c_0'DA ZAYIF-KOMPAKT OLMAYAN KÜMELERİN ÇOK GENİŞ BİR SINIFINDA BİR EŞ DEĞER NORMA GÖRE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ

Serap ORAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Matematik Anabilim Dalı

KARS-2017

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

c_0'DA ZAYIF-KOMPAKT OLMAYAN KÜMELERİN ÇOK GENİŞ BİR SINIFINDA BİR EŞ DEĞER NORMA GÖRE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ

Serap ORAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu tez çalışması Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından 2017-FM-24 nolu proje ile desteklenmiştir.

ARALIK-2017
KARS

TEZ KABUL VE ONAYI

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Serap ORAN'ın Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "*c_0'da zayıf-kompakt olmayan kümelerin çok geniş bir sınıfında bir eşdeğer norma göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi*" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .birliği. . . . . . ile kabul edilmiştir.

18 / 12 / 2017

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

Üye

Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

◇ Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

◇ Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

◇ Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

◇ Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,

◇ Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Serap ORAN
Aralık-2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZ

c_0'DA ZAYIF-KOMPAKT OLMAYAN KÜMELERİN ÇOK GENİŞ BİR SINIFINDA BİR EŞDEĞER NORMA GÖRE AFİN GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA TEORİSİ

Serap ORAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Veysel NEZİR

2011'de, Lennard ve Nezir tarafından yapılan çalışma ile gösterilmiştir ki $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ herhangi bir reel terimli ve $0 < m := \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$, $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n < \infty$ olacak şekilde sınırlı dizi olmak üzere bu dizi yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ ve $\eta_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$ alınarak kurulan $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu $E = \overline{\text{co}}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini (S.N.T'yi) bozar. Aynı şekilde, Nezir'in doktora tezinde gözlemlenmişdir ki $0 < b_n$ ve $0 < \gamma_n$ dizileri 1 e yakınsak skaler diziler ve $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aynı zamanda "aşırı salınımlı" olmamak koşulu ile $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ da c_0-toplam baz dizilerinden olan, her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + ... + b_ne_n)$ formunda yazılan dizi için $E = \overline{\text{co}}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi de afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T'yi bozar.

Bu tez çalışmasında c_0 üzerinde bir eş değer norm $|||\cdot|||$'u tanımlanır ve gösterilmiştir ki yukarıda bahsedilen tüm kümeler afin $|||\cdot|||$ -genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'yi korur. Ayrıca, bu sonuç $0 < b_n$ ile $0 < \gamma_n$ keyfi seçildiğinde $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n)$ dizisinin kapalı konveks kabuğuna genelleştirilmiştir.

2017 , 51 Sayfa

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon; afin fonksiyon; sabit nokta teorisi; yeniden normlama; asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi; kapalı, sınırlı, konveks küme; Banach dizi uzayları.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FIXED POINT PROPERTY FOR AFFINE NONEXPANSIVE MAPPINGS ON A VERY LARGE CLASS OF NONWEAKLY COMPACT SUBSETS IN c_0 RESPECT TO AN EQUIVALENT NORM

Serap ORAN

KAFKAS UNIVERSITY
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Veysel NEZİR

In 2011, by Lennard and Nezir, it was showed that for all sequences $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ with $0 < m := \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ and $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n < \infty$, by defining $f_n := b_n\, e_n$ and $\eta_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$ for each $n \in \mathbb{N}$, the closed convex hull of $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $E = \overline{\text{co}}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ fails the fixed point property (FPP) for affine $\|\cdot\|_\infty$-nonexpansive mappings. Similarly, in the Ph.D. thesis of Nezir, it was observed that some c_0-summing basic sequences in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, and for $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + ... + b_ne_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$, whenever $0 < b_n$ converges to 1 and $0 < \gamma_n$ converges to 1 and $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ does not "oscillate too wildly", then $E = \overline{\text{co}}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ also fails the FPP for affine $\|\cdot\|_\infty$-nonexpansive mappings.

In this thesis, an equivalent norm $|||\cdot|||$ on c_0 is constructed and it is showed that all the sets mentioned above have the FPP for affine $|||\cdot|||$-nonexpansive mappings. Moreover, the results are generalized for the closed convex hull of the sequence $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n)$ when $0 < b_n$ and $0 < \gamma_n$ are arbitrarily choosen.

2017 , 51 Pages

Keywords: nonexpansive mapping; affine mapping; fixed point property; renorming; asymptotically isometric c_0-summing basic sequence; closed, bounded, convex set; Banach sequence spaces.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yapılmıştır.

Çalışmalarım süresince yardımlarını hiçbir zaman eksik etmeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Veysel Nezir'e ve her zaman manevi desteğini esirgemeyen biricik abim Ramazan Oran'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Serap ORAN

KARS-2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ℓ^1: Mutlak toplanabilen dizilerin Banach uzayı

ℓ^∞: Sınırlı dizilerin Banach uzayı

c_0: 0'a yakınsak dizilerin Banach uzayı

$\|.\|$: $\|.\|$ normu

$\in$: elemanı

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$(\xi_k)_k$: Terimleri her $k \in \mathbb{N}$ için ξ_k olan $(\xi_k)_k$ dizisi

$(X, \|.\|)$: Üzerinde $\|.\|$ normu tanımlı normlu uzay

$\|.\|_1$: ℓ^1 üzerinde tanımlanan alışılmış mutlak toplam normu

$\|.\|_\infty$: ℓ^∞ üzerinde tanımlanan alışılmış supremum normu

$\downarrow_n$: n indisine göre azalarak yakınsar

$\uparrow_n$: n indisine göre artarak yakınsar

$\overline{co}$: kapalı konveks kabuk

$\forall$: herbir

$\exists$: en az bir

$\subseteq$: alt kümesi

$\cup$: birleşim

$\Longrightarrow$: ise

ε: epsilon değişkeni

α: alfa değişkeni

λ: küçük lambda değişkeni

Λ: büyük lambda değişkeni

γ: küçük gamma değişkeni

Γ: büyük gamma değişkeni

δ: delta değişkeni

$<$: küçüktür

$>$: büyüktür

$\leq$: küçük veya eşittir

$\geq$: büyük veya eşittir

$\sigma(\ell^\infty,\ \ell^1)$: ℓ^1 üzerinde tanımlı zayıf topoloji

$\overline{E}^{\sigma(\ell^\infty,\ \ell^1)}$: ℓ^1 üzerinde tanımlı zayıf topolojiye göre E kümesinin kapanışı

$\min$: minimumu

$\max$: maksimumu

Kısaltmalar

k.s.k.: kapalı, sınırlı, konveks

S.N.T. (g.f.): genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi

a.i.: asimtotik izometrik

1. GİRİŞ

İlk olarak K. Goebel ve T. Kuczumow'un çalışmasında ve sonrasında ise Lennard'ın danışmanlığında hazırlanan Everest'in Doktora tezinde [7, 5] gösterilmiştir ki ℓ^1 uzayında çok geniş bir zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan küme sınıfları vardır ve bu sınıflar genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

Çığır açıcı diye adlandırılabilecek bir sonuç olarak, 2008'de, $(\ell^1, \|.\|_1)$ uzayı için aşağıdaki şekilde verilen bir eşdeğer norm bulunarak bu norma göre ℓ^1 genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir teoremi P.K. Lin'in çalışması [11] ile verilmiştir.

$$|||x|||^* = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{8^k}{1+8^k} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|, \ \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$

Bu tarihten sonra ise bu teoremin c_0 (0'a yakınsak diziler uzayı) analoğu sabit nokta teorisyenlerinin altın açık sorusu olmuştur. Yani, "$(c_0\ ,\ \|\ .\ \|_\infty)$ üzerinde bir eşdeğer norm bulunabilir mi ki bu eşdeğer norm ile genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi sağlanabilsin?" sorusu araştımacıların ilgi odağı olmuştur.

Bu sorunun halen çözülememiş olması sebebiyle bu ünlü soruya cevap verebilmek için yollar açabilecek araçlara da araştırmacıların ilgi duyacağı söylenilmiştir. Bu sebeple P.K. Lin'in c_0 analoğu olan sorunun cevabını almak için ilk aşama olan çalışmalara sabit nokta teorisyenlerinin ilgi duyacaktır denilmesi yanlış olmaz.

Dolayısıyla, bu tez çalışmasında Goebel ve Kuczumow'un teorisinin c_0 analoğu (tabiki bir eş değer norm ile) üzerinde çalışılmıştır. Öyle ki bir eş değer norm ile Goebel ve Kuczumow teorisinin c_0 analoğu için elde edilecek verimli sonuçların P.K. Lin'in konusunun c_0 analoğu üzerinde çalışmak için aday eş değer norm bulmanın ilk adımını atacak hamle olması sebebiyle büyük bir öneme sahiptir.

Not edilmelidir ki $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayının herhangi kapalı, sonsuz boyutlu alt uzayının da genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini [S.N.T. (g.f.)] bozar sonucu Dowling, Lennard ve Turett'in çalışması [3] ile gösterilmiştir. Bu sebeple Goebel ve Kuczumow çalışmasının c_0 analoğunun düşünülmesi için öncelikle konu bir eş değer norm alarak ele alınmalıdır. Yani, şu şekilde bir soru üzerinde çalışılabilir: "c_0'ın bir yeniden normlanmışı var mıdır ki ve zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesi bulunabilir mi ki bu küme üzerinde tanımlı her genişlemeyen fonksiyonun sabit noktası olsun?". Yakın zamanda bu soruya fonksiyona afinlik koşulunun eklenmesi durumunda pozitif cevap Nezir'in çalışması [13] ile verilmiştir. Fakat, söylenebilir ki Nezir'in eş değer normuna göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olan kümelerin sınıfı yeterince geniş olmayabilir ve sabit nokta teorisine sahip daha geniş kümeler sınıfını farklı eş değer normlar ile elde edebilmek bir başka önemli araştırma konusu olacaktır.

Afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip kümelerden oluşan daha geniş bir sınıf elde etmek amacıyla, bu çalışmamızda yeni bir eş değer norm geliştirilmiştir ve gösterilmiştir ki bulunan eş değer norma göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip c_0'ın alt kümelerinden oluşan çok geniş bir sınıf vardır.

