T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN LİNEER OLMAYAN BİR SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN NEWTON-KANTOROVİCH YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Mesut KARA
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2018
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN LİNEER OLMAYAN BİR SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN NEWTON-KANTOROVİCH YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Mesut KARA
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışması Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Koordinatörlüğü tarafından 2017-FM-83 nolu proje ile desteklenmiştir.

OCAK-2018
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mesut KARA'nın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bazı Singüler İntegral Operatörler İçeren Lineer Olmayan Bir Singüler İntegral Denklemin Newton-Kantorovich Yöntemiyle Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

02/ 01/ 2018

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV	
Üye	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Erhan DENİZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mesut KARA

İÇİNDEKİLER

BAZI SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN LİNEER OLMAYAN BİR SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİN NEWTON-KANTOROVİCH YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

Mesut KARA

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ÖZET

Bu tez çalışması ʺ Bazı Singüler İntegral Operatörler İçeren Lineer Olmayan Bir Singüler İntegral Denklemin Newton-Kantorovich Yöntemiyle Çözümü'' konusu üzerine hazırlandı.

Tezde temel parçacıklar ve saçılma teorisinde önemli uygulaması olan bir lineer olmayan singüler integral denklemi (SİD) ele alındı:

$$\varphi(t) = f(t)\{\varphi^2(t) + [\lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)]^2\}, t \in [0,1],$$

burada,

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \text{ ve } S_+\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}d\tau$$

$f(t)$ reel değerli fonksiyon, λ ve μ parametreleri $(1+\mu)\lambda = 0$ şartını sağlamaktadır.

Bu yüksek lisans tezi $\varphi(t)$ denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine bir çalışmadır. Tezde $\varphi(t)$ denkleminin içerdiği $S\varphi(t)$ ve $S_+\varphi(t)$ operatörlerinin bazı özellikleri incelenir. Bu özelliklerden yararlanarak aşağıdaki şekilde tanımlanan A operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilir:

$$A\varphi(t) = f(t)\{\varphi^2(t) + [\lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)]^2\}, \qquad t \in [0,1].$$

Sonra $\varphi(t)$ denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği için Daralma Dönüşüm Prensibi uygulanır.

Anahtar Kelimeler: integral operatör, lineer olmayan singüler integral denklem, Newton metodu

AN ANALYSIS OF THE NON