c_0 YENİDEN NORMLANDIĞINDA c_0 İÇİNDE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN ZAYIF KOMPAKT OLMAYAN KONVEKS KÜMELERİN KARAKTERİZASYONU

Aysun GÜVEN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Matematik Anabilim Dalı

KARS-2017

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

c_0 YENİDEN NORMLANDIĞINDA c_0 İÇİNDE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN ZAYIF KOMPAKT OLMAYAN KONVEKS KÜMELERİN KARAKTERİZASYONU

Aysun GÜVEN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu tez çalışması Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 2017-FM-24 nolu proje ile desteklenmiştir.

ARALIK-2017
KARS

TEZ KABUL VE ONAYI

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Aysun GÜVEN'in Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "*c_0 yeniden normlandığında c_0 içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan zayıf kompakt olmayan konveks kümelerin karakterizasyonu*" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . birliği . . . . . . ile kabul edilmiştir.

18/ 12/ 2017

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Üye

Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ◇ Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ◇ Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ◇ Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- ◇ Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ◇ Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aysun GÜVEN
Aralık-2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZ

c_0 YENİDEN NORMLANDIĞINDA c_0 İÇİNDE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİNİ SAĞLAYAN ZAYIF KOMPAKT OLMAYAN KONVEKS KÜMELERİN KARAKTERİZASYONU

Aysun GÜVEN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

1979'da, ℓ^1'de zayıf*-kompakt olmayan kapalı, sınırlı, konveks (k.s.k.) alt kümelerinden oluşan büyük bir sınıfın l^1 in bilinen normuna göre genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu Goebel ve Kuczumow tarafından gösterilmiştir. Bu çalışma bir eş değer norm ile genelleştirilerek ℓ^1'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği P.K. Lin tarafından 2008'de ispatlanmıştır. Lin'in çalışmasının c_0 uzayı için analoğu çözülememiş önemli bir açık soru olup, bu sorunun alt versiyonu olan Goebel ve Kuczumow'un çalışmasının bir eş değer norm ile c_0 uzayı için analoğu bir başka önemli sorudur. Yakın zamanda bu soruya fonksiyonlar afin genişlemeyen olduğunda pozitif cevap Nezir ve Sade tarafından verilmiştir.Bu tez çalışmasında ise c_0 üzerinde Nezir'in yakın zamanda yapmış olduğu bağımsız çalışmada geliştirdiği eşdeğer norm $\|.\|$ ile c_0 'da zayıf kompakt olmayan k.s.k. alt kümelerinden oluşan çok daha büyük bir sınıfın afin $\|.\|-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini koruduğu gösterilmiştir.

2017, 59 Sayfa

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon; afin fonksiyon; sabit nokta teorisi; yeniden normlama; asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi; kapalı, sınırlı, konveks küme; Banach dizi uzayları.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CHARACTERIZING NONWEAKLY COMPACT SUBSETS OF c_0 WITH FIXED POINT PROPERTY FOR AFFINE NONEXPANSIVE MAPPINGS WHEN c_0 IS RENORMED

Aysun GÜVEN

KAFKAS UNIVERSITY
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Veysel NEZİR

In 1979, it was showed by K. Goebel and T. Kuczumow that a large class of non-weak*-compact closed, bounded, convex (c.b.c.) subsets K of l^1 has the fixed point property for nonexpansive mappings. Later, in 2008, it was proved by P.K. Lin that l^1 can be renormed to have the fixed point property for nonexpansive mappings. While c_0-analogue of Lin's work is an important open question, c_0-analogue of Goebel and Kuczumow's work with an equivalent norm, which is a sub version of Lin's study, is another important question. Recently, positive answer for this question has been given by Nezir and Sade when the functions are affine nonexpensive. In this thesis, using the equivalent norm constructed by Nezir in his recent independent work, it is showed that there exists a much larger class of non-weakly compact c.b.c. subsets of c_0 with the fixed point property for affine $\|\cdot\|$-nonexpansive mappings.

2017, 59 Pages

Keywords: nonexpansive mapping; affine mapping; fixed point property; renorming; asymptotically isometric c_0-summing basic sequence; closed, bounded, convex set; Banach sequence spaces.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yapılmıştır.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını hiçbir zaman eksik etmeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Veysel Nezir'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aysun GÜVEN

KARS-2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ℓ^1: Mutlak toplanabilen dizilerin Banach uzayı

ℓ^∞: Sınırlı dizilerin Banach uzayı

c_0: 0 a yakınsak dizilerin Banach uzayı

$\|.\|$: $\|.\|$ normu

$\in$: elemanı

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$(\xi_k)_k$: Terimleri her $k \in \mathbb{N}$ için ξ_k olan $(\xi_k)_k$ dizisi

$(X, \|.\|)$: Üzerinde $\|.\|$ normu tanımlı normlu uzay

$\|.\|_1$: ℓ^1 üzerinde tanımlanan alışılmış mutlak toplam normu

$\|.\|_\infty$: ℓ^∞ üzerinde tanımlanan alışılmış sup normu

$\downarrow_n$: n indisine göre azalarak yakınsar

$\uparrow_n$: n indisine göre artarak yakınsar

$\overline{co}$: kapalı konveks kabuk

$\forall$: herbir

$\exists$: en az bir

$\subseteq$: altkümesi

$\cup$: birleşim

$\Longrightarrow$: ise

ε: epsilon değişkeni

α: alfa değişkeni

λ: küçük lambda değişkeni

Λ: büyük lambda değişkeni

γ: küçük gamma değişkeni

Γ: büyük gamma değişkeni

δ: delta değişkeni

$<$: küçüktür

$>$: büyüktür

$\leq$: küçük veya eşittir

$\geq$: büyük veya eşittir

$\sigma(\ell^\infty,\ \ell^1)$: ℓ^1 üzerinde tanımlı zayıf topoloji

$\overline{E}^{\sigma(\ell^\infty,\ \ell^1)}$: ℓ^1 üzerinde tanımlı zayıf topolojiye göre E kümesinin kapanışı

$\min$: minimumu

$\max$: maksimumu

Kısaltmalar

k.s.k.: kapalı, sınırlı, konveks

SNT (g.f.): genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi

a.i.: asimtotik izometrik

1. GİRİŞ

1965'de, [Bir Hilbert Uzayı $(X, \|.\|)$'nın boş olmayan herhangi bir kapalı, sınırlı, konveks alt kümesi C üzerinde tanımlı tüm genişlemeyen $T\colon C \to C$ fonksiyonlarının [yani her $x, y \in C$ için $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ koşulunu sağlayan fonksiyonların] C kümesinde bir sabit noktası vardır (1.1)] sonucu Browder tarafından gösterilmiştir [2]. Yakın bir zaman sonra yine 1965 yılında, bağımsız olarak Browder ve Göhde tarafından bu (1.1) sonucu düzgün konveks Banach uzayları $(X, \|\cdot\|)$'na genelleştirilmiştir [3, 6] öyle ki bu uzaylara örnek; alışılmış $\|\cdot\|_p$ normu ile $X = L^p,\ 1 < p < \infty$ dir.

Daha sonra yine 1965 yılında, Browder'ın bu (1.1) sonucu tüm normal yapıya sahip Yansımalı Banach uzayları X için Kirk tarafından genelleştirilmiştir [7]. Hatır-lanmalıdır ki normal yapılı uzaylar öyle uzaylardır ki tüm boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt kümeleri C'nin Chebyshev yarıçapları çaplarından küçüktür.

Browder'ın tarif ettiği (1.1) yapısını sağlayan $(X\ ,\ \|\ .\ \|)$ normlu uzayları "genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini (SNT (g.f.)) sağlayan uzay-lar" olarak tanınmıştır. 52 yıldır halen her yansımalı $(X\ ,\ \|\ .\ \|)$ Banach uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayıp sağlamadığı çözüleme-miş bir sorudur.

Yansımalı uzay olma ve karakterizasyonu ile genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi arasında kuvvetli bir bağ bulunmaktadır.

Yansımayan Banach uzay $(\ell^1, \|.\|_1)$ yani mutlak toplanabilen diziler uzayı mutlak normu ile genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozar. Örneğin: $C := \left\{ (t_n)\ : her\ t_n \geq 0\ ve\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$ kümesi göz önüne alındığında kolayca görülebilirki C ℓ^1' da kapalı, sınırlı ve konveksdir. C üzerinde $T\colon C \to C$ sağa kayan bir fonksiyon olsun; yani, $T(t_1, t_2, t_3, \dots)\colon = (0, t_1, t_2, t_3, \dots)$. Açıkça T $\|.\|_1$-genişlemeyen (ayrıca bir izometri) ve C'de sabit noktası olmayan bir fonksiyondur.

Yakın zamanda yapılmış takdir edilen P. K. Lin tarafından yapılan çok önemli bir çalışma [9] ile, genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini sağlayan ilk

Banach uzayı $(X\ ,\ \|\ .\ \|)$'i gösterilmiştir. Bu gerçek $X = \ell^1$ üzerinde aşağıdaki eş norm $\|\ .\ \|$ u kullanarak gösterilmiştir.

$\|x\| = \sup\limits_{k\in N} \frac{8^k}{1+8^k} \sum\limits_{n=k}^{\infty} |x_n|$, her $x = (x_n)_{n\in N} \in \ell^1$.

Peki $(c_0\ ,\ \|\ .\ \|_\infty)$, sıfıra yakınsayan reel değerli dizilerin Banach uzayı mutlak sup normu $\|\ .\ \|_\infty$ ile nasıl bir davranış gösterir? Bu Banach uzayları teorisinde önemli bilgiler sunan bir diğer yansımayan Banach uzaydır. Bu uzay da aynı şekilde genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozar. Örneğin:

$C\colon = \{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} :$ her $t_n \geq 0$ her $1 = t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \geq t_{n+1} \downarrow_n 0\}$.

Şimdi sağa kayma fonksiyonu $U\colon C \to C$ 'i ele alınsın. $U(t_1, t_2, t_3, \ldots)\colon = (1, t_1, t_2, t_3, \ldots)$. Bu durumda U bir $\|\ .\ \|_\infty$-genişlemeyen (hatta bir izometri) ve C'de sabit noktası olmayan bir fonksiyondur.

Örneklerden görülebileceği üzere ℓ^1 ve c_0 alışılmış normları ile ortak bir özellik gösterir ve genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozmaktadırlar. Dolayısı ile P. K. Lin'in ℓ^1 için bulduğu sonucun c_0-analoğunu sorgulamak çok doğaldır. Fakat bu soru halen cevaplanamamıştır. Bu sorunun ünlü bir soru olmasının yanı sıra P.K Lin'in sonucundan da önce 1979' da, l^1 'in zayıf* kompakt olmayan kapalı, sınırlı, konveks (k.s.k) K alt kümelerinden oluşan çok geniş bir sınıfının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu K. Goebel ve T. Kuczumow tarafından gösterilmiştir [5]. Yakın zamanda afin genişlemeyen fonksiyonlar ele alınarak Goebel ve Kuczumow çalışmasının bir eş değer norm ile c_0-analoğu için pozitif cevap sırasıyla Nezir ile Sade ve Nezir'in bağımsız olarak yaptığı çalışma ile verilmiştir [11, 10]. Yani, c_0'ın yeniden normlandırılmışları vardır ve bu uzayda zayıf kompakt olmayan k.s.k. alt kümeleri C alt kümelerinden oluşan bir sınıf vardır öyle ki bu sınıf için her afin genişlemeyen fonksiyonun bir sabit noktası vardır sonucuna ulaşılmıştır. İlginç bir sonuç olarak bu iki çalışmada da gösterilir ki: c_0' ın bilinen mutlak sup normuna göre asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi olan öyle bir dizinin kapalı konveks kabuğu ele alındığında ve araştırmacıların tanımladıkları eş değer normlar kullanıldığında bu kümeler yani bu kapalı konveks kabuklar afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir; fakat, 2011' de, eğer bir Banach uzayı bir asimtotik izometrik (a.i.) c_0-toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$' i içerirse o zaman bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi Banach uzayının bilinen normuna göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar sonucu Lennard ve Nezir tarafından gösterilmiştir [8].

Bu çalışmalarda keyfi $b \in (0,1)$ alınarak $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ alarak ($(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ler c_0' ın kanonik bazı olmak üzere; yani $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skaler dizisi tanim kümesi $\mathbb{N}$ olan, n-yinci koordinatı 1 ve diğer koordinatları 0 olan ve $(c_0, \|.\|_\infty)$ ile $(l^1, \|.\|_1)$' in bir koşulsuz bazıdır) c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlanmış, sonra aşağıdaki c_0' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlanmıştır.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde E' de $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlanır. Kolayca görülmüştür ki

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \ \text{her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} .$$

Bu durumda sonuç olarak ispatlamıştır ki $E = E_b$ öyle bir kümedir ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir a.i. c_0-toplam baz dizisidir ve bu E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı, konveks kabuğu olduğu gösterilip ana sonuç olarak bir Banach uzayında herhangi bir a.i. c_0-toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğunun afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozduğu ispatlanmıştır; dolayısıyla, yukarıda bahsi geçen E kümesi üzerinde tanımlı sabit noktası olmayan bir $U : E \to E$ afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonu vardır sonucu verilmiştir.

Nezir'in bağımsız çalışması ile Nezir ve Sade'nin çalışmasında [10, 11] görülmüştür ki: c_0 öyle bir şekilde yeniden normlanabilir ve geliştirilen iki farklı eş değer norm sınıfı da bir α skalerine bağlı olup $\exists b \in (0,1)$ ve $\exists \alpha > 1$ için yukarıdaki E kümesi üzerinde tanımlanan her afin genişlemeyen $T : E \to E$ fonksiyonunun, E‘ de bir sabit noktası vardır.