Bu kümelerin sınıfını tanıtmadan önce Nezir'in Lennard ile olan ortak çalışması [10] hatırlatılmalıdır fakat daha önce afin genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisi ile c_0' da zayıf kompaktlık bağlantısının görülebilmesi için biraz daha litaratür bilgisinin verilmesi gerekmektedir çünkü bu tez çalışmasında gösterilmektedir ki c_0'ın bir yeniden normlanmışı vardır öyle ki bulunan eş değer norm ile c_0'da zayıf kompakt olmayan ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip cok geniş bir aile vardır. Unutulmamalıdır ki Dowling, Lennard ve Turett'in çalışması [4] ile gösterilmiştir ki bilinen normu ile c_0'daki zayıf kompaktlık genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine denktir.

Lennard ile Nezir'in [10] makalesini ve bu tez çalışmasını c_0'da bazı zayıf kompakt olmayan alt kümeleri üzerinde odaklanmasına sevk eden çalışmalar ile gözlemlenmiştir ki bu bahsi geçen kümeler c_0'ın bilinen normuna göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip değildir ve Nezir tarafından gözlemlenmiştir ki bu bahsi geçen kümeler geliştirilmiş olan eş değer norma göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

c_0 Banach uzayı ele alındığında öyle ki bu uzay 0 a yakınsak diziler uzayı olup; 1981'de Maurey'in çalışması [12] ile ispatlanmıştır ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$'ın herhangi bir boştan farklı C zayıf kompakt konveks alt kümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen $T : C \longrightarrow C$ fonksiyonunun bir sabit noktası vardır; yani, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisine (z-S.N.T. (g.f.)) sahiptir.

Bu sonucun tersine, 2004 yılında Dowling, Lennard ve Turett'in çalışması [4] ile gösterilmiştir ki $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayından alınan herhangi bir zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı, konveks (k.s.k.) K alt kümesi üzerinde tanımlanabilen sabit noktasız en az bir $\|.\|_\infty$-genişlemeyen T fonksiyonunun vardır ve bu sonuç Maurey'in teoremini gerek ve yeter koşul olarak genelleştirmiştir. (Not edilmelidir ki genel olarak Maurey'in sonucu çoğu Banach uzayda geçerli değildir. Örneğin, $X = (L^1[0,1], \|\cdot\|_1)$, $C := \{f \in L^1[0,1] : 0 \leq f \leq 1\}$ ve $T\colon C \to C$ Alspach fonksiyonu olarak alınırsa; yani, her $f \in C$, Tf şu şekilde tanımlansın:
$t \in [0, \frac{1}{2})$ için $(Tf)(t)\colon = \min\{2f(2t), 1\}$ ve
$t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için ise $(Tf)(t)\colon = \max\{2f(2t-1), 1\} - 1$ olarak tanımlansın; bu durumda, $\|\cdot\|_1$ normuna göre T genişlemeyen olup ayrıca görülebilir ki sabit noktası yoktur [1]. Bu örneği kullanarak Alspach zayıf kompaktlığın sabit nokta teorisine sahip olmak için yeterli olamayacağını literatürde ilk defa gösteren kişi olmuştur.)

Yakın zamanda 2015'de Gallagher, Lennard ve Popescu'nun çalışması [6] ile gösterilmiştir ki c'deki zayıf kompaktlık genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine denk değildir ve bu gerçek $(c, \|\cdot\|_\infty)$ yakınsak diziler uzayından alınan zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bir küme olan bir W altkümesi ele alınıp bu küme üzerinde tanımlı herhangi $T\colon W \to W$ genişlemeyen fonksiyonunun bir sabit noktası olduğu gösterilerek ispatlanmışır. Aslında bu çalışmada yapılan: c_0 uzayı üzerinde bir eşdeğer norm $\|\cdot\|^\sim$ tanımlanıp ve iki adet zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler ele alınıp bunların c uzayında izomorfik olduğu iki hiperkonveks kümeye denk oldukları gösterilmiştir, öyle ki hiperkonveks kümelerin genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisine sahip olması sebebiyle bu kümelerin zayıf kompakt olmadıkları fakat sabit nokta teorisine sahip oldukları dile getirilmiştir. Daha sonra ise dolaylı bir yol ile $(c, \|\cdot\|_\infty)$ uzayının $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ uzayına izomorf olması sebebiyle literatürde ilk defa olarak c_0'a izomorf olan bir uzayda zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı, konveks, hatta hiper konveks olan ve genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip bir W kümesinin varlığı bulunmuştur.

Bu sonucun tersine, 2004 yılında Dowling, Lennard ve Turett'in çalışması [4] ile gösterilmiştir ki c_0'da zayıf kompaktlık genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine denktir ve bu teorem $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayından alınan herhangi bir zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı, konveks (k.s.k.) K alt kümesi üzerinde tanımlanabilen sabit noktasız en az bir $\|.\|_\infty$-genişlemeyen T fonksiyonunun varlığı gösterilerek ispatlanmıştır. Bulunan bu T fonksiyonu genel olarak afin değildir. $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayından alınan her zayıf kompakt olmayan (k.s.k.) K alt kümesi üzerinde tanımlanabilen sabit noktasız bir afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen S fonksiyonunun bulunup bulunamayacağı açık bir sorudur.

Bu sorudan ilham alınarak 2011 yılında Lennard ve Nezir'in çalışması [10] ile ispatlanmıştır ki eğer bir Banach uzayı bir asimtotik izometrik (a.i.) c_0-toplam baz dizisi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$'i içerirse o zaman bu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar.

Bahsedilen bu makalede ilk olarak c_0'daki bazı özel a.i. c_0-toplam baz dizileri üzerinde çalışılmıştır.

Örneğin $b \in (0,1)$ keyfi olmak üzere ve $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi n'inci koordinatı bir ve diğer koordinatları sıfır olan $(c_0, \|.\|_\infty)$ ve $(\ell^1, \|.\|_1)$ uzaylarının şartsız bazı (aynı zamanda kanonik bazı) olan dizi olmak üzere $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ seçerek c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini oluşturup daha sonra c_0 içinde aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı, konveks alt küme $E = E_b$ elde edilmiştir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Burada görülmüştür ki $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olarak tanımlandığında elde edilen $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınırsa E kümesi aşağıdaki şekilde yazılmıştır:

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \text{ her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\} .$$

Bu durumda aşağıdaki teorem verilmiştir:

Teorem 1.1 *$b \in (0,1)$ olsun. O zaman yukarıda tanımlanan $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı, konveks kabuğu olan $E = \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ öyle bir kümedir ki bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir $U : E \to E$ fonksiyonu bulunabilir [10].*

Not edilmelidir ki burada $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir a.i. c_0-toplam baz dizisidir.

Daha sonra bu sonuç daha da genelleştirerek aşağıdaki teoremler sunulmuştur.

Teorem 1.2 *$\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde herhangi bir artan dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

dizisi alınsın. Daha sonra c_0' da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Bu durumda E öyle bir kümedir ki bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$genişlemeyen bir $U : E \to E$ fonksiyonu bulunabilir [10].

Teorem 1.3 $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $(0, \infty)$ *aralığında bir* $\kappa > 0$ *sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f_n := b_n e_n$ *olacak şekilde* c_0*'da bir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi alınsın. Daha sonra* c_0*'da* $E = E_{\vec{b}}$ *kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Bu durumda E öyle bir kümedir ki bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir $U : E \to E$ fonksiyonu bulunabilir [10].

Teorem 1.4 $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $(0, \infty)$ *aralığında sınırlı herhangi bir dizi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f_n := b_n e_n$ *olacak şekilde* c_0*'da bir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi alınsın. Daha sonra* c_0*' da* $E = E_{\vec{b}}$ *kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Bu durumda E öyle bir kümedir ki bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir $U : E \to E$ fonksiyonu bulunabilir [10].

Daha önemlisi, [10] çalışmasının ana sonucu olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 1.5 $L \in (0, \infty)$ *olsun. Eğer bir Banach uzayı* L*-ölçekli asimtotik izometrik* c_0*-toplam baz dizisi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *içerirse bu uzay afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Çünkü* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin kapalı, konveks kabuğu olan* $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ *öyle bir kümedir ki bu küme üzerinde tanımlı sabit noktasız afin daralan bir* $U : E \to E$ *fonksiyonu bulunabilir [10].*

Nezir'in [13] çalışmasında c_0 üzerinde bazı şartları sağlayan bir α skalarına bağlı aşağıdaki $\|\cdot\|$ eşdeğer normu ile bir başka $|||\cdot|||$ eşdeğer normu tanımlanmıştır. Çalışmada geliştirilen ilk norm ile gösterilmiştir ki en az bir $0 < b < 1$ ve $\alpha > 1$ sayıları vardır öyle ki Teorem 1.1'de verilen E kümesine benzer olarak

$$E := \overline{co}(\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ f_1 := be_1, \ f_2 := be_2 \ , \ f_n := e_n \ , \ \forall n \geq 3\})$$

alındığında E kümesi üzerinde tanımlanan her $T : E \to E$ afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonunun E kümesinde bir sabit noktası vardır.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$\|x\| := \quad \|x\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k - \alpha\xi_j\right| \text{ öyle ki } \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,\ Q_k \downarrow_k 0$$

$$\text{ve } Q_k > Q_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aynı makalede geliştirilen aşağıdaki şekilde tanımlanan diğer eşdeğer norm $|||\cdot|||^{\sim}$ ele alındığında ise yukarıda bahsedilen E kümeleri afin $|||\cdot|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'yi sağlar.

Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$|||x|||^{\sim} := \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{2^j} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ öyle ki } \gamma_k \uparrow_k 1,\ \gamma_k \text{ artan .}$$

Bu tez çalışmasında Lennard'ın danışmanlığında yazılmış olan Nezir'in doktora tezinde ve Lennard ile Nezir'in hazırlık aşamasındaki makalesinde [14, 9] yer alan bazı c_0-toplam baz dizilerinin sınıfı üzerinde de çalışılmıştır. Bu sınıf için [14, 9] çalışması ile aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında öyle bir dizidirki her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \le \gamma_n$ olacak şekilde $\Gamma > 0$ var ve $\sigma := \sum\limits_{n=2}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}| < \infty$ olsun; ayrıca kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\lambda \in (0,\infty)$ sayısına yakınsasın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + ... + b_ne_n)$ olacak şekilde bir dizi tanımlansın. Ayrıca kabul edilsin ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt c_0-toplam tahminini sağlasın. Yani, kabul edilsin ki $\exists K \in (0,\infty)$ var öyle ki $\forall \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için $K \sup\limits_{n\ge1} \left|\sum\limits_{j=n}^{\infty} \alpha_j\right| \le \left\|\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\eta_j\right\|$ dır. Bu durumda, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir L-ölçekli asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisidir. Ayrıca $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$'in kapalı konveks kabuğu olan $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi üzerinde sabit noktasız afin $\|.\|_\infty-$daralan $U : E \to E$ fonksiyonu vardır.

Literatürde yer alan yukarıdaki teoremlerdeki bütün bu E kümeler tanıtıldıktan sonra giriş bölümü bu tez çalışmasında bulunan sonuçlarla şu şekilde sonlandırılabilir: c_0 üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanmış $|||.|||$ normu ele alındığında öncelikle gösterilmiştir ki $(c_0, |||.|||)$ Banach uzayı $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermez ve dolayısıyla bu çalışmada geliştirilen norm sabit nokta teorisini sağlayabilecek kapalı sınırlı konveks kümeleri aramak için güzel bir adaydır. Sonra ise gösterilmiştir ki yukarıda bahsedilen E kümeleri afin $\|\!|.|\!\|-$genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'yi sağlar. Hatta daha bir genel sonuç olarak aşağıdaki teoremler verilmiştir:

Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$|\!\|x|\!\| := \frac{1}{\gamma_1} \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{2^j} \right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left| \xi_k^* - \alpha \xi_j^* \right|$$

$$+ \gamma_1 \sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^2 \left| \xi_k - \alpha \xi_j \right|^2} \text{ öyle ki } \gamma_k \uparrow_k 1, \gamma_{k+2} > \gamma_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N},$$

$\gamma_2 = \gamma_1$, $x^* := (\xi_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ x'in azalan yeniden düzenlemesi,

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,\ Q_k \downarrow_k 0$ ve $Q_k > Q_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

olmak üzere azalan yeniden düzenleme kavramı şu şekilde tanımlanır:

$\exists$ 1-1 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ve $\exists (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ öyle ki her bir $\varepsilon_{\pi(j)} \in \{-1, 1\}$ ve $(\xi_k^*)_k = |\xi_{\pi(k)}| = \varepsilon_{\pi(k)} \xi_{\pi(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorem 1.6 $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizi* $(0, \infty)$ *aralığında herhangi bir dizi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f_n := b_n e_n$ *olacak şekilde* c_0*'da bir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi alınsın. Daha sonra* c_0*'da* $E = E_{\vec{b}}$ *kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda, E *kümesi afin* $|\!\|.|\!\|$*-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

Sonuç 1.1 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ve* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizileri* $(0, \infty)$ *aralığında herhangi dizi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\eta_n := \mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + ... + b_ne_n)$ *olacak şekilde* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi tanımlansın.*

E *kümesi* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani,*

$E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Bu durumda, E *kümesi afin* $|\!\|.|\!\|$*-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 *E kümesi bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayında boştan farklı kapalı, sınırlı, konveks alt küme olsun. $U : E \to E$ bir fonksiyon olsun.*

1. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x, y \in E$ için $U((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)U(x) + \lambda U(y)$ ise U'ya afin fonksiyon denir.

2. Eğer her $x, y \in E$ için $||U(x) - U(y)|| \leq ||x - y||$ ise U'ya genişlemeyen fonksiyon denir.

Ayrıca, eğer her genişlemeyen $U : E \to E$ için en az bir $z \in E$ var öyle ki $U(z) = z$ ise E kümesine genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi [S.N.T. (g.f.)]'ne sahiptir denir.

$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun ve $E \subseteq X$ olsun. E'nin kapalı konveks kabuğunu $\overline{co}(E)$ ile sembolize ederiz. Bilindiği üzere $(c_0, \|.\|_\infty)$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$c_0 := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\} .$$

Ayrıca, her $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ için $||x||_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$; ve $(\ell^1, || \cdot ||_1)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\ell^1 := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{her } x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } ||x||_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} .$$

Ayrıca sonlu sayıda sıfırdan farklı terimi olan dizilerin vektör uzayını c_{00} ile gösterilir. Öyle ki c_0 (ve ℓ^1) uzayında bulunan $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi lineer olarak c_{00} uzayını gerer.

Lennard ve Nezir'in makalesinde [10] yer alan bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayının içinde bulunabilecek bir asimtotik izometrik c_0- toplam baz dizisi tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.2 *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X'de yer alan ve aşağıdaki koşulu sağlayan bir dizi olsun; o zaman, bu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $(X, \|.\|)$ uzayında bir asimtotik izometrik (a.i.) c_0-toplam baz dizisi denir : En az bir 0'a yakınsak aza-*

lan bir dizi $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ *vardır öyle ki her* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ *için*

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right\| \leq \sup_{n\geq 1}\ (1+\varepsilon_n\ )\ \left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|$$

dir.

Eğer bir $L > 0$ *için* $(z_n/L)_{n\in\mathbb{N}}$ *bir asimtotik izometrik* c_0*-toplam baz dizisi oluyorsa* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine* $(X, \|.\|)$ *uzayında bir* L*- ölçekli asimtotik izometrik* c_0*-toplam baz dizisi denir.*

Bu tanımdan yola çıkılarak Lennard ve Nezir'in çalışması [10] ile aşağıdaki teoremler verilmiştir. Not edilmelidir ki bu tez çalışmasının üzerinde çalıştığı kümeler bu teoremlerde bahsedilen kümelerden türemiştir.

Teorem 2.1 $L \in (0,\infty)$ *olsun. Eğer bir Banach uzayı bir* L*-ölçekli asimtotik izometrik* c_0*-toplam baz dizisi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*'i içerirse,* $E := \overline{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ *kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar. Hatta bundan daha fazlası da söylenebilir: en az bir sabit noktası olmayan afin daralan* $U : E \to E$ *fonksiyonu vardır [10].*

Teorem 2.2 $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* $(0,1]$ *aralığında* $b_n \uparrow_n 1$ *olacak şekilde herhangi bir artan dizi olsun. (Yani her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $b_n \leq b_{n+1}$*). Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $f_n := b_n e_n$ *olacak şekilde* c_0*'da* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi tanımlansın. Daha sonra* c_0*'da bir* $E = E_{\vec{b}}$ *kapalı sınırlı konveks alt kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0\right\}.$$

O zaman; sabit noktası olmayan en az bir afin $||\cdot||_\infty$*-genişlemeyen* $U : E \to E$ *fonksiyonu vardır [10].*

Tanım 2.3 $(X, \|.\|)$ *bir Banach uzayı olsun.* $(X, \|.\|)$ *Banach uzayına aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda* c_0*'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir denir:*

X*'de en az bir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi ve terimleri* $(0,1)$ *aralığında yer alan* 0*'a yakınsak en az bir* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi vardır öyle ki her* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ *için*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\ (1-\varepsilon_n)\ \ |t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\ |t_n|$$

olur [3] .

Teorem 2.3 *Eğer bir $(X, \|.\|)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerirse $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini bozar [3].*

Tanım 2.4 *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olsun. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X Banach uzayında $x \in X$ noktasına zayıf yakınsadığında eğer en az bir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi bulunabiliyor öyle ki bu alt dizinin Cesaro avarajı normlu olarak x'e yakınsıyor ise yani $\lim\limits_{N\to\infty}\left\|\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_{n_k} - x\right\| = 0$ oluyorsa $(X, \|.\|)$ Banach uzayına zayıf Banach-Saks özelliğine sahiptir denir.*

Lemma 2.1 *Eğer $\{x_n\}$ dizisi ℓ^1 uzayının x noktasına zayıf* topolojisine göre yakınsak bir dizi ise, o zaman her $y \in l^1$ için*

$$r(y) = \limsup_n \|x_n - y\|_1 \text{ olmak üzere } r(y) = r(x) + \|y - x\|_1 \quad \text{dır } [7].$$

Lemma 2.2 *$(X, \ \| \,.\, \|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_n$ dizisi X'de sınırlı bir dizi olsun. Herhangi bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi için aşağıdaki şekilde tanımlanan $s : X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alınsın:*

$$s(y) = \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y\right\| \quad , \ \forall y \in X \ .$$

Bu durumda, eğer $(y_m)_m$ dizisi c_0'da x'e zayıf topolojide yakınsayan bir dizi ise, $\|\cdot\|$ normu c_0 üzerinde $\|\cdot\|_\infty$ normuna eşdeğer herhangi bir norm olmak üzere Cesaro avarajı normsal olarak x' e yakınsayan en az bir $(x_n)_n$ alt dizisi vardır (c_0 uzayının zayıf Banach-Saks özelliği sebebiyle [15]) öyle ki s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla yazılırsa $s(x) = 0$ ve $s(y) = \|y - x\|$, $\forall y \in c_0$ dır [13].

Tanım 2.5 *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için*

$$\||x\|| := \frac{1}{\gamma_1}\lim_{p\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k\left(\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|\xi_j|^p}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_1\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\left|\xi_k^* - \alpha\xi_j^*\right|$$

$$+\gamma_1\sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k^2\left|\xi_k - \alpha\xi_j\right|^2} \text{ öyle ki } \gamma_k \uparrow_k 1,\ \gamma_{k+2} > \gamma_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N},$$

$\gamma_2 = \gamma_1$, $x^* := (\xi_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ x'in azalan yeniden düzenlemesi,

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k = 1$, $Q_k \downarrow_k 0$ ve $Q_k > Q_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere azalan yeniden düzenleme kavramı şu şekilde tanımlanır:

$\exists$ 1-1 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ve $\exists(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ öyle ki her bir $\varepsilon_{\pi(j)} \in \{-1, 1\}$ ve $(\xi_k^*)_k = |\xi_{\pi(k)}| = \varepsilon_{\pi(k)}\xi_{\pi(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Bu durumda her α için $\||.\||$ normu c_0 üzerinde bir eşdeğer normdur.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Çalışmanın bu bölümünde Nezir'in [13] çalışmasında yer alan bu tez çalışmasına ilham kaynağı olan geliştirilen bir başka eş değer norm vasıtasıyla c_0'da S.N.T'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan geniş bir zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümeler ailesi tanıtılmıştır ve ilgili teoremler sunulmuştur.

