T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNU İÇEREN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KONVEKSLİĞİ İÇİN YETER ŞARTLAR

Saip Emre YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR

MAYIS-2018
KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNU İÇEREN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KONVEKSLİĞİ İÇİN YETER ŞARTLAR

Saip Emre YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR

MAYIS-2018

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Saip Emre YILMAZ'ın Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Mittag-Leffler Fonksiyonunu İçeren İntegral Operatörlerinin Konveksliği İçin Yeter Şartlar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . . ile kabul edilmiştir.

…/…/2018

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA**	....
Üye	**: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**	....
Üye	**: Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza
Saip Emre YILMAZ
Tarih

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

MITTAG-LEFFLER FONKSİYONUNU İÇEREN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN KONVEKSLİĞİ İÇİN YETER ŞARTLAR

Saip Emre YILMAZ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR

Bu tez çalışmasında ilk olarak $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$ ile gösterilen normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren analitik fonksiyonların

$$F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}(z)=\int_0^z \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t}\right)^{q_k} dt, \quad z\in\mathbb{U}$$

ve

$$G^{\beta}_{\lambda,\mu}(z)=\left\{\beta\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt\right\}^{1/\beta}, \quad z\in\mathbb{U}$$

integral operatörleri tanımlanmıştır. Daha sonra, bu integral operatörlerinin $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olması için yeter şartlar elde edilmiştir.

2018, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Konveks fonksiyon, İntegral operatörü, Normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu.

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVEXITY OF INTEGRAL OPERATORS INVOLVING MITTAG-LEFFLER FUNCTION

Saip Emre YILMAZ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, we defined

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\int_0^z \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t}\right)^{q_k} dt, \quad z\in\mathbb{U}$$

and

$$G_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)=\left\{\beta\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt\right\}^{1/\beta}, \quad z\in\mathbb{U}$$

integral operators of analytic functions involving $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$ normalized Mittag-Leffler functions. Then, we obtained sufficient conditions to belong $\mathcal{C}(\alpha)$ of these integral operators.

2018, 51 pages

Key Words: Analytic functions, Univalent function, Convex function, Integral operator, Normalized Mittag-Lefffler function.

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Murat ÇAĞLAR'a, bölümümüzün doktora öğrencisi Adem YOLCU'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme teşekkür ederim.

Saip Emre YILMAZ

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert < 1\}$ açık birim disk
$D(z_0, r)$	Açık disk
$\overline{D(z_0, r)}$	Kapalı disk
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \left\{ f : f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z),\ \mathbb{U} \text{ da analitik} \right\}$
$\mathcal{S}$	$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z),\ \mathbb{U} \text{ da ünivalent ve } f(0) = f'(0) - 1 = 0 \right\}$
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z),\ \mathbb{U} \text{ da yıldızıl} \right\}$
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z),\ \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden yıldızıl} \right\}$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z),\ \mathbb{U} \text{ da konveks} \right\}$
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z),\ \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden konveks} \right\}$
$\mathcal{P}$	$p(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\Gamma(z)$	Gama fonksiyonu
$(a)_n$	Pochhammer (Apell) sembolü
$F(a, b; c; z)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_qF_r(a_1, \ldots, a_q; b_1, \ldots, b_r; z)$	Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu
$E_\lambda(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\lambda,\mu}(z)$	Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$	Normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu

1. GİRİŞ

En basit anlamda geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu kompleks değerli fonksiyonların resim bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitik özelliklerini incelemektir. Görüntü kümeleri önemli özellikler taşıyan fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılmıştır. Bilim adamlarının birçoğu da bu sınıflara ait bir çok kriter elde etmeye çalışmıştır. Bu sınıflardan en çok üzerinde durulanları ünivalent, konveks, yıldızıl, ... vb. fonksiyonlardır. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli ve ilgi çeken konularından birisidir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has altkümesini birim diske konform tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile anlaşılmıştır. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Bu yüzden bu alanda çalışma yapan birçok bilim adamı birim diskte tanımlanan fonksiyonları incelemişlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

birim diskinde ünivalent ve $f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonlar sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe [17], $n = 2$ için $\mathcal{S}$ sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ tipindeki bir fonksiyonun resminin $\left\{ z : |z| < \frac{1}{4} \right\}$ diskini içerdiği sonucuna varmıştır. Bir başka deyişle $\mathbb{U}$ birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsü olan kümenin sınırının orijine olan uzaklığının $1/4$ ten küçük olamayacağını ispatlamıştır.

Geometrik fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden birisi de verilen bir analitik fonksiyonun konveks olup olmadığının araştırılmasıdır. Özellikle ters sınır değer problemlerinin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik, ünivalentlik kriteri ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan konvekslik kriteri, bu alanda çalışmak isteyenler için bir ilham kaynağı olmuştur.

1913 yılında Study, "Bir ünivalent dönüşümün birim disk üzerinde konveks olması" gerçeğini yani bu tür dönüşümlerin orijin merkezli 1 den küçük yarıçaplı her bir diski bir konveks bölge üzerine dönüştürdüğünü ifade etmiştir.

1915 yılında Alexander [1], bir $f(z)$ fonksiyonunu birim disk içine bire-bir olarak dönüştürmek için sık kullanılan klasik yöntemlerden daha fazla işlerliğe sahip olan bazı gerekli koşullar elde etmeyi amaçladığı bir çalışmasını yayınlamıştır. Ayrıca 1915 de Alexander $f'(z) \in \mathcal{P}$ ise $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da ünivalent bir fonksiyon olduğunu göstermiştir. Burada $\mathcal{P}$, $\mathbb{U}$ da analitik, $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ ve $p(0) = 1$ şartını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfıdır. Noshiro ve Warshawski [23, 31], bu fonksiyonun daha genel bir hali olan 'Konveks bir $\mathbb{U}$ bölgesinde $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha} f'(z)\} > 0$ ise $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir' teoremini vermiştir.

1916 yılında Bieberbach [8] tarafından ileri sürülen $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2, 3, ...$ için $|a_n| \leq n$ tahmini uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1984 yılına kadar bu tahmin sadece $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ katsayıları için sağlanabilirken 1985 yılında Brange's [10] tarafından tüm a_n değerleri için ispatlanmıştır. Bu aşamalar aşağıdaki gibidir.