Bu tez çalışmasında ise Nezir'in çalışmasında [10] yer alan eş değer norma göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip farklı tipte kümelerin varlığı gösterildi ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için yine kullanılan norma göre sabit nokta teorisine sahip kümelerin sınıfı genelleştirilmiştir.

P.K. Lin'in teoreminin c_0-analoğunu çözebilmek için aday çalışmalar geliştirebilmek açısından Nezir'in ve bu çalışmanın sonuçlarının büyük önemi vardır.

Bu tez çalışması için gerekli temel kavramlar takip eden bölümde verilecektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Çalışmanın bu bölümünde tez konusu ile ilgili gerekli temel kavram, teorem ve lemmalar verilecektir.

Tanım 2.1 *E kümesi bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayında boştan farklı kapalı, sınırlı, konveks alt küme olsun. $T : E \to E$ bir fonksiyon olsun.*

1. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x, y \in E$ için $T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)T(x) + \lambda T(y)$ ise T' ye afin fonksiyon denir.

2. Eğer $\forall x, y \in E$ için $||T(x) - T(y)|| \leq ||x - y||$ ise T' ye genişlemeyen fonksiyon denir.

Ayrıca, eğer her genişlemeyen $T : E \to E$ için enaz bir $z \in E$ var öyle ki $T(z) = z$ ise E kümesine genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi [SNT (g.f.)]' ne sahiptir denir.

$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun ve $E \subseteq X$ olsun. E' nin kapalı konveks kabuğu $\overline{co}(E)$ ile sembolize edilir. Bilindiği üzere $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$c_0 := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\} .$$

Ayrıca, her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için $||x||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$; ve $(\ell^1, || \cdot ||_1)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\ell^1 := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} .$$

Ayrıca sonlu sayıda sıfırdan farklı terimi olan dizilerin vektör uzayını c_{00} ile gösterilir. Öyle ki c_0 (ve ℓ^1)uzayında bulunan $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi lineer olarak c_{00} uzayını gerer.

Lennard and Nezir'in makalesinde [8] yer alan bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayının içinde bulunabilecek bir asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.2 *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X' de yer alan ve aşağıdaki koşulu sağlayan bir dizi olsun; o zaman, bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında* *bir asimtotik izometrik (a.i) c_0-toplam baz dizisi deriz : En az bir 0' a yakınsak azalan bir dizi $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ vardır öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için*

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right\| \leq \sup_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|.$$

Not edilmelidir ki bu tanımda (yoğunluk sebebiyle) c_{00}' ı ℓ^1 ile değiştirelebilir. Ayrıca; eğer bir $L > 0$ için $(z_n/L)_{n\in\mathbb{N}}$ bir asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi oluyorsa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir L-ölçekli asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi denir.

Bu tanımdan yola çıkılarak Lennard ve Nezir'in çalışmasında [8] aşağıdaki teoremler verilmiştir. Not edilmelidir ki bu tez çalışmasında ele alınan kümeler bu teoremlerde bahsedilen kümelerden türemiştir.

Teorem 2.1 *$L \in (0,\infty)$ olsun. Eğer bir Banach uzayı bir L-ölçekli asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$' i içerirse, $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Hatta bundan daha fazlasını da söylenebilir: en az bir sabit noktası olmayan afin daralan $U : E \to E$ fonksiyonu vardır [8].*

Teorem 2.2 *$\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde herhangi bir artan dizi olsun. (Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \leq b_{n+1}$). Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini tanımlayalım. Daha sonra c_0'da bir $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kapalı sınırlı konveks alt kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0\right\}.$$

O zaman; sabit noktası olmayan en az bir afin $||\cdot||_\infty$-genişlemeyen $U : E \to E$ fonksiyonu vardır [8] .

Tanım 2.3 *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $(X, \|.\|)$ Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir denir [4]:*

X'de en az bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve terimleri $(0,1)$ aralığında yer alan 0' a yakınsak en az bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|t_n|.$$

Teorem 2.3 *Eğer bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerirse $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar [4].*

Nezir'in çalışmasında yer alan [10] bu çalışma için önemli araç olacak diğer temel bilgiler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4 *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X Banach uzayında $x \in X$ noktasına zayıf yakınsadığında eğer en az bir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi bulunabiliyor öyle ki bu alt dizinin Cesaro avarajı normlu olarak x e yakınsıyor ise yani $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} x_{n_k} - x \right\| = 0$ oluyorsa $(X, \|.\|)$ Banach uzayına zayıf Banach-Saks özelliğine sahiptir denir.*

Bu gerçek kullanılarak, Nezir'in çalışmasında [10] ispatı çok kolay bir şekilde görülebilen Goebel ve Kuczumow lemmasının [5, Lemma 1] kısmi bir analoğu olan aşağıdaki lemma verilmiştir.

Lemma 2.1 *$(X, \ \| \, . \, \|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_n$ dizisi X' de sınırlı bir dizi olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $s : X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alınsın:*

$$s\left(y\right) = \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k - y \right\| \ , \ \forall y \in X \ .$$

O zaman, eğer X Banach uzayı zayıf Banach-Saks özelliğine sahipse ve $x \in X$ noktası $(x_n)_n$ dizisinin zayıf topolojiye göre limiti ise $(x_n)_n$ dizisinin en az bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro avarajı x'e normlu yakınsar ve bu durumda s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla yeniden tanımlanırsa $s\left(x\right) = 0$ ve X üzerinde tanımlı her eş değer norm $\|\cdot\|$ için $s\left(y\right) = \|y - x\|$, $\forall y \in X$ dir [10].

Buna göre c_0 Banach uzayının zayıf Banach-Saks özelliği olması dolayısıyla [12], bahsedilen sonuç geçerlidir [10].

Tanım 2.5 *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için*

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k - \alpha\xi_j\right| \text{ öyle ki } \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1, \ Q_k \downarrow_k 0$$

ve $Q_k > Q_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}$ olarak tanımlansın.

Bu durumda her α için $\|\cdot\|$ normu c_0 üzerinde bir eş değer normdur [10].

Teorem 2.4 *En az bir $0 < b < 1$ ve $\alpha \geq \frac{1}{2}$ sayıları vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere ve $\|\cdot\|$ normu c_0 üzerinde yukarıdaki Tanım 2.5' da verildiği gibi seçildiği du-*

rumda giriş bölümümüzde tanımladığımız E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar [10].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde öncelikle Nezir'in geliştirdiği eş değer norma göre c_0'da SNT'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan, [10] çalışmasında yer alan geniş bir zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler ailesi tanıtılmıştır ve Nezir'in sonuçları sunulmuştur.

3.1. c_0'ın bir yeniden normlanması ve Nezir'in geliştirdiği eş değer normuna göre c_0 da SNT'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan geniş bir zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler ailesi

Yakın zamanda, c_0 üzerinde alışılmış norma eş değer olan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan norm geliştirilmiş ve bu normun sabit nokta teorisi açısından aşağıdaki ilginç sonuçları elde edilmiştir [10].

Tanım 3.1 *$\alpha \in \Re$ olsun. $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için*

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k |\xi_k - \alpha\xi_j| \quad \textit{öyle ki} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,\ Q_k \downarrow_k 0 \\ &\quad \textit{ve} \ \ Q_k > Q_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıda görüleceği üzere her α için $\|.\|$ normu c_0 üzerinde alışılmış norma eş değer bir normdur.

Öncelikle, açıkça görülebilir ki her $x \in c_0$ için $\|x\| \geq \|x\|_\infty$. Şimdi, $j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{\substack{k=1 \\ j\neq k}}^{\infty} Q_k |\xi_k - \alpha\xi_j| + Q_j |1-\alpha| |\xi_j| \leq \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ j\neq k}} |\xi_k - \alpha\xi_j| + |1-\alpha| |\xi_j|$$

dır.

Bu durumda [13] çalışmasında kullanılan tekniklere benzer şekilde, $N \in \mathbb{N}$ öyle seçilmiştir ki $\|x\|_\infty = |\xi_N|$ dir ve bu durumda aşağıdakiler elde edilmiştir.

1. *Eğer* $0 < \alpha \leq 1$ *ise*

$$\|x\| \leq (3-\alpha)\|x\|_\infty + \alpha \sup_k \{|\xi_k| \ : sgn(\xi_k) = -sgn(\xi_N)\}$$

   olur.

   Bu yüzden, $\|x\| \leq (3-\alpha)\|x\|_\infty + \alpha \|x\|_\infty = 3\|x\|_\infty$.

2. *Eğer* $\alpha > 1$ *ise*

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \alpha \|x\|_\infty + \alpha \|x\|_\infty + \sup_k \{|\xi_k| \ : sgn(\xi_k) = -sgn(\xi_N)\} \\ &\leq (2\alpha+1)\|x\|_\infty \end{aligned}$$

   dır.

3. *Eğer* $\alpha < 0$ *ise*

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x\|_\infty + \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ j\neq k}} |\xi_k - \alpha\xi_j| + |1-\alpha|\,|\xi_j| \\ &\leq (3-2\alpha)\|x\|_\infty \end{aligned}$$

   bulunur.

4. *Eğer* $\alpha = 0$ *ise*

$$\|x\| := \|x\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k |\xi_k| \leq 2\|x\|_\infty.$$

   Dolayısıyla, her α *için* $\|.\|$ *normu* c_0 *üzerinde bir eş değer normdur.*

Teorem 3.1 *c_0 üzerinde tanımlanan ve Tanım 3.1 ile verilen eş değer normu ele alınsın. Bu durumda, eğer $\alpha = 0$ veya $|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{2|\alpha|}{1+2|\alpha|}$ ise $(c_0, \ \|.\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermez.*

İspat *Durum 1:* $\alpha = 0$.

Bu durum aşikar olarak düşünülebilir çünkü bu durumda ele alınan norm [4, Örnek 5]'de yer alan normun bir genelleştirilmişidir. Dolayısıyla çalışmada yer alan teknik ile ispat tamamlanır.

Durum 2: $|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{2|\alpha|}{1+2|\alpha|}$ olsun.

Olmayana ergi yöntemi ile kabul edilsin ki $(c_0, \ \|.\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içersin. Bu durumda, $2|\alpha| > 2 > 1$ olması sebebiyle aşağıda verilen $\|.\|^{\sim}$ eş değer normu için de $(c_0,\ \|.\|^{\sim})$ c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerirdi.

$$\|x\|^{\sim} \;=\; \|x\|_{\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k - 2\alpha\xi_j\right|,\ \forall x = (\xi_k)_k \in c_0$$
$$\text{öyle ki } \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,\ Q_k \downarrow_k 0 \text{ ve } Q_k > Q_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

dır.

Bu durumda 0 a azalarak yakınsayan $(0,1)$ aralığında en az bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi ve c_0'da bir $(x_n)_n$ dizisi vardır öyle ki

$$\left[\begin{array}{l} \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ ve herhangi skaler } t_1, t_2, \ldots, t_n \text{ için} \\ \max\limits_{1\leq k\leq n} (1-\varepsilon_k)\left|t_k\right| \leq \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} t_k x_k\right\|^{\sim} \leq \max\limits_{1\leq k\leq n} \left|t_k\right| \end{array}\right] \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Genelliği bozmadan kabul edilebilir ki $(x_n)_n$ dizisi 0 yakınsar. Aslında (3.1) eşitisizliğinin sağ tarafı gösterir ki $(x_n)_n$ dizisi 0 a zayıf yakınsar.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (\xi_j^n)_j$ şeklinde tanımlansın.

Not etmeliyiz ki her $x \in c_0$ için öyle $L > 1$ vardır ki $\|x\|_{\infty} \geq \left\|\frac{x}{L}\right\|$ ve benzer şekilde $\|.\|^{\sim}$ normu için de bu eşitsizlik sağlanır. Şimdi genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak kabul edebiliriz ki en az bir $s \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|x_s\|_{\infty} > \frac{1}{2|\alpha|-1}$. Bunu gerçekten söyleyebiliriz çünkü $L > 1$ olup$(x_n)_n$ dizisi yerine $(\frac{x_n}{L})_n$ dizisini kullanabiliriz ve (3.1) eşitsizliği sıfıra azalarak yakınsayan ve $(0,1)$ aralığında yer alan $(\varepsilon_n)_n$ dizisi için geçerli olup en az bir $s \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\varepsilon_s < 1 - \frac{1}{2|\alpha|-1}$ ve $\|x_s\|_{\infty} \geq \left\|\frac{x_s}{L}\right\| > 1 - \varepsilon_s > \frac{1}{2|\alpha|-1}$ dir.

Ayrıca, kabul edilebir ki en az bir $r \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\xi_r^s \neq 0$ ve normun tanımı gereğince $x_s \in c_0$ olduğundan en az bir $N^{(s)} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|x_s\|_{\infty} = |\xi_{N^{(s)}}^s| \geq |\xi_r^s|$. O halde $p = \min\{r \mid |\xi_r^s| = |\xi_{N^{(s)}}|\}$ olarak alınsın.

Şimdi, $\delta = (Q_1 - \frac{2|\alpha|}{1+2|\alpha|})\frac{|\alpha|+2|\alpha|^2}{4|\alpha|^3+6|\alpha|^2+5|\alpha|+1}$ olsun.

Şimdi ise $N_1 \geq p$ seçilsin öyle ki $\sum\limits_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k < (1+2|\alpha|)\delta$ olsun. Sonra $N_2 \in \mathbb{N}$ seçilsin öyle ki her $n \geq \max\{s, N_2\}$ için $\varepsilon_n < \min\left\{1 - \frac{1}{2|\alpha|-1}\ ,\ \delta\right\}$ olsun. Sonra ise $M \geq \max\{s, N_2\}$ seçilsin öyle ki her $j = 1, 2, \ldots, N_1$ ve her $n \geq M$ için $\left|\xi_j^n\right| < \frac{(1+2|\alpha|)\delta}{4|\alpha|}$ olsun.