3.1. c_0'da Nezir'in geliştirdiği bir diğer eş değer norma göre S.N.T.'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan geniş bir zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümeler ailesi

Tanım 3.1 *$x = (\xi_k)_k \in c_0$ için*

$$|||x|||^{\sim} : \; = \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{2^j} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{öyle ki } \gamma_k \uparrow_k 1, \; \gamma_k \text{ artan bir dizi}$$

şeklinde tanımlansın.

Kolayca görülmüştür ki aşağıda verilen sebeplerden dolayı bu norm c_0 üzerinde c_0'ın kanonik normuna yani alışılmış normuna eş değerdir.

$x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ olsun.

Bu durumda,

$$\exists N \in \mathbb{N} \;\ni\; \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = \max_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = |\xi_N| \;\; \text{olur}.$$

Ortalama kuvvet eşitsizlikleri gereğince (bkz. [8]) (ağırlık dizileri ile oluşturulmuş olan eşitsizlikler ele alınmak suretiyle),

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_{k\le N} |\xi_k| \\
&= \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_N|\} \\
&= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_N|^p}{2^N} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{|\xi_k|^p}{2^N} \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu sebeple,

$$\|x\|_{\infty} = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{2^k} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

O halde kolayca görülebilir ki tanımlanan bu norm c_0 üzerinde c_0'ın kanonik normuna yani alışılmış normuna eş değerdir.

3.1.1. Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu Nezir'in eş değer normuna göre c_0'da S.N.T.'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sağlar.

Örnek 3.1 *Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu ele alınsın. Yani , her $n \geq 1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra c_0'da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ t_n f_n : \ \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n : \ \ = f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

Kolayca görülebilir ki $E = \ \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \ \ her \ \ \alpha_n \geq 0 \ \ ve \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$. Bu durumda çok iyi bilindiği üzere E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur ve sağa kaydırma fonksiyonu (yani, $U(t_1, t_2, t_3, \ldots) : \ = (1, t_1, t_2, t_3, \ldots)$ şeklinde tanımlı $U : \ E \to E$ fonksiyonu) sabit noktasız afin $\|.\|_{\infty}$-genişlemeyen bir fonksiyondur.

Teorem 3.1 *Tanım 3.1 ile verilen $|||.|||^{\sim}$ normu için yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat E kümesi yukarıda verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}|||^{\sim} \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_{\infty} \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde verilen $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s\,(y) = \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} , \quad \forall y \in c_0 \, .$$

Bu durumda

$$s\,(y) = |||\ y - z\ |||^{\sim} , \quad \forall y \in c_0 \text{ dır.}$$

E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W := \ \overline{E}^{\sigma(l^{\infty},\, l^{1})} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \quad \text{her} \quad \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \ \right\}$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||^{\sim}$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s\,(Tz) \ &= \ \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\leq \ \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \end{aligned}$$

dır.

Fakat T afin ve $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s\,(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\leq \ \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &= \ s(z) \end{aligned}$$

olur.

Bu sebeple, $|||Tz - z|||^{\sim} \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n \ < 1$ dır.

O halde

$$\delta := \; 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := \; (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ'nın değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta}, \; \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} |||h_\lambda - z|||^{\sim} &= |||\lambda\delta e_1 + (1-\lambda)\delta(e_1+e_2)|||^{\sim} \\ &= \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \\ &= \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda|\delta \, , \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \end{aligned}$$

dır.

Şimdi

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||^{\sim}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \; \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \; \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z|||^{\sim} \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$'ı minimize eder.

Şimdi,

$$\Lambda := \; \{y \in E \; : \; |||y - z|||^{\sim} \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not edilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z|||^{\sim} = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Şimdi görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s\,(Th) \;\leq\; & \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \; \right|\right|\right|^{\sim} \\ & + \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \; \right|\right|\right|^{\sim} \end{aligned}$$

dir.

O halde T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s(Th) &\leq \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \ \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\ &= s(h) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||^{\sim}$ ve $s(h) = |||h - z|||^{\sim}$ dir.

Bu sebeple,

$|||z - Th|||^{\sim} \leq |||z - h|||^{\sim} \implies |||z - Th|||^{\sim} = |||z - h|||^{\sim} \implies Th \in \Lambda$

dir.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y - z|||^{\sim}$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

3.1.2. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $f_1 := be_1, \ \ f_2 := be_2,$ $j \geq 3$ için $f_j := e_j$) kümesi afin $|||\cdot|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Teorem 3.2 *Tanım 3.1'de verilen* $|||.|||^{\sim}$ *normu ele alınsın.* $b \in (0,1)$ *olsun.* $f_1 := be_1$*,* $f_2 := be_2$ *ve her* $n \geq 3$ *için* $f_n := e_n$ *olacak şekilde* c_0*'da bir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ *ve her* $n \geq 2$ *için* $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ *olmak üzere* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi tanımlansın ve daha sonra* c_0 *da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki* $E = E_b$ *küme ele alınsın.*

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ \eta_n : \ \ her \ \ \alpha_n \geq 0 \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} \ \alpha_n = 1\right\} .$$

Not edilmelidir ki E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur. Bu durumda E kümesi afin $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Yine Teorem 3.1 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}|||^{\sim} \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_{\infty} \underset{n}{\to} 0$ dır. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde verilen $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s(y) = \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right|\right|\right|^{\sim}, \quad \forall y \in c_0 .$$

Bu durumda

$$s(y) = |||\ y - z\ |||^{\sim}, \quad \forall y \in c_0 \text{ dır.}$$

Şimdi E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W := \overline{E}^{\sigma(l^{\infty},\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \quad \text{her} \quad \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||^{\sim}$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\right|\right|^{\sim} \end{aligned}$$

dır.

Fakat T afin ve $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \; \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| \; \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \; \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \; \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \; \right|\right|\right|^{\sim} \\ &= s(z) \end{aligned}$$

olur.

Bu sebeple, $|||Tz - z|||^{\sim} \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \; < 1$ dır.

O halde

$$\delta := \; 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := \; (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ'nın değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta}, \; \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} |||h_\lambda - z|||^{\sim} &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2|||^{\sim} \\ &= |||\lambda\delta b e_1 + (1-\lambda)\delta(be_1 + be_2)|||^{\sim} \\ &= b \lim_{p\to\infty} \sup \left\{ \gamma_1 \left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\} \\ &= b \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta \, , \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\} \end{aligned}$$

dır.

Şimdi

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \; \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]} |||h_\lambda - z|||^{\sim}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \; \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y-z|||^{\sim} \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$'ı minimize eder.

Şimdi,

$$\Lambda := \quad \{y \in E \ : \ |||y-z|||^{\sim} \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not edilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z|||^{\sim} = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Şimdi görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s\left(Th\right) \ \leq\ & \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \ \right|\right|\right|^{\sim} \\ & + \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right|\right|\right|^{\sim} \end{aligned}$$

dir.

O halde T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s\left(Th\right) \ &\leq\ \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\right|\right|^{\sim} \\ &\leq\ \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \ \right|\right|\right|^{\sim} \\ &=\ s(h) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||^{\sim}$ ve $s(h) = |||h-z|||^{\sim}$ dir.

Bu sebeple,

$$|||z - Th|||^{\sim} \leq |||z-h|||^{\sim} \implies |||z-Th|||^{\sim} = |||z-h|||^{\sim} \implies Th \in \Lambda$$

dir.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y-z|||^{\sim}$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

3.1.3. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}\right)$ **(öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$'de $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde keyfi artan bir dizi olmak üzere $j\geq 1$ için $f_j := b_j e_j$) kümesi afin $\|\!| \cdot |\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur**

Şimdi önceki bölümün sonucu daha da genelleştirilecek.

Teorem 3.3 *Tanım 3.1'de verilen $\|\!|.|\!\|^{\sim}$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde herhangi bir artan dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0'da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Bu durumda E kümesi afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Yine Teorem 3.1 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $\|\!|Tx^{(n)} - x^{(n)}|\!\|^{\sim} \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_{\infty} \underset{n}{\to} 0$. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde verilen $s : c_0 \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s(y) = \limsup_{m} \left\|\!\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \ \right|\!\right\|^{\sim} , \quad \forall y \in c_0 \ .$$

Bu durumda

$$s(y) = \|\!| \ y - z \ |\!\|^{\sim} , \quad \forall y \in c_0 \text{ dır.}$$

Şimdi E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W := \ \overline{E}^{\sigma(l^{\infty},\, l^1)} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \quad \text{her} \ \ \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||^{\sim}$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_m \left\| \left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \right\| \right|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left\| \left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right\| \right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left\| \left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \right|^{\sim} \end{aligned}$$

dır.

Fakat T afin ve $|||.|||^{\sim}-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left\| \left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right\| \right|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left\| \left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \right|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left\| \left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \right\| \right|^{\sim} \\ &= s(z) \end{aligned}$$

olur.

Bu sebeple, $|||Tz - z|||^{\sim} \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 1$ dır.

O halde

$$\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ'nın değerleri

$\left[-\frac{\sigma_1}{\delta},\ \frac{\sigma_2}{\delta}+1\right]$ kümesinden alınır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z|||^{\sim} &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2|||^{\sim} \\
&= |||\lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1e_1 + b_2e_2)|||^{\sim} \\
&= \lim_{p\to\infty}\sup\left\{\gamma_1\left[\frac{{b_1}^p\delta^p}{2} + \frac{{b_2}^p|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \\
&= b_2\lim_{p\to\infty}\sup\left\{\gamma_1\left[\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^p\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \\
&\leq b_2\max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta\,, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi

$$\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||^{\sim}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü eşitsizliğin sağ tarafının minimum değeride 0 dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y\in E$ ve her $z\in W\setminus E$ için $|||y-z|||^{\sim}\geq\Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0}\in E$ $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$'ı minimize eder.