$n=2$ için $\quad |a_2| \leq 2 \quad$ Bieberbach (1916)

$n=3$ için $\quad |a_3| \leq 3 \quad$ Löwner (1923)

$n=4$ için $\quad |a_4| \leq 4 \quad$ Garabedian ve Schiffer (1955)

$n=5$ için $\quad |a_5| \leq 5 \quad$ Pederson ve Schiffer (1972)

$n=6$ için $\quad |a_6| \leq 6 \quad$ Pederson ve Ozawa (1968-1969)

Tüm n'ler için $\quad |a_n| \leq n \quad$ L. De Branges (1985)

1985 yılında elde edilen bu çözüm ünivalent fonksiyonlar teorisini zenginleştirmiştir ve birçok yeni problemin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bieberbach tahmininin Branges tarafından çözülmesine kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu altsınıflara ait fonksiyonlarla ilgili çeşitli bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıflardan en çok ilgi gören iki sınıf yıldızıl (starlike) ve konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. İlerleyen yıllardaki çalışmalara ışık tutan yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

$\mathbb{U}$ birim diskini bir z_0 noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmeden bir $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl bir fonksiyon denir. $z_0=0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl bir fonksiyon denir. Benzer şekilde $\mathbb{U}$ yu konveks bir bölgeye resmeden bir $f(z)$ fonksiyonuna konveks bir fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$, konveks fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{C}$ ile gösterilir. $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $zf' \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır. Robertson [27] 1936 yılında α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kavramlarını tanımlamıştır.

Birim diskte analitik olan fonksiyonlar yardımı ile tanımlı integral operatörlerinin incelenmesi uzun yıllara dayanır. İntegral operatörleri ile ilgili çalışmalar 1915 yılında Alexander tarafından başlatılmış ilerleyen zamanlarda bu operatörler genelleştirilmiş ve bu yeni operatörlerin yıldızıllığı, konveksliği, ünivalentliği gibi özellikler üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışmalarda fonksiyonlar farklı sınıflardan seçilerek integral operatörleri için çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Şu anda genelleştirilerek üzerinde çalışılan integral operatörleri aşağıdaki gibidir;
Alexander [1] operatörü

$$A[f](z)=\int_0^z \frac{f(t)}{t}dt,$$

Libera [19] integral operatörü

$$L[f](z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt,$$

Bernardi [7] integral operatörü

$$L_\gamma[f](z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt,$$

şeklindedir. Bu operatörlere uygun parametreler eklenerek daha genel halleri elde edilmiş ve bu operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir [24].

Son yıllarda bu tür integral operatörlerinde f fonksiyonu yerine farklı türev operatörleri veya özel fonksiyonlar yardımıyla yeni integral operatörleri tanımlanarak temel problemler incelenmektedir.

2010 yılında, Baricz ve Ponnusamy [5], Baricz ve Frasin [6], Frasin [15], Bessel fonksiyonları ile tanımlanan bu tür integral operatörlerinin yıldızıllığı, konveksliği ve ünivalentliği için yeter şartlar elde etmişlerdir. 2011 yılında, Deniz ve arkadaşları [12] genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartlar bulmuşlardır. 2013 yılında Deniz [11], genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin konveksliğini incelemiştir. 2017 yılında, Mustafa [22] normalize edilmiş Wright fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartlar, Daniel ve Carmen-Ioana [9] Struve ve Bessel fonksiyonlarını kullanarak genel integral operatörler için ünivalentlik kriterleri, Srivastava ve arkadaşları [30] Mittag-Leffler fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartlar elde etmişlerdir. 2018 yılında Mahmood ve arkadaşları [20] Struve fonksiyonları ile tanımlanan integral operatörlerinin konveksliğini incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında

$$\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu) z^n}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)}$$

normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren

$$F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t} \right)^{q_k} dt$$

ve

$$G^{\beta}_{\lambda,\mu}\left(z\right) = \left\{ \beta \int_0^z t^{\beta-2} \tilde{E}_{\lambda,\mu}(t) dt \right\}^{1/\beta}$$

integral operatörlerinin konveksliği için yeter şartlar elde edilmiştir.

Bu amaç doğrultusunda;

Tezin kuramsal temeller bölümü, tezde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur. Ayrıca analitik ve ünivalent fonksiyonlar kavramı tanıtılarak bu fonksiyonların oluşturduğu sınıflara ait önemli özellikler verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak verilen bölümde, tezin temel kısmını oluşturan Gama fonksiyonunun, Hipergeometrik fonksiyonların ve Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımları ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca, $F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}$ ve $G^{\beta}_{\lambda,\mu}$ integral operatörleri bu bölümde tanımlanmıştır.

Araştırma bulguları bölümünde ise, $F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}$ ve $G^{\beta}_{\lambda,\mu}$ integral operatörlerinin konveksliği için yeter şartlar elde edilmiştir. Ayrıca ana teoremlerin özel durumları olarak bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmamızda ihtiyaç duyduğumuz temel kavramlar verilecektir.

<u>*Tanım 2.1.1*</u> *(Komşuluk)*: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir. $\overline{D(z_0,r)}=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, $\partial D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember ve $\tilde{D}(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|<r\}=D(z_0,r)-\{z_0\}$ kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

<u>*Tanım 2.1.2*</u> *(İç nokta)*: $B\subset\mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0\in B$ olsun. z_0 noktasının uygun bir r komşuluğu tamamen B kümesine ait ise yani $D(z_0,r)\subset B$ olacak biçimde bir $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına B kümesinin bir iç noktası denir.

<u>*Tanım 2.1.3*</u> *(Açık ve Kapalı küme)*: Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. $r>0$ olmak üzere $D(z_0,r)$ diski bir açık küme ve $\overline{D(z_0,r)}$ kümesi de kapalı kümedir.

<u>*Tanım 2.1.4*</u> *(Bağlantılılık)*: $B\subset\mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. B kümesi boş olmayan, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, B kümesine bağlantılıdır denir. Yani $B\subseteq Y\cup Z, B\cap Z\neq\varnothing$ ve $B\cap Y\neq\varnothing$, $B\cap Y\cap Z=\varnothing$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyor ise, B kümesine bağlantılı küme denir. Bağlantılı olmayan kümeye ise bağlantısız küme denir.
Örneğin; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ bağlantılı, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise bağlantısız bir kümedir.

Tanım 2.1.5 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir. Eğer küme kapalı ise özel olarak ona da kapalı bölge denir.

Tanım 2.1.6 (Basit bağlantılı küme): B, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer B bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen B de kalıyorsa B bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Başka bir ifadeyle tümleyeni bağlantılı olan bölgenin kendisi basit bağlantılıdır. Basit bağlantılı olmayan bölgeye ise çok bağlantılı bölge adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in B$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Analitik fonksiyon): $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, B nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında analitik ise f ye B bölgesinde analitik fonksiyon adı verilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

<u>*Tanım 2.2.2*</u> *(Eğri)*: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tanımlı sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir.

Bir γ eğrisi için, $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir. Uç noktaları hariç, kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

<u>*Teorem 2.2.3*</u> *(Cauchy-Türev Formülü)*: f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır [26].

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

<u>*Tanım 2.2.4*:</u> f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler (tekil) noktası denir.