Not edilebilir ki $1 \geq \|x_s\|^{\sim}$ ve $1 \geq \|x_n\|^{\sim}$ olup bu sebeple her $j \in \mathbb{N}$ için $1 \geq \left|\xi_j^s\right|$ ve $1 \geq \left|\xi_j^n\right|$ dir.

Dolayısıyla her $n \geq M$ için

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\infty &\leq \|x_n\|^\sim \\
&\leq (1+2|\alpha|)\|x_n\|_\infty + \sum_{k=1}^{N_1} Q_k |\xi_k^n| + \sum_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k |\xi_k^n| \\
&< (1+2|\alpha|)\|x_n\|_\infty + \frac{(1+2|\alpha|)\,\delta}{4|\alpha|}\sum_{k=1}^{N_1} Q_k + \sum_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k \\
&< (1+2|\alpha|)\|x_n\|_\infty + \frac{(1+2|\alpha|)^2\delta}{2|\alpha|}
\end{aligned}$$

bulunur.

Üçgen eşitsizliği gereğince $\|x_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x_n + x_s\|_\infty + \frac{1}{2}\|x_n - x_s\|_\infty$ bu sebeple ya $\|x_n + x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ ya da $\|x_n - x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ dir.

Eğer $\|x_n + x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ olduğu kabul edilirse bu durumda

$$\begin{aligned}
1 = \max\{1,1\} &\geq \|x_s + x_n\|^\sim \\
&= \|x_s + x_n\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k^s + \xi_k^n - 2\alpha\left(\xi_j^s + \xi_j^n\right)\right| \\
&\geq \|x_s + x_n\|_\infty + Q_1(2|\alpha|-1)\left|\xi_p^s\right| - 2Q_1|\alpha|\left|\xi_p^n\right| - Q_1|\xi_1^n| \\
&\geq \|x_n\|_\infty + Q_1(2|\alpha|-1)\left|\xi_p^s\right| - 2Q_1|\alpha|\left|\xi_p^n\right| - Q_1|\xi_1^n| \\
&> \frac{1}{1+2|\alpha|}\|x_n\|^\sim - \frac{(1+2|\alpha|)\,\delta}{2|\alpha|} + Q_1(2|\alpha|-1)\left|\xi_p^s\right| \\
&\quad -2Q_1|\alpha|\left(\left|\xi_p^n\right| + |\xi_1^n|\right) \\
&> \frac{1}{1+2|\alpha|}\|x_n\|^\sim - \frac{(1+2|\alpha|)\,\delta}{2|\alpha|} + Q_1 - 2|\alpha|\left(\left|\xi_p^n\right| + |\xi_1^n|\right) \\
&> \frac{1}{1+2|\alpha|}(1-\varepsilon_n) - \frac{(1+2|\alpha|)\,\delta}{2|\alpha|} + Q_1 - 2|\alpha|\left(\left|\xi_p^n\right| + |\xi_1^n|\right) \\
&> \frac{1}{1+2|\alpha|}(1-\delta) - \frac{(1+2|\alpha|)\,\delta}{2|\alpha|} + Q_1 - 2|\alpha|\left(\left|\xi_p^n\right| + |\xi_1^n|\right) \\
&> 1 + \frac{(8|\alpha|^3 + 12\alpha^2 + 10|\alpha| + 2)\delta}{4\alpha^2 + 2|\alpha|} - \frac{(8|\alpha|^3 + 12\alpha^2 + 8|\alpha| + 1)\delta}{4\alpha^2 + 2|\alpha|} \\
&= 1 + \frac{\delta}{2|\alpha|}
\end{aligned}$$

olup bu mümkün değildir (çelişki). Aynı şekilde eğer $\|x_n - x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ olduğu kabul edilirse de görülebilir ki benzer çelişkiye düşülür.

3.2. c_0'da zayıf kompakt olmayan ve afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip bir küme sınıfı

Örnek 3.1 *$b \in (0,1)$ olsun. c_0'da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini $f_1 := b\, e_1$, $f_2 := b\, e_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde tanımlansın.*

Bu dizi vasıtasıyla da kısmi toplam dizisi olan bir $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın. $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \cdots + f_n$ olsun. Sonra ise c_0'ın bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi olan aşağıdaki $E = E_b$ tanımlanabilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} .$$

Teorem 3.2 *En az bir $b \in (0,\ 1)$ ve $\alpha > 1$ vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Öncelikle hatırlanmalı ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ koşulu c_0 içinde bir asimtotik izometrik kopya olma ihtimalini ortadan kaldırmak için gereklidir. Şimdilik $b \in (0,1)$ olmak üzere $Q_1 < \frac{2b}{1+b}$ koşulunun gerçeklendiği kabul edilsin ve normun bu koşul altında yeniden yazıldığı düşünülsün.

Her $j \in \mathbb{N}$ için $\|x\|_{(j)} = \|x\|_\infty + \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k \,|\xi_k - \alpha\xi_j|$ şeklinde tanımlansın.
Dolayısıyla $\|x\| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|x\|_{(j)}$ dır.

Not edilebilir ki eğer $x \in E$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \geq 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ olacak şekilde en az bir $(\alpha_n)_n$ skaler dizisi vardır öyle ki $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n$. Bu sebeple, $\exists q \in \mathbb{N}$ öyle ki $\alpha_q \geq \frac{1}{2^{q+1}}$.

Bu gerçekten esinlenerek aşağıdaki üç farklı küme ele alınır:

$$E_1 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\},$$

$$E_2 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

ve

$$E_3 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

öyle ki $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dir.

Şimdi, normun tanımı gereğince $Q_2 < \frac{1}{1+2\alpha}$ koşulu sağlandığı göz önüne alınarak, $p \in \mathbb{N}$ öyle seçilebilir ki $Q_2 \geq \left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) \frac{1}{3b}$ ve

$$E_1 = E_p := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0, \; \alpha_1 = 0, \alpha_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} ,$$

$$E_2 = E_{p'} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0, \; \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

(3.1) ve $b \in (0,1)$ öyle seçilebilir ki $\frac{1-b^2}{b(3b^2-6b+7)} < \frac{1}{2^{p+2}}$. Bu durumda not edebiliriz ki $b > \frac{3+\sqrt{20}}{11} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir öyle ki bu koşullar ispatta ileriki adımlarda yardımcı olacaktır. (3.2)

Durum A: Bu durumda $E_1 = E_p$ kümesi üzerinde çalışılmıştır.

$T : E_p \to E_p$ fonksiyonu afin genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda sabit nokta teorisyenleri tarafından çok iyi bir gerçek olarak kabul edilen en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $\left(x^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p$ vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ olup bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak kabul edilebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. Bu taktirde Lemma 2.1 gereğince uygun alt dizi kullanılarak öyle bir $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir öyle ki

$$s\left(y\right) = \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\| \; , \; \forall y \in c_0$$

ve

$$s\left(y\right) = \left\|y - z\right\| \, , \, \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

Şimdi, kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$\begin{aligned} W : \;&= \overline{E_1}^{\sigma(\ell^\infty, \, \ell^1)} \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0, \; \alpha_1 = 0, \; \alpha_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Durum A.1: $z \in E_p$.

Bu durumda $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) \;&\leq\; \limsup_{m} \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\| \\ &\quad + \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda T afin genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) &\leq \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right\| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple, $\|z - Tz\| \leq 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Durum A.2: $z \in W \setminus E_p$.

Öncelikle $\alpha < 2Q_1 + 2Q_2$ olduğu varsayılsın.

z noktasını ele aldığımız durum gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılır öyle ki $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 = 0, \gamma_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \ < 1$.

Buradan da $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve

$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ şeklinde tanımlansın.

h_λ noktasının E_1 kümesinin bir noktası olması açısından λ parametreleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilsin.

Bu durumda,

$$\|h_\lambda - z\| = \max \left\{ \begin{array}{l} b\delta + Q_1|1-\alpha|b\delta \\ +Q_2|(1-\lambda)b\delta - \alpha b\delta| + (1 - Q_1 - Q_2)\alpha b\delta, \\ b\delta + Q_1|b\delta - \alpha(1-\lambda)b\delta| \\ +Q_2|1-\alpha||1-\lambda|b\delta + (1 - Q_1 - Q_2)\alpha|1-\lambda|b\delta, \\ b\delta + Q_1 b\delta + Q_2|1-\lambda|b\delta \end{array} \right\}$$

dır.

Bu taktirde uzun teknik hesaplamalar sonucu görülecektir ki $\|h_\lambda - z\|$ fonksiyonu λ'nın bir fonksiyonu olup minimum değerini $[0,1]$ aralığında alır.

O halde $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in [0,\, 1]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımladığımızda bu teknik hesaplamalar sonucunda $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta$ olarak elde edilir.

Şimdi keyfi bir $y \in E_1$ alınsın. Bu durumda bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 = 0,\ t_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$'dir.

O halde eş değer normun tanımı gereğince aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(1)} \geq\ & |\gamma_2+\delta-t_2+(t_2-\gamma_2)b| \\
& +Q_1\left|(t_2-\gamma_2)b+\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b\right| \\
& +Q_2\left|\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b\right| \\
& +Q_3\left|\sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b\right| \\
& +Q_4\left|\sum_{k=5}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b\right| \\
& +...,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(2)} \geq\ & |\gamma_2+\delta-t_2+(t_2-\gamma_2)b| \\
& +Q_1\left|(t_2-\gamma_2)b+\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_2\left|\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_3\left|\sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_4\left|\sum_{k=5}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +...
\end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple,

$$\begin{aligned}
\|y-z\| \geq\ & \|y-z\|_{(1)} \geq |\delta+(\gamma_2-t_2)(1-b)| \\
& +\left|\begin{array}{l} Q_1(t_2-\gamma_2)b+Q_1\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ +Q_3\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=5}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \\ -\alpha\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_j\left[\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+(t_2-\gamma_2)b\right] \end{array}\right| \\
\geq\ & |\delta+(\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-(1-Q_1)\,|\delta-(t_2-\gamma_2)| \\
& -(1-Q_1-Q_2)(2-\delta-t_2-\gamma_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum A.2.1: $\delta + \gamma_2 - t_2 \geq 0$ olsun.

Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\|y-z\| - \Gamma &\geq [\delta + (\gamma_2 - t_2)(1-b)](1+\alpha - Q_1) - (1-Q_1)[\delta + (\gamma_2 - t_2)] \\ &\quad -(1-Q_1-Q_2)(2-\delta-t_2-\gamma_2) - (1+\alpha-Q_1-Q_2)b\delta\end{aligned}$$

dır.

Burada not edilmelidir ki $2-\delta-t_2-\gamma_2 \geq 0$ ve $1-Q_1-Q_2 > 0$ dir.

Alt durum A.2.1.1: $\delta < t_2$ ve $\alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ olsun.

Bu taktirde, $2(1-Q_1) - (1-b)(1+\alpha-Q_1) \geq 0$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|y-z\| - \Gamma &\geq \delta(1-b)(1+\alpha-Q_1) + \gamma_2(1-b)(1+\alpha-Q_1) - 2(1-Q_1) \\ &\quad +2Q_2\left(1+\frac{b}{2}\right) + [2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]t_2 \\ &\geq 2Q_2\frac{2+b}{2} - 2(1-Q_1)\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\end{aligned}$$

olur.

Bu yüzden ve ispat başındaki (3.1) ile verilen kabuller ve p ile ilgili seçim dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\|y-z\| - \Gamma &\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2 - \left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{3b}\right] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

dır.

Alt durum A.2.1.2: $\delta \geq t_2$ olsun.

Kabul edilsin ki $\alpha \geq \frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)}$.

Bu durumda ispatın başındaki (3.2) ile sembolize edilen kabul ve seçim sebebiyle

$$\begin{aligned}\|y-z\| - \Gamma &\geq (\delta-t_2)(1-b)(1+\alpha-Q_1) + (1+\alpha-Q_1)\gamma_2(1-b) \\ &\quad +2(1-Q_1)t_2 - 2(1-Q_1) \\ &\geq \frac{(1-b)(3-b)}{2^{p+1}(1+b)} + \alpha\frac{1-b}{2^{p+1}} - \frac{2}{1+2\alpha} \\ &\geq \frac{1}{1+2\alpha}\left[2(1-b^2)\alpha^2 + (b^2-8b+7)\alpha - 2^{p+2}(1+b)\right] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum A.2.2: $\delta + \gamma_2 - t_2 < 0$ olsun. Yani, $\delta < |t_2 - \gamma_2|$.

α için ele alınan Alt durum A.2.1 de yer alan hipotez ele alınsın ve aynı zamanda yine ispat başındaki (3.2) ile sembolize edilen kabul ve seçim göz önünde tutulsun. Bu durumda, $\alpha > \frac{1}{b}$ dır.

Ayrıca, aşağıdaki eşitsizlik ele alınacakdır.

$$\begin{aligned} \|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(1)} + \|y-z\|_{(2)}}{2} \\ &\geq |\gamma_2 + \delta - t_2 + (t_2 - \gamma_2)b| + \frac{\alpha|t_2-\gamma_2|b}{2} \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla tüm bu kabul ve hipotezlerin doğrultusunda,

$$\begin{aligned} \|y-z\| - \Gamma &\geq \left(\frac{\alpha b}{2} - (1-b)\right)|t_2-\gamma_2| - (b(1+\alpha-Q_1)-1)\delta \\ &\geq \left[\frac{\alpha b}{2} - (1-b) - b(1+\alpha-Q_1)+1\right]|t_2-\gamma_2| \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu yüzden,

$$\|y-z\| - \Gamma \geq 0$$

dır.