Şimdi,

$$\Lambda := \quad \{y\in E\ :\ |||y-z|||^{\sim}\leq\Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not edilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z|||^{\sim} = \Gamma$ olup $\Lambda\neq\emptyset$ ve $\Lambda\subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Şimdi görülebilir ki her $h\in\Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s\,(Th) \quad \leq \quad & \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \; \right|\right|\right|^{\sim} \\
& +\limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \; \right|\right|\right|^{\sim}
\end{aligned}$$

dir.

O halde T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s\,(Th) &\leq \limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \right\|^{\sim} \\ &\quad + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|^{\sim} \\ &\leq \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \right\|^{\sim} \\ &= s(h) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = \|Th - z\|^{\sim}$ ve $s(h) = \|h - z\|^{\sim}$ dir.

Bu sebeple,

$$\|z - Th\|^{\sim} \leq \|z - h\|^{\sim} \Longrightarrow \|z - Th\|^{\sim} = \|z - h\|^{\sim} \Longrightarrow Th \in \Lambda$$

dir.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $\|y - z\|^{\sim}$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

3.1.4. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$'de yakınsak bir dizi olmak üzere $j \geq 1$ için $f_j := b_j e_j$) kümesi afin $\|\cdot\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Şimdi önceki bölümün sonucu daha da genelleştirilecek.

Teorem 3.4 *Tanım 3.1'de verilen $\|.\|^{\sim}$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\kappa > 0$ sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kümesini aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \;\; 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Yine Teorem 3.1 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $\|\!|Tx^{(n)} - x^{(n)}|\!\|^{\sim} \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_{\infty} \underset{n}{\to} 0$. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde verilen $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s(y) = \limsup_m \left\|\!\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right|\!\right\|^{\sim}, \quad \forall y \in c_0 .$$

Bu durumda

$$s(y) = \|\!| y - z |\!\|^{\sim}, \quad \forall y \in c_0 \text{ dır.}$$

Şimdi E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$W := \overline{E}^{\sigma(l^{\infty},\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \quad \text{her } \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = \|\!|Tz - z|\!\|^{\sim}$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
s(Tz) &= \limsup_m \left\|\!\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \right|\!\right\|^{\sim} \\
&\leq \limsup_m \left\|\!\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right|\!\right\|^{\sim} \\
&\quad + \limsup_m \left\|\!\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\!\right\|^{\sim}
\end{aligned}$$

dır.

Fakat T afin ve $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned}
s(Tz) &\leq \limsup_m \left\|\!\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right|\!\right\|^{\sim} \\
&\quad + \limsup_m \left\|\!\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\!\right\|^{\sim} \\
&\leq \limsup_m \left\|\!\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \right|\!\right\|^{\sim} \\
&= s(z)
\end{aligned}$$

olur.

Bu sebeple, $|||Tz - z|||^{\sim} \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \ < 1$ dır.

O halde

$$\delta := \ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := \ (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ'nın değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta},\ \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z|||^{\sim} &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2|||^{\sim} \\
&= |||\lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1 e_1 + b_2 e_2)|||^{\sim} \\
&= \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\frac{{b_1}^p \delta^p}{2} + \frac{{b_2}^p |1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \\
&= \max\{b_1\,, b_2\} \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \left[\begin{array}{l} \left(\frac{b_1}{\max\{b_1\,,b_2\}}\right)^p \frac{\delta^p}{2} \\ + \left(\frac{b_2}{\max\{b_1\,,b_2\}}\right)^p \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \end{array} \right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{b_2 \gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4\max\{b_1\,,b_2\}} \end{array} \right\} \\
&\leq \max\{b_1\,, b_2\} \max\left\{ \gamma_1 |1-\lambda|\delta\,, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\}
\end{aligned}$$

olur.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||^{\sim}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü eşitsizliğin sağ tarafının minimum değeride 0 dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z|||^{\sim} \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||^{\sim}$'ı minimize eder.

$$\Lambda := \quad \{y \in E \ : \ |||y - z|||^{\sim} \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not edilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z|||^{\sim} = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s\,(Th) \;\; & \leq \;\; \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \;\right|\right|\right|^{\sim} \\ & \quad + \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \;\right|\right|\right|^{\sim} \end{aligned}$$

dir.

O halde T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s\,(Th) \;\; & \leq \;\; \limsup_m \left|\left|\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \right|\right|\right|^{\sim} \\ & \quad + \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\right|\right|^{\sim} \\ & \leq \;\; \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \;\right|\right|\right|^{\sim} \\ & = \;\; s(h) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||^{\sim}$ ve $s(h) = |||h - z|||^{\sim}$ dir.

Bu sebeple,

$$|||z - Th|||^{\sim} \leq |||z - h|||^{\sim} \implies |||z - Th|||^{\sim} = |||z - h|||^{\sim} \implies Th \in \Lambda$$

dir.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y - z|||^{\sim}$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

3.1.5. En geniş sınıf: $\overline{co}\left(\{\mu_n(b_1e_1+b_2e_2+...+b_ne_n)\ :\ n\in\mathbb{N}\}\right)$ (öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$'de keyfi bir dizi olmak üzere) kümesi afin $\|\!|\cdot|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Teorem 3.4'ün doğrudan çıkarımı olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 3.1 *Tanım 3.1'de verilen $\|\!|.|\!\|^{\sim}$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir sınırlı dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:=b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E=E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E:=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}t_nf_n:\ \ 1=t_1\geq t_2\geq\ldots\geq t_n\downarrow_n 0\right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Ayrıca Teorem 3.4'in ispatına benzer şekilde aşağıdaki genelleştirmeler doğrudan verilmiştir.

Teorem 3.5 *Tanım 3.1'de verilen $\|\!|.|\!\|^{\sim}$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:=b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E=E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E:=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}t_nf_n:\ \ 1=t_1\geq t_2\geq\ldots\geq t_n\downarrow_n 0\right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $\|\!|.|\!\|^{\sim}-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Sonuç 3.2 *Tanım 3.1'de verilen $\|\!|.|\!\|^{\sim}$ normu ele alınsın. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında öyle bir diziki her $N\in\mathbb{N}$ için $\Gamma\leq\gamma_N$ olacak şekilde $\Gamma>0$ var ve $\sigma:=\sum\limits_{n=2}^{\infty}|\mu_n-\mu_{n-1}|<\infty$ olsun. Kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\lambda\in(0,\infty)$ sayısına yakınsasın. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\eta_n:=\mu_n(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4+....+b_ne_n)$ olacak şekilde bir dizi tanımlansın. Ayrıca kabul edilsin ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt c_0-toplam tahminini sağlasın. Yani, kabul edilsin ki $\exists K\in(0,\infty)$ var öyle ki $\forall\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_{00}$ için $K\sup\limits_{n\geq1}\left|\sum\limits_{j=n}^{\infty}\alpha_j\right|\leq$*

$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j\right\|$ *dır.* E *kümesi* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani,* $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ *olsun.*

Bu durumda E *kümesi afin* $|||.|||^{\sim}-$*genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

Sonuç 3.3 *Tanım 3.1'de verilen* $|||.|||^{\sim}$ *normu ele alınsın.* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ve* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizileri* $(0,\infty)$ *aralığında herhangi dizi olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\eta_n := \mu_n(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4+....+b_ne_n)$ *olacak şekilde* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi tanımlansın.* E *kümesi* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani,* $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ *olsun.*

Bu durumda E *kümesi afin* $|||.|||^{\sim}-$*genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ise bu çalışmada yapılmış literatürde yeni çalışmalar olan ve bir önceki bölümde tanıtılmış Nezir'in [13] çalışmasında yer alan eş değer norm ile elde edilmiş sonuçlara benzerlik gösteren, bu sayede Nezir'in eş değer normunun c_0'da S.N.T.'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sağlayan geniş sınıfların elde edilmesinde tek olmadığını gösteren, sonuç olarak bu tez çalışmasında geliştirilen yeni bir eşdeğer norm ile elde edilen bulgular verilmiştir. Öncelikle gösterilmiştir ki tanımlanan eş değer norma göre c_0 Banach uzayı c_0'ın alışılmış normuna göre bir asimtotik izometrik kopyasını içermez. Dolayısıyla bulunan eş değer norm P.K. Lin'in [11] çalışmasının c_0-analoğunu elde etmek için güzel bir adaydır. Çalışmanın ana sonucu olarak ise tanımlanan eş değer norma göre c_0'da S.N.T.'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan çok daha geniş zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler aileleri gösterilmiştir.

4.1. Geliştirdiğimiz eş değer norma göre c_0 Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermez

Teorem 4.1 *c_0 üzerinde tanımlanan ve Tanım 2.5 ile verilen eş değer normu ele alınsın. Bu durumda, eğer $|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ ise $(c_0, \ |||\cdot|||)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içermez.*

İspat Olmayana ergi yöntemi ile kabul edilsin ki $(c_0, \ |||\cdot|||)$ Banach uzayı c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içersin. Yani, $(0,1)$ aralığında 0 a azalarak yakınsayan en az bir $(\varepsilon_n)_n$ dizisi ve c_0'da en az bir $(x_n)_n$ dizisi vardır öyle ki

$$\heartsuit \left[\begin{array}{l} \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ ve keyfi skalarler } t_1, t_2, \ldots, t_n \text{ için} \\ \max\limits_{1\le k\le n} (1-\varepsilon_k)|t_k| \le \left|\left|\left| \sum\limits_{k=1}^{n} t_k x_k \right|\right|\right| \le \max\limits_{1\le k\le n} |t_k| . \end{array} \right]$$

$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olsun; bu durumda $Q_1 > \frac{2|\alpha|}{1+2|\alpha|}$.