$z = z_0$, f fonksiyonunun singüler noktası ise bu durumda f, z_0 merkezli bir kuvvet serisine elbette açılamaz. Buna rağmen bir $z = z_0$ çıkarılmış singüler nokta civarında f fonksiyonunu $z - z_0$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini bulunduran ve Laurent serisi olarak isimlendirilen bir seri ile gösterebiliriz.

<u>*Tanım 2.2.5*:</u>

(i) f fonksiyonunun analitik olduğu $B(R_1; R_2) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

serisine, f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Singüler noktalar; ayrık singüler nokta ve ayrık olmayan singüler nokta diye iki kısma ayrılır.

Tanım 2.2.6:

(i) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının delinmiş bir $\tilde{D}(z_0, r)$ komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının her $\tilde{D}(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar; kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılır. Biz burada sadece kutup noktasından bahsedeceğiz.

Tanım 2.2.7 (Kutup noktası): z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir meromorf fonksiyondur.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Prensibi): f, $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değer alamaz [26] .

<u>Sonuç 2.2.10</u>: B sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonuda bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır [26].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

<u>Lemma 2.2.11</u> (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için sağlanır [26].

<u>Lemma 2.2.12</u> (Genelleştirilmiş Schwarz lemması): f, $\mathbb{U}_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ diskinde analitik ve M bir sabit olmak üzere $|f(z)|<M$ olsun. Eğer f, $z=0$ için m den daha büyük mertebeden (katlıkları dahil) bir tek sıfıra sahipse bu durumda

$$|f(z)|\leq \frac{M}{R^m}|z|^m, \quad (z\in\mathbb{U}_R)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}\left(M/R^m\right)z^m$ fonksiyonu için sağlanır [26].

<u>Tanım 2.2.13</u> (Ünivalent fonksiyon): f, $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in B$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [13].

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.14: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır [13].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı, $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.15:

(i) $f(z) = z^2$ fonksiyonu $B = \{z : 0 < |z| < 1, 0 \leq \arg z < 2\pi\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, B bölgesinde analitik ve her $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) = i\frac{1}{2}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu B bölgesinde ünivalent değildir. Eğer $C = \left\{z \in \mathbb{C} : \left(\mathrm{Re}\{z\} - 1\right)^2 + \mathrm{Im}\{z\}^2 < 1/4\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1/4\right\}$ bölgesi alınırsa $f(z) = z^2$ fonksiyonu C bölgesinde ünivalent ve dolayısıyla yerel ünivalent olur.

(ii) $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $|k| > \pi$ için yerel ünivalent fakat ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ da analitik ve $|k| > \pi$ olmak üzere her $z_0 \in \mathbb{U}$ için $f'(z) = ke^{kz} \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat $k = 2\pi$ için

$$f\left(\frac{1}{2}i\right) = f\left(-\frac{1}{2}i\right) = -1$$

olduğundan $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde ünivalent değildir.

Eğer $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in B$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f : B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu, Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.14 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

<u>Tanım 2.2.16</u> (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f fonksiyonu B bölgesinde konformdur denir.

<u>Teorem 2.2.17</u>: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur [13].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı ilk olarak 1851 yılında Riemann tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.2.18 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [13].

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı f analitik fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ da tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılacaktır. $f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{2.2}$$

biçimindeki fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Bu türdeki fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{A}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ sınıfına ait olup da ünivalent olan fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

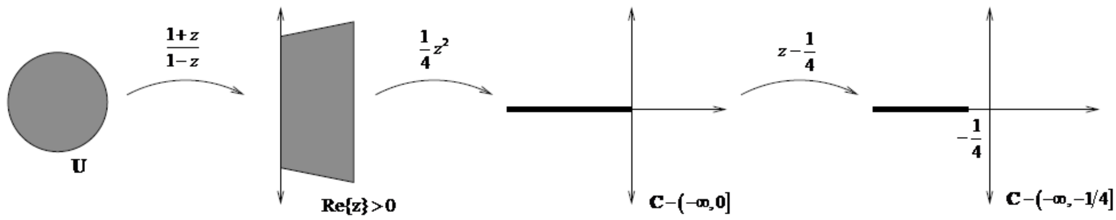
$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

(i) $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\{w = u + iv:\ \mathrm{Re}\{w\} > -1/2\}$ kümesine resmeder.

(ii) $g(z) = \dfrac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=\frac{1}{2}L\text{og}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{\frac{-\pi}{4}<\text{Im}(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

(iv) $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C}-\left(-\infty,-1/4\right]$ kümesi üzerine resmeder. Bunu göstermek için $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$ biçiminde yazalım. $\frac{1+z}{1-z}$ nin $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmettiği göz önünde tutularak aşağıdaki biçiminde geometrik olarak gösterilebilir.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir.

Örneğin;

$$f_1(z)=\frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z)=\frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z)=\frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z)+f_2'(z)=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z=\dfrac{1+i}{2}\in\mathbb{U}$ noktasında $f_1'(z)+f_2'(z)=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f_1(z)+f_2(z)\notin\mathcal{S}$ dir. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

<u>*Teorem 2.3.1*:</u> $f\in\mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [13]:

(i) Eşlenik alma: $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+\ldots$ ise, $g\in\mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{-i\theta}z)=z+\sum_{n\geq 2}a_n e^{i(n-1)\theta}z^n,\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilation): $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n\geq 2}a_n r^{n-1}z^n,\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0\in\mathbb{U}$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)},\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü (Range transformation): ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ şartını gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü (Omitted-value transformation): $w \notin f(\mathbb{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise

$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+...,\quad (z\in\mathbb{U})$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

$\mathcal{S}$ sınıfından olmayıp fakat geometrik fonksiyonlar teorisinde bir takım problemlerin çözümünde önemli rol oynayan fonksiyonlar da mevcuttur. Aşağıda bunların birkaçından bahsedilmiştir.

__*Tanım 2.3.2*:__ $\mathbb{U}$ da $p(0)=1,\ \operatorname{Re}\{p(z)\}>0$ şartlarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n\geq 1}c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [13].

$z\in\mathbb{U}$ olmak üzere $p(z)=(1+z)/(1-z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ için ünivalent değildir.

__*Tanım 2.3.3*:__ $\mathbb{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir [16].

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)},\quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ sınıfı ile ilişkili olan, $\mathcal{S}$ nin önemli alt sınıfları aşağıda verilmiştir.

<u>*Tanım 2.3.4*:</u> $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini $f(z_0)=w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna kısaca yıldızıl fonksiyon denir. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [16].

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden teorem aşağıdaki gibidir.

<u>*Teorem 2.3.5*:</u> $f\in\mathcal{A}$ olmak üzere

$$f\in\mathcal{S}^*\Leftrightarrow\frac{zf'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}$$

olur. $\forall f\in\mathcal{S}^*$ için $|a_n|\leq n$ eşitsizliği yazılır. Burada $n=2,3...$ şeklindedir [25].