Sonuç olarak, tüm bu alt durumlar gösterir ki en az bir $b \in (0,1)$ ve $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ öyle ki eğer λ değişkeni $[0,\ 1]$ aralığından seçilirse her $y \in E_p$ ve her $z \in W \setminus E_p$ için $\|y-z\| \geq \Gamma$ ki burada

$$\Gamma := \min_{\lambda \in [0,\ 1]} \|h_\lambda - z\|$$

olarak tanımlıdır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $[0,\ 1]$ aralığından seçilirse bir tek h_{λ_0} noktası $\|h_\lambda - z\|$'ı minimize eder.

O halde

$$\Lambda := \{y\ :\ \|y-z\| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlandığında $\|h_{\lambda_0} - z\| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E_p$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir.

Şimdi görülebilir ki herhangi $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s(Th) &\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad (T \text{ afin olduğundan}) \\
&= \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\right\| \\
&\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right\| \\
&= s(h)
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|$ ve $s(h) = \|z - h\|$.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\|z - Th\| \leq \|z - h\| &\implies \|z - Th\| = \|z - h\| \\
&\implies Th \in \Lambda
\end{aligned}$$

bulunur.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle (genişlemeyen fonksiyonlar aynı zamanda süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi gereğince [1] (kompakt kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır öyle ki bu nokta $y \in E_p$ için $\|y - z\|$'yi bir tek noktada minimum yapan $h = h_{\lambda_0}$ noktası olup $Th = h$'dır.

Bu sebeple, arzulandığı gibi E_1 kümesinin afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit noktası vardır.

Durum B: Burada Durum A'ya benzer şekilde E_2 kümesi üzerinde çalışılmıştır.

$T : E_2 \to E_2$ fonksiyonu afin genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda sabit nokta teorisyenleri tarafından çok iyi bir gerçek olarak kabul edilen en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2$ vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ olup bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\overset{0}{\to}}$. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak kabul edilebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi

z noktasına zayıf topolojide yakınsar. Bu taktirde Lemma 2.1 gereğince uygun alt dizi kullanarak öyle bir $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir öyle ki

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\| \ , \ \forall y \in c_0$$

ve

$$s(y) = \|y - z\| \ , \ \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

Şimdi, kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W^{\sim} := \overline{E_2}^{\sigma(\ell^{\infty},\, \ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Durum B.1: $z \in E_2$. Bu durum da Durum A.1'e benzer şekilde incelenmiştir. Bu durumda $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) \leq\ & \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\| \\ & + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\| \end{aligned}$$

dır.

Bu durumda T afin genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| z - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu sebeple, $\|z - Tz\| \leq 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$.

Durum B.2: $z \in W^{\sim} \setminus E_2$. Bu durum da Durum A.2'ye benzer şekilde yürütülmüştür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

z noktası $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılıp $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ dir.

Şimdi $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve $h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ olarak tanımlansın.

h_λ noktasının $E_{p'}$ kümesinin bir noktası olması açısından λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ kümesinden seçilsin.

Dolayısıyla Durum A.2'ye benzer şekilde, $\|h_\lambda - z\|$ değeri $[0,1]$ aralığında minimum değerini alır.

Şimdi $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in [0,\,1]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın.

Bu sebeple, $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta$ dır.

Şimdi keyfi bir $y \in E_{p'}$ noktasını aldığımızda kabul edilebilir ki bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$ dir.

O halde eş değer normun tanımı gereğince

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(1)} \;\geq\; & |\gamma_1 + \gamma_2 + \delta - t_1 - t_2 + (t_1 - \gamma_1)b + (t_2 - \gamma_2)b| \\
& + \left| \begin{array}{l} (Q_1 - \alpha)(\delta + (\gamma_1 - t_1 + \gamma_2 - t_2)(1-b)) + Q_2(t_2 - \gamma_2)b \\ +Q_2 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + Q_3 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + Q_4 \sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + \cdots \end{array} \right| ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(2)} \;\geq\; & |\gamma_1 + \gamma_2 + \delta - t_1 - t_2 + (t_1 - \gamma_1)b + (t_2 - \gamma_2)b| \\
& + \left| \begin{array}{l} (Q_1 - \alpha)(\delta + (\gamma_1 - t_1 + \gamma_2 - t_2)(1-b)) + \alpha(t_1 - \gamma_1)b \\ +Q_2(t_2 - \gamma_2)b + Q_2 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + Q_3 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) \\ +Q_4 \sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + \cdots \end{array} \right|
\end{aligned}$$

ve aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(3)} \;\geq\; & |\gamma_1 + \gamma_2 + \delta - t_1 - t_2 + (t_1 - \gamma_1)b + (t_2 - \gamma_2)b| \\
& + \left| \begin{array}{l} (Q_1 - \alpha)(\delta + (\gamma_1 - t_1 + \gamma_2 - t_2)(1-b)) + \alpha(t_1 - \gamma_1)b \\ +\alpha(t_2 - \gamma_2)b + Q_2(t_2 - \gamma_2)b + Q_2 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) \\ +Q_3 \sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + Q_4 \sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k - \gamma_k) + \cdots \end{array} \right|
\end{aligned}$$

dır.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \|y-z\|_{(1)} \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -\sum_{k=2}^{\infty} Q_k \left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right| - \sum_{k=4}^{\infty} Q_k|t_3-\gamma_3| - \sum_{k=5}^{\infty} Q_k|t_4-\gamma_4| - \cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1) \\
&\quad -(1-Q_1)\,|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)| - Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -\sum_{k=4}^{\infty} Q_k|t_3-\gamma_3| - \sum_{k=4}^{\infty} Q_k|t_4-\gamma_4| - \sum_{k=4}^{\infty} Q_k|t_5-\gamma_5| - \cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\,|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)| - \sum_{k=4}^{\infty} Q_k \sum_{j=3}^{\infty} |t_j-\gamma_j| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\,|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2-Q_3)\sum_{j=3}^{\infty} |t_j-\gamma_j| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1) \\
&\quad +Q_2(2-\delta-t_1-\gamma_1)-(1-Q_1)\,|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_3)(2-\delta-t_1-t_2-\gamma_1-\gamma_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum B.2.1: $\delta+\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2 \geq 0$ olsun.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq [\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)](1+\alpha-Q_1) \\
&\quad -(1-Q_1)[\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)] \\
&\quad -(1-Q_1-Q_3)(2-\delta-t_1-t_2-\gamma_1-\gamma_2) \\
&\quad +Q_2(2-\delta-t_1-\gamma_1)-(1+\alpha-Q_1-Q_2)b\delta
\end{aligned}$$

dır.

Burada not edilmelidir ki $2-\delta-t_1-\gamma_1-t_2-\gamma_2 \geq 0$ ve $1-Q_1-Q_2>0$ dır.

Alt durum B.2.1.1: $\delta < t_1+t_2$ olsun öyle ki $\alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ olduğu kabul edilsin.

Bu durumda Alt durum A.2.1.1'de uygulanan metod burada da kullanılmıştır. Gerçekten de, öncelikle, $2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1) \geq 0$ ve bu sebeple ispat başındaki (3.1) ile verilen kabuller ve p ile ilgili seçim kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq \delta(1-b)(1+\alpha-Q_1)+\gamma_1(1-b)(1+\alpha-Q_1)-2(1-Q_1) \\
&\quad +2Q_2\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)+[2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]t_1 \\
&\geq 2Q_2\frac{2\alpha+b}{2\alpha}-2(1-Q_1)\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2-\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{3b}\right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum B.2.1.2: $\delta \geq t_1+t_2$ olsun. Bu durumda da yine Alt durum A.2.1.2'de uygulanan strateji kullanılır.

Kabul edelim ki $\alpha \geq \frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)}$ dir.

İspat başındaki (3.2) ile verilen hipotez ele alınarak söylenebilir ki

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq (\delta-t_1-t_2)(1-b)(1+\alpha-Q_1)+(1+\alpha-Q_1)\gamma_1(1-b) \\
&\quad +2(1-Q_1)t_1-2(1-Q_1) \\
&\geq \frac{(1-b)(3-b)}{2^{p+1}(1+b)}+\alpha\frac{1-b}{2^{p+1}}-\frac{2}{1+2\alpha} \\
&\geq \frac{1}{1+2\alpha}\left[2(1-b^2)\alpha^2+(b^2-8b+7)\alpha-2^{p+2}(1+b)\right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

dır.

Alt durum B.2.2: $\delta < t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2$ olsun ve dolayısıyla
$\delta < |t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2|$ dır.

α için Alt durum B.2.1'de kabul edilen ve yine ispat başındaki (3.2) hipotez ele alınır. Bu durumda, $\alpha > \frac{1}{b}$ dir.

Şimdi, aşağıdaki eşitsizlik göz önüne alınır.

$$\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(1)}+\|y-z\|_{(3)}}{2} \\
&\geq |\delta-(1-b)(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)|+\frac{\alpha|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2|b}{2}
\end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple,

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq \left(\frac{\alpha b}{2}-(1-b)\right)|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2| \\ &\quad -(b(1+\alpha-Q_1-Q_2)-1)\delta \\ &\geq \left[\frac{\alpha b}{2}-b(\alpha-Q_1-Q_2)\right]|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2| \\ &\geq 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, tüm bu alt durumlar göz önüne alındığında görülür ki en az bir $b \in (0,1)$ ve $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ var öyle ki eğer λ değişkeni $[0,\ 1]$ aralığından seçilirse her $y \in E_{p'}$ ve $z \in W^{\sim} \setminus E_{p'}$ için $\|y-z\| \geq \Gamma$ dir öyle ki burada

$$\Gamma := \min_{\lambda \in [0,\ 1]} \|h_\lambda - z\|$$

olarak tanımlıdır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $[0,\ 1]$ aralığından seçilirse bir tek h_{λ_0} noktası $\|h_\lambda - z\|$'ı minimize eder.

O halde

$$\Lambda := \{y \ : \ \|y-z\| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlandığında $\|h_{\lambda_0}-z\| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E_{p'}$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir.

Görülebilir ki herhangi $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s(Th) &\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad +\limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad (T \text{ afin olduğundan}) \\ &= \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad +\limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)}\right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right\| \\ &= s(h) \end{aligned}$$

dır.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|$ ve $s(h) = \|z - h\|$ dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|z - Th\| \leq \|z - h\| &\implies \|z - Th\| = \|z - h\| \\ &\implies Th \in \Lambda \end{aligned}$$

bulunur.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle (genişlemeyen fonksiyonlar aynı zamanda süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi gereğince [1] (kompakt kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır öyle ki bu nokta $y \in E_{p'}$ için $\|y - z\|$'yi bir tek noktada minimum yapan $h = h_{\lambda_0}$ noktası olup $Th = h$'dır.

Bu sebeple, arzulandığı gibi $E_{p'}$ kümesinin afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit noktası vardır.

Durum C: Bu durumda E_3 kümesi üzerinde çalışılmıştır.

$T : E_3 \to E_3$ fonksiyonu afin genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda sabit nokta teorisyenleri tarafından çok iyi bir gerçek olarak kabul edilen en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E_3$ vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ olup bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \overset{0}{\underset{n}{\to}}$. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak kabul edilebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. Bu taktirde Lemma 2.1 gereğince uygun alt dizi kullanarak öyle bir $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir öyle ki

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\| \ , \ \forall y \in c_0$$

ve

$$s(y) = \|y - z\| \ , \ \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

Şimdi, kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W^{\sim\sim} := \overline{E_3}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0, \ \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Durum C.1: Bu durum da Durum A.1'de uygulanan metod ile çözülür.

Bu durumda $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) &\leq \limsup_{m} \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\ &+\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \end{aligned}$$

dır.

Bu durumda T afin genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) &\leq \limsup_{m} \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\ &+\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\right\| \\ &\leq \limsup_{m} \left\| z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right\| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu sebeple, $\|z - Tz\| \leq 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Durum C.2: $z \in W^{\sim\sim} \setminus E_3$. Bu durumda Durum A.2'ye benzer şekilde yürütülür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

z noktası $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılıp $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n\ < 1$ dir.

Şimdi $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve $h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ olarak tanımlansın.

h_λ noktasının E_3 kümesinin bir noktası olması açısından λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden seçilsin.

Dolayısıyla Durum A.2'ye benzer şekilde, $\|h_\lambda - z\|$ değeri $[0, 1]$ aralığında minimum değerini alır.

Şimdi $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in [0,\ 1]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın.

Bu sebeple, $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta$ dir.

Şimdi keyfi bir $y \in E_3$ noktası alındığında söylenebilir ki bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 = 0,\ t_2 = 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n\ = 1$ dır.

Kabul edelim ki $\alpha \geq \frac{2-b+\sqrt{(2+b)^2-8b^2}}{4b}$ olsun. Bu taktirde Alt durum A.2.2'de olduğu gibi (fakat burada $\|x\|_{(1)} = \|x\|_{(2)} = \|x\|_{(3)}, \forall x \in E_3$ olduğunu göz önüne alarak) aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(3)}+\|y-z\|_{(4)}}{2} \\ &\geq \delta+\frac{\alpha|t_3-\gamma_3|}{2} \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|y-z\|-\Gamma &\geq \left[1+Q_1 b+Q_2\frac{b}{\alpha}-b-b\alpha\right]\delta \\ &\geq (1+2\alpha+b-b\alpha-2b\alpha^2)\frac{\delta}{1+2\alpha} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Burada not edilmelidir ki eğer $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ ise $b \leq \frac{14}{15}$ olmak üzere $\alpha \geq \frac{2-b+\sqrt{(2+b)^2-8b^2}}{4b}$ dir.

Bu taktirde Durum C'nin geri kalan ispatı Durum A veya Durum B'nin son bölümleri ile tamamlanır.

