsun. O halde

$$a_{m,n}(u) = \sum_{(t_1,t_2 \ldots,t_{mn})} \frac{t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{mn}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_{mn}} \times \binom{t_1 + \cdots + t_{mn}}{t_1, \ldots, t_{mn}} 2^{t_{n-1}}$$

$$= \sum_{(t_1,t_2 \ldots,t_{mn})} \frac{t_{n+1} + t_{n+2} + \cdots + t_{mn}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_{mn}} \times \binom{t_1 + \cdots + t_{mn}}{t_1, \ldots, t_{mn}} 2^{t_{n-1}}$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{(t_1,t_2,\dots,t_{mn})} \frac{t_{mn}}{t_1+t_2+\cdots+t_{mn}} \times \binom{t_1+\cdots+t_{mn}}{t_1,\dots,t_{mn}} 2^{t_{n-1}}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \cdots + (mn)t_{mn} = u$ koşulunu sağlamaktadır [18].

İspat: Sonuç 3.2.3 de $n \le i, j \le mn$ olmak üzere $v = mn$ ve $i = j$ olarak seçilir ise, ispat açık olarak görülmektedir.

Adjacency-Pell dizisinin üreteç fonksiyonu, $0 \leqslant 2x^{n-1} + x^{mn} < 1$ olacak şekilde

$$g(x) = \frac{x^{mn-1}}{1-2x^{n-1}-x^{mn}}$$

dır [18].

Teorem 3.2.4: Adjacency-Pell dizilerinin üstel temsili aşağıdaki gibidir [18]:

$$g(x) = x^{mn-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x^{n-1})^i}{i} \left(2 + x^{mn-n+1}\right)^i \right).$$

İspat: $\ln g(x) = \ln \dfrac{x^{mn-1}}{1-2x^{n-1}-x^{mn}} = \ln x^{mn-1} - \ln\left(1-2x^{n-1}-x^{mn}\right)$

ve

$$-\ln\left(1-2x^{n-1}-x^{mn}\right) = -[-\left(x^{n-1}\right)\left(2+x^{mn-n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(x^{n-1}\right)^2\left(2+x^{mn-n+1}\right)^2 - \cdots$$

$$-\frac{1}{k}\left(x^{n-1}\right)^k\left(2+x^{mn-n+1}\right)^k - \cdots]$$

olduğundan

$$\ln\frac{g(x)}{x^{mn-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x^{n-1})^i}{i}\left(2+x^{mn-n+1}\right)^i$$

dır [18].

Teorem 3.2.5: k ve p pozitif tamsayıları için,

$$a_{m,n}\left(mn+k\right)=\sum_{\frac{k}{mn}\leqslant p\leqslant k}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}2^{p-j}$$

dır. Burada j, $\left(n-1\right)p+\left(mn-n+1\right)j=k$ ve $j\leqslant p$ şartlarını sağlayan bir tam sayıdır [18].

İspat: $g\left(x\right)=a_{m,n}\left(mn\right)+a_{m,n}\left(mn+1\right)x+a_{m,n}\left(mn+2\right)x^2+\cdots+a_{m,n}\left(mn+k\right)x^k+\cdots$ olduğundan $g\left(x\right)$ de x^k nın katsayısı $a_{m,n}\left(mn+k\right)$ dır. Binom açılımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$g\left(x\right)=\left(x^{mn-1}\right)\frac{1}{1-\left(2x^{n-1}+x^{mn}\right)}=\left(x^{mn-1}\right)\left(1+\left(2x^{n-1}+x^{mn}\right)+\cdots+\left(2x^{n-1}+x^{mn}\right)^k+\cdots\right)$$

$$=x^{mn-1}+\left(x^{mn+n-2}\right)\left(2+x^{mn-n+1}\right)+\cdots+\left(x^{mn+nk-k+1}\right)\left(2+x^{mn-n+1}\right)^k+\cdots$$

$$=x^{mn-1}+\left(x^{mn+n-2}\right)\left(2+x^{mn-n+1}\right)+\cdots+\left(x^{mn+nk-k+1}\right)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2^{k-j}x^{(mn-n+1)j}+\cdots.$$

x^k nın katsayısına ihtiyaç duyulduğu için yukarıdaki denklemin sadece sağ tarafındaki ilk $(k+1)$- inci terim göz önüne alınacaktır. Ayrıca,

$$\left(2x^{n-1}+x^{mn}\right)^p=\left(x^{n-1}\right)^p\left(2+x^{mn-n+1}\right)^p=\left(x^{n-1}\right)^p\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}2^{p-j}x^{(mn-n+1)j}$$

olduğundan k ve p tamsayıları için $\left(2x^{n-1}+x^{mn}\right)^p$ deki x^k nın katsayısı, $\left(n-1\right)p+\left(mn-n+1\right)j=k$ ve $j\leqslant p$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}2^{p-j},\ \frac{k}{mn}\leqslant p\leqslant k$$

şeklinde elde edilir. Böylece sonuca ulaşılmış olur.

Şimdi de Adjacency-Pell dizilerinin toplamsal temsillerini ele alalım.

$S_t = \sum_{k=1}^{t} a_{m,n}(k)$ olmak üzere $(mn+1)\times(mn+1)$ tipli G_{mn+1} matrisi aşağıdaki gösterilsin:

$$G_{mn+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & M_{m,n} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

O zaman, tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$(G_{mn+1})^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{t+mn-1} & & & \\ S_{t+mn-2} & & (M_{m,n})^t & \\ \vdots & & & \\ S_t & & & \end{bmatrix}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir [18].

3.2.1. $M_{m,n}$ Matrisi Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi

d_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $D = [d_{ij}]$ matrisi için, D nin her elemanının $mod\alpha$ ya göre indirgenmesi $D(mod\alpha)$ şeklinde ifade edilir. Yani $D(mod\alpha) = (d_{ij}(mod\alpha))$ dir. $\langle D\rangle_\alpha = \{D^i(mod\alpha) | i \geq 0\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}(\alpha, \det D) = 1$ ise o zaman $\langle D\rangle_\alpha$ bir devirli gruptur. $\det M_{m,n} = (-1)^{mn+1}$ için kolayca görülür ki her pozitif tam sayı olan α için $\langle M_{m,n}\rangle_\alpha$ devirli bir gruptur.

Teorem 3.2.1.1.: r bir asal sayı ve $\langle M_{m,n} \rangle_{r^\alpha}$ devirli bir grup olsun. Eğer u, $\left| \langle M_{m,n} \rangle_r \right| = \left| \langle M_{m,n} \rangle_{r^u} \right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$ için $\left| \langle M_{m,n} \rangle_{r^v} \right| = r^{v-u} \cdot \left| \langle M_{m,n} \rangle_r \right|$ eşitliği yazılır [18].

İspat: b, $\left(M_{m,n}\right)^{L\left(r^{b+1}\right)} \equiv I \left(\bmod r^{b+1}\right)$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun ve $L(r^\alpha)$ notasyonu ile $\left| \langle M_{m,n} \rangle_{r^\alpha} \right|$ gösterilsin. Burada I, $(mn)\times(mn)$ tipli bir birim matristir. $\left(M_{m,n}\right)^{L\left(r^{b+1}\right)} \equiv I \left(\bmod r^{b+1}\right)$ olduğundan $L\left(r^{b+1}\right)$, $L\left(r^b\right)$ tarafından bölünebilirdir.xx

Öte yandan $\left(M_{m,n}\right)^{L\left(r^b\right)} = I + \left(m_{ij}^{(b)} \cdot r^b\right)$ eşitliği yazılarak, Binom teoreminden,

$$\left(M_{m,n}\right)^{L\left(r^b\right)\cdot r} = \left(I + \left(m_{ij}^{(b)} \cdot r^b\right)\right)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(m_{ij}^{(b)} \cdot r^b\right)^i \equiv I \left(\bmod r^{b+1}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlik ile $L(r^{b+1})$, $L(r^b).r$ tarafından bölünebilir olduğu gösterilir. Böylece bu da ya $L\left(r^{b+1}\right) = L\left(r^b\right)$ ya da $L\left(r^{b+1}\right) = L\left(r^b\right)\cdot r$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durum, ancak ve ancak r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(b)}$ nin varlığı ile mümkündür. $L(r) = L\left(r^u\right)$, $L\left(r^u\right) \neq L\left(r^{u+1}\right)$ olmak üzere u en büyük pozitif tam sayıdır. Yani r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ nin varlığı ile mümkündür. Bundan dolayı $L\left(r^{u+1}\right) \neq L\left(r^{u+2}\right)$ eşitsizliği yazılır. u üzerinde tümevarım yöntemi ile her $v \geq u$ için $\left| \langle M_{m,n} \rangle_{r^v} \right| = r^{v-u} \cdot \left| \langle M_{m,n} \rangle_r \right|$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.1.2: α pozitif değerleri için $\left\{a_{m,n}^{\alpha}(k)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir.