Tanım 2.3.6: $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa (başka bir ifadeyle B, her noktasına göre yıldızıl ise) B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [13].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

<u>*Teorem 2.3.7*:</u> $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dir. $\forall f \in \mathcal{C}$ için $|a_n| \le 1$ eşitsizliği doğrudur. Burada $n = 2,3...$ şeklindedir [25].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasında $f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*$ biçiminde bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntı Alexander [1] tarafından bir teorem olarak ifade edilmiştir.

<u>*Teorem 2.3.8*:</u> f, konveks bir D bölgesinde bir analitik fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f, D de ünivalenttir [1], [23], [31].

<u>*Tanım 2.3.9*:</u> $f:\mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $0 \le \alpha < 1$ olsun.

i) Her $z \in \mathbb{U}$ için $f(0)=0$, $f'(0) \ne 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ise f ye α mertebeden yıldızıl fonksiyon denir.

ii) Her $z \in \mathbb{U}$ için $f'(0) \ne 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

ise f ye α mertebeden konveks fonksiyon denir. Normalize edilmiş α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile, normalize edilmiş α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir. Bu sınıflar arasında $f \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ Alexander tipi bir gerektirme vardır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan ve yukarıda tanımlarını verdiğimiz temel sınıfların küme gösterimleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$$\mathcal{A}=\left\{ f : f(z)=z+\sum_{n\geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z), \ \mathbb{U} \text{ da analitik} \right\},$$

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in\mathcal{A} : f(z), \ \mathbb{U} \text{ da ünivalent (yalınkat) ve } f(0)=0, \ f'(0)=1 \right\},$$

$$\mathcal{S}^{*}=\left\{ f\in\mathcal{A} : f(z), \ \mathbb{U} \text{ da yıldızıl} \right\}$$
$$=\left\{ f\in\mathcal{A} : \forall z\in\mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0 \right\},$$

$$\mathcal{C}=\left\{ f\in\mathcal{A} : f(z), \ \mathbb{U} \text{ da konveks} \right\}$$
$$=\left\{ f\in\mathcal{A} : \forall z\in\mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \right\},$$

$$\mathcal{S}^{*}(\alpha)=\left\{ f\in\mathcal{A} : f(z), \ \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden yıldızıl, } \alpha\in[0,1) \right\}$$
$$=\left\{ f\in\mathcal{A} : \forall z\in\mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha, \ \alpha\in[0,1) \right\},$$

$$\mathcal{C}(\alpha)=\left\{ f\in\mathcal{A} : f(z), \ \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden konveks, } \alpha\in[0,1) \right\}$$
$$=\left\{ f\in\mathcal{A} : \forall z\in\mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha, \ \alpha\in[0,1) \right\}.$$

Ayrıca her $z\in\mathbb{U}$ için $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<1-\alpha$ şartını sağlayan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}_1^{*}(\alpha)$ ile gösterilir. Bu sınıf $\mathcal{S}^{*}(\alpha)$ sınıfının alt sınıfıdır ve $zf'\in\mathcal{S}_1^{*}(\alpha)$ ise f fonksiyonu $\mathcal{C}_1(\alpha)$ sınıfındandır denir. $\mathcal{S}_1^{*}(\alpha)$ sınıfının katsayı sınırları ve diğer özellikler için Eenigenburg [14] ve Silverman [29] tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlerin yanı sıra konunun anlaşılmasını kolaylaştıracak örnekler verilmiştir.

Bu bölüme hipergeometrik fonksiyonlar başta olmak üzere özel fonksiyonlar içerisinde çok önemli bir yere sahip olan Gama fonksiyonu ile başlayalım.

3.1. Gama Fonksiyonu

Tanım 3.1.1: $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3.1}$$

fonksiyonuna gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinmektedir.

Tanım 3.1.1 analitik devam vasıtasıyla $\operatorname{Re} z < 0$ için aşağıdaki biçimde genişletilebilir. (3.1) ile verilen fonksiyon

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3.2}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı $P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ ve $Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa $P(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesi kuvvet serisine açılırsa,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^k \tag{3.3}$$

elde edilir.

Burada,

$$\int_0^1 \left|t^{z-1}\right| dt \sum_{k\geq 0} \left|\frac{(-1)^k}{k!} t^k\right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^t t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da bu integralin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (3.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$P(z) = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu durumda (3.4) serisinin $z = 0, -1, -2, ...$ noktalarında basit kutba sahip ve $\operatorname{Re} z > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (3.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, ...$ noktalarında basit kutba sahip olan meromorf bir fonksiyon olur.

$\Gamma(z)$ nin tüm kompleks düzlem için tanımı

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad z \neq 0, -1, -2, ...$$

biçiminde verilebilir.

Gama fonksiyonu ile ilgili bazı özellikler,

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...,$
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$

şeklinde sıralanabilir. Ayrıca $n = 0, 1, 2, ...$ için

- $\Gamma(n+1) = n!$

eşitliği ve $n = 1, 2, ...$ için

- $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

eşitliği vardır.

$z = 1/2$ özel değeri için

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

elde edilir. Elbette gama fonksiyonunun özellikleri bunlarla sınırlı değildir.

<u>Tanım 3.1.2</u> (Pochhammer (Apell) sembolü): Γ, gama fonksiyonunu göstermek üzere $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, ...$ olması durumunda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)...(a+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise $(a)_n = \lim_{t \to 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$ formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ eşitliği her zaman sağlanır.

3.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Matematikteki elementer fonksiyonların birçoğu hipergeometrik fonksiyonlardan ya da hipergeometrik fonksiyonların birbirine oranından elde edilebilir. c_{n+1}/c_n, oranı n nin bir rasyonel fonksiyonu ise, $\sum c_n$ ifadesi bir hipergeometrik seri belirtir. Ayrıca matematik ve fizikteki elementer olmayan fonksiyonların çoğu da yine hipergeometrik seri olarak ifade edilebilmektedir. Bu bölüm, hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara ayrılmıştır.

<u>*Tanım 3.2.1*</u>: $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, ...$ ve $(a)_n$, Pochhammer sembolü olmak üzere

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \tag{3.5}$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + \big(c - (a+b+1)z\big) w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.

Bu fonksiyon, L. Euler tarafından yaklaşık iki asır önce çalışılmıştır. Daha sonra C.F. Gauss'un bu seri üzerinde yeniden çalışmaya başlaması bu fonksiyona olan ilgiyi arttırmıştır.

a,b değişkenlerinin negatif tamsayı ya da sıfır olması durumunda yukarıdaki diferensiyel denklemin çözümü bir polinom olur ve dolayısıyla bu çözüm tüm düzlemde analitik olur. Diğer değerler için ise (3.5) serisi mutlak yakınsaktır.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bazı özellikleri;

- $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, $\operatorname{Re}c>0$, $\operatorname{Re}(c-a)>0$ ve $\operatorname{Re}(c-b)>0$ olması durumunda

$$\lim_{z\to 1} F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}b>0$, $\operatorname{Re}(a+b)>0$ ve $\operatorname{Re}(c-a-b)=0$ ise

$$\lim_{z\to 1} \frac{F(a,b;a+b;z)}{Log(1-z)}=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dir.