O halde, $\frac{1}{\gamma_1}2|\alpha| > 2 > 1$, $|2\alpha - 1| > |\alpha|$ ve bu durumda kabul edileblir ki aşağıdaki şekilde tanımlanan $|||.|||^{\sim}$ normu için de $(c_0, \ |||.|||^{\sim})$ Banach uzayı da c_0'ın bir asimtotik izometrik kopyasını içerir:

$$
\begin{aligned}
|||\ x\ |||^{\sim} \quad = \quad & \frac{1}{\gamma_1}\lim_{p\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k\left(\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|\xi_j|^p}{2^j}\right)^{\frac{1}{p}} + \gamma_1\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\left|\xi_k^{\star}-\frac{2\alpha}{\gamma_1}\xi_j^{\star}\right| \\
& +\gamma_1\sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}{Q_k}^2\left|\xi_k-\frac{2\alpha}{\gamma_1}\xi_j\right|^2} \text{ öyle ki } \gamma_k\uparrow_k 1,\ \gamma_{k+1}>\gamma_k,\ \forall k\in\mathbb{N}, \\
& x^{\star} := (\xi_j^{\star})_{j\in\mathbb{N}}\ x\text{'in azalan yeniden düzenlemesi,} \\
& \sum_{k=1}^{\infty}Q_k = 1,\ \ Q_k\downarrow_k 0 \ \text{ ve } \ Q_k > Q_{k+1},\ \ \forall k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Genelliği bozmadan kabul edilebilir ki $(x_n)_n$ dizisi 0 yakınsar. Aslında $\heartsuit$ eşitsizliğinin sağ tarafı gösterir ki $(x_n)_n$ dizisi 0 a zayıf yakınsar.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n = (\xi_j^n)_j$ şeklinde tanımlansın.

Not edilmelidir ki her $x \in c_0$ için öyle $L > 1$ vardır ki $\|x\|_\infty \geq |||\frac{x}{L}|||^{\sim}$ ve benzer şekilde $|||.|||^{\sim}$ normu için de bu eşitsizlik sağlanır. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak kabul edilebilir ki en az bir $s \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|x_s\|_\infty > \frac{1}{|2\alpha-\gamma_1|}$. Bu gerçekten söylenebilir çünkü $L > 1$ olup $(x_n)_n$ dizisi yerine $(\frac{x_n}{L})_n$ dizisi kullanılabilir ve $\heartsuit$ eşitsizliği sıfıra azalarak yakınsayan ve $(0,1)$ aralığında yer alan $(\varepsilon_n)_n$ dizisi için geçerli olup en az bir $s\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\varepsilon_s < 1-\frac{1}{|2\alpha-\gamma_1|}$ ve $\|x_s\|_\infty \geq |||\frac{x_s}{L}|||^{\sim} > 1-\varepsilon_s > \frac{1}{|2\alpha-\gamma_1|}$ dir.

Ayrıca, söylenebilir ki en az bir $r\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\xi_r^s \neq 0$ ve normun tanımı gereğince $x_s\in c_0$ olduğundan en az bir $N^{(s)}\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\|x_s\|_\infty = |\xi^s_{N^{(s)}}| \geq |\xi_r^s|$. O halde $p=\min\{r \mid |\xi_r^s| = |\xi_{N^{(s)}}|\}$ olarak alınsın.

$\delta = \left(Q_1 - \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}\right)\frac{8|\alpha|(1+4|\alpha|)}{16|\alpha|^3+\left(68+\frac{4}{\gamma_1}\right)|\alpha|^2+\left(16+\frac{9}{\gamma_1}+8\gamma_1\right)|\alpha|+\frac{2}{\gamma_1}}$ olsun.

$N_1\geq p$ seçilsin öyle ki $\sum\limits_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k < (\frac{4}{\gamma_1}+4|\alpha|)\frac{\delta}{2}$ olsun. Sonra $N_2\in\mathbb{N}$ seçilsin öyle ki her $n \geq \max\{s,N_2\}$ için $\varepsilon_n < \min\left\{1-\frac{1}{|2\alpha-\gamma_1|}\ ,\ \delta\right\}$ olsun. Sonra ise $M\geq\max\{s,N_2\}$ seçilsin öyle ki her $j=1,2,\ldots,N_1$ ve her $n\geq M$ için $|2\alpha-\gamma_1|\left|\xi_j^n\right| < \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4\alpha\right)\delta}{8}$ ve $\left|\xi_j^n\right| < \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{8|\alpha|}$ olsun.

Not edilebilir ki $1 \geq \|x_s\|^{\sim}$ ve $1 \geq \|x_n\|^{\sim}$ olup bu sebeple her $j \in \mathbb{N}$ için $1\geq\left|\xi_j^s\right|$ ve $1\geq\left|\xi_j^n\right|$ dir.

Dolayısıyla her $n \geq M$ için

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\infty &\leq \left|\!\left|\!\left| x_n \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1}\|x_n\|_\infty + \gamma_1 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k^{\star(n)}\right| + 2|\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|\xi_j^{\star(n)}\right| \\
&\quad + \gamma_1 \sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} {Q_k}^2 \left(|\xi_k^n| + \frac{2\alpha}{\gamma_1}|\xi_j^n|\right)^2} \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\|x_n\|_\infty + 2\gamma_1 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k |\xi_k^n| \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\|x_n\|_\infty + 2\gamma_1 \sum_{k=1}^{N_1} Q_k |\xi_k^n| + 2\gamma_1 \sum_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k |\xi_k^n| \\
&< \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\|x_n\|_\infty + \frac{\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} \sum_{k=1}^{N_1} Q_k + 2 \sum_{k=1+N_1}^{\infty} Q_k \\
&< \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\|x_n\|_\infty + \frac{\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} + \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\delta \\
&< \left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\|x_n\|_\infty + \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)^2\delta}{4|\alpha|}
\end{aligned}$$

olur.

Üçgen eşitsizliği gereğince $\|x_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x_n + x_s\|_\infty + \frac{1}{2}\|x_n - x_s\|_\infty$dir. Bu sebeple ya $\|x_n + x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ ya da $\|x_n - x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ dir.

Eğer $\|x_n + x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ olduğu kabul edilirse bu durumda

$$\begin{aligned}
1 = \max\{1,1\} &\geq \left|\!\left|\!\left| x_s + x_n \right|\!\right|\!\right|^{\sim} \\
&\geq \|x_s + x_n\|_\infty + \gamma_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|(\xi_k^s + \xi_k^n)^\star - \frac{2\alpha}{\gamma_1}\left(\xi_j^s + \xi_j^n\right)^\star\right| \\
&\quad + \gamma_1 \sqrt{\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} {Q_k}^2 \left|\xi_k^s + \xi_k^n - \frac{2\alpha}{\gamma_1}\left(\xi_j^s + \xi_j^n\right)\right|^2} \\
&\geq \|x_s + x_n\|_\infty + \gamma_1 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|(\xi_k^s + \xi_k^n)^\star - \frac{2\alpha}{\gamma_1}(\xi_1^s + \xi_1^n)^\star\right| \\
&\geq \|x_s + x_n\|_\infty + Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left(\xi_1^s + \xi_1^n\right)^\star \\
&\geq \|x_n\|_\infty + Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left|\xi_p^s + \xi_p^n\right| \\
&\geq \|x_n\|_\infty + Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left|\xi_p^s\right| - Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left|\xi_p^n\right| \\
&> \frac{\gamma_1}{1 + 4\gamma_1|\alpha|} \left|\!\left|\!\left| x_n \right|\!\right|\!\right|^{\sim} - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1} + 4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} \\
&\quad + Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left|\xi_p^s\right| - Q_1 |2\alpha - \gamma_1| \left|\xi_p^n\right| .
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\begin{aligned}
1 &> \frac{\gamma_1}{1+4|\alpha|}|||x_n|||^{\sim} - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} \\
&\quad +Q_1 - |2\alpha-\gamma_1|\left|\xi_p^n\right| \\
&> \frac{\gamma_1}{1+4|\alpha|}(1-\varepsilon_n) - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} + Q_1 - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{8} \\
&> \frac{\gamma_1}{1+4|\alpha|}(1-\delta) - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{4|\alpha|} + Q_1 - \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}+4|\alpha|\right)\delta}{8} \\
&= 1 + Q_1 - \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|} \\
&\quad -\delta\left(\frac{16|\alpha|^3+\left(36+\frac{4}{\gamma_1}\right)|\alpha|^2+\left(8+\frac{9}{\gamma_1}+8\gamma_1\right)|\alpha|+\frac{2}{\gamma_1}}{8|\alpha|(1+4|\alpha|)}\right) \\
&> 1+\delta
\end{aligned}$$

olup bu mümkün değildir (çelişki).

Aynı şekilde eğer $\|x_n - x_s\|_\infty \geq \|x_n\|_\infty$ olduğu kabul edilirse de görülebilir ki benzer çelişkiye düşülür.

4.2. Ana sonuç: c_0'da geliştirdiğimiz eşdeğer norma göre afin genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'ye sahip kümeler

Bu bölümde çalışmada geliştirilen eş değer norma göre c_0'da S.N.T'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için koruyan çok daha geniş zayıf kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks kümeler aileleri gösterilmiştir. Bu sonuç adım adım en geniş sınıf elde edilene kadar verilmiştir.

4.2.1. Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu bizim eş değer normumuza göre c_0'da S.N.T.'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sağlar.

Örnek 4.1 *Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu ele alınsın. Yani , her $n \geq 1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha* *sonra c_0'da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n : \ = f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

Kolayca görülebilir ki $E := \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : \ her \ \alpha_n \geq 0 \ ve \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}$ dir.

Bu durumda çok iyi bilindiği üzere E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur ve sağa kaydırma fonksiyonu sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir fonksiyondur.

Teorem 4.2 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5 ile verilen $|||.|||$ normu için yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.*

İspat Not edilmelidir ki

$$\left[|\alpha| > 1 \text{ ve } Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|} \right]$$

şartı c_0 ın bir asimtotik izometrik kopyasının içerilme olasılığını yok etmek için gereklidir fakat bu şartın ispatın içinde bir başka amaç için kullanılması gerekmeyecek.