Sonuç olarak E_1, E_2 ve E_3 kümeleri bazı $\alpha > 1$ ve $b \in (0,1)$ için (ortak aralıklardan seçilmesi ile) afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Bu durumda eğer $T : E \longrightarrow E$ fonksiyonu bir afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyon ise; eğer $T(E) \subseteq E_1$ ise bu durumda E_1 den E_1 'e kısıtlanmış fonksiyonu göz önüne alınabilir ve söylenebilir ki fonksiyonun E_1 kümesinde bir sabit noktası vardır ve dolayısıyla bu nokta aynı zamanda E'ye aittir, ve eğer $T(E) \subseteq E_2$, ise bu durumda E_2 den E_2 'e kısıtlanmış fonksiyonu göz önüne alınabilir ve söylenebilir ki fonksiyonun E_2 kümesinde bir sabit noktası vardır ve dolayısıyla bu nokta aynı zamanda E'ye aittir, fakat eğer $T(E) \subseteq E_3$, ise bu durumda E_3 den E_3 'e kısıtlanmış fonksiyonu göz önüne alınabilir ve söylenebilir ki fonksiyonun E_3 kümesinde bir sabit noktası vardır ve dolayısıyla bu nokta aynı zamanda E'ye aittir; dolayısıyla her durumda görülür ki arzulandığı gibi E kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmanın bu bölümünde ise tarafımızca hazırlanmış özgün çalışmaşlar olan ve bir önceki bölümde tanıtılan Nezir'in çalışmasının [10] genelleştirildiği sonuçlar sunulmuştur. Yani bu bölümde Nezir'in [10] çalışmasında yer alan kümelerin daha genelleştirilmişi olarak c_0 da SNT'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan çok daha geniş zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler aileleri gösterilmiştir.

4.1. Nezir' in eş değer normuna göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini koruyan yeni çeşit kümeler

Bu alt bölümde Nezir'in çalışması [10] genelleştirilmiştir ve bu genelleştirme sırasında bir önceki bölümde verilen ispat genelleştirme metoduna uygun bir şekilde düzenlenilerek yeniden sunulmuştur öyle ki takip eden teoremler tümevarım metoduyla elde edilebilmiştir. O sebeple bir önceki bölümdeki teoremin ve ispatının tümevarım metodunun nasıl elde edilebileceğinin anlaşılabilmesi amacıyla metodun uygun şekilde küçük düzenlemelerle 3. bölümdeki teoremin yeniden verilmesi önem arz etmektedir.

Dolayısıyla, öncelikle çalışmada elde edilen ilk sonuç ve sonrasında Nezir'in teoreminin ispatı aşağıdaki ilk örnek ve ilk teoremde uygulanan tekniğe paralel olarak sunulacaktır.

4.1.1. $\overline{co}\left(\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k \;:\; n\in\mathbb{N},\ f_1 := be_1,\ j\geq 2 \textbf{ için } f_j := e_j\right\}\right)$ kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Örnek 4.1 *$b\in(0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$ için ve her $n\geq 2$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ ve her $n\geq 2$ için $\eta_n := f_1+\ldots+f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E=E_b$ kümesi ele alınsın.

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\eta_n : \textit{ her } \alpha_n\geq 0 \textit{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = 1\right\}.$$

Teorem 4.1 *En az bir $b\in(0,\ 1)$ ve $\alpha>1$ vardır öyle ki $Q_1>\frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Öncelikle hatırlanmalıdır ki $Q_1>\frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ koşulu c_0 içinde bir asimtotik izometrik kopya olma ihtimalini ortadan kaldırmak için gereklidir. Şimdilik $b\in(0,1)$ olmak üzere $Q_1<\frac{2b}{1+b}$ koşulunun gerçeklendiği kabul edilsin ve kullanılan normun bu koşul altında yeniden yazıldığı düşünülsün.

Not edilmelidir ki eğer $x\in E$ ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n\geq 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1$ olacak şekilde en az bir $(\alpha_n)_n$ skaler dizisi vardır öyle ki $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\eta_n$ dir. Bu sebeple, $\exists q\in\mathbb{N}$ dır öyle ki $\alpha_q\geq\frac{1}{2^{q+1}}$ dir.

Bu gerçekten esinlenerek aşağıdaki iki farklı küme ele alınacak:

$$E_1 := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\eta_n : \text{ her } \alpha_n\geq 0,\ \alpha_1>0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1\right\}$$

ve

$$E_2 := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\eta_n : \text{ her } \alpha_n\geq 0,\ \alpha_1=0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1\right\}$$

öyle ki $E=E_1\cup E_2$ dir. Normun tanımı gereğince $Q_2<\frac{1}{1+2\alpha}$ koşulu sağlandığı göz önüne alınarak, $p\in\mathbb{N}$ öyle seçilebilir ki $Q_2\geq\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{3b}$ ve

$$E_1 = E_p := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,\eta_n : \text{ her } \alpha_n\geq 0,\ \alpha_1\geq\frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1\right\} \quad (4.1)$$

ve $b \in (0,1)$ öyle seçilebilir ki $\frac{1-b^2}{b(3b^2-6b+7)} < \frac{1}{2^{p+2}}$. Bu durumda not edilebilir ki $b > \frac{3+\sqrt{20}}{11} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir öyle ki bu koşullar ispatın ileriki adımlarında yardımcı olacaktır. (4.2)

Durum A: Bu durumda $E_1 = E_p$ kümesi üzerinde çalışılmıştır.

$T : E_p \to E_p$ fonksiyonu afin genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda sabit nokta teorisyenleri tarafından çok iyi bir gerçek olarak kabul edilen en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$ vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ olup bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yapılarak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. Bu taktirde Lemma 2.1 gereğince uygun alt dizi kullanılarak öyle bir $s : c_0 \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir öyle ki

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - y \right\| \ , \ \forall y \in c_0$$

ve

$$s(y) = \|y - z\| \ , \ \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

Ele alınan kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W := \overline{E_p}^{\sigma(\ell^\infty,\,\ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Durum A.1: $z \in E_p$.

Bu durumda $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda T afin genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)}\right\| \\ &\leq \ \limsup_m \left\| z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right\| \\ &= \ s(z) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu sebeple, $\|z-Tz\| \leq 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Durum A.2: $z \in W \setminus E_p$.

Öncelikle $\alpha < 2Q_1$ olduğunu varsayılsın.

z noktası ele alınan durum gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılabilir öyle ki

$$\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \ < 1.$$

Buradan da $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve

$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ şeklinde tanımlansın.

h_λ noktasının E_1 kümesinin bir noktası olması açısından λ parametreleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilsin.

Bu durumda,

$$\|h_\lambda - z\| = \max \left\{ \begin{array}{l} \max\{b\delta,\ (1-\lambda)\delta\} + Q_1|1-\alpha|b\delta \\ +Q_2|(1-\lambda)\delta - \alpha b\delta| \\ +(1-Q_1-Q_2)\alpha b\delta, \\ \\ \max\{b\delta,\ (1-\lambda)\delta\} + Q_1|b\delta - \alpha(1-\lambda)\delta| \\ +Q_2|1-\alpha||1-\lambda|\delta \\ +(1-Q_1-Q_2)\alpha|1-\lambda|\delta, \\ \\ \max\{b\delta,\ (1-\lambda)\delta\} + Q_1 b\delta + Q_2|1-\lambda|\delta \end{array} \right\}$$

dır.

Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak ve sadece $\lambda > 1 - \frac{b}{\alpha}$ durumu ele alınarak söylenebilir ki $b > 1-\lambda$ ve $\alpha b > 1-\lambda$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|h_\lambda - z\| &= b\delta + Q_1|1-\alpha|b\delta + Q_2|(1-\lambda)\delta - \alpha b\delta| + (1-Q_1-Q_2)\alpha b\delta \\ &= (1+\alpha-Q_1)\delta b - Q_2(1-\lambda)\delta \end{aligned}$$

bulunur.

O halde $\Gamma := \min\limits_{\lambda \in \left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$. olarak tanımlandığında teknik hesaplamalar sonucunda $\Gamma = (1+\alpha-Q_1-Q_2\frac{1}{\alpha})\delta b$ olarak elde edilir.

Ayrıca, her $j \in \mathbb{N}$ için $\|x\|_{(j)} = \|x\|_\infty + \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k\left|\xi_k - \alpha\xi_j\right|$ şeklinde tanımlansın.

Dolayısıyla $\|x\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x\|_{(j)}$ dır.

$y \in E_1$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda bu nokta $\sum_{n=1}^{\infty} t_n\eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$'dir.

O halde eş değer normun tanımı gereğince aşağıdakiler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\|y-z\|_{(1)} &= \left\| \begin{pmatrix} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_2-\gamma_2)+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_4-\gamma_4)+(t_5-\gamma_5)+\ldots, \\ (t_5-\gamma_5)+(t_6-\gamma_6)+\ldots,\ldots \end{pmatrix} \right\|_{(1)} \\
&\geq |\gamma_1+\delta-t_1+(t_1-\gamma_1)b| \\
&\quad +Q_1\left|(t_1-\gamma_1)b+\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b\right| \\
&\quad +Q_2\left|\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b\right| \\
&\quad +Q_3\left|\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b\right| \\
&\quad +Q_4\left|\sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b\right| \\
&\quad +\ldots
\end{aligned}
$$

dır.

Ayrıca $j = 2$ için

$$
\|y-z\|_{(2)} = \left\| \begin{pmatrix} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_2-\gamma_2)+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_4-\gamma_4)+(t_5-\gamma_5)+\ldots, \\ (t_5-\gamma_5)+(t_6-\gamma_6)+\ldots,\ldots \end{pmatrix} \right\|_{(2)}
$$

olur.

O halde,

$$
\begin{aligned}
\|y-z\|_{(2)} \geq\ & |\gamma_1+\delta-t_1+(t_1-\gamma_1)b| \\
& +Q_1\left|(t_1-\gamma_1)b+\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_2\left|\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_3\left|\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +Q_4\left|\sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
& +\ldots
\end{aligned}
$$

bulunur.

Bu yüzden,

$$
\begin{aligned}
\|y-z\| \geq\ & \|y-z\|_{(1)} \\
\geq\ & |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)| \\
& +\left|\begin{array}{l}
Q_1(t_1-\gamma_1)b+Q_1\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_2\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\
+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \\
-\alpha\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_j\left[\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+(t_1-\gamma_1)b\right]
\end{array}\right| \\
=\ & |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)| \\
& +\left|\begin{array}{l}
Q_1(t_1-\gamma_1)b+Q_1(\delta-(t_1-\gamma_1))+Q_2\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\
+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \\
-\alpha\left[\delta-(t_1-\gamma_1)+(t_1-\gamma_1)b\right]
\end{array}\right| \\
\geq\ & |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1) \\
& -Q_2\left|\sum_{j=2}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_3\left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_4\left|\sum_{j=4}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-\ldots \\
\geq\ & |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-\sum_{k=2}^{\infty}Q_k\left|\sum_{j=2}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right| \\
& -Q_3|t_2-\gamma_2|-Q_4|t_2-\gamma_2+t_3-\gamma_3|-Q_5\left|\sum_{j=2}^{4}(t_j-\gamma_j)\right|-\cdots
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Öyleyse,

$$\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-\sum_{k=2}^{\infty}Q_k\left|\sum_{j=2}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right| \\
&\quad -\sum_{k=3}^{\infty}Q_k|t_2-\gamma_2|-\sum_{k=4}^{\infty}Q_k|t_3-\gamma_3|-\sum_{k=5}^{\infty}Q_k|t_4-\gamma_4|-\cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-(1-Q_1)\,|\delta-(t_1-\gamma_1)| \\
&\quad -\sum_{k=3}^{\infty}Q_k|t_2-\gamma_2|-\sum_{k=3}^{\infty}Q_k|t_3-\gamma_3|-\sum_{k=3}^{\infty}Q_k|t_4-\gamma_4|-\cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-(1-Q_1)\,|\delta-(t_1-\gamma_1)| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2)\sum_{j=2}^{\infty}|t_j-\gamma_j| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-(1-Q_1)\,|\delta-(t_1-\gamma_1)| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2)(2-\delta-t_1-\gamma_1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum A.2.1: $\delta+\gamma_1-t_1\geq 0$ olsun.

Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq [\delta+(\gamma_1-t_1)(1-b)](1+\alpha-Q_1)-(1-Q_1)[\delta+(\gamma_1-t_1)] \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2)(2-\delta-t_1-\gamma_1)-(1+\alpha-Q_1-Q_2\frac{1}{\alpha})b\delta
\end{aligned}$$

dır.

Burada not edilmelidir ki $2-\delta-t_1-\gamma_1\geq 0$ ve $1-Q_1-Q_2>0$ dır.

Alt durum A.2.1.1: $\delta<t_1$ ve $\alpha\leq\frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ olsun.

Bu taktirde, $2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)\geq 0$ ve ispat başındaki (4.1) ile verilen kabuller ve p ile ilgili seçim dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq (\delta-t_1)(1+\alpha-Q_1)+(1+\alpha-Q_1)[\gamma_1(1-b)+t_1b] \\
&\quad +2(1-Q_1)t_1-2(1-Q_1)-(1+\alpha-Q_1-Q_2\frac{1}{\alpha})b\delta \\
&= \delta(1-b)(1+\alpha-Q_1)+\gamma_1(1-b)(1+\alpha-Q_1)-2(1-Q_1) \\
&\quad +2Q_2\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)+[2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]t_1 \\
&\geq \frac{1}{2^{p+1}}(1-b)(1+\alpha-Q_1)-2(1-Q_1)+2Q_2\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right) \\
&\quad +[2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]\frac{1}{2^{p+1}}
\end{aligned}$$

dir.

O halde,

$$\begin{aligned} \|y-z\|-\Gamma &\geq 2Q_2\frac{2\alpha+b}{2\alpha}-2(1-Q_1)\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right) \\ &\geq \frac{2}{1+2\alpha}\left[Q_2(2\alpha+b)-1+\frac{1}{2^{p+1}}\right] \\ &\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2-\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{b+2}\right] \\ &\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2-\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{3b}\right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur.