- $\operatorname{Re}(c-a-b)<0$, $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}b>0$ ve $\operatorname{Re}c>0$ için

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{a+b-c} F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

biçiminde verilebilir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda a,b,c nin uygun değerleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

- $F(1,1;2;-z)=\dfrac{1}{z}Log(1+z)$,
- $F(a,b;b;z)=\dfrac{1}{(1-z)^a}$,
- $F\left(\dfrac{1}{2},1;\dfrac{3}{2};z^2\right)=\dfrac{1}{2z}Log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$,
- $F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};z^2\right)=\dfrac{1}{z}\arcsin z$,

- $F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right)=\arccos z$,
- $F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right)=\frac{1}{z}\arctan z$.

Ayrıca $|z|<1$ olmak üzere aşağıda verilen ve sırasıyla $\mathcal{E}(z)$ ve $\mathcal{K}(z)$ ile gösterilen birinci ve ikinci tür Legendre eliptik integralleri de Gauss hipergeometrik fonksiyonunun birer özel durumudur.

$$\mathcal{E}(z)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^1\sqrt{\frac{1-z^2t^2}{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2\right)$$

$$\mathcal{K}(z)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2t^2)}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2\right).$$

<u>Tanım 3.2.2</u>: $q,r\geq 1$ şartını sağlayan birer tamsayı, $a_1,a_2,...,a_q;\ b_1,b_2,...,b_r$ birer kompleks sayı ve her $k\in\{1,2,...,r\}$ için $b_k\neq 0,-1,-2,...$, olmak üzere

$$_qF_r(a_1,...,a_q;b_1,...,b_r;z)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1)_n...(a_q)_n}{(b_1)_n...(b_r)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{3.6}$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu denir.

(3.6) serisi $q<r+1$ için $\mathbb{C}$ de, $q=r+1$ için ise $|z|<1$ de mutlak yakınsaktır. Bu seride özel olarak $q=2$, $r=1$, $a_1=a$, $a_2=b$ ve $b_1=c$ alınırsa (3.5) serisi elde edilir ve bu durum $_2F_1(a,b;c;z)$ veya kısaca $F(a,b;c;z)$ ile gösterilir. Ayrıca $a_1+a_2+...+a_{r+1}=b_1+b_2+...+b_r$ olması durumunda $_{r+1}F_r(a_1,...,a_{r+1};b_1,...,b_r;z)$ serisine dengelenmiş (balanced) seri denir.

$_qF_r$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu, aynı zamanda

$$\left[z\frac{d}{dz}\left[\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)...\left(z\frac{d}{dz}+b_r-1\right)\right]-z\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)...\left(z\frac{d}{dz}+a_q\right)\right]w=0$$

diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Bieberbach tahmininin çözümünde önemli bir rol oynaması bu tür fonksiyonlara olan ilgiyi artırmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için Almkvist and Berndt [2], Anderson *et al.* [3], Andrews [4] çalışmalarına bakılabilir.

Parametrelerin özel seçimiyle genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonundan elde edilen bazı fonksiyonlar,

- ${}_qF_q(a_1,...,a_q;a_1,...,a_q;z)=e^z, \quad q\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$,
- ${}_1F_0(-a\;;z)=(1-z)^a$,
- ${}_0F_1\left(\frac{1}{2}\;;-\frac{1}{4}z^2\right)=\cos z$,
- $z\,{}_0F_1\left(\frac{3}{2}\;;-\frac{1}{4}z^2\right)=\sin z$,
- $z\,{}_2F_1(1,1;2\;;z)=L\text{og}(1-z)$,
- $Erf(z)=\int_0^z e^{-t^2}dt=z\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=ze^{-z^2}\,{}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};z^2\right)$

şeklinde sıralanabilir.

Öte yandan $a,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere

$$ {}_1F_1\left(a;c;z\right)=\Phi\left(a;c;z\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1 $$

fonksiyonuna Kummer (confluent) hipergeometrik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon 1837 yılında Kummer tarafından tanımlanmış olup

$$ zw''(z)+\left(c-z\right)w'(z)-aw=0 $$

biçimindeki Kummer diferensiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonu [21], İsveçli¸ bilim adamı Gösta Mittag-Leffler (16 Mart 1846-7 Temmuz 1927) tarafından 1903 yılında tanımlanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonu ilk olarak kesirli integral denklemlerinin çözümlerinde ortaya çıkmıştır. Daha sonra, kinetik denklemlerin kesirli genelleştirilmesinde, rastgele yürüyüşlerde ve Lévy uçuşlarında kullanılmıştır [18, 21, 28]. Bu bölümde, iki klasik Mittag-Leffler fonksiyonlarının tanımı ve bazı özellikleri sunulacaktır.

<u>*Tanım 3.3.1*:</u> $z \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ olmak üzere

$$E_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + 1)} \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanan $E_\lambda(z)$ serisine Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

λ 'nın özel değerleri için aşağıdaki eşitlikleri elde edilir:

- $E_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$,
- $E_1(z) = e^z$,
- $E_2(z) = \cos\sqrt{z}$,
- $E_3(z) = \dfrac{1}{3}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-z^{1/3}/2} \cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3} z^{1/3} \right) \right],$
- $E_4(z) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(z^{1/4}\right) + \cosh\left(z^{1/4}\right) \right].$

$\lambda = n \in \mathbb{N}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $E_n(\lambda z^n)$ fonksiyonunun diferensiyel formülleri,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n\left(\beta z^n\right) = \beta E_n\left(\beta z^n\right) \tag{3.8}$$

ve

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1} E_n\left(\frac{\beta}{z^n}\right) \right] = \frac{(-1)^n \beta}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\beta}{z^n}\right) \quad (z \neq 0) \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, $\lambda = 1/n \ \left(n \in \mathbb{N} - \{1\}\right)$ olmak üzere $E_{1/n}(z)$ fonksiyonu,

$$E_{1/n}(z) = e^{z^n}\left[1 + n\int_0^z e^{-t^n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k/n)}\right)dt\right] \tag{3.10}$$

şekilinde tanımlanır.

$E_{1/n}(z)$ fonksiyonunda özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$E_{1/n}(z) = e^{z^2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt\right],$$

olup, dahası asimptotik tahminle $E_{1/n}(z) \sim 2e^{z^2} \quad \left(|z| \to \infty; |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right)$ elde edilir.