E kümesi yukarıda verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}||| \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde verilen $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s\,(y) = \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \ \right|\right|\right| , \quad \forall y \in c_0 .$$

Bu durumda

$$s\,(y) = |||\ y - z\ ||| , \quad \forall y \in c_0.$$

E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$W := \ \overline{E}^{\sigma(l^\infty,\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \,\eta_n : \quad \text{her} \quad \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \ \right\}.$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \right|\right|\right| \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right|\right|\right| \\ &\quad +\limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\right|\right| \end{aligned}$$

bulunur.

Fakat T afin ve $|||.|||-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right|\right|\right| \\ &\quad +\limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right|\right|\right| \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \right|\right|\right| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple, $|||Tz - z||| \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 1$.

O halde

$$\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta},\ \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınmalıdır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z||| &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2||| \\
&= |||\lambda\delta e_1 + (1-\lambda)\delta(e_1+e_2)||| \\
&\le \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] \lim_{p\to\infty}\sup\left\{\gamma_1\left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \\
&= \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] \max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta\,, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}
\end{aligned}$$

olur.

$$\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü eşitsizliğin sağ tarafının minimum değeride 0 dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z||| \ge \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||$'ı minimize eder.

$$\Lambda := \{y \in E \ : \ |||y - z||| \le \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not dilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z||| = \Gamma$ olup $\Lambda \ne \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s\left(Th\right) \le\ & \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \ \right|\right|\right| \\
& + \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \ \right|\right|\right|
\end{aligned}$$

dır.

T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned}
s\left(Th\right) &\le \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \ \right|\right|\right| \\
&\quad + \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \ \right|\right|\right| \\
&\le \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - h \ \right|\right|\right| \\
&= s(h)
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||$ ve $s(h) = |||h - z|||$ dir.

Bu sebeple,

$|||z - Th||| \leq |||z - h||| \implies |||z - Th||| = |||z - h||| \implies Th \in \Lambda$ dır.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y - z|||$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

4.2.2. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $f_1 := be_1, \ f_2 := be_2$, $j \geq 3$ için $f_j := e_j$) kümesi afin $|||\cdot|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Teorem 4.3 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5'de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$ ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0'da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.*

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve daha sonra c_0 da kapalı, sınırlı, konveks olan aşağıdaki $E = E_b$ kümesi ele alınsın.

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ \eta_n : \ \textit{her} \ \alpha_n \geq 0 \ \textit{ve} \ \sum_{n=1}^{\infty} \ \alpha_n = 1\right\}.$$

Not edilmelidir ki E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur. Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Aynı şekilde,

$$\left[|\alpha| > 1 \text{ ve } Q_1 > \frac{1 - \gamma_1 + 4|\alpha|}{1 + 4|\alpha|}\right]$$

şartı c_0 ın bir asimtotik izometrik kopyasının içerilme olasılığını yok etmek için gereklidir fakat bu şartın ispatın içinde bir başka amaç için kullanılması gerekmeyecektir.

Yine Teorem 4.2 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}||| \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde erilen $s : c_0 \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s\,(y) = \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \ \right|\right|\right| \ , \quad \forall y \in c_0 \ .$$

Bu durumda

$$s\,(y) = ||| \ y - z \ ||| \ , \quad \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$W := \ \overline{E}^{\sigma(l^\infty,\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \ \text{ her } \ \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \ \right\}.$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s\,(Tz) \ &= \ \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \ \right|\right|\right| \\ &\leq \ \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \ \right|\right|\right| \\ &\quad +\limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right|\right|\right| \end{aligned}$$

bulunur.

Fakat T afin ve $|||.|||-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s\,(Tz) \ &\leq \ \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \ \right|\right|\right| \\ &\quad +\limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right|\right|\right| \\ &\leq \ \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \ \right|\right|\right| \\ &= \ s(z) \end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple, $|||Tz - z||| \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 1$.

O halde

$$\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta},\ \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınmalıdır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z||| &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2||| \\
&= |||\lambda\delta b e_1 + (1-\lambda)\delta(b e_1 + b e_2)||| \\
&\leq \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] b \lim_{p\to\infty} \sup \left\{ \gamma_1 \left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} \\
&= \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] b \max\left\{ \gamma_1 |1-\lambda|\delta\,,\ \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4} \right\}
\end{aligned}$$

olur.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü eşitsizliğin sağ tarafının minimum değeride 0 dır ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z||| \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||$'ı minimize eder.

$$\Lambda := \{y \in E\ :\ |||y - z||| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not dilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z||| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$
\begin{aligned}
s\left(Th\right) \ \leq \ & \limsup_{m} \left\| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \ \right\| \\
& + \limsup_{m} \left\| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right\|
\end{aligned}
$$

dır.

T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$
\begin{aligned}
s\left(Th\right) \ \leq \ & \limsup_{m} \left\| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \ \right\| \\
& + \limsup_{m} \left\| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \ \right\| \\
\leq \ & \limsup_{m} \left\| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \ \right\| \\
= \ & s(h)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Ayrıca, $s(Th) = \|Th - z\|$ ve $s(h) = \|h - z\|$ dir.

Bu sebeple,

$\|z - Th\| \leq \|z - h\| \implies \|z - Th\| = \|z - h\| \implies Th \in \Lambda$ dır.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $\|y - z\|$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

4.2.3. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$'de $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde keyfi artan bir dizi olmak üzere $j \geq 1$ için $f_j := b_j e_j$) kümesi afin $\|\cdot\|-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Bu bölümde önceki bölümün sonucu daha da genelleştirilmiştir.

Teorem 4.4 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5"de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $b_n \uparrow_n 1$ olacak şekilde herhangi bir artan dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0' da $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \quad 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\} .$$

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Aynı şekilde,

$$\left[|\alpha| > 1 \text{ ve } Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|} \right]$$

şartı c_0 ın bir asimtotik izometrik kopyasının içerilme olasılığını yok etmek için gereklidir fakat bu şartın ispatın içinde bir başka amaç için kullanılması gerekmeyecektir.

Yine Teorem 4.2 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}||| \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde erilen $s : c_0 \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s\left(y\right) = \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \ \right|\right|\right| \ , \quad \forall y \in c_0 \, .$$

Bu durumda

$$s\left(y\right) = |||\ y - z \ ||| \, , \quad \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$W := \ \overline{E}^{\sigma(l^\infty,\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \eta_n : \quad \text{her} \quad \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}.$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) &= \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - Tz \right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right\| \\ &\quad +\limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

Fakat T afin ve $\|.\|-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s\left(Tz\right) &\leq \limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \right\| \\ &\quad +\limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\| \\ &\leq \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \right\| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple, $\|Tz - z\| \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \ < 1$.

O halde

$$\delta := \ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := \ (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta},\ \frac{\sigma_2}{\delta}+1\right]$ kümesinden alınmalıdır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \|h_\lambda - z\| &= \|\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2\| \\ &= \|\lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1e_1 + b_2e_2)\| \\ &\leq \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \left[\frac{{b_1}^p\delta^p}{2} + \frac{{b_2}^p|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{\gamma_2 b_2|1-\lambda|\delta}{4} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
|||h_\lambda - z||| &\leq \left[2(1+|\alpha|)+\frac{1}{\gamma_1}\right] b_2 \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \left[\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^p \frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \end{array} \right\} \\
&\leq \left[2(1+|\alpha|)+\frac{1}{\gamma_1}\right] b_2 \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta \, , \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü

$$\Gamma \leq \left[2(1+|\alpha|)+\frac{1}{\gamma_1}\right] \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} b_2 \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta \, , \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4} \right\} = 0$$

ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z||| \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||$'ı minimize eder.

$$\Lambda := \{y \in E \ : \ |||y-z||| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not dilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z||| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned}
s\left(Th\right) \leq\ & \limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \right\| \\
& + \limsup_m \left\| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \right\|
\end{aligned}$$

dır.

T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$
\begin{aligned}
s\,(Th) &\le \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \; T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Th \; \right|\!\right|\!\right| \\
&\quad + \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \; \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \; \right|\!\right|\!\right| \\
&\le \limsup_m \left|\!\left|\!\left| \; \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - h \; \right|\!\right|\!\right| \\
&= s(h)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||$ ve $s(h) = |||h - z|||$ dir.

Bu sebeple,

$|||z - Th||| \le |||z - h||| \implies |||z - Th||| = |||z - h||| \implies Th \in \Lambda$ dır.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y - z|||$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

4.2.4. $\overline{co}\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ (öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$'de yakınsak bir dizi olmak üzere $j \ge 1$ için $f_j := b_j e_j$) kümesi afin $|||\cdot|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Bu bölümde sonucumuz daha da genelleştirilmiştir.

Teorem 4.5 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5'de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $\vec{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\kappa > 0$ sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0' da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$
E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \;\; 1 = t_1 \ge t_2 \ge \ldots \ge t_n \downarrow_n 0 \right\} .
$$

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat Aynı şekilde,

$$\left[|\alpha| > 1 \text{ ve } Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}\right]$$

şartı c_0 ın bir asimtotik izometrik kopyasının içerilme olasılığını yok etmek için gereklidir fakat bu şartın ispatın içinde bir başka amaç için kullanılması gerekmeyecek.

Yine Teorem 4.2 ispatında uygulanan teknik burada da kullanılabilir.

E kümesi teoremin hipotezinde verildiği gibi tanımlansın ve $T : E \to E$ herhangi bir afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi vardır öyle ki $|||Tx^{(n)} - x^{(n)}||| \underset{n}{\to} 0$ ve dolayısıyla $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan ve gerekirse bir alt diziye geçiş yaparak söylenebilir ki en az bir $z \in c_0$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z noktasına zayıf topolojide yakınsar. O zaman Lemma 2.2 gereğince, bu alt dizi vasıtasıyla aşağıdaki şekilde erilen $s : c_0 \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$s(y) = \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - y \right|\right|\right| , \quad \forall y \in c_0 .$$

Bu durumda

$$s(y) = |||\ y - z\ ||| , \quad \forall y \in c_0 \text{ dir.}$$

E kümesinin zayıf kapanışı olan küme aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$W := \overline{E}^{\sigma(l^\infty,\, l^1)} = \left\{ \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \eta_n : \quad \text{her} \quad \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \leq 1 \right\}.$$

Durum 1: $z \in E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda $s(Tz) = |||Tz - z|||$ dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_m \left|\left|\left| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - Tz \right|\right|\right| \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Tz \right|\right|\right| \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \right|\right|\right| \end{aligned}$$

bulunur.