Alt durum A.2.1.2: $\delta \geq t_1$ olsun.

Kabul edelim ki $\alpha \geq \frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)}$ olsun.

Bu durumda ispatın başındaki (4.2) ile sembolize edilen kabul ve seçim sebebiyle

$$\begin{aligned} \|y-z\|-\Gamma &\geq (\delta-t_1)(1-b)(1+\alpha-Q_1)+(1+\alpha-Q_1)\gamma_1(1-b) \\ &\quad +2(1-Q_1)t_1-2(1-Q_1) \\ &\geq \left(\frac{1-b}{1+b}+\alpha\right)\frac{1-b}{2^{p+1}}+\frac{1-b}{2^p(1+b)}-\frac{2}{1+2\alpha} \\ &= \frac{(1-b)(3-b)}{2^{p+1}(1+b)}+\alpha\frac{1-b}{2^{p+1}}-\frac{2}{1+2\alpha} \\ &\geq \frac{1}{1+2\alpha}\left[2(1-b^2)\alpha^2+(b^2-8b+7)\alpha-2^{p+2}(1+b)\right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Alt durum A.2.2: $\delta+\gamma_1-t_1<0$ olsun. O halde, $\delta<|t_1-\gamma_1|$ dır.

α için ele alınan Alt durum A.2.1 de yer alan hipotez ele alınsın ve aynı zamanda yine ispat başındaki (4.2) ile sembolize edilen kabul ve seçim göz önünde tutulsun. Bu durumda, $\alpha>\frac{1}{b}$ dır. Ayrıca, aşağıdaki eşitsizlik gereğince

$$
\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(1)}+\|y-z\|_{(2)}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
2|\gamma_1+\delta-t_1+(t_1-\gamma_1)b| \\
+Q_1\left|\begin{array}{c}(t_1-\gamma_1)b+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b\end{array}\right| \\
+Q_2\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1)b\end{array}\right| \\
+Q_3\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1)b\end{array}\right| \\
+Q_4\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1)b\end{array}\right|+\cdots
\end{array}\right] \\
+ \\
\left[\begin{array}{c}
Q_1\left|\begin{array}{c}(t_1-\gamma_1)b+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\end{array}\right| \\
+Q_2\left|\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_3\left|\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_4\left|\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right|+\cdots
\end{array}\right]
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Öyleyse,

$$\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
2|\gamma_1+\delta-t_1+(t_1-\gamma_1)b|+Q_1\alpha|t_1-\gamma_1|b \\
-Q_1\left|\begin{array}{c}(t_1-\gamma_1)b+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\end{array}\right| \\
+Q_2\alpha|t_1-\gamma_1|b \\
-Q_2\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\end{array}\right| \\
+Q_3\alpha|t_1-\gamma_1|b \\
-Q_3\left|\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_4\alpha|t_1-\gamma_1|b \\
-Q_4\left|\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right|+\cdots
\end{array}\right] \\
+ \\
\left[\begin{array}{c}
Q_1\left|(t_1-\gamma_1)b+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_2\left|\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_3\left|\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_4\left|\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=2}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right|+\cdots
\end{array}\right]
\end{array}\right) \\
&= |\gamma_1+\delta-t_1+(t_1-\gamma_1)b|+\frac{\alpha|t_1-\gamma_1|b}{2}
\end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq \left(\frac{\alpha b}{2}-(1-b)\right)|t_1-\gamma_1|-(b(1+\alpha-Q_1)-1)\delta \\
&\geq \left[\frac{\alpha b}{2}-(1-b)-b(1+\alpha-Q_1)+1\right]|t_1-\gamma_1| \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak, tüm bu alt durumlar gösterir ki en az bir $b\in(0,1)$ ve $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ öyle ki eğer λ değişkeni $\left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y\in E_p$ ve her $z\in W\setminus E_p$ için $\|y-z\|\geq\Gamma$ dir öyle ki burada

$$\Gamma := \min_{\lambda\in\left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$$

olarak tanımlıdır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse bir tek h_{λ_0} noktası $\|h_\lambda - z\|$'ı minimize eder.

O halde

$$\Lambda := \{y \ : \ \|y-z\| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlandığında $\|h_{\lambda_0} - z\| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E_p$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir.

Buradan görülebilir ki herhangi $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s\left(Th\right) &\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad (T \text{ afin olduğundan}) \\ &= \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)}\right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right\| \\ &= s(h) \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|$ ve $s(h) = \|z-h\|$ dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|z-Th\| \leq \|z-h\| &\implies \|z-Th\| = \|z-h\| \\ &\implies Th \in \Lambda \end{aligned}$$

dır.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle (genişlemeyen fonksiyonlar aynı zamanda süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi gereğince [1] (kompakt kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır öyle ki bu nokta $y \in E_p$ için $\|y-z\|$'yi bir tek noktada minimum yapan $h = h_{\lambda_0}$ noktası olup $Th = h$'dır.

Bu sebeple, arzulandığı gibi E_1 kümesinin afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit noktası vardır.

Durum B: Burada Durum A'ya benzer şekilde E_2 kümesi üzerinde çalışılmıştır.

$T : E_2 \to E_2$ fonksiyonu afin genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda sabit nokta teorisyenleri tarafından çok iyi bir gerçek olarak kabul edilen en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2$ vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ olup bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yapılarak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. Bu taktirde Lemma 2.1 gereğince uygun alt dizi kullanılarak öyle bir $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir öyle ki

$$s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\| \ , \ \forall y \in c_0$$

ve

$$s(y) = \|y - z\| \ , \ \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

Ele alınan kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W := \overline{E_2}^{\sigma(\ell^\infty,\, \ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0, \ \alpha_1 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Durum B.1: $z \in E_2$. Bu durum da Durum A.1'e benzer şekilde incelenmiştir. Bu durumda $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\| \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda T afin genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left\| Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\| \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\| \\ &\leq \ \limsup_m \left\| z - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \\ &= \ s(z) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu sebeple, $\|z - Tz\| \leq 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

Durum B.2: $z \in W^{\sim} \setminus E_2$. Bu durumda Durum A.2'ye benzer şekilde yürütülmüştür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

z noktası $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılıp $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 = 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ dir.

$\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve $h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ olarak tanımlansın.

h_λ noktasının E_2 kümesinin bir noktası olması açısından λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden seçilsin.

Dolayısıyla Durum A.2'ye benzer şekilde $\|h_\lambda - z\|$ değeri $\left[1 - \frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığında minimum değerini alır.

$\Gamma := \min\limits_{\lambda \in \left[1 - \frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın.

Bu sebeple, $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2 \frac{1}{\alpha})\delta b$ dir.

$y \in E_2$ noktası herhangi bir nokta ise söylenebilir ki bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 = 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ dir.

Kabul edilsin ki $\alpha \geq \frac{2-b+\sqrt{(2+b)^2-8b^2}}{4b}$ olsun. Bu taktirde Alt durum A.2.2'de olduğu gibi (fakat burada $\|x\|_{(1)} = \|x\|_{(2)}, \forall x \in E_2$ olduğu göz önüne alınarak) aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \|y - z\| &\geq \frac{\|y - z\|_{(2)} + \|y - z\|_{(3)}}{2} \\ &\geq \delta + \frac{\alpha|t_2 - \gamma_2|}{2} \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|y - z\| - \Gamma &\geq \left[1 + Q_1 b + Q_2 \frac{b}{\alpha} - b - b\alpha\right]\delta \\ &\geq (1 + 2\alpha + b - b\alpha - 2b\alpha^2)\frac{1}{1+2\alpha} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada not edilmelidir ki eğer $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ ise $b \leq \frac{14}{15}$ olmak üzere $\alpha \geq \frac{2-b+\sqrt{(2+b)^2-8b^2}}{4b}$ dir.

Bu taktirde Durum B'nin geri kalan ispatı Durum A'nın son bölümleri ile tamamlanır.

Sonuç olarak E_1 ve E_2 kümeleri bazı $\alpha > 1$ ve $b \in (0,1)$ için (ortak aralıklardan seçilmesi ile) afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Bu durumda eğer $T : E \longrightarrow E$ fonksiyonu bir afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyon ise; eğer $T(E) \subseteq E_1$ ise bu durumda E_1 den E_1 'e kısıtlanmış fonksiyonu göz önüne alınabilir ve söylenebilir ki fonksiyonun E_1 kümesinde bir sabit noktası vardır ve dolayısıyla bu nokta aynı zamanda E'ye aittir, fakat eğer $T(E) \subseteq E_2$ ise bu durumda E_2 den E_2 'e kısıtlanmış fonksiyonu göz önüne alınabilir ve söylenebilir ki fonksiyonun E_2 kümesinde bir sabit noktası vardır ve dolayısıyla bu nokta aynı zamanda E'ye aittir; dolayısıyla her durumda görülür ki arzulandığı gibi E kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

4.1.2. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $f_1 := be_1,\ f_2 := be_2$, $j \geq 3$ için $f_j := e_j$) kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Çalışmanın bu bölümünde ise 3. bölümde yer alan ve Nezir [10] çalışmasında sunulan küme ele alınıp ilgili teorem tekrar verilmiştir fakat ispatı takip eden bölümlerdeki ispatlara uygun olarak yapılmıştır çünkü ispat tekniği sonraki bölümlerde varılacak sonuçlar için kullanılan tümevarım metodunun anlaşılmasını ve bu sayede çıkarım yapılmasını sağlamıştır.

Örnek 4.2 *$b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$, olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \ \textit{her } \alpha_n \geq 0 \textit{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} .$$

Teorem 4.2 *En az bir $b \in (0,\ 1)$ ve $\alpha > 1$ vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Bir önceki bölümde sunulmuş teoremde olduğu gibi, öncelikle $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ koşulu c_0 içinde bir asimtotik izometrik kopya olma ihtimalini ortadan kaldırmak için gereklidir. Şimdilik $b \in (0,1)$ olmak üzere $Q_1 < \frac{2b}{1+b}$ koşulunun gerçeklendiği kabul edilsin ve kullanılan normun bu koşul altında yeniden yazıldığı düşünülsün.

Burada üç farklı küme ele alınmıştır:

$$E_1 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\},$$

$$E_2 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

ve

$$E_3 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

öyle ki $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ dir. Şimdi, normun tanımı gereğince $Q_2 < \frac{1}{1+2\alpha}$ koşulu sağlandığı göz önüne alınarak, $p \in \mathbb{N}$ öyle seçilebilir ki $Q_2 \geq \left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) \frac{1}{3b}$ ve

$$E_2 = E_p := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \begin{array}{l} \text{her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \end{array} \right\},$$

$$E_1 = E_{p'} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

(4.3) ve $b \in (0,1)$ öyle seçilebilir ki $\frac{1-b^2}{b(3b^2-6b+7)} < \frac{1}{2^{p+2}}$. Bu durumda not edilebilir ki $b > \frac{3+\sqrt{20}}{11} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir öyle ki bu koşullar ispatın ileriki adımlarında yardımcı olmuştur. (4.4)

Durum A: Bu durumda Teorem 4.2 deki Durum A'ya benzer şekilde $E_2 = E_p$ kümesi üzerinde çalışılmıştır ve sadece aşağıdaki değişiklikler mevcuttur.

Ele alınan kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$\begin{aligned} W : &= \overline{E_2}^{\sigma(\ell^\infty,\, \ell^1)} \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Durum A.1: $z \in E_2$. Bu taktirde, bu durum da Teorem 4.2'ün ispatındaki Durum A.1 ile aynı şekilde yürütülmüştür.

Durum A.2: $z \in W \setminus E_2$. Bu durum da Teorem 4.2 deki Durum A.2'ye benzer şekilde yürütülmüştür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

Öncelikle $\alpha < 2Q_1 + 2Q_2$ olduğu varsayılsın.

z noktası ele alınan durum gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılabilir öyle ki

$$\gamma_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma_1 = 0,$$
$$\gamma_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \ < 1$$

dır.

Buradan da $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve

$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ şeklinde tanımlansın.

h_λ noktasının E_2 kümesinin bir noktası olması açısından λ parametreleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilsin.

Keyfi bir $y \in E_2$ alınsın. Bu durumda bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t_1 = 0, \ t_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \ = 1$'dir.

O halde,

$$\|h_\lambda - z\| = \max \left\{ \begin{array}{l} b\delta + Q_1|1-\alpha|b\delta \\ +Q_2|(1-\lambda)b\delta - \alpha b\delta| \\ +(1-Q_1-Q_2)\alpha b\delta, \\ \\ b\delta + Q_1|b\delta - \alpha(1-\lambda)b\delta| \\ +Q_2|1-\alpha||1-\lambda|b\delta \\ +(1-Q_1-Q_2)\alpha|1-\lambda|b\delta, \\ \\ b\delta + Q_1 b\delta + Q_2|1-\lambda|b\delta \end{array} \right\}$$

elde edilir.

Yani,

$$
\|h_\lambda - z\| = \begin{cases}
b\delta + Q_1\delta b + Q_2(1-\lambda)\delta b & , \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ 0\right) \text{ ve } \frac{1}{2} \le \alpha \le 1 \\[2em]
\delta b + Q_1(\alpha(1-\lambda)-1)\delta b & , \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ 0\right) \text{ ve } \alpha > 1 \\
+Q_2(\alpha-1)(1-\lambda)\delta b & \\
+(1-Q_1-Q_2)\alpha(1-\lambda)\delta b & \\[2em]
b\delta + Q_1\delta b + Q_2(1-\lambda)\delta b & , \ \lambda \in [0,\ 1] \\
& \quad \text{ve } \alpha \le 2Q_1 + 2Q_2(1-\lambda) \\
\delta b + Q_1(\alpha-1)\delta b & \\
+Q_2(\alpha-(1-\lambda))\delta b & , \ \lambda \in [0,\ 1] \\
+(1-Q_1-Q_2)\alpha\delta b & \quad \text{ve } \alpha > 2Q_1 + 2Q_2(1-\lambda) \\[2em]
\delta b + Q_1(\alpha(\lambda-1)+1)\delta b & \\
+Q_2(\alpha-1)(\lambda-1)\delta b & \\
+(1-Q_1-Q_2)\alpha(\lambda-1)\delta b & , \ \lambda \in \left(1,\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \text{ ve } \alpha \le 2Q_1 \\[2em]
\delta b + Q_1(\alpha-1)\delta b & \\
+Q_2(\lambda-1+\alpha)\delta b & \\
+(1-Q_1-Q_2)\alpha\delta b & , \ \lambda \in \left(1,\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \text{ ve } \alpha > 2Q_1
\end{cases}
$$

dır.