İspat: $Q = \left\{\left(q_1, q_2, \ldots, q_{mn}\right) \mid 0 \leq q_i \leq \alpha - 1\right\}$ olsun. Z_α nın elemanlarının α^{mn} tane farklı mn-tiplisi mevcut olduğundan, bu mn-tiplilerden en az bir tanesi $\left\{a_{m,n}^{\alpha}(k)\right\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu $mn-$lileri takip eden alt dizi tekrarlanır; böylece dizi periyodiktir. $x > y$ olduğu kabul edilerek aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_{m,n}^{\alpha}(x+1) \equiv a_{m,n}^{\alpha}(y+1),\, a_{m,n}^{\alpha}(x+2) \equiv a_{m,n}^{\alpha}(y+2), \ldots, a_{m,n}^{\alpha}(x+mn) \equiv a_{m,n}^{\alpha}(y+mn).$$

O halde $x \equiv y(modmn)$ dir. Adjacency-Pell dizisi tanımından aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$a_{m,n}^{\alpha}(x) \equiv a_{m,n}^{\alpha}(y),\, a_{m,n}^{\alpha}(x-1) \equiv a_{m,n}^{\alpha}(y-1), \ldots, a_{m,n}^{\alpha}(x-y+1) = a_{m,n}^{\alpha}(1).$$

Dolayısıyla dizi basit periyodiktir.

$\{a_{m,n}^{\alpha}(k)\}$ dizisinin periyodu $La_{m,n}^{\alpha}$ dır.

Teorem 3.2.1.3: $u \geq 1$ olmak üzere $\alpha = \prod_{i=1}^{u}(p_i)^{r_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. $La_{m,n}^{\alpha}$, $La_{m,n}^{(p_i)^{r_i}}$ lerin en küçük ortak katına eşittir [18].

İspat: $\left\{a_{m,n}^{p_i^{r_i}}(k)\right\}$ dizisinin periyodu $La_{m,n}^{(p_i)^{r_i}}$ olduğundan bu dizi $\beta \cdot La_{m,n}^{(p_i)^{r_i}}$, $(\beta \in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $La_{m,n}^{\alpha}$, $\{a_{m,n}^{\alpha}(k)\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{a_{m,n}^{\alpha}\left(p_i^{r_i}\right)\right\}$ dizisi $La_{m,n}^{\alpha}$ terimde bir tekrar eder. Böylece her i değeri için $La_{m,n}^{\alpha}$ periyodu $\beta \cdot La_{m,n}^{(p_i)^{r_i}}$ formudur. Dolayısıyla

$$La_{m,n}^{\alpha} = \text{okek}\left[La_{m,n}^{(p_1)^{r_1}}, \ldots, La_{m,n}^{(p_u)^{ru}}\right]$$

eşitliği elde edilir.

(3.6) dan her α pozitif tamsayıları için $La_{m,n}^{\alpha} = \left|\langle M_{m,n}\rangle_{\alpha}\right|$ elde edilir.

3.3.Dihedral tipli Adjacency Dizileri

Tanım 3.3.1: Eğer P_k köşeleri,

$$P_1 = e, P_2 = a, P_3 = a^2, \ldots, P_n = a^{n-1},$$
$$P_{n+1} = b, P_{n+2} = ab, P_{n+3} = a^2 b, \ldots, P_{2n} = a^{n-1} b$$

olarak seçilir ise, o halde D_{2n} dihedral grubu için Cayley diyagramının Adjacency matrisi;

$$M_{2n}^{D} = \left[m_{ij}^{D} \right]_{2n \times 2n} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{r} (n+1)\text{-inci} \\ \downarrow \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow (n)-\text{inci} \\ \leftarrow (n+1)\text{-inci} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} .$$

(3.7)

şeklinde belirlenmiştir [28].

Örnek olarak M_6^D ve M_8^D matrisleri;

$$M_6^D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_8^D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verilsin [28].

Dihedral tipli Adjacency dizi, M_{2n}^D matrisi yardımıyla $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n-1} = 0$ ve $x_{2n} = 1$ başlangıç değerleri için,

$$x_m^{2n} = \begin{cases} x_{m-n} + x_{m-2n+1} & \text{eğer } m \equiv 1 \left(mod\, 2n\right), \\ x_{m-n} + x_{m-2n+1} & \text{eğer } m \equiv 2 \left(mod\, 2n\right), \\ \vdots & \vdots \\ x_{m-n} + x_{m-2n+1} & \text{eğer } m \equiv n-1 \left(mod\, 2n\right), \\ x_{m-n} + x_{m-3n+1} & \text{eğer } m \equiv n \left(mod\, 2n\right), \\ x_{m-n-1} + x_{m-3n} & \text{eğer } m \equiv n+1 \left(mod\, 2n\right), \\ x_{m-2n-1} + x_{m-3n} & \text{eğer } m \equiv n+2 \left(mod\, 2n\right), \\ \vdots & \vdots \\ x_{m-2n-1} + x_{m-3n} & \text{eğer } m \equiv 0 \left(mod\, 2n\right), \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [28].

$m \geq 1$ için

$$\left(M_{2n}^D\right)^m = \begin{bmatrix} [A_m]_{n\times n} & [B_m]_{n\times n} \\ & \\ [B_m]_{n\times n} & \left([A_m]_{n\times n}\right)^T \end{bmatrix}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. Burada m üzerinde tümevarım yöntemi uygulanmıştır.

$[A_m]_{n\times n}$ ve $[B_m]_{n\times n}$ matrisleri sırasıyla

$$
[A_m]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{2nm+1} & a_{2nm+n} & \cdots & a_{2nm+3} & a_{2nm+2} \\ a_{2nm+2} & a_{2nm+1} & a_{2nm+n} & & a_{2nm+3} \\ \vdots & a_{2nm+2} & a_{2nm+1} & \ddots & \vdots \\ a_{2nm+(n-1)} & \vdots & \ddots & \ddots & a_{2nm+n} \\ a_{2nm+n} & a_{2nm+(n-1)} & \cdots & a_{2nm+2} & a_{2nm+1} \end{bmatrix}
$$

ve

$$
[B_m]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{2nm+(n+1)} & a_{2nm+2n} & \cdots & a_{2nm+(n+3)} & a_{2nm+(n+2)} \\ a_{2nm+(n+2)} & a_{2nm+(n+1)} & a_{2nm+2n} & & a_{2nm+(n+3)} \\ \vdots & a_{2nm+(n+2)} & a_{2nm+(n+1)} & \ddots & \vdots \\ a_{2nm+(2n-1)} & \vdots & \ddots & \ddots & a_{2nm+2n} \\ a_{2nm+2n} & a_{2nm+(2n-1)} & \cdots & a_{2nm+(n+2)} & a_{2nm+(n+1)} \end{bmatrix}
$$

olarak elde edilmiştir [28].

3.3.1. M_{2n}^{D} Matrisi Yardımıyla Yarı Grupların Elde Edilmesi

c_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $C = \left[c_{ij}\right]$ matrisi için, C nin her elemanının $\bmod q$ ya göre indirgenmesi $C(\bmod q)$ şeklinde ifade edilir. Yani $C(q) = (c_{ij}\ (mod\ q))$ dir. $\langle C\rangle_q = \{C^m\ (\bmod q) | m \geq 0\}$ olsun. Eğer $\mathrm{obeb}(q, \det C) \neq 1$ ise o zaman $\langle C\rangle_q$ bir yarı gruptur. $\det M_{2n}^{D} = 0$ için kolayca görülür ki her pozitif tam sayı olan q için $\langle M_{2n}^{D}\rangle_q$ yarı gruptur ve burada yarı grubun mertebesi $\langle M_{2n}^{D}\rangle_q$ olmak üzere $\left|\langle M_{2n}^{D}\rangle_q\right|$ ile belirtilir.

Teorem 3.3.1.1: $\lambda \in N$ olmak üzere $q = 2^{\lambda}$ eşitliği yazılsın. $3 \leq n \leq 15$ olacak şekilde bir n asal sayısı var ise aşağıdaki eşitlik elde edilir [28]:

$$
\left|\langle M_{2n}^{D}\rangle_{2^{\lambda}}\right| = \lambda + 2^{\lambda + \frac{n-3}{2}} - 2^{\lambda-1}.
$$

İspat: $\lambda \in N$ olmak üzere $q = 2^{\lambda}$ eşitliğinin sağlandığını ve $3 \leq n \leq 15$ olacak şekilde bir n asal sayısının var olduğunu varsayalım. O halde (3.7) ifadesinden

$$\left(M_{2n}^{D}\right)^{\lambda+2^{\lambda+\frac{n-3}{2}}-2^{\lambda-1}+1}\left(mod\,2^{\lambda}\right)\equiv\left(M_{2n}^{D}\right)^{\lambda+1}\left(mod\,2^{\lambda}\right)$$

eşitliği yazılır ve buradan $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{2^{\lambda}}\right|=\lambda+2^{\lambda+\frac{n-3}{2}}-2^{\lambda-1}$ elde edilmiştir.

Teorem 3.3.1.2: $3\leq p\leq 13$ olacak şekilde p bir asal sayı olsun. Eğer u, $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|=\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p^{u}}\right|$ olmak üzere en büyük pozitif tam sayı ise o halde her $w\geq u$ için $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p^{w}}\right|=p^{w-u}.\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|$ eşitliği yazılır. Eğer her $w\geq 2$ için $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|\neq\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p^{2}}\right|$ ise $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|=p^{w-1}.\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|$ elde edilir [28].