Fakat T afin ve $|||.|||-$genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Tz) &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \, T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) - Tz \, \right|\right|\right| \\ &\quad +\limsup_m \left|\left|\left| \, \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \, \right|\right|\right| \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \, \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - z \, \right|\right|\right| \\ &= s(z) \end{aligned}$$

dır.

Bu sebeple, $|||Tz - z||| \leq 0$; yani, $Tz = z$ dir.

Durum 2: $z \in W \setminus E$ olduğu varsayılsın.

Bu durumda, z şu formdadır $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n$ öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < 1$.

O halde

$$\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

ve

$$h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

olarak tanımlansın.

h_λ'nın E kümesi içinde olması amacıyla λ değerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta}, \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ kümesinden alınmalıdır; bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} |||h_\lambda - z||| &= |||\lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2||| \\ &= |||\lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1 e_1 + b_2 e_2)||| \\ &\leq \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{c} \gamma_1 \left[\frac{b_1{}^p \delta^p}{2} + \frac{b_2{}^p |1-\lambda|^p \delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{\gamma_2 b_2 |1-\lambda|\delta}{4} \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{array}{c} 2 \\ +2\alpha \\ +\frac{1}{\gamma_1} \end{array}\right] \max \left\{ \begin{array}{c} b_1, \\ b_2 \end{array} \right\} \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{c} \gamma_1 \left[\begin{array}{c} \left(\frac{b_1}{\max\{b_1,b_2\}}\right)^p \frac{\delta^p}{2} \\ +\left(\frac{b_2}{\max\{b_1,b_2\}}\right)^p \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \end{array} \right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{b_2 \gamma_2 |1-\lambda|\delta}{\max\{b_1, b_2\}} \end{array} \right\} \\ &\leq \left[2(1+|\alpha|) + \frac{1}{\gamma_1}\right] \max\{b_1, b_2\} \max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} |||h_\lambda - z|||$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, $\Gamma = 0$ dır çünkü

$$\begin{aligned} \Gamma &\leq \left[2(1+|\alpha|)+\frac{1}{\gamma_1}\right] \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \max\{b_1\,, b_2\} \max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta\,, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve bu yüzden $|||h_\lambda - z|||$ normu minimum değerini $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığında $\lambda = 1$'de tek değer olarak alır öyle ki bu minimum değer 0 dır.

Bu sebeple, eğer λ değerleri $\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\ \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]$ aralığından seçilirse her $y \in E$ ve her $z \in W \setminus E$ için $|||y - z||| \geq \Gamma$ olup bir tek $h_{\lambda_0} \in E$ $|||h_\lambda - z|||$'ı minimize eder.

$$\Lambda := \quad \{y \in E \ :\ |||y - z||| \leq \Gamma\}$$

olarak tanımlansın. Not dilmelidir ki $|||h_{\lambda_0} - z||| = \Gamma$ olup $\Lambda \neq \emptyset$ ve $\Lambda \subseteq E$ kümesi kompakt ve konveks bir kümedir .

Görülebilir ki her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s\left(Th\right) &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \ \right|\right|\right| \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \ \right|\right|\right| \end{aligned}$$

dır.

T afin ve genişlemeyen olduğundan

$$\begin{aligned} s\left(Th\right) &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \ T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right) - Th \ \right|\right|\right| \\ &\quad + \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} \ \right|\right|\right| \\ &\leq \limsup_m \left|\left|\left| \ \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - h \ \right|\right|\right| \\ &= s(h) \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, $s(Th) = |||Th - z|||$ ve $s(h) = |||h - z|||$ dir.

Bu sebeple,

$|||z - Th||| \leq |||z - h||| \implies |||z - Th||| = |||z - h||| \implies Th \in \Lambda$ dır.

Bu durumda, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ dir ve T sürekli olduğundan (genişlemeyen fonksiyonlar süreklidir), Brouwer'ın Sabit Nokta Teoremi [2] gereğince (Kompak kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sabit noktası vardır) T'nin bir sabit noktası vardır öyle ki $h = h_{\lambda_0}$ noktası $y \in E$ için $|||y - z|||$ yi minimumlaştıran tek nokta olup $Th = h$ dır.

Bu sebeple, arzu edildiği gibi E kümesi S.N.T. (g.f.)'ye sahiptir.

4.2.5. En geniş sınıf: $\overline{co}\left(\{\mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n)\ :\ n \in \mathbb{N}\}\right)$ (öyle ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$'de keyfi bir dizi olmak üzere) kümesi afin $|||\cdot|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini korur

Teorem 4.5 ispatı ile aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilecektir.

Sonuç 4.1 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5'de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir sınırlı dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_ne_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_nf_n :\ \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Teorem 4.5 'in ispatına benzer şekilde bu tez çalışmasının en genel sonuçları olarak kolayca aşağıdaki teorem ve sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.6 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5'de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_ne_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Daha sonra c_0'da $E = E_{\overrightarrow{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.*

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_nf_n :\ \ 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Sonuç 4.2 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5'de verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında öyle bir diziki her $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_N$ olacak şekilde $\Gamma > 0$ var ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| < \infty$ olsun. Kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\lambda \in (0,\infty)$ sayısına yakınsasın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + ... + b_ne_n)$ olacak şekilde bir dizi tanımlansın. Ayrıca kabul edilsin ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt c_0-toplam tahminini sağlasın. Yani, kabul edilsin ki $\exists K \in (0,\infty)$ var öyle ki $\forall\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için $K \sup_{n\geq 1} \left|\sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j\right\|$ dır. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ olsun.*

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Sonuç 4.3 *$|\alpha| > 1$ ve $Q_1 > \frac{1-\gamma_1+4|\alpha|}{1+4|\alpha|}$ olmak üzere Tanım 2.5' da verilen $|||.|||$ normu ele alınsın. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$ aralığında herhangi dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + ... + b_ne_n)$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E := \overline{co}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Bu durumda E kümesi afin $|||.|||-$genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında c_0 üzerinde bir eş değer norm $|||\cdot|||$'u tanımlanmıştır ve gösterilmiştir ki c_0 uzayında zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir aile vardır öyle ki bu aile afin $|||\cdot|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'yi korur. Bu sonuçdan önce geliştirilen eş değer norma göre c_0 Banach uzayı kendisinin kanonik normuna göre asimtotik izometrik kopyasını içermez sonucu sunulmuştur. Bu sebeple bulunan eş değer norm çok geniş ailelerde S.N.T.'yi koruma ihtimali tanıyabilecek bir normdur ve bu çalışma bu konuda araştırmalara odaklanmıştır.

Genel bulgular arasında aşağıdaki kümeler üzerinde sonuca varılmıştır. $\overrightarrow{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ herhangi bir reel terimli ve $0 < m := \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$, $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n < \infty$ olacak şekilde sınırlı dizi olmak üzere bu dizi yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n\, e_n$ ve $\eta_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$ alınarak kurulan $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu $E = \overline{\mathrm{co}}(\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\})$ kümesi ele alınsın. Çalışmada gösterilmektedir ki bu şekilde tanımlı kümeler afin $|||\cdot|||$-genişlemeyen fonksiyonlar için S.N.T.'yi korur. Sonrasında bu sonuç $0 < b_n$ ile $0 < \gamma_n$ keyfi seçildiğinde $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n)$ dizisinin kapalı konveks kabuğuna genelleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] D. E. Alspach. A fixed point free nonexpansive map. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82(3):423–424, 1981.

[2] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71:97–115, 1912.

[3] P. Dowling, C. Lennard, and B. Turett. Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 219:377–391, 1998.

[4] P. Dowling, C. Lennard, and B. Turett. Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(6):1659–1666, 2004.

[5] T. Everest. *Fixed points of nonexpansive maps on closed, bounded, convex sets in l^1*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2013.

[6] T. Gallagher, C. Lennard, and R. Popescu. Weak compactness is not equivalent to the fixed point property in c. *J. Math. Anal. Appl.*, 431(1):471–481, 2015.

[7] K. Goebel and T. Kuczumow. Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. *Colloquium Mathematicae*, 40(2):259–264, 1979.

[8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pølya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[9] C. Lennard and V. Nezir. Exploring fixed point properties for certain c_0-summing basic sequences in c_0. In preparation.

[10] C. Lennard and V. Nezir. The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 381:678–688, 2011.

[11] P. K. Lin. There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property. *Nonlinear Analysis*, 68:2303–2308, 2008.

[12] B. Maurey. *Points fixes contractions de certains faiblement compacts de L^1*. Seminaire d'Analyse Fonctionelle, 1980-1981, Centre de Mathématiques, École Polytech., Palaiseau, Exp. No. VIII, 19 pp., 1981.

[13] V. Nezir. Renorming c_0 and affine fixed point property. Submitted.

[14] V. Nezir. *Fixed point properties for c_0-like spaces*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2012.

[15] C. Nuñez. Characterization of Banach spaces of continuous vector valued functions with the weak banach-saks property. *Illinois Journal of Mathematics*, 33(1):27–41, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Serap Oran
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Kars 10.02.1992
Telefon : 05372852449
e-mail : seraporann@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Kurum	Bitirme Yılı
Lise	Cumhuriyet Lisesi, Kars	2008
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik	2012
Yüksek Lisans	Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik	2017

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2014-2017	Arpaçay Anadolu Lisesi, Kars	Öğretmen
2017-güncel	Atatürk Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Kars	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

Matematik, Sabit Nokta Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Veysel Nezir, Serap Oran (2017). Weak Compactness in c_0 is not equivalent to fixed point property for affine nonexpansive mappings when c_0 is renormed, International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), 18-21 Nisan 2017, Antalya. (Serap Oran tarafından Sözlü yazılı Bildiri)

Veysel Nezir, Serap Oran (2017). A large class of nonweakly compact subsets in c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings when c_0 is renormed, hakem değerlendirmesinde.