Bunlara ek olarak Mittag-Leffler fonksiyonunun integral temsili,

$$E_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{t^{\lambda-1}e^t}{t^\lambda - z}dt \tag{3.11}$$

biçiminde tanımlanır.

<u>Tanım 3.3.2</u> *(Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu)*: $z, \mu \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ olmak üzere

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + \mu)} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu adı verilir. $\mu = 1$ özel değerleri için (3.12) denkleminde verilen genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu (3.7) denkleminde tanımlanan klasik Mittag-Leffler fonksiyonuna dönüşür.

Ayrıca, (3.12) denkleminde λ ve μ özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- $E_{1,2}(z) = \dfrac{e^2 - 1}{z}$,
- $E_{2,2}(z) = \dfrac{\sinh\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}}$.

$E_{\lambda,\mu}$ fonksiyonunun tanımından da görüldüğü gibi bu fonksiyon normalize değildir yani $\mathcal{A}$ sınıfına ait değildir. Bu fonksiyonun normalize formu $\mathrm{Re}(\lambda)>0$, $\lambda,\mu,z\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{Z}_0^- =\{0,-1,...,-n,...\}$ olmak üzere $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z):\mathbb{U}\to\mathbb{C}$

$$\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)=\Gamma(\mu)zE_{\lambda,\mu}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)z^n}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\mu\right)} \tag{3.13}$$

şeklinde verilir. Buna normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu denir. (3.13) denkleminde λ ve μ parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir:

- $\tilde{E}_{0,1}(z)=\dfrac{z}{1-z}$,
- $\tilde{E}_{1,1}(z)=ze^z$,
- $\tilde{E}_{1,2}(z)=e^z-1$,
- $\tilde{E}_{1,3}(z)=\dfrac{2\left(e^z-z-1\right)}{z}$,
- $\tilde{E}_{1,4}(z)=\dfrac{6\left(e^z-z-1\right)-3z^2}{z^2}$,
- $\tilde{E}_{2,1}(z)=z\cosh\left(\sqrt{z}\right)$,
- $\tilde{E}_{2,2}(z)=\sqrt{z}\sinh\left(\sqrt{z}\right)$,
- $\tilde{E}_{2,3}(z)=2\left[\cosh\left(\sqrt{z}\right)-1\right]$,
- $\tilde{E}_{2,4}(z)=\dfrac{6\left[\sinh\left(\sqrt{z}\right)-\sqrt{z}\right]}{\sqrt{z}}$.

3.4. Analitik Fonksiyonların Bazı İntegral Operatörleri

Bu bölümde tezin ana unsuru olan aşağıdaki genelleştirilmiş integral operatörleri tanımlanmıştır.

<u>*Tanım 3.4*:</u> Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ için $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\mu_k = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. (3.13) ile tanımlanan $\tilde{E}_{\lambda,\mu}$ normalize edilmiş Mittag–Leffler fonksiyonu olmak üzere $F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}^{q_1,q_2,...,q_n}$ ve $G_{\lambda,\mu}^{\beta}$ integral operatörleri

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}^{q_1,q_2,...,q_n} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$$

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}^{q_1,q_2,...,q_n}(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t} \right)^{q_k} dt, \quad z \in \mathbb{U} \tag{3.14}$$

ve

$$G_{\lambda,\mu}^{\beta} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$$

$$G_{\lambda,\mu}^{\beta}(z) = \left\{ \beta \int_0^z t^{\beta-2} \tilde{E}_{\lambda,\mu}(t) dt \right\}^{1/\beta}, \quad z \in \mathbb{U} \tag{3.15}$$

biçiminde tanımlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde (3.14) ve (3.15) ile tanımlanan $F^{q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}$ ve $G^{\beta}_{\lambda,\mu}$ integral operatörlerinin konveksliği için yeter şartlar elde edilmiştir.

İlk olarak, ana teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan lemma aşağıda verilmiştir.

<u>*Lemma 4.1 :*</u> $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \mu_0$ olsun. Burada, $\mu_0 \cong 1.618$

$$\mu^2 - \mu - 1 = 0 \tag{4.1}$$

denkleminin bir köküdür. O halde her $z \in \mathbb{U}$ için (3.13) ile tanımlanan $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z) : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu,

$$\left| \frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)} - 1 \right| \leq \frac{2\mu+1}{\mu^2-\mu-1} \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağlar.

<u>*İspat*:</u> Her $z \in \mathbb{U}$ için $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$ normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)} - 1 \right| &= \left| \frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)\right)' - \tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)} \right| \\ &= \left| \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} z^n}{z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} z^n} \right| \leq \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}{1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\lambda \geq 1$ için $\Gamma(n-1+\mu) \leq \Gamma(\lambda(n-1)+\mu),\ n \in \mathbb{N}$ eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizlik

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \leq \frac{1}{(\mu)_{n-1}},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

eşitsizliğine denktir.

Burada $(\mu)_n = \Gamma(n+\mu)/\Gamma(\mu) = \mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1),\ (\mu)_0 = 1$ Euler Gamma fonksiyonunun terimlerinde tanımlanmış Pochhammer (Appell) sembolüdür.

(4.4) eşitsizliği kullanılarak,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(\mu)_{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\mu)_n} = \frac{1}{\mu} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\mu)_n} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}/\{1\}$ ve $\mu \ge 1$ için

$$\frac{n}{(\mu)_n} \le \frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}} \tag{4.6}$$

eşitsizliği doğrudur. (4.6) eşitsizliği (4.5) eşitsizliğinde dikkate alınırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \le \frac{1}{\mu} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^n} = \frac{2\mu+1}{\mu^2} \tag{4.7}$$

eşitsizliği yazılır.

Aynı şekilde

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\mu)_{n-1}}$$

olur.

Ayrıca,

$$(\mu)_{n-1} = \mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-2) \ge \mu(\mu+1)^{n-2},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

eşitsizliği doğrudur ve $1/(\mu)_{n-1} \le 1/\mu(\mu+1)^{n-2},\ n \in \mathbb{N}$ eşitsizliğine denktir.

(4.8)'u kullanarak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}} = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu+1)^n} = \frac{\mu+1}{\mu^2} \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.9), (4.7) ve (4.3)'den

$$\left|\frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}-1\right|\leq\frac{2\mu+1}{\mu^2-\mu-1}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece, Lemma 4.1'in ispatı tamamlanmış olur.

$F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}(z)=\int\limits_0^z\prod\limits_{k=1}^n\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t}\right)^{q_k}dt$ integral opereatörünün konveksliği için yeter şart aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>*Teorem 4.2:*</u> $\lambda\geq 1$, n bir doğal sayı, $\alpha\in[0,1)$ ve $q_1,q_2,q_3,\ldots,q_n$ sıfırdan farklı kompleks sayılar, $\mu>\mu_0$, $\mu=\min\{\mu_k:\ k=1,2,\ldots,n\}$, $\mu_0\cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n|q_k|\leq\frac{(1-\alpha)(\mu^2-\mu-1)}{2\mu+1}$$

şartı sağlanırsa (3.14) ile tanımlanan $F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfındandır.