İspat: Varsayalım ki $\left\langle M_{10}^{D}\right\rangle_{5^{\lambda}}$ yarı grup ve b pozitif bir tamsayı olsun. $\left|\left\langle M_{10}^{D}\right\rangle_{5^{\lambda}}\right|$ yarı grubu $k\left(5^{\lambda}\right)$ notasyonu ile ifade edilsin. Eğer $\left(M_{10}^{D}\right)^{k\left(5^{b+1}\right)+1}\equiv M_{10}^{D}\left(mod 5^{b+1}\right)$ ise, o zaman $\left(M_{10}^{D}\right)^{k\left(5^{b+1}\right)+1}\equiv M_{10}^{D}\left(mod 5^{b}\right)$ denkliği yazılır. Böylece $k\left(5^{b}\right)$, $k\left(5^{b+1}\right)$ tarafından bölünebilirdir. Diğer yandan binom teoremi ile $\left(M_{10}^{D}\right)^{k\left(5^{b}\right)+1}\equiv M_{10}^{D}+\left(m_{ij}^{(b)}.5^{b}\right)$ eşitliği yazılır. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(M_{10}^{D}\right)^{k\left(5^{b}\right).5+1}=\left(M_{10}^{D}\right)^{k\left(5^{b}\right).4}.\left(M_{10}^{D}+\left(m_{ij}^{(b)}.5^{b}\right)\right)\equiv M_{10}^{D}\left(mod 5^{b+1}\right).$$

Bu eşitlik ile $k\left(5^{b+1}\right)$ devirli grubu $k\left(5^{b}\right).5$ tarafından bölünebilir olduğu gösterilir. Böylece bu da ya $k\left(5^{b+1}\right)=k\left(5^{b}\right)$ ya da $k\left(5^{b+1}\right)=k\left(5^{b}\right).5$ olduğunu gösterir ki buradaki ikinci durum, ancak ve ancak 5 tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(b)}$ nin varlığı ile mümkündür. $k(5)=k\left(5^{b}\right)$, $k\left(5^{b}\right)\neq k\left(5^{b+1}\right)$ olmak üzere b en büyük pozitif tam sayıdır. Yani 5 tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(b+1)}$ in varlığı ile mümkündür. Bundan dolayı $k\left(5^{b+1}\right)\neq k\left(5^{b+2}\right)$ eşitsizliği yazılır. b üzerinde tümevarım yöntemi ile her $w\geq 2$ için $\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|=p^{w-1}.\left|\left\langle M_{2n}^{D}\right\rangle_{p}\right|$ elde edilir.

3.3.2.Gruplarda Dihedral Tipli Adjacency Dizileri

Tanım 3.3.2.1: $x_1 = e, \quad x_2 = a, \quad x_3 = a^2, \ldots, x_{n+1} = a^{n-2}, x_n = a^{n-1}, \quad x_{n+1} = b, \quad x_{n+2} = ab,$ $x_{n+3} = a^2 b, \ldots, x_{2n-1} = a^{n-2} b, \quad x_{2n} = a^{n-1} b$ başlangıç şartları ile G grubu 2-gerenli bir grup ve (a,b) ikilisi G nin geren çifti olsun.

O halde Dihedral tipli orbit $DH_{(G:a,b)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır [28]:

$$x_m^{2n} = \begin{cases} (x_{m-2n+1})(x_{m-n}) & \text{eğer } m \equiv 1 (mod 2n), \\ (x_{m-2n+1})(x_{m-n}) & \text{eğer } m \equiv 2 (mod 2n), \\ \vdots & \vdots \\ (x_{m-2n+1})(x_{m-n}) & \text{eğer } m \equiv n-1 (mod 2n), \\ (x_{m-3n+1})(x_{m-n}) & \text{eğer } m \equiv n (mod 2n), \\ (x_{m-3n})(x_{m-n-1}) & \text{eğer } m \equiv n+1 (mod 2n), \\ (x_{m-3n})(x_{m-2n-1}) & \text{eğer } m \equiv n+2 (mod 2n). \\ \vdots & \vdots \\ (x_{m-3n})(x_{m-2n-1}) & \text{eğer } m \equiv 0 (mod 2n), \end{cases}$$

Teorem 3.3.2.1: G sonlu bir grup ise, dihedral tipli orbit $DH_{(G:a,b)}$ periyodiktir [28].

İspat: G sonlu grubunun mertebesi s olsun. O halde G grubunun elemanlarının farklı sıralı $2n-$lilerin sayısı s^{2n} olduğundan $2n-$lilerin en az bir tanesi dihedral tipli orbit olan $DH_{(G:a,b)}$ de iki kez ortaya çıkar. Bu tekrardan dolayı dihedral tipli orbit $DH_{(G:a,b)}$ periyodiktir.

Teorem 3.3.2.2: $3 \le n \le 15$ için D_{2n} dihedral grubunun dihedral tipli orbitinin periyot uzunluğu aşağıdaki gibidir [28]:

(i) Eğer $2n = 2^x.3^y$ ise o zaman $LDH_{(D_{2n}:a,b)} = 4n.3^{y-1}$ dir.

(ii) P_i ler asal çarpanlar olmak üzere $2n = \prod_{i=1}^{k} P_i^{e_i} \ (k \ge 1)$, $2n \ne 2^x$, $2n \ne 2^x.3^y$ ve $2n$ olsun. O halde $LDH_{(D_{2n}:a,b)} = 2n.\left(P_k^{e_k} - 1\right)$ dir.

(iii) Eğer $2n = 14$ ve $2n = 28$ ise, o takdirde $LDH_{(D_{2n}:a,b)} = 6n$ dir.

İspat: $DH_{(D_{2n}:a,b)}$ orbiti aşağıdaki gibidir:

$$x_1 = e, x_2 = a, x_3 = a^2, \ldots, x_n = a^{n-1}, x_{n+1} = b, x_{n+2} = ab, x_{n+3} = a^2b, \ldots, x_{2n} = a^{n-1}b,$$

$$x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}, \ldots, x_{4n},$$

$$x_{4n+1} = a^4, x_{4n+2} = a^4, x_{4n+3} = a^4, \ldots, x_{6n} = a^4,$$

$$x_{6n+1} = a^8, x_{6n+2} = a^8, x_{6n+3} = a^8, \ldots, x_{8n} = a^8,$$

$$x_{8n+1} = a^{16}, x_{8n+2} = a^{16}, x_{8n+3} = a^{16}, \ldots, x_{10n} = a^{16}.$$

Eğer n bir tek sayı ise, o halde

$$x_{2n+1} = ab, x_{2n+2} = a^3b, x_{2n+3} = a^5b, \ldots,$$

$$x_{\frac{5n-1}{2}} = a^{n-2}b, x_{\frac{5n+1}{2}} = b, x_{\frac{5n+3}{2}} = a^2b, \ldots, x_{3n} = a^{n-1}b,$$

$$x_{3n+1} = a^{n-1}b, x_{3n+2} = ab, x_{3n+3} = a^3b, x_{3n+4} = a^5b, \ldots,$$

$$x_{\frac{7n+1}{2}} = a^{n-2}b, x_{\frac{7n+3}{2}} = b, x_{\frac{7n+5}{2}} = a^2b, \ldots, x_{4n} = a^{n-1}b.$$

Eğer n bir çift tam sayı ise, o zaman

$$x_{2n+1} = ab, x_{2n+2} = ab, x_{2n+3} = a^3b, \ldots,$$

$$x_{\frac{5n}{2}} = a^{n-1}b, x_{\frac{5n+2}{2}} = ab, x_{\frac{5n+4}{2}} = a^3b, \ldots, x_{3n} = a^{n-1}b,$$

$$x_{3n+1} = a^{n-1}b, x_{3n+2} = ab,, x_{3n+3} = a^3b \ldots,$$

$$x_{\frac{7n+2}{2}} = a^{n-1}b, x_{\frac{7n+4}{2}} = ab, x_{\frac{7n+6}{2}} = a^3b, \ldots, x_{4n} = a^{n-3}b.$$

$i \geq 2$ için yukarıdaki eşitlikler kullanılarak;

$$x_{2ni+1} = a^{2^i}, x_{2ni+2} = a^{2^i}, x_{2ni+3} = a^{2^i}, \ldots, x_{2n(i+1)} = a^{2^i}, \ldots$$

elde edilir.

(i) Varsayalım ki x, y pozitif tam sayıları için $2n = 2^x.3^y$ eşitliği verilsin ve i en küçük tam sayı olarak alınsın. Mesela $i = 2.3^{y-2} + 2$ olarak alınırsa, o halde $x_{4n\left(3^{y-1}+1\right)+1} = a^4 = x_{4n+1}, x_{4n\left(3^{y-1}+1\right)+2} = a^4 = x_{4n+2}, x_{4n\left(.3^{y-1}+1\right)+3} = a^4 = x_{4n+3}, \ldots, x_{4n\left(.3^{y-1}+1\right)+2n} = a^4 = x_{6n}$ yazılır. Böylece $LDH_{(D_{2n}:a,b)} = 4n.3^{y-1}$ eşitliği elde edilir.

(ii) P_i ler asal çarpanlar olmak üzere $2n \neq 2^x$ ve $2n \neq 2^x.3^y$ için $2n = \prod_{i=1}^{k} P_i^{e_i}$, $(k \geq 1)$ olsun. Eğer $i = P_k^{e_k} + 1$ olarak seçilirse, o zaman $x_{2n.\left(P_k^{e_k}+1\right)+1} = a^4 = x_{4n+1}, x_{2n.\left(P_k^{e_k}+1\right)+2} = a^4 = x_{4n+2}, x_{2n.\left(P_k^{e_k}+1\right)+3} = a^4 = x_{4n+3}, \ldots, x_{2n.\left(P_k^{e_k}+1\right)+2n} = a^4 = x_{6n}$ yazılır. Böylece $LDH_{(D_{2n}:a,b)} = 2n.\left(P_k^{e_k} - 1\right)$ eşitliği elde edilir.