$\Gamma := \min\limits_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ şeklinde tanımlanırsa,

$$
\Gamma = \begin{cases}
b\delta + Q_1\delta b + Q_2\delta b & , \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ 0\right) \text{ ve } \frac{1}{2} \le \alpha \le 1 \\[1.5em]
(1+\alpha-Q_1-Q_2)\delta b & , \ \lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ 0\right) \text{ ve } \alpha > 1 \\[1.5em]
b\delta + Q_1\delta b & , \ \lambda \in [0,\ 1] \text{ ve } \alpha \le 2Q_1 + 2Q_2(1-\lambda) \\[1.5em]
(1+\alpha-Q_1-Q_2)\delta b & , \ \lambda \in [0,\ 1] \text{ ve } \alpha > 2Q_1 + 2Q_2(1-\lambda) \\[1.5em]
b\delta + Q_1\delta b & , \ \lambda \in \left(1,\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \text{ ve } \alpha \le 2Q_1 \\[1.5em]
(1+\alpha-Q_1)\delta b & , \ \lambda \in \left(1,\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right] \text{ ve } \alpha > 2Q_1
\end{cases}
$$

olur ve dolayısıyla $[0,\ 1]$ aralığında $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta$ elde edilir.

O halde Teorem 4.2'nin Durum A'sında yer alan her t_j parametresi t_{j+1} parametresi ile ve her γ_j parametresi γ_{j+1} parameteesi ile yer değiştirilip Durum A'yı tamamlamak için alt durumların aynısı kullanılır çünkü
$\|y - z\| - (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta \geq \|y - z\| - (1 + \alpha - Q_1 - Q_2\frac{1}{\alpha})b\delta$ olup bu $\|y - z\| - (1 + \alpha - Q_1 - Q_2)b\delta \geq 0$ sonucunu verecektir.

Durum B: Bu durum da Teorem 4.2 deki Durum A'ya benzer şekilde E_1 kümesi üzerinde yürütülmüştür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

Ele alınan kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W := \overline{E_1}^{\sigma(\ell^\infty,\, \ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n :\ \text{her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

Durum B.1: $z \in E_1$. Bu durum da Teorem 4.2 deki Durum A.1'a benzer şekilde yürütülmüştür fakat ayrıntılar okuyucu tarafından kolayca elde edilebileceğinden durum içeriğinin verilmesine gerek duyulmamıştır.

Durum B.2: $z \in W \setminus E_1$. Bu durum da Teorem 4.2 deki Durum A.2'ye benzer şekilde yürütülmüştür fakat aşağıdaki değişiklikler mevcuttur:

z noktası ele alınan durum gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ formunda yazılabilir öyle ki

$$\gamma_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\ < 1.$$

Buradan da $\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ olarak ve

$h_\lambda := (\gamma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + (1 - \lambda)\delta)\eta_2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \gamma_n \eta_n$ şeklinde tanımlansın.

h_λ noktasının E_1 kümesinin bir noktası olması açısından λ parametreleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilsin.

Keyfi bir $y \in E_1$ alınsın. Bu durumda bu nokta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \eta_n$ formunda yazılıp $t_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n\ = 1$ dır.

O halde eş değer normun tanımı gereğince,

$$
\begin{aligned}
\|y-z\|_{(1)} &= \left\| \begin{pmatrix} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_2-\gamma_2)b+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_4-\gamma_4)+(t_5-\gamma_5)+\ldots, \\ (t_5-\gamma_5)+(t_6-\gamma_6)+\ldots,\ldots \end{pmatrix} \right\|_{(1)} \\
&\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad +Q_1 \left| \begin{array}{l} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b-\alpha(t_2-\gamma_2)b \end{array} \right| \\
&\quad +Q_2 \left| \begin{array}{l} (t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1)b-\alpha(t_2-\gamma_2)b \end{array} \right| \\
&\quad +Q_3 \left| \sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b \right| \\
&\quad +Q_4 \left| \sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b \right| \\
&\quad +\ldots \\
&\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} Q_1(t_1-\gamma_1)b+Q_1(t_2-\gamma_2)b+Q_2(t_2-\gamma_2)b \\ +Q_1\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ +Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \\ -\alpha\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_j\left[\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b\right] \end{array} \right| \\
&= |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} (Q_1-\alpha)(\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b))+Q_2(t_2-\gamma_2)b \\ +Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \end{array} \right|
\end{aligned}
$$

olur.

Ayrıca $j=2$ için

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(2)} &= \left\| \begin{pmatrix} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_2-\gamma_2)b+(t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_3-\gamma_3)+(t_4-\gamma_4)+\ldots, \\ (t_4-\gamma_4)+(t_5-\gamma_5)+\ldots, \\ (t_5-\gamma_5)+(t_6-\gamma_6)+\ldots,\ldots \end{pmatrix} \right\|_{(2)} \\
&\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad +Q_1 \left| \begin{array}{l} (t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_2-\gamma_2)b \end{array} \right| \\
&\quad +Q_2 \left| (t_2-\gamma_2)b+\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b \right| \\
&\quad +Q_3 \left| \sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b \right| \\
&\quad +Q_4 \left| \sum_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_2-\gamma_2)b \right| \\
&\quad +\ldots \\
&\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} Q_1(t_1-\gamma_1)b+(Q_1+Q_2)(t_2-\gamma_2)b+Q_1\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ +Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \\ -\alpha\sum\limits_{j=1}^{\infty}Q_j\left[\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+(t_2-\gamma_2)b\right] \end{array} \right| \\
&= |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} (Q_1-\alpha)(\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b))+\alpha(t_1-\gamma_1)b \\ +Q_2(t_2-\gamma_2)b+Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ +Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \end{array} \right|
\end{aligned}$$

ve aynı şekilde $j=3$ için

$$\begin{aligned}
\|y-z\|_{(3)} &\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1)b+(t_2-\gamma_2)b| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} (Q_1-\alpha)(\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b))+\alpha(t_1-\gamma_1)b \\ +\alpha(t_2-\gamma_2)b+Q_2(t_2-\gamma_2)b+Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ +Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \end{array} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \|y-z\|_{(1)} \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)| \\
&\quad + \left| \begin{array}{l} (Q_1-\alpha)(\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b))+Q_2(t_2-\gamma_2)b \\ +Q_2\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_3\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+Q_4\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)+\cdots \end{array} \right| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -Q_2\left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_3\left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_4\left|\sum_{j=4}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-\ldots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1) \\
&\quad -\sum_{k=2}^{\infty}Q_k\left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_2|t_2-\gamma_2|b-Q_4|t_3-\gamma_3| \\
&\quad -Q_5\left|\sum_{j=3}^{4}(t_j-\gamma_j)\right|-Q_6\left|\sum_{j=3}^{5}(t_j-\gamma_j)\right|-\cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -\sum_{k=2}^{\infty}Q_k\left|\sum_{j=3}^{\infty}(t_j-\gamma_j)\right|-\sum_{k=4}^{\infty}Q_k|t_3-\gamma_3| \\
&\quad -\sum_{k=5}^{\infty}Q_k|t_4-\gamma_4|-\sum_{k=6}^{\infty}Q_k|t_5-\gamma_5|-\cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\left|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)\right|-\sum_{k=4}^{\infty}Q_k|t_3-\gamma_3| \\
&\quad -\sum_{k=4}^{\infty}Q_k|t_4-\gamma_4|-\sum_{k=4}^{\infty}Q_k|t_5-\gamma_5|-\cdots \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\left|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)\right|-\sum_{k=4}^{\infty}Q_k\sum_{j=3}^{\infty}|t_j-\gamma_j| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\left|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)\right| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2-Q_3)\sum_{j=3}^{\infty}|t_j-\gamma_j| \\
&\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1)-Q_2|t_2-\gamma_2|b \\
&\quad -(1-Q_1)\left|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)\right| \\
&\quad -(1-Q_1-Q_2-Q_3)(2-\delta-t_1-t_2-\gamma_1-\gamma_2)
\end{aligned}
$$

dır.

Bu yüzden,

$$\begin{aligned}\|y-z\| &\geq \|y-z\|_{(1)} \\ &\geq |\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)|(1+\alpha-Q_1) \\ &\quad -(1-Q_1)\,|\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)| \\ &\quad -(1-Q_1-Q_3)(2-\delta-t_1-t_2-\gamma_1-\gamma_2) \\ &\quad +Q_2(2-\delta-t_1-\gamma_1)\end{aligned}$$

olur.

Alt durum B.2.1: $\delta+\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2 \geq 0$ olsun.

O halde,

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq [\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)](1+\alpha-Q_1) \\ &\quad -(1-Q_1)[\delta+(\gamma_1-t_1+\gamma_2-t_2)(1-b)] \\ &\quad -(1-Q_1-Q_3)(2-\delta-t_1-t_2-\gamma_1-\gamma_2) \\ &\quad +Q_2(2-\delta-t_1-\gamma_1)-(1+\alpha-Q_1-Q_2)b\delta\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada not edilmelidir ki $2-\delta-t_1-\gamma_1-t_2-\gamma_2 \geq 0$ ve $1-Q_1-Q_2 > 0$ dır.

Alt durum B.2.1.1: $\delta < t_1+t_2$ olsun ve kabul edilsin ki $\alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ dir.

Bu durumda bir önceki teoremdeki Alt durum A.2.1.1 bölümünde verilen metod kullanılmıştır. Gerçekten de öncelikle $2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1) \geq 0$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq (\delta-t_1-t_2)(1+\alpha-Q_1) \\ &\quad +(1+\alpha-Q_1)[(\gamma_1+\gamma_2)(1-b)+(t_1+t_2)b] \\ &\quad +2(1-Q_1)(t_1+t_2)-2(1-Q_1)-(1+\alpha-Q_1-Q_2)b\delta \\ &\geq \delta(1-b)(1+\alpha-Q_1)+\gamma_1(1-b)(1+\alpha-Q_1)-2(1-Q_1) \\ &\quad +2Q_2\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)+[2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]t_1 \\ &\geq \frac{1}{2^{p+1}}(1-b)(1+\alpha-Q_1)-2(1-Q_1)+2Q_2\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right) \\ &\quad +[2(1-Q_1)-(1-b)(1+\alpha-Q_1)]\frac{1}{2^{p+1}}\end{aligned}$$

dır.

Yani,

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq 2Q_2\frac{2\alpha+b}{2\alpha}-2(1-Q_1)\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\\ &\geq \frac{2}{1+2\alpha}\left[Q_2(2\alpha+b)-1+\frac{1}{2^{p+1}}\right]\\ &\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2-\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{b+2}\right]\end{aligned}$$

dır.

O halde ispatın başındaki (4.3) hipotez ve p ile ilgili kabul dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq \frac{2b+4}{1+2\alpha}\left[Q_2-\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{1}{3b}\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

olur.

Alt durum B.2.1.2: $\delta \geq t_1+t_2$ olsun. Bu durumda da bir önceki teoremde verilen Alt durum A.2.1.2 durumuna benzer şekilde ispat yapılmıştır.

Kabul edilsin ki $\alpha \geq \frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)}$ dir.

O halde ispatın başındaki (4.4) hipotezi dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|y-z\|-\Gamma &\geq (\delta-t_1-t_2)(1-b)(1+\alpha-Q_1)+(1+\alpha-Q_1)\gamma_1(1-b)\\ &\quad +2(1-Q_1)t_1-2(1-Q_1)\\ &\geq \left(\frac{1-b}{1+b}+\alpha\right)\frac{1-b}{2^{p+1}}+\frac{1-b}{2^p(1+b)}-\frac{2}{1+2\alpha}\\ &= \frac{(1-b)(3-b)}{2^{p+1}(1+b)}+\alpha\frac{1-b}{2^{p+1}}-\frac{2}{1+2\alpha}\\ &\geq \frac{1}{1+2\alpha}\left[2(1-b^2)\alpha^2+(b^2-8b+7)\alpha-2^{p+2}(1+b)\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

dır.

Alt durum B.2.2: $\delta < t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2$ olsun ve dolayısıyla $\delta < |t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2|$ dır.

Burada da Alt durum B.2.1'de verilen α için hipotez ile birlikte (4.4) hipotezi ele alınsın. Bu durumda $\alpha > \frac{1}{b}$ dir.