<u>*İspat:*</u> Her $k=1,2,\ldots,n$ için $\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}\in\mathcal{A}$ ve $F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}\in\mathcal{A}$ dır. $F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}\in\mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zF^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}{}''(z)}{F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}{}'(z)}\right)>\alpha,\ z\in\mathbb{U}$$

olmasıdır. Bunun için

$$\left|\frac{zF^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}{}''(z)}{F^{q_1,q_2,\ldots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}{}'(z)}\right|\leq 1-\alpha,\ z\in\mathbb{U}\tag{4.10}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.14) eşitliğinde her iki tarafın birinci mertebeden türevi alınırsa

$$\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)' = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{z}\right)^{q_k} \tag{4.11}$$

elde edilir.

(4.11) in her iki tarafının logaritmik türevi alınıp z ile çarpılırsa

$$\frac{z\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)''}{\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'} = \sum_{k=1}^{n} q_k\left(\frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)} - 1\right) \tag{4.12}$$

sonucuna ulaşılır.

Her bir μ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için (4.2) kullanılarak

$$\left|\frac{z\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)''}{\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'}\right| = \sum_{k=1}^{n}|q_k|\left|\frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)} - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|q_k|\frac{2\mu_k+1}{\mu_k^{\,2}-\mu_k-1} \tag{4.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$h(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-1} \tag{4.14}$$

ile $h:(1.2581,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilirki (4.14) ile tanımlanan $h:(1.2581,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu azalandır. Dolayısıyla her μ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ için $\mu=\min\{\mu_k:\ k=1,2,\ldots,n\}$ olduğundan

$$\frac{2\mu_k+1}{\mu_k^{\,2}-\mu_k-1} \leq \frac{2\mu+1}{\mu^2-\mu-1} \tag{4.15}$$

olur.

(4.15) ve (4.13) eşitsizliklerinden

$$\left|\frac{z\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)''}{\left(F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'}\right| \leq \frac{2\mu+1}{\mu^2-\mu-1}\sum_{k=1}^{n}|q_k| \tag{4.16}$$

elde edilir.

Eğer (4.16) eşitsizliğindeki son ifade $(1-\alpha)$ ile sınırlandırılırsa (4.10) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Yani

$$\sum_{k=1}^{n}|q_k| \le \frac{(1-\alpha)(\mu^2-\mu-1)}{2\mu+1}$$

dir. Böylece Teorem 4.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>*Sonuç 4.3*:</u> $\lambda \ge 1$, n bir doğal sayı ve $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$ sıfırdan farklı kompleks sayılar, $\mu > \mu_0$, $\mu = \min\{\mu_k : k = 1,2,...,n\}$, $\mu_0 \cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$\mu^2 - \left(2\sum_{k=1}^{n}|q_k|+1\right)\mu - \left(\sum_{k=1}^{n}|q_k|+1\right) \ge 0$$

şartı sağlanırsa (3.14) ile tanımlanan $F^{q_1,q_2,...,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}$ sınıfındandır.

Teorem 4.2 de $n=1,\ q_1 = q,\ \mu_1 = \mu$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>*Sonuç 4.4*:</u> $\lambda \ge 1$, q sıfırdan farklı bir kompleks sayı, $\mu > \mu_0$, $\mu = \min\{\mu_k : k = 1,2,...,n\}$, $\mu_0 \cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$(1-\alpha)\mu^2 - (2|q|-\alpha+1)\mu - (|q|-\alpha+1) \ge 0$$

şartı sağlanırsa

$$F^{q}_{\lambda,\mu}(z) = \int_0^z \left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)}{t}\right)^q dt,\ z \in \mathbb{U}$$

ile tanımlanan $F^{q}_{\lambda,\mu} : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfındandır.

Sonuç 4.4 de $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>*Sonuç 4.5:*</u> $\lambda\geq 1$, q sıfırdan farklı bir kompleks sayı, $\mu>\mu_0$, $\mu=\min\{\mu_k:\ k=1,2,...,n\}$, $\mu_0\cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$\mu^2-\left(2|q|+1\right)\mu-\left(|q|+1\right)\geq 0$$

şartı sağlanırsa

$$F_{\lambda,\mu}^{q}(z)=\int_0^z\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)}{t}\right)^q dt,\ z\in\mathbb{U}$$

ile tanımlanan $F_{\lambda,\mu}^{q}:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}(0)$ sınıfındandır.

$G_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)=\left\{\beta\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt\right\}^{1/\beta}$ integral opereatörünün konveksliği için yeter şart aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>*Teorem 4.6:*</u> $\lambda\geq 1$, $\alpha\in[0,1)$, $\beta\in\mathbb{C}$ öyleki $\beta\notin\mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...,-n,...\}$, $\mu>\mu_0$, $\mu_0\cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$(1-\alpha)\mu^2-(3+|\beta-1|-\alpha)\mu-(2+|\beta-1|-\alpha)\geq 0 \tag{4.17}$$

şartı sağlanırsa (3.15) ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{\beta}:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfındandır.

<u>*İspat :*</u> $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{A}$ olduğu için $G_{\lambda,\mu}^{\beta}\in\mathcal{A}$ dır, yani, $G_{\lambda,\mu}^{\beta}(0)=G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(0)-1=0$ normalize şartlarını sağlar. $G_{\lambda,\mu}^{\beta}\in\mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)}\right)>\alpha,\ z\in\mathbb{U} \tag{4.18}$$

olmasıdır.

Bunun için

$$\left|\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)}\right| \le 1-\alpha,\ z\in\mathbb{U} \tag{4.19}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.15) eşitliğinin ilk önce birinci türevi, daha sonra her iki tarafının logaritmik türevi alınıp z ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)} &= \frac{1-\beta}{\beta}\frac{z^{\beta-1}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}{\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt} + \frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)\right)'}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)} + (\beta-2) \\ &= \frac{1-\beta}{\beta}\frac{z^{\beta-1}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}{\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt} + (\beta-1) + \frac{z\left(\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)\right)' - \tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}{\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

sonucuna ulaşılır.

(3.13), (4.20) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\beta}{n+\beta-1}-1\right)\frac{(\beta-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}z^{n+\beta-1}}{z^{\beta}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta}{n+\beta-1}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}z^{n+\beta-1}} + \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}z^{n}}{z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}z^{n}} \tag{4.21}$$

olur.

(4.21) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left|\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)}\right| \le \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\beta}{n+\beta-1}\right|\right)\frac{|\beta-1|\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\beta}{n+\beta-1}\right|\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}} + \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}} \tag{4.22}$$

yazılır.