(iii) $n = 7$ olarak seçilir ise, o zaman $x_{71} = x_{72} = \cdots = x_{84} = a^{32} = a^4 = x_{29} = x_{30} = \cdots = x_{42}$ için $LDH_{(D_{14}:a,b)} = 42$ eşitliği elde edilir.

Eğer $n = 14$ olarak seçilir ise, o zaman $x_{141} = x_{142} = \cdots = x_{168} = a^{32} = a^4 = x_{57} = x_{58} = \cdots = x_{84}$ için $LDH_{(D_{14}:a,b)} = 54$ eşitliği elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Adjacency-Pell-Circulant Dizileri

$f(x)$ karakteristik polinomu için Circulant matrisi;

$$C^{m,n} = \left[c_{ij}^{m,n}\right]_{(mn+1)\times(mn+1)} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k \text{ için } 1\le k\le mn+1, \\ 1 & \begin{array}{c} \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k+1 \text{ için } 1\le k\le mn \\ \text{ve} \\ \text{eğer } i=mn+1 \text{ ve } j=1, \end{array} \\ -2 & \begin{array}{c} \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k+n \text{ için } 1\le k\le mn-n+1 \\ \text{ve} \\ \text{eğer } i=k+mn-n+1 \text{ ve } j=k \text{ için } 1\le k\le n \end{array} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [27].

Örnek olarak $C^{3,2}$ matrisi;

$$C^{3,2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

verilsin [27].

Bu çalışmada $m \ge 2$ ve $n \ge 4$ olarak ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş Adjacency-Pell-Circulant dizisi, $h \ge 1$ olmak üzere $a_1^{m,n} = a_2^{m,n} = \cdots = a_{mn}^{m,n} = 0$ ve $a_{mn+1}^{m,n} = 1$ başlangıç değerleri ve

$$a_h^{m,n} = \begin{cases} -2a_{h-mn+n-1}^{m,n} + a_{h-mn}^{m,n} - a_{h-mn-1}^{m,n}, & h \equiv 1,2,\ldots,mn-n+1 \left(mod\, mn+1\right) \\ a_{h-mn}^{m,n} - a_{h-mn-1}^{m,n} - 2a_{h-2mn+n-2}^{m,n}, & h \equiv mn-n+2, mn-n+3,\ldots,mn \left(mod\, mn+1\right) \\ -a_{h-mn-1}^{m,n} - 2a_{h-2mn+n-2}^{m,n} + a_{h-2mn-1}^{m,n}, & h \equiv 0 \left(mod\, mn+1\right) \end{cases}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [27].

$k \ge 0$ için k üzerinde tümevarım uygulanarak $\left(C^{m,n}\right)^k$ matrisi;

$$\left(C^{m,n}\right)^k=\begin{bmatrix} a^{m,n}_{k(mn+1)+mn+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-1} & \cdots & a^{m,n}_{k(mn+1)+2} & a^{m,n}_{k(mn+1)+1} \\ a^{m,n}_{k(mn+1)+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn} & \cdots & a^{m,n}_{k(mn+1)+3} & a^{m,n}_{k(mn+1)+2} \\ a^{m,n}_{k(mn+1)+2} & a^{m,n}_{k(mn+1)+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn+1} & \ddots & \vdots & a^{m,n}_{k(mn+1)+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-2} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-3} & \cdots & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn} \\ a^{m,n}_{k(mn+1)+mn} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn-2} & \cdots & a^{m,n}_{k(mn+1)+1} & a^{m,n}_{k(mn+1)+mn+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır [27].

[27] deki çalışmada, Adjacency-Pell-Circulant dizisi, $\alpha \geq 0$ olmak üzere $x_1^{m,n}=x_2^{m,n}=\cdots=x_{mn}^{m,n}=0$, $x_{mn+1}^{m,n}=1$ başlangıç değerleri ve

$$x_{\alpha+mn+2}^{m,n}=-x_{\alpha+mn+1}^{m,n}+x_{\alpha+2}^{m,n}-2x_{\alpha+1}^{m,n} \tag{4.1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

(4.1) ifadesi yardımıyla, Adjacency-Pell-Circulant dizileri için $A^{m,n}$ matrisi;

$$A^{m,n}=\left[a_{ij}^{m,n}\right]_{(mn+1)\times(mn+1)}\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Adjacency-Pell-Circulant matrisi olarak adlandırılmaktadır [27].

$k \geq 0$ için

$$\left(A^{m,n}\right)^k\begin{bmatrix} x_{mn+1}^{m,n} \\ x_{mn}^{m,n} \\ \vdots \\ x_1^{m,n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{k+mn+1}^{m,n} \\ x_{k+mn}^{m,n} \\ \vdots \\ x_{k+1}^{m,n} \end{bmatrix}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. k üzerinde tümevarım uygulanarak $k \geq 1$ için $\left(A^{m,n}\right)^k$ matrisi;

$$\left(A^{m,n}\right)^k=\begin{bmatrix} x_{k+mn+1}^{m,n} & -2x_{k+1}^{m,n}+x_{k+2}^{m,n} & -2x_{k+2}^{m,n}+x_{k+3}^{m,n} & \cdots & -2x_{k+mn-1}^{m,n}+x_{k+mn}^{m,n} & -2x_{k+mn}^{m,n} \\ x_{k+mn}^{m,n} & x_{k+mn}^{m,n}+x_{k+mn+1}^{m,n} & -2x_{k+1}^{m,n}+x_{k+2}^{m,n} & \cdots & -2x_{k+mn-2}^{m,n}+x_{k+mn-1}^{m,n} & -2x_{k+mn-1}^{m,n} \\ x_{k+mn-1}^{m,n} & x_{k+mn-1}^{m,n}+x_{k+mn}^{m,n} & x_{k+mn}^{m,n}+x_{k+mn+1}^{m,n} & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{k+mn-2}^{m,n} & x_{k+mn-2}^{m,n}+x_{k+mn-1}^{m,n} & x_{k+mn-1}^{m,n}+x_{k+mn}^{m,n} & \ddots & -2x_{k+1}^{m,n}+x_{k+2}^{m,n} & -2x_{k+2}^{m,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x_{k+mn}^{m,n}+x_{k+mn+1}^{m,n} & -2x_{k+1}^{m,n} \\ x_{k+1}^{m,n} & x_{k+1}^{m,n}+x_{k+2}^{m,n} & x_{k+2}^{m,n}+x_{k+3}^{m,n} & \cdots & x_{k+mn-1}^{m,n}+x_{k+mn}^{m,n} & -2x_{k}^{m,n} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. $\det A^{m,n}=(-2)$ olduğundan $\det\left(A^{m,n}\right)^k=(-2)^k$ olduğu görülmektedir [27].

Lemma 4.1.1: Adjacency-Pell-Circulant dizisinin karakteristik denklemi $x^{mn+1}+x^{mn}-x+2=0$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [27].

İspat: $f(x)=x^{mn+1}+x^{mn}-x+2$ ve α nın, $f(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu düşünelim. Bu durumda α, $f(x)$ in bir çok katlı kökü olduğundan $f(\alpha)=\alpha^{mn+1}+\alpha^{mn}-\alpha+2=0$ ve $f'(\alpha)=(mn+1)\alpha^{mn}-(mn)\alpha^{mn-1}-1=0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $(mn)\alpha^2-(mn+3)\alpha-2mn=0$ olur ki, bu eşitlikten

$$\alpha_1=\frac{(mn+3)+\sqrt{9(mn)^2+6mn+9}}{2mn} \quad \text{ile} \quad \alpha_2=\frac{(mn+3)-\sqrt{9(mn)^2+6mn+9}}{2mn}$$ olduğu

görülmektedir. O takdirde $m\geq 2$ ve $n\geq 4$ için $f(\alpha_1)\neq 0$ ve $f(\alpha_2)\neq 0$ olduğundan $f(x)=0$ eşitliği bir çelişki belirtmektedir. Bu çelişki ile lemma ispatlanmıştır.

Eğer $x^{mn+1}+x^{mn}-x+2=0$ denkleminin kökleri $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{mn+1}$ ise, Lemma 4.1.1. ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu basit bir şekilde görülmektedir.

$(mn+1)\times(mn+1)$ tipli V_{mn+1} Vandermonde matrisinin

$$V_{mn+1}=\begin{bmatrix} (\alpha_1)^{mn} & (\alpha_2)^{mn} & \cdots & (\alpha_{mn+1})^{mn} \\ (\alpha_1)^{mn-1} & (\alpha_2)^{mn-1} & \cdots & (\alpha_{mn+1})^{mn-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{mn+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini düşünelim.

$(mn)\times 1$ tipli $W_{m,n}(i,j)$ matrisi;

$$W_{m,n}(i,j)=\begin{bmatrix}\alpha_1^{k+mn}\\ \alpha_2^{k+mn}\\ \vdots\\ \alpha_{mn+1}^{k+mn}\end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{m,n}(i,j)$ matrisi, $V_{m,n}$ matrisinin $j-$inci sütununun $W_{m,n}(i,j)$ sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Teorem 4.1.1: $k\geq 1$ için $(M_{m,n})^k=\left[m_{m,n,k}^{i,j}\right]$ olsun, bu durumda $m_{m,n,k}^{i,j}=\dfrac{\det V_{m,n}(i,j)}{\det V_{m,n}}$ dır [27].