Burada aşağıdaki eşitsizlikler de göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(1)}+\|y-z\|_{(3)}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
2|\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b| \\
+Q_1\left|\begin{array}{c}(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b\end{array}\right| \\
+Q_2\left|\begin{array}{c}(t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b\end{array}\right| \\
+Q_3\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b\end{array}\right| \\
+Q_4\left|\begin{array}{c}\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b\end{array}\right|+\cdots
\end{array}\right] \\
+ \\
\left[\begin{array}{c}
Q_1\left|\begin{array}{c}(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\end{array}\right| \\
+Q_2\left|\begin{array}{c}(t_2-\gamma_2)b+\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k) \\ -\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\end{array}\right| \\
+Q_3\left|\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right| \\
+Q_4\left|\sum\limits_{k=4}^{\infty}(t_k-\gamma_k)-\alpha\sum\limits_{k=3}^{\infty}(t_k-\gamma_k)\right|+\cdots
\end{array}\right]
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\|y-z\| &\geq \frac{\|y-z\|_{(1)}+\|y-z\|_{(3)}}{2} \\
&\geq |\gamma_1+\gamma_2+\delta-t_1-t_2+(t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2)b|+\frac{\alpha|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2|b}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde,

$$
\begin{aligned}
\|y-z\|-\Gamma &\geq \left(\frac{\alpha b}{2}-(1-b)\right)|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2|-(b(1+\alpha-Q_1-Q_2)-1)\delta \\
&\geq \left[\frac{\alpha b}{2}-(1-b)-b(1+\alpha-Q_1-Q_2)+1\right]|t_1-\gamma_1+t_2-\gamma_2| \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

dır.

Sonuç olarak, tüm bu alt durumlar gösterir ki en az bir $b \in (0,1)$ ve $\frac{-(b^2-8b+7)+\sqrt{(b^2-8b+7)^2+2^{p+5}(1-b)(1+b)^2}}{4(1-b^2)} \leq \alpha \leq \frac{(1-Q_1)(1+b)}{1-b}$ öyle ki eğer λ değişkeni $\left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E_{p'}$ ve her $z \in W \backslash E_{p'}$ için $\|y-z\| \geq \Gamma$ dir öyle ki burada

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$$

olarak tanımlıdır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[1-\frac{b}{\alpha},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse bir tek h_{λ_0} noktası $\|h_\lambda - z\|$'ı minimize eder.

O halde

$$\Lambda := \{y \ : \ \|y-z\| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlandığında $\|h_{\lambda_0} - z\| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E_{p'}$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir.

Görülebilir ki herhangi $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s(Th) &\leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad T \text{ afin olduğundan)} \\
&= \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| \\
&\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)}\right\| \\
&\leq \limsup_m \left\| h - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right\| \\
&= s(h)
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|$ ve $s(h) = \|z-h\|$ dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\|z - Th\| \leq \|z - h\| &\implies \|z - Th\| = \|z - h\| \\
&\implies Th \in \Lambda
\end{aligned}$$

bulunur.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle (genişlemeyen fonksiyonlar aynı zamanda süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi gereğince

[1] (kompakt kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T fonksiyonunun bir sabit noktası vardır öyle ki bu nokta $y \in E_{p'}$ için $\|y - z\|$'yi bir tek noktada minimum yapan $h = h_{\lambda_0}$ noktası olup $Th = h$'dır.

Bu sebeple, arzulandığı gibi $E_1 = E_{p'}$ kümesinin afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit noktası vardır.

Durum C: Bu durumda da Durum A'ya benzer şekilde E_3 kümesi üzerinde çalışılmıştır.

Ele alınan kümenin zayıf topolojiye göre kapanışı olan küme

$$W := \overline{E_3}^{\sigma(\ell^\infty,\, \ell^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın.

O halde Teorem 4.2'nin Durum B'sinde yer alan her t_j parametresi t_{j+1} parametresi ile ve her γ_j parametresi γ_{j+1} parametresi ile yer değiştirilip Durum C'yi tamamlamak için alt durumların aynısı α için daha önce kabul edilen koşullar dahilinde kullanılır.

Sonuç olarak ispat Teorem 4.2'nin son bölümündeki ispat hamleleri ile bitirilir.

4.1.3. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $f_1 := be_1,\ \ f_2 := be_2,$ $f_3 := be_3,\ j \geq 4$ için $f_j := e_j$) kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Bu bölüm ile önceki bölümlerin sonucu daha da genelleştirilmiştir.

Örnek 4.3 *$b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, $f_3 := be_3$ ve her $n \geq 4$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \textit{ her } \alpha_n \geq 0 \textit{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}.$$

Teorem 4.3 *En az bir $b \in (0,\ 1)$ ve $\alpha > 1$ vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Öncelikle hatırlanmalıdır ki daha önceki teoremlerde de olduğu gibi $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ koşulu c_0 içinde bir asimtotik izometrik kopya olma ihtimalini ortadan kaldırmak için gereklidir. Şimdilik $b \in (0,1)$ olmak üzere $Q_1 < \frac{2b}{1+b}$ koşulunun gerçeklendiği kabul edilsin ve kullanılan normun bu koşul altında yeniden yazıldığı düşünülsün. Ayrıca $\alpha < 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3$ olarak kabul edilsin.

Burada önceki teoremlerde kullanılan metod ve α ile b için aynı hipotezler kabul edilerek aşağıdaki dört farklı küme ele alınmıştır:

$$E_1 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\},$$

$$E_2 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\},$$

$$E_3 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

ve

$$E_4 := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

öyle ki $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ dir. Şimdi, normun tanımı gereğince $Q_2 < \frac{1}{1+2\alpha}$ koşulu sağlandığı göz önüne alınarak, $p \in \mathbb{N}$ öyle seçilebilir ki $Q_2 \geq \left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) \frac{1}{3b}$ ve

$$E_3 = E_{p''} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \begin{array}{l} \text{her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \end{array} \right\},$$

$$E_2 = E_p := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \begin{array}{l} \text{her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \end{array} \right\},$$

$$E_1 = E_{p'} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0,\ \alpha_1 \geq \frac{1}{2^{p+1}} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$$

(4.5) ve $b \in (0,1)$ öyle seçilebilir ki $\frac{1-b^2}{b(3b^2-6b+7)} < \frac{1}{2^{p+2}}$ dir. Bu durumda not edilebilir ki $b > \frac{3+\sqrt{20}}{11} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dir öyle ki bu koşullar ispatın ileriki adımlarında yardımcı olmuştur. (4.6)

Bu durumda Teorem 4.3'deki aynı strateji uygulanmıştır fakat her kümenin incelenmesi sırasında kullanılacak Teorem 4.3'de karşılık gelen ikinci durumlar için aşağıdaki değişiklikler oluşur.

$i \in \{1,2,3\}$ ve $z \in \overline{E_i}^{\sigma(\ell^\infty,\, \ell^1)} \setminus E_i$ olsun.

$\delta := 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ şeklinde tanımlansın ve sonra

$h_\lambda := (\gamma_1 + \frac{\lambda}{2}\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{2}\delta)\delta)\eta_2 + (\gamma_3 + (1-\lambda)\delta)\eta_3 + \sum\limits_{n=4}^{\infty} \gamma_n\eta_n$ olarak tanımlansın.

h_λ'nın E_i kümesinde olması açısından λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ 1\right]$ aralığından alınsın.

Bu durumda teknik hesaplamalar gösterir ki

$$\|h_\lambda - z\| = \begin{cases} (1-\lambda)b\delta \\ +(\alpha - Q_1 - Q_2(1-\frac{\lambda}{2}) - Q_3(1-\lambda))b\delta & ,\ \lambda < 0 \\ \\ \delta b \\ +(\alpha - Q_1 - Q_2(1-\frac{\lambda}{2}) - Q_3(1-\lambda))b\delta & ,\ \lambda \in [0,\ 1) \end{cases}$$

olarak bulunur.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\, 1\right]} \|h_\lambda - z\|$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2 - Q_3)b\delta$ ve önceki teoremlerden yapılacak çıkarımla elde edilecek tümevarım metoduyla sonuca ulaşılır çünkü aynı hipotezler ve metod uygulanır.

4.1.4. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $N \in \mathbb{N}$ keyfi olmak üzere $f_1 := be_1,\ f_2 := be_2,\ f_3 := be_3, \cdots,\ f_N := be_N,$ ve $j \geq N+1$ için $f_j := e_j$) kümesi afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Bu bölümde önceki bölümlerdeki kümeler ve teoremler daha da genelleştirerek çalışmadaki en genel sonuç sunulmuştur.

Örnek 4.4 *$b \in (0,1)$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. Her $n \leq N$ için $f_n := be_n$ ve her $n \geq N+1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$, olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \ \textit{her } \alpha_n \geq 0 \textit{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1\right\} .$$

Teorem 4.4 *En az bir $b \in (0,\ 1)$ ve $\alpha > 1$ vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Yine Teorem 4.3'deki fikir ve yöntemler uygulanır ve $N+1$ adette farklı küme oluşturularak her küme için Teorem 4.2'de yer alan Durum 1 aynen uygulanır (çünkü görülebilir ki Teorem 4.3'deki kümelerin incelemesinde de Durum 1 için Teorem 4.2 temel alınmaktadır). Sonrasında ise Durum 2 için de önceki teoremlerde uygulanan metodun aynısı kullanılacaktır fakat aşağıdaki değişiklikler söz konusudur:

Öncelikle $\alpha < 2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 + \cdots + 2Q_N$ olarak kabul edilsin.

İspatda önceki teoremlerin ispatından çıkarım yapılabileceği gibi

$$\begin{aligned} h_\lambda : &= (\gamma_1 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)\eta_1 + (\gamma_2 + \frac{\lambda}{N-1}\delta)\eta_2 + \cdots + (\gamma_{N-1} + \frac{\lambda}{N-1}\delta)\eta_{N-1} \\ &\quad + (\gamma_N + (1-\lambda)\delta)\eta_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \gamma_n \eta_n \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

O halde

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\, 1\right]} \|h_\lambda - z\|$$

olarak tanımlanır ve $\Gamma = (1 + \alpha - Q_1 - Q_2 - Q_3 - \cdots - Q_N)b\delta$ elde edilir.

Bu durumda Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'de yer alan ispatın N adımlı hali tümevarım metodu ile bahsi geçen teoremlerdeki hipotezler de kullanılarak bu teoremin ispatı tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

1979'da, ℓ^1'de kapalı, sınırlı, konveks (k.s.k.), zayıf*-kompakt olmayan alt kümelerinden oluşan büyük bir sınıfın l^1 in bilinen normuna göre genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu Goebel ve Kuczumow tarafından gösterilmiştir. 2008'de, bu çalışma bir eş değer norm ile genelleştirilerek ℓ^1'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği P.K. Lin tarafından gösterilmiştir. Lin'in çalışmasının c_0 uzayı için analoğu çözülememiş önemli bir açık soru olup, bu sorunun alt versiyonu olan Goebel ve Kuczumow'un çalışmasının bir eş değer norm ile c_0 uzayı için analoğu bir başka önemli sorudur.

Bu tez çalışmasında c_0 üzerinde bir $\|.\|$ eş değer norm sınıfının varlığı ve c_0 'da k.s.k. zayıf kompakt olmayan alt kümelerinden oluşan büyük bir sınıfın afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini koruduğu gösterilmiştir. Çalışmada c_0 üzerinde bir eş değer norm $\|.\|$'u tanımlanmıştır ve gösterilmiştir ki c_0'da zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir aile vardır öyle ki bu aile afin $\|.\|-$genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi korur. Yani bir eş değer norm ile Goebel ve Kuczumow'un çalışmasının c_0-analoğunu yapılmıştır. Bu yapılırken c_0'daki bazı kümeler karakterize edilmiştir.

En geniş sınıf ve bu sınıf vasıtasıyla bu tez çalışmasının en genel sonucu aşağıdaki şekildedir:

$b \in (0,1)$ ve $N \in \mathbb{N}$ olsun. Her $n \leq N$ için $f_n := be_n$ ve her $n \geq N+1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$, olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0' da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın:

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} .$$

Bu durumda en az bir $b \in (0,\ 1)$ ve $\alpha > 1$ vardır öyle ki $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

KAYNAKLAR

[1] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71:97–115, 1912.

[2] F. E. Browder. Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 53(6):1272–1276, 1965.

[3] F. E. Browder. Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 54(4):1041–1044, 1965.

[4] P. Dowling, C. Lennard, and B. Turett. Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 219:377–391, 1998.

[5] K. Goebel and T. Kuczumow. Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. *Colloquium Mathematicae*, 40(2):259–264, 1979.

[6] D. Göhde. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung. *Math. Nachr.*, 30:251–258, 1965.

[7] W. A. Kirk. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *The American Mathematical Monthly*, 72(9):1004–1006, 1965.

[8] C. Lennard and V. Nezir. The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 381:678–688, 2011.

[9] P. K. Lin. There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property. *Nonlinear Analysis*, 68:2303–2308, 2008.

[10] V. Nezir. Renorming c_0 and affine fixed point property. Submitted.

[11] V. Nezir and S. Sade. Abundance of equivalent norms on c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 67(1):1–28, 2017.

[12] C. Nuñez. Characterization of Banach spaces of continuous vector valued functions with the weak banach-saks property. *Illinois Journal of Mathematics*, 33(1):27–41, 1989.

[13] F. E. C. Santos, H. Fetter, B. G. de Buen, and F. Núñez-Medina. Directionally bounded sets in c_0 with equivalent norms. *J. Math. Anal. Appl.*, 419(2):727–737, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Aysun Güven
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Ankara 17.09.1989
Telefon : 05376836565
e-mail : aysun.guven.tr@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Kurum	Bitirme Yılı
Lise	Ankara Gazi YDA Lisesi, Ankara	2007
Lisans	Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik	2011
Yüksek Lisans	Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik	2017

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2015	Karapınar Meke Anadolu Lisesi, Konya	Öğretmen
2015-2017	Arpaçay Anadolu Lisesi, Kars	Öğretmen
2017-güncel	Haydar Aliyev Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Kars	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

Matematik, Sabit Nokta Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Veysel Nezir, Aysun Güven (2017). Characterizing nonweakly compact subsets of c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings when c_0 is renormed, International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), 18-21 Nisan 2017, Antalya. (Aysun Güven tarafından Sözlü yazılı Bildiri)

Veysel Nezir, Aysun Güven (2017). Characterizing nonweakly compact subsets of c_0 with Fixed Point Property for affine nonexpansive mappings when c_0 is renormed, hakem değerlendirmesinde.