Ayrıca, (4.22) eşitsizliği aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\left|\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)}\right| \le \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left((n-1)+|\beta-1|\right)\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)(n-1)!}} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\beta-1|\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}}. \tag{4.23}$$

(4.23) eşitsizliğinde (4.7) ve (4.9) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left|\frac{zG_{\lambda,\mu}^{\beta}{}''(z)}{G_{\lambda,\mu}^{\beta}{}'(z)}\right| \le \frac{\frac{2\mu+1}{\mu^2}+|\beta-1|\frac{\mu+1}{\mu^2}}{1-\frac{\mu+1}{\mu^2}} = \frac{2\mu+1+|\beta-1|(\mu+1)}{\mu^2-\mu-1} \tag{4.24}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer (4.24) eşitsizliğindeki son ifade $(1-\alpha)$ ile sınırlandırılırsa (4.19) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Yani

$$(1-\alpha)\left(\mu^2-\mu-1\right)-|\beta-1|(\mu+1)-(2\mu+1)\ge 0$$

dir. Böylece Teorem 4.6 nın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.6 da $\alpha=0$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>*Sonuç 4.7*</u>: $\lambda\ge 1$, $\beta\in\mathbb{C}$ öyleki $\beta\notin\mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...,-n,...\}$, $\mu>\mu_0$, $\mu_0\cong 1.618$ (4.1) denkleminin bir pozitif kökü olmak üzere

$$\mu^2-(3+|\beta-1|)\mu-(2+|\beta-1|)\ge 0$$

şartı sağlanırsa (3.15) ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{\beta}:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}$ sınıfındandır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak $\tilde{E}_{\lambda,\mu}(z)$ ile gösterilen normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\int_0^z \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tilde{E}_{\lambda,\mu_k}(z)}{t}\right)^{q_k} dt, \quad z\in\mathbb{U}$$

ve

$$G_{\lambda,\mu}^{\beta}(z)=\left\{\beta\int_0^z t^{\beta-2}\tilde{E}_{\lambda,\mu}(t)dt\right\}^{1/\beta}, \quad z\in\mathbb{U}$$

integral operatörleri tanımlandı. Daha sonra, bu integral operatörlerinin $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olması için yeter şartlar elde edildi.

Bu konuda çalışacak olan araştırmacılar, farklı özel fonksiyonları normalize edip bu normalize edilmiş özel fonksiyonlar yardımıyla yeni integral operatörleri tanımlayıp bu integral operatörlerin ünivalentliği, konveksliği ve yıldızıllığı gibi geometrik özelliklerini inceleyebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Alexander, W. J., (1915). Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. Ann. of Math., 17, 12-29.

[2] Almkvist, G. and Berndt, B.C., (1988). Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π and the Ladies Diary. Amer. Math. Monthly, 95, 585–608.

[3] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., (1997). Conformal Invariants, Inequalities and Quasiconformal Maps. Wiley, New York.

[4] Andrews, G.E., Askey R. and Roy, R., (1999). Special Functions. Cambridge University Press.

[5] Baricz, A. and Ponnusamy, S., (2010). Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions. Integral Transforms Spec. Funct., 21(9), 641-653.

[6] Baricz, A. and Frasin, B.A., (2010). Univalence of integral operators involving Bessel functions. Appl. Math. Letters, 23, 371-376.

[7] Bernardi, S. D., (1969). Convex and starlike univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 135, 429-446.

[8] Bieberbach, L., (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenz reihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. pp. 940-955.

[9] Daniel, B. and Carmen-Ioana T., (2017). Univalence criteria for general integral operators using the Struve and Bessel functions. J. Appl. Computat. Math., 6(3), 1-3.

[10] De Branges, L., (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math, 154, 137–152.

[11] Deniz, E., 2012. Convexity of integral operators involving generalized Bessel functions. Integral Transforms and Special Functions, 24(3), 201-216.

[12] Deniz, E., Orhan, H. and Srivastava, H.M., (2011). Some sufficient conditions for univalence of certain families of integral operators involving generalized Bessel functions. Taiwanese J. Math., 15(2), 883-917.

[13] Duren, L. P., (1983). Univalent Functions. Springer–Verlag, New York.

[14] Eenigenburg, P.J., (1972). A class of starlike mappings of the unit disk. Compositio Math., 24, 235–238.

[15] Frasin, B. A., (2010). Sufficient conditions for integral operator defined by Bessel functions. J. Math. Inequal., 4(2), pp. 301–306.

[16] Graham, I. and Kohr, G., (2003). Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc.

[17] Koebe, P., (1907). Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.

[18] Lang, K. R., (2013). Astrophysical Formulae: Space, time, matter and cosmology. Springer.

[19] Libera, R. J., (1965). Some classes of regular univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 16, 755-758.

[20] Mahmood, S., Mahroz, S., Rafiq, A., Malik, S. N. and Raza, M., (2018). Convexity of certain integral operators defined by Struve functions. Journal of Function Spaces, Volume 2018, 7 pages.

[21] Mittag-Leffler M., (1903). Sur la fonction nouvelle $E_{\alpha}(x)$. CR Acad. Sci., Paris, 2(137), 554–558.

[22] Nizami, M., (2017). Univalence of certain integral operators involving normalized Wright functions. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 66(1), 19-28.

[23] Noshiro, K., (1934-1935). On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Jap., 1(2), 129-155.

[24] Pescar, V. and Breaz D., (2008). The univalence of integral operators. Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia.

[25] Pommerenke, Ch., (1975). Univalent functions. Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.

[26] Ponnusamy, S. and Silverman, H., (2006). Complex variables with Applications. Birkhäuser, Boston.

[27] Robertson, M. S., (1936). On the theory of univalent functions. Ann. of Math., 37, 374–408.

[28] Saxena, R., Mathai, A. and Haubold, H., (2002). On fractional kinetic equations. Astrophysics and Space Science, 282(1), 281–287.

[29] Silverman, H., (1978). Subclasses of starlike functions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 23, 1093–1099.
[30] Srivastava, H. M., Frasin, B. A. and Pescar, V., (2017). Univalence of integral operators involving Mittag-Leffler functions. Appl. Math. Inf. Sci., (3) 11, 635-641.

[31] Warschawski, S. E., (1935). On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc., 38, 310-340.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Saip Emre YILMAZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Ankara-Çankaya / 1992

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : mrylmz0636@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ömer Seyfettin Lisesi (2006)

Lisans : Kafkas Üniversitesi (2010)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi (2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Pegem Akademi (Kars) (2014-2015)

Doğru Cevap Etüt Merkezi (Kars) (2016)

Abdulhakim Arvasi Ortaokulu (Ankara) (2016-2018)

Yayınları :

Çağlar, M., **Yılmaz, S. E.** and Deniz, E. (2017). Convexity of the Integral Operator Involving Normalized Mittag Leffler Function. II. International Conference On Advances In Natural And Applied Sciences (ICANAS 2017), Antalya.