İspat: α_1, α_2, $\ldots,\alpha_{mn+1}$ birbirinden farklı olduğu için $M_{m,n}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. $R=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{mn+1})$ olsun, bu durumda $M_{m,n}V_{m,n}=V_{m,n}R$ eşitliği elde edilir. Burada $V_{m,n}$ matrisi tersinir matris olduğu için $(V_{m,n})^{-1}M_{m,n}V_{m,n}=R$ eşitliği sağlanır ki, bu da $M_{m,n}$ matrisinin $U_{m,n}$ ye benzer olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $k\geq 1$ için $(M_{m,n})^k V_{m,n}=V_{m,n}(R)^k$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} m_{m,n,k}^{i,1}\alpha_1^{mn}+m_{m,n,k}^{i,2}\alpha_1^{mn-1}+\cdots+m_{m,n,\alpha}^{i,mn+1}=\alpha_1^{k+mn}\\ m_{m,n,k}^{i,1}\alpha_2^{mn}+m_{m,n,k}^{i,2}\alpha_2^{mn-1}+\cdots+m_{m,n,\alpha}^{i,mn+1}=\alpha_2^{k+mn}\\ \qquad\vdots\\ m_{m,n,k}^{i,1}\alpha_{mn+1}^{mn}+m_{m,n,k}^{i,2}\alpha_{mn+1}^{mn-1}+\cdots+m_{m,n,\alpha}^{i,mn+1}=\alpha_{mn}^{k+mn}\end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Lineer denklem sisteminin çözümünden de, her $i,j=1,2,\ldots,mn+1$ için

$$m_{m,n,k}^{i,j}=\frac{\det V_{m,n}(i,j)}{\det V_{m,n}}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 4.1.1: Varsayalım ki $x_{m,n}(k)$, $k-$ıncı Adjacency-Pell-Circulant sayısı olsun. Bu durumda,

$$x_{m,n}(k) = \frac{\det V_{m,n}(mn+1, mn+1)}{\det V_{m,n}}$$

dır [27].

$u \times u$ tipli $P(u,(m,n)) = \left[p_{i,j}^{m,n,u} \right]$ süper köşegen matrisi;

$$p_{i,j}^{m,n,u} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = k \text{ ve } j = k \text{ ve } 1 \le k \le u, \\ & \text{eğer } i = k+1 \text{ ve } j = k \text{ için } 1 \le k \le u-1 \\ 1 & \text{ve} \\ & \text{eğer } i = k \text{ ve } j = k+mn-1 \text{ için } 1 \le k \le u-mn+1, \\ -2 & \text{eğer } i = k \text{ ve } j = k+mn \text{ için } 1 \le k \le u-mn, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yani,

$$P(u,(m,n)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & (mn+1)\text{-inci} & & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak belirlenmiştir [27].

Teorem 4.1.2: $u \geqslant 1$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir [27]:

$$perP\left(u,(m,n)\right)=x_{m,n}\left(mn+u+1\right).$$

İspat: Teoremi ispatlamak için tümevarım yöntemini uygulayalım. Varsayalım ki $u<mn+1$ olsun. O halde

$P\left(u,(m,n)\right)$ matrisi;

$$P\left(u,(m,n)\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ için } 1\le u<mn-1$$

olarak tanımlanmıştır ve $P\left(mn,(m,n)\right)$ matrisi;

$$P\left(mn,(m,n)\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ için } u=mn.$$

şeklinde belirlenmiştir. Buradan kolayca görülür ki $1\le u<mn-1$ ve $u=mn$ için $P\left(u,(m,n)\right) \;=(-1)^u$ ve $perP\left(mn,(m,n)\right)=2$ eşitlikleri elde edilir. Adjacency-Pell-Circulant dizi tanımından $1\le u<mn-1$ ve $x_{m,n}\left(mn\right)=2$ için $x_{m,n}\left(mn+u\right)=(-1)^u$ eşitliği elde edilir. O halde $u<mn+1$ için sonuç elde edilmiştir. Şimdi de $u\geqslant mn+1$ için denklemin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $P\left(u,(m,n)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perP\left(u,(m,n)\right)$ genişletilir ise,

$$perP\left(u+1,(m,n)\right)=-perP\left(u,(m,n)\right)+perM\left(u-mn+1,(m,n)\right)-2perM\left(u-mn,(m,n)\right)$$

eşitliği elde edilir.

$perP\left(u,\left(m,n\right)\right)=x_{m,n}\left(mn+u+1\right)$, $perM\left(u-mn+1,\left(m,n\right)\right)=x_{m,n}\left(u+2\right)$ ve $perM\left(u-mn,\left(m,n\right)\right)=x_{m,n}\left(u+1\right)$ olduğundan, $perP\left(u+1,\left(m,n\right)\right)=x_{m,n}\left(mn+u+1\right)$ eşitliği elde edilir. Böylece u üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

$u>mn+1$ için $u\times u$ tipli $Z\left(u,\left(m,n\right)\right)=\left[z_{i,j}^{m,n,u}\right]$ matrisi;

$$z_{i,j}^{m,n,u}=\begin{cases}-1 & \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k \text{ için } 1\le k\le u,\\ & \text{eğer } i=k+1 \text{ ve } j=k \text{ için } 1\le k\le u-mn-1\\ 1 & \text{ve}\\ & \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k+mn-1 \text{ için } 1\le k\le u-mn,\\ -2 & \text{eğer } i=k \text{ ve } j=k+mn \text{ için } 1\le k\le u-mn,\\ 0 & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [27].

$u\times u$ tipli $M\left(u,\left(m,n\right)\right)=\left[m_{i,j}^{m,n,u}\right]$ matrisi ise,

$$M\left(u,\left(m,n\right)\right)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & & \left(u-mn\right)\text{-inci} \\ & & \downarrow \end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & & & & & \\ 0 & & & Z\left(u-1,\left(m,n\right)\right) & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}\end{array}$$

şeklinde belirlenmiştir [27].

Teorem 4.1.3: (i) $u>mn+1$ için $perZ\left(u,\left(m,n\right)\right)=x_{m,n}\left(u+1\right)$ eşitliği yazılır.

(ii) $u>mn+2$ için $perM\left(u,\left(m,n\right)\right)=\sum_{k=1}^{u}x_{m,n}\left(k\right)$ eşitliği yazılır [27].

İspat: (i) Denklemin $u>mn+1$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $Z\left(u,\left(m,n\right)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perZ\left(u,\left(m,n\right)\right)$ genişletilir ise,

$$perZ\left(u,(m,n)\right) = -perZ\left(u-1,(m,n)\right) + perZ\left(u-mn,(m,n)\right) - 2perZ\left(u-mn-1,(m,n)\right)$$

$$= -x_{m,n}(u) + x_{m,n}(u-mn+1) - 2x_{m,n}(u-mn)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Eğer $Z\left(u,(m,n)\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perZ\left(u,(m,n)\right)$ genişletilir ise,

$$perM\left(u,(m,n)\right) = perM\left(u-1,(m,n)\right) + perZ\left(u-1,(m,n)\right)$$

eşitliği elde edilir.

$u > mn+1$ için $u \times u$ tipli T matrisi;

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Dolayısıyla $u > mn+1$ için $perP\left(u,(m,n)\right)$ = $\det\left(P\left(u,(m,n)\right) \circ T\right)$, $perZ\left(u,(m,n)\right)$ = $\det\left(Z\left(u,(m,n)\right) \circ T\right)$ ve $perM\left(u,(m,n)\right)$ = $\det\left(M\left(u,(m,n)\right) \circ T\right)$ eşitlikleri elde edilir [27].

Sonuç 4.1.2: $u > mn+1$ için

$$\det\left(P\left(u,(m,n)\right) \circ T\right) = x_{m,n}(mn+u+1),$$

$$\det\left(Z\left(u,(m,n)\right) \circ T\right) = x_{m,n}(u+1)$$

ve

$$\det\left(M\left(u,(m,n)\right)\circ T\right)=\sum_{k=1}^{u}x_{m,n}\left(k\right)$$

eşitlikleri elde edilir [27].

Sonuç 4.1.3: $x_{m,n}\left(u\right)$, $u-$uncu Adjacency-Pell-Circulant dizisi olsun. O halde

$$x_{m,n}\left(u\right)=\sum_{\left(t_1,t_2\dots,t_{m+n}\right)}\frac{t_{mn+1}}{t_1+t_2+\cdots+t_{mn+1}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{mn+1}}{t_1,\dots,t_{mn+1}}\left(-2\right)^{mn+1}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+\left(mn+1\right)t_{mn+1}=u$ koşulunu sağlamaktadır [27].

İspat: Adjacency-Pell-Circulant dizilerinin üreteç fonksiyonu, $v=mn+1$ ve $i=j=mn+1$ olacak şekilde

$$g\left(x\right)=\frac{x^{mn}}{1+x-x^{mn}+2x^{mn+1}}$$

dır [27].

Teorem 4.1.4: Adjacency-Pell-Circulant dizilerinin üstel temsili aşağıdaki gibidir [27]:

$$g\left(x\right)=x^{mn}\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(x\right)^i}{i}\left(-1+x^{mn-1}-2x^{mn}\right)^i\right).$$

İspat: $\ln g\left(x\right)=\ln\dfrac{x^{mn}}{1+x-x^{mn}+2x^{mn+1}}=\ln x^{mn}-\ln\left(1+x-x^{mn}+2x^{mn+1}\right)$

ve

$$-\ln\left(1+x-x^{mn}+2x^{mn+1}\right)=-[-x\left(-1+x^{mn-1}-2x^{mn}\right)-\frac{1}{2}x^2\left(-1+x^{mn-1}-2x^{mn}\right)^2-\cdots$$

$$-\frac{1}{k}x^k\left(-1+x^{mn-1}-2x^{mn}\right)^k-\cdots]$$

olduğundan

$$\ln\frac{g(x)}{x^{mn}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(x)^i}{i}\left(-1+x^{mn-1}-2x^{mn}\right)^i$$

dır [27].

Şimdi de Adjacency-Pell-Circulant dizilerinin toplamsal temsillerini ele alalım.

$S_k=\sum_{\alpha=1}^{k}x_{m,n}(\alpha)$ olmak üzere $(mn+2)\times(mn+2)$ tipli $D_{m,n}$ ve $D_{m,n}^k$ matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$D_{m,n}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & A^{m,n} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

ve

$$D_{m,n}^k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{k+mn} & & & \\ S_{k+mn-1} & & \left(A^{m,n}\right)^k & \\ \vdots & & & \\ S_k & & & \end{bmatrix}.$$

O zaman tümevarım yöntemi kullanılarak $\left(D_{m,n}\right)^k=D_{m,n}^k$ eşitliği kolaylıkla görülebilir [27].

4.2.Adjacency-Jacobsthal Sayıları

Tanım 4.2.2: Adjacency-Jacobsthal dizisi, $m\geq 2$ ve $n\geq 4$ olmak üzere $J_{m,n}(1)=\cdots=J_{m,n}(mn-1)=0$ ve $J_{m,n}(mn)=1$ başlangıç değerleri ve

$$J_{m,n}(mn+k)=J_{m,n}(mn-n+k+1)+2J_{m,n}(k)\ ,\quad (k\geq 1) \tag{4.2}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır [26].

Adjacency-Jacobsthal dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x^{mn-1}}{1-x^{n-1}-2x^{mn}}$$

dır [26].

Adjacency-Jacobsthal dizilerinin üstel temsili aşağıdaki gibidir [26]:

$$g(x) = x^{mn-1}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(x^{n-1}\right)^k}{k}\left(1+2x^{mn-n+1}\right)^k\right).$$

Teorem 4.2.1: u ve v pozitif tamsayıları için,

$$J_{m,n}(mn+u) = \sum_{\frac{u}{mn}\le v\le u}\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}2^k$$

dır. Burada j, $(n-1)v+(mn-n+1)k = u$ ve $k\leqslant v$ şartlarını sağlayan bir tam sayıdır [26].

İspat: $g(x) = J_{m,n}(mn)+J_{m,n}(mn+1)x+J_{m,n}(mn+2)x^2+\cdots+J_{m,n}(mn+u)x^u+\cdots$ olduğundan $g(x)$ de x^u nun katsayısı $J_{m,n}(mn+u)$ dır. Binom açılımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$g(x) = \left(x^{mn-1}\right)\frac{1}{1-\left(x^{n-1}+2x^{mn}\right)} = \left(x^{mn-1}\right)\left(1+\left(x^{n-1}+2x^{mn}\right)+\cdots+\left(x^{n-1}+2x^{mn}\right)^u+\cdots\right),$$

$$= x^{mn-1}+\left(x^{mn+n-2}\right)\left(1+2x^{mn-n+1}\right)+\cdots+\left(x^{mn+nu-u+1}\right)\sum_{k=0}^{u}\binom{u}{k}2^k x^{(mn-n+1)k}+\cdots.$$

x^u nun katsayısına ihtiyaç duyulduğu için yukarıdaki denklemin sadece sağ tarafındaki ilk $(u+1)$- inci terim göz önüne alınacaktır. Ayrıca

$$\left(x^{n-1}+2x^{mn}\right)^v = \left(x^{n-1}\right)^v\left(1+2x^{mn-n+1}\right)^v = \left(x^{n-1}\right)^v\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}2^k x^{(mn-n+1)k}$$

olduğundan pozitif u ve v tamsayıları için $\left(x^{n-1}+2x^{mn}\right)^{v}$ deki x^{u} nun katsayısı, $(n-1)v+(mn-n+1)k=u$ ve $k\leqslant v$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}2^{k},\ \frac{u}{mn}\leqslant v\leqslant u$$

şeklinde elde edilir. Böylece sonuca ulaşılmış olur.

(4.2) ifadesi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} j_{m,n}(mn+1) \\ j_{m,n}(mn) \\ \vdots \\ j_{m,n}(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_{m,n}(mn) \\ j_{m,n}(mn-1) \\ \vdots \\ j_{m,n}(1) \end{bmatrix}.$$

elde edilir.

[26] çalışmasında, Adjacency-Jacobsthal dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisi;

$$C_{m,n} = \left[c_{i,j} \right]_{(mn)\times(mn)} = \begin{array}{c} (n-1)\text{-inci} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

şeklinde belirlenmiştir ve bu matris Adjacency-Jacobsthal matris olarak adlandırılmaktadır.

α üzerinde tümevarım yöntemi uygulanarak $\alpha \geq 1$ için Adjacency-Jacobsthal matrisinin $\alpha -$ıncı kuvveti

$$\left(C_{m,n}\right)^{\alpha} = \begin{bmatrix} J_{m,n}^{mn+\alpha} & J_{m,n}^{mn+\alpha+1} & \cdots & J_{m,n}^{mn+\alpha+n-2} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-1} & 2J_{m,n}^{\alpha+n} & \cdots & 2J_{m,n}^{\alpha+mn-1} \\ J_{m,n}^{mn+1} & J_{m,n}^{mn+\alpha} & \cdots & J_{m,n}^{mn+\alpha+n-3} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-2} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-1} & \cdots & 2J_{m,n}^{\alpha+mn-2} \\ J_{m,n}^{mn+\alpha-2} & J_{m,n}^{mn+\alpha-1} & \cdots & J_{m,n}^{mn+\alpha+n-4} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-3} & J_{m,n}^{\alpha+n-2} & \cdots & 2J_{m,n}^{\alpha+mn-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{m,n}^{\alpha+1} & J_{m,n}^{\alpha+2} & \cdots & J_{m,n}^{\alpha+n-1} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-mn} & 2J_{m,n}^{\alpha+n-mn+1} & \cdots & 2J_{m,n}^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

şeklinde elde edilmiştir. $\det C_{m,n} = (-1)^{mn+1}(2)$ olduğundan $\det\left(C_{m,n}\right)^{\alpha} = (-1)^{mn\alpha+\alpha}(2)^{\alpha}$ olduğu görülmektedir. Burada $J_{m,n}^{u}$ notasyonu ile $J_{m,n}(u)$ gösterilmektedir [26].

Sonuç 4.2.1: $J_{m,n}(u) = \sum\limits_{(t_1,t_2,\ldots,t_{mn})} \dfrac{t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{mn}}{t_1 + t_2 + \cdots + t_{mn}} \times \begin{pmatrix} t_1 + \cdots + t_{mn} \\ t_1, \ldots, t_{mn} \end{pmatrix} 2^{t_{mn}-1}$ olup burada toplam, negatif olmayan tamsayılar üzerinde $t_1 + 2t_2 + \cdots + (mn)t_{mn} = u$ koşulunu sağlamaktadır [26].

Şimdi de Adjacency-Jacobsthal dizisinin toplamsal temsillerini ele alalım.

$S_t = \sum\limits_{k=1}^{t} J_{m,n}(k)$ olmak üzere $(mn+1)\times(mn+1)$ tipli M_{mn+1} ve $\left(M_{mn+1}\right)^{t}$ matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilmiştir [26]:

$$M_{mn+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & C_{m,n} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

ve

$$\left(M_{mn+1}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{t+mn-1} & & & \\ S_{t+mn-2} & & \left(C_{m,n}\right)^t & \\ \vdots & & & \\ S_t & & & \end{bmatrix}.$$

$k \times k$ tipli $A(m,n,k) = \left[a_{i,j}^{m,n,k}\right]$ süper köşegen matrisi;

$$a_{i,j}^{m,n,k} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u+n-2 \text{ için } 1 \le u \le k-n+2 \\ & \text{ve} \\ & i = u+1 \text{ ve } j = u \text{ ve } 1 \le u \le k-1 \\ 2 & \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u+mn-1 \text{ için } 1 \le u \le k-mn+1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın [26].

Teorem 4.2.2: $k \ge mn$ için

$$perA(m,n,k) = J_{m,n}(mn+k)$$

eşitliği elde edilir [26].

İspat: Teoremi ispatlamak için k üzerinde tümevarım yöntemini kullanalım. $k \ge mn$ için denklemin sağlandığı kabul edilip, $k+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer

$A(m,n,k)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perA(m,n,k)$ genişletilir ise,

$$perA(m,n,(k+1)) = perA(m,n,(k-n+2)) + 2\,perA(m,n,(k-mn+1)).$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $perA(m,n,(k-n+2)) = J_{m,n}(k+mn-n+2)$ ve $perA(m,n,(k-mn+1)) = J_{m,n}(k+1)$ permanent eşitlikleri yardımıyla $perA(m,n,(k+1)) = J_{m,n}(mn+(k+1))$ eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$k > mn$ için $B(m,n,k) = \left[b_{i,j}^{m,n,k}\right]_{k\times k}$ matrisi;

$$b_{i,j}^{m,n,k} = \begin{cases} 2 & \begin{array}{c} \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u+n-2 \text{ için } 1 \le u \le k-mn+1 \\ \text{ve} \\ i = u+1 \text{ ve } j = u \text{ için } 1 \le u \le k-1 \end{array} \\ 1 & \text{eğer } i = u \text{ ve } j = u+mn-1 \text{ için } 1 \le u \le k-mn+1,. \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [26].

Teorem 4.2.3: $k > mn$ için

$$perB(m,n,k) = 2J_{m,n}(k)$$

eşitliği elde edilir [26].

İspat: Teoremi ispatlamak için k üzerinde tümevarım yöntemini uygulayalım. Denklemin $k > mn$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $k+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $Y(k,(m,n))$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perY(k,(m,n))$ genişletilir ise,

$$perB(m,n,k) = 2\left(perB(m,n,(k-n+1)) + 2perB(m,n,(k-mn))\right) = 2\left(J_{m,n}(k-n+1) + 2J_{m,n}(k-mn)\right) = 2J_{m,n}(k)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$k \times k$ tipli $D(m,n,k)=\left[d_{i,j}^{m,n,k}\right]_{k\times k}$ matrisi;

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & (u-mn)\text{-inci} & & & \\ & & \downarrow & & & \end{array} \\
D(m,n,k)= & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & B(m,n,(k-1)) & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right],
\end{array}
$$

şeklinde tanımlanmıştır [26].

Teorem 4.2.4: $k > mn+1$ için

$$perD(m,n,k) = 2\sum_{i=1}^{k-1} J_{m,n}(i)$$

eşitliği elde edilir [26].

İspat: Eğer $perY(k,(m,n))$ birinci satıra uygun olarak genişletilir ise,

$$perD(m,n,k) = 2\left(perD(m,n,(k-1)) + B(m,n,(k-1))\right).$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$k > mn$ için $k \times k$ tipli R matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [26]:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorem 4.2.5: $k > mn$ için

$$\det\left(A(m,n,k)\circ R\right)=J_{m,n}(mn+k),$$

$$\det\left(B(m,n,k)\circ R\right)=2J_{m,n}(k)$$

ve

$$\det\left(D(m,n,k)\circ R\right)=2\sum_{i=1}^{k-1}a_{m,n}(i)$$

eşitlikleri elde edilir [26].

İspat: $k>mn$ için $perA(m,n,k)$ = $\det\left(A(m,n,)\circ R\right)$, $perB(m,n,k)$ = $\det\left(B(m,n,k)\circ R\right)$ ve $perD(m,n,k)$ = $\det\left(D(m,n,k)\circ R\right)$ olduğundan $perA(m,n,(k+1))=J_{m,n}(mn+(k+1))$ eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Adjacency-Jacobsthal sayıları için Binet formülü Lemma 4.2.1 ile aşağıdaki gibi elde edilir:

Lemma 4.2.1: Adjacency-Jacobsthal dizilerinin karakteristik denklemi $x^{mn}-x^{mn-n+1}-2$ olup bu denklemin çok katlı kökü yoktur [26].

İspat: $f(x)=x^{mn}-x^{mn-n+1}-2$ ve u nun, $f(x)$ in bir çok katlı kökü olduğunu düşünelim. Bu durumda $f(u)=0$ ve $f^{'}(u)=0$ olmalıdır. Dolayısıyla $u^{mn}<0$ ve $u^{n-1}>0$ için $u^{n-1}=\dfrac{mn-n+1}{mn}$ ve $u^{mn}=\dfrac{2(mn-n+1)}{-n+1}$ olur ki, bu eşitliklerden $u^{mn}<0$ ve $u^{n-1}>0$ olduğu görülmektedir. $u^{mn}<0$ ve $u^{n-1}>0$ olması ancak m ve n nin birer çift sayı olması durumunda gerçeklenmektedir. Bu sebeple m ve n sayıları tek sayılar olarak kabul edilmelidir. Böylece $u<0$ pozitif tamsayıları için $x^{mn}-x^{mn-n+1}-2=0$ denklemini sağlayan bir çok katlı kökü yoktur. Bu çelişki ile lemma ispatlanmıştır.

$(mn)\times(mn)$ tipli $V_{m,n}$ Vandermonde matrisinin

$$V_{m,n}=\begin{bmatrix}(x_1)^{mn-1} & (x_2)^{mn-1} & \cdots & (x_{mn})^{mn-1}\\ (x_1)^{mn-2} & (x_2)^{mn-2} & \cdots & (x_{mn})^{mn-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & & x_{mn}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini düşünelim.

$(mn)\times 1$ tipli $W_{m,n}(i,j)$ matrisi;

$$W_{m,n}(i,j)=\begin{bmatrix}x_1^{\alpha+mn-1}\\ x_2^{\alpha+mn-1}\\ \vdots\\ x_{mn}^{\alpha+mn-1}\end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin ve $V_{m,n}(i,j)$ matrisi, $V_{m,n}$ matrisinin $j-$inci sütununun $W_{m,n}(i,j)$ sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Teorem 4.2.6: $\alpha\geq 1$ için $(C_{m,n})^{\alpha}=\left[c_{i,j}^{m,n,\alpha}\right]$ olsun, bu durumda $c_{i,j}^{m,n,\alpha}=\dfrac{\det V_{m,n}(i,j)}{\det V_{m,n}}$ dır [26].

İspat: $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_{mn}$ birbirinden farklı olduğu için $C_{m,n}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir. $X_{m,n}=(x_1,x_2,\ldots,x_{mn})$ olsun, bu durumda $C_{m,n}V_{m,n}=V_{m,n}X_{m,n}$ eşitliği elde edilir. $V_{m,n}$ matrisi tersinir matris olduğu için $(V_{m,n})^{-1}C_{m,n}V_{m,n}=X_{m,n}$ eşitliği yazılır. Böylece $C_{m,n}$ matrisi, $X_{m,n}$ köşegen matrisi ile benzerdir. Dolayısıyla $\alpha\geq 1$ için $(C_{m,n})^{\alpha}V_{m,n}=V_{m,n}(X_{m,n})^{\alpha}$ olduğu görülmektedir. Bu durumda,

$$\begin{cases} c_{i,1}^{m,n,\alpha}x_1^{mn-1}+c_{i,2}^{m,n,\alpha}x_1^{mn-2}+\cdots+c_{i,mn}^{m,n,\alpha}=x_1^{\alpha+mn-1}\\ c_{i,1}^{m,n,\alpha}x_2^{mn-1}+c_{i,1}^{m,n,\alpha}x_2^{mn-2}+\cdots+c_{i,1}^{m,n,\alpha}=x_2^{\alpha+mn-1}\\ \vdots\\ c_{i,1}^{m,n,\alpha}x_{mn}^{mn-1}+c_{i,1}^{m,n,\alpha}x_{mn}^{mn-2}+\cdots+c_{i,1}^{m,n,\alpha}=x_{mn}^{\alpha+mn-1}\end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilmektedir. Lineer denklem sisteminin çözümünden de, her $i, j = 1, 2, \ldots, mn$ için

$$c_{i,j}^{m,n,\alpha} = \frac{\det V_{m,n}(i, j)}{\det V_{m,n}}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 4.2.2: $\alpha \geq 1$ için

$$J_{m,n}(\alpha) = \frac{\det V_{m,n}(mn, mn)}{2 \det V_{m,n}}$$

eşitliği elde edilir [26].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

[16, 17, 28, 44, 47, 49, 63, 64, 68,70] deki çalışmalarında, indirgemeli dizilerin çeşitli özellikleri ve bu dizilerin cebirsel yapılardaki karşılıklarının periyotları elde edilirken bu dizilerin bağıntıları yardımıyla elde edilen üreteç matrisler kullanılmıştır.

Matrisler kullanılarak indirgemeli dizilerin tanımlanması ise, ilk olarak [13, 14, 16, 17, 23, 38] çalışmalarında ortaya atılmış çok yeni bir yöntemdir.

Tez çalışmasında bu yeni yöntem daha da genişletilerek farklı yollardan elde edilen Adjacency ve Circulant matrisleri kullanılarak Adjacency-Jacobsthal dizisi ve Adjacency-Pell-Circulant dizileri tanımlanmıştır.

Adjacency-Jacobsthal ve Adjacency-Pell-Circulant dizilerinin üreteç matrisleri Companion matrisler formatında belirlenerek gerek üreteç matrislerin gerekse dizilerin yapısal özellikleri yardımıyla bu dizilerin, Binet formülleri, permanental, üstel ve toplamsal temsilleri, üreteç fonksiyonları ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri belirlenmiştir.

Yapılan bu çalışmalarda, kullanılan yöntemler ile üzerinde çalışılan matematiksel yapıların konsept kapsamında ilk defa birlikte ele alınmış olmalarından dolayı elde edilen sonuçlar son derece özgün değere sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, W. and Shanks, D., 1982, "Strong Primality Tests that are not sufficient", Mathematics of Compt., 36(159), 255-300.

[2] Aydın, H. and Dikici, R., 1998, "General Fibonacci sequences in finite groups", The Fibonacci Quart., 36(3), 216-221.

[3] Ağargün, A. G., Özdağ, H., "Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri", Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.

[4] Başar, F., "Lineer Cebir", Sürat Üniversite Yayınları, 2012.

[5] Becker, P. G., 1994, "k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations", J. Number Theory, 49(3), 269-286.

[6] Bicknell, M., 1975, "A primer on the Pell sequences and Related sequence", The Fibonacci Quart., 13(4), 345-350.

[7] Brualdi, R. A. and Gibson, P. M., 1997, "Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: applications of permanent function", J. Combin. Theory, 22 , 194–230.

[8] Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F., 1990. "Fibonacci length of generating pairs in groups in Applications of Fibonacci Numbers", Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, pp. 27-35.

[9] Cayley, A., 1878, "The Theory of Groups: Graphical Representation", Amer. J. Math., 1, 174-176.

[10] Chen, W. Y. C. and Louck, J. C., 1996, "The combinatorial power of the companion matrix", Linear Algebra Appl., 232, 261–278.

[11] Çallıalp, F., "Örneklerle Soyut Cebir", Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.

[12] Davis, P. R., 1979, "Circulant matrices", John Wiley, New York.

[13] Deveci, Ö., "The Pell-circulant sequences and their applications", Maejo Int. J. Sci. Technol., in press.

[14] Deveci, Ö., "On the Fibonacci-circulant p-sequences", Util. Math., in press.

[15] Deveci, Ö., 2013, “The k-nacci sequences and the generalized order-k Pell sequences in the semi-direct product of finite cyclic groups”, Chiang Mai J. Sci., 40(1), 89-98.

[16] Deveci, Ö., “The Pell-Circulant Sequences and their Applications”, Maejo Int. J. Sci. Technol., 10(03), 284-293, 2016.

[17] Deveci, Ö., “The Generalized Quaternion Sequence”, AIP Conference Proceedings, 1726, 020125-1-020125-3; doi: 10.1063/1.4945951, 2016.

[18] Deveci, Ö., Karaduman, E., “The adjacency-Pell sequences”, is submitted**.**

[19] Deveci, Ö., Shannon, A. G., “On the adjacency-type sequences”, is submitted**.**

[20] Deveci, Ö. and Karaduman, E., 2013 “Requrrence Sequence in Groups,”, Lambert Academic Publishing, Germany.

[21] Deveci, Ö. and Karaduman, E., “On the Padovan p-numbers”, Hacettepe J. Math. Stat., in press.

[22] Deveci, Ö. and Karaduman, E., 2012, “The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices”, Linear Algebra Appl. ; 437: 2538-2545.

[23] Deveci, Ö., Karaduman, E. and Campbell, C.M., “The Fibonacci-Circulant Sequences and their Applications”, Iran J. Sci. Technol. Trans. A. Sci., in press.

[24] Deveci, Ö. and Aküzüm, Y., “The recurrence sequences via Hurwitz matrices”, Sci. Ann.“ Al. I. Cuza” . Univ. Iasi, in press.

[25] Deveci, Ö, Aküzüm, Y. and Karaduman, E., 2015, “ The Pell-Padovan p-Sequences and Its Applications”, Util. Math. ; 98: 327-347.

[26] Deveci, Ö. and Artun, G., 2016, “The Adjacency-Jacobsthal Numbers”, is submitted.

[27] Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Artun, G., 2016, “The Adjacency-Pell-Circulant Sequences”, is submitted.

[28] Deveci, Ö., Aküzüm, Y., Shannon, A.G., "The Dihedral-type Adjacency Sequences", is submitted.

[29] Dikici, R. and Smith, G. C., 1997, "Fibonacci sequences in finite nilpotent groups", Turkish J. Math. 2, 133-142.

[30] Doostie, H. and Hashemi, M., 2006, "Fibonacci lengths involving the Wall number" k(n). J Appl. Math. Comput.; 20: 171-180.

[31] Dummit, D.S. and Foote, R.M., 2004, "Abstract Algebra", 3$^{\text{nd}}$ editon John Wiley & Sons, Inc..

[32] Everest, G., Poorten, A.V. and Shparlinski, I., T.Word, 2003, "Recurrence Sequences", American Math. Soc..

[33] Falcon, S. and Plaza, A., 2009, "k-Fibonacci Sequences Modulo m", Chaos, Solitons & Fractals, 41, 497-504.

[34] Frenkel, A.S. and Klein, S.T., 1996, "Robutst Universal Complete Codes for Transmission and Compression", Discrete Appl. Math., 64, 31-55.

[35] Frey, D. D. and Sellers, J. A., 2000, "Jacobsthal numbers and alternating sign matrices", J. Integer Seq., 3, Article 00.2.3.

[36] Gil, J. B., Wiener, M. D. and Zara, C., "Complete Padovan Sequences in Finite Fields", http://arxiv.org/pdf/math/0605348.pdf

[37] Gogin, N. and Myllari, A. A., 2007, "The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices", Programing and Computer Software, published in Programmirovanie, 33 (2): 74-79.

[38] Gültekin, İ. and Deveci, Ö., "On The Arrowhead-Fibonacci Numbers", Open Mathematics, in press.

[39] Horadam, A. F., 1971, "Pell İdenties", The Fibonacci Quart., 9(3), 245-252.

[40] Honsberger, R., 1985, "The matrix Q, mathematical Gems III. Washington DC, Math. Assoc. Amer., 106-107.

[41] Johnson, D. L., 1980, “Topics in the theory of group presentations”, London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press.

[42] Johnson, D. L., 1990, “Presentation of Groups”, Cambridge University Press.

[43] Johnson, D. L., 1997, “Presentations of groups”, 2nd edition, London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press.

[44] Kalman, D., 1982, “Generalized Fibonacci numbers by matrix methods”, The Fibonacci Quart., 20(1), 73–76.

[45] Karakaş, H. İ., “Cebir Dersleri”, Tüba Yayınları, Ankara, 2010(ikinci baskı).

[46] Kılıç, E., 2008, “The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers”, European J. Comb., 29, 701–711, 8.

[47] Kılıç, E., 2009, “The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas”, combinatorial representations, sums, Chaos, Solitons Fractals, 40(4): 2047-2063.

[48] Kılıç, E. and Stakhov, A. P., 2009, “On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices”, Chaos Solitons Fractals, 40, 2210–2221.

[49] Kılıç, E. and Taşcı, D., 2006, “The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers”, Taiawanese J. Math., 10(6), 1661-1670.

[50] Kirchoof, B. K. and Rutishauser, R., 1990, “The Phyllotavy of Costus (Costaceae) ”, Bot Gazette, 151(1), 88-105.

[51] Knox, S.W., 1992, “Fibonacci sequences in finite groups”, The Fibonacci Quart.; 30(2): 116-120.

[52] Köken, F. and Bozkurt, D., 2008, “On the Jacobsthal numbers by matrix methods”, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3(13),605-614.

[53] Lancaster, P. and Tismenesky, M., 1985, “The theory of matrices”, Academic.

[54] Lee, G. Y., 2000, “k-Lucas numbers and associated bipartite graphs”, Linear Algebra Appl., 320 (1): 51-61.

[55] Lidl, R. and Niederreiter, H., 1986, "Introduction to finite fields and their applications", Cambridge U.P., 1986.

[56] Lien, J., 2005, "Padovan Sequence", Pers. Comm., Mar. 11, 2005, http://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html

[57] Lü, K. and Wang, J., 2007, "k-step Fibonacci sequence modulo m", Util. Math.; 71: 169-178.

[58] Mandelbaum, D. M., 1972, "Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding", IEEE Transactions on Information Theory, 281-285.

[59] Özkan, E., 2014, "Truncated Lucas Sequences and its period", Appl. Math. Comput.,232, 285-291.

[60] Pinch, R. E. G., "Recurrent Sequences Modulo Prime Powers", In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester, 1991.

[61] Shannon, A. G., Horadam, A. F. and Anderson, P. G., 2006, "The auxiliary equation associated with plastic number", Notes on Number Theory and Disc. Math., 12 (1): 1-12.

[62] Silvester, J. R., 1979, "Fibonacci properties by matrix methods", Mathematical Gozette, 63 188-191.

[63] Stakhov, A. P., 1999, "A generalization of the Fibonacci Q-matrix", Rep. Natl. Acad. Sci. Ukraine, 9, 46–49.

[64] Stakhov, A. P. and Rozin, B., 2006, "Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers", Chaos Solitons Fractals, 27, 1162–1167.

[65] Taşcı, D., "Lineer Cebir", Gazi Kitapevi, Ankara, 2005(üçüncü baskı).

[66] Taşcı, D., "Soyut Cebir", Alp Yayınevi, Ankara, 2010(ikinci baskı).

[67] Taşcı, D. and Firengiz, M. C., 2010, "Incomplete Fibonacci and Lucas p-numbers", Math. Comput. Modell., 52: 1763-1770.

[68] Tuğlu, N., Koçer, E. G. and Stakhov, A. P., 2004 "Bivariate Fibonacci like p-Polinomials", Appl. Math. and Compt., 155, 637-641.

[69] Wall, D. D., 1960, "Fibonacci series modulo m", Amer Math. Monthly; 67: 525-532.

[70] Yılmaz, F. and Bozkurt, D., 2009, "The generalized order-k Jacobsthal numbers, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4(34), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Gizem ARTUN

Doğum Yeri **:** CEYHAN

Doğum Tarihi : 14/11/1991

Medeni Hali **:** Bekar

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise **:** Hüseyin Okan Merzeci Anadolu Lisesi

Lisans **:** Kafkas Üniversitesi/ Fen-Edebiyat Fakültesi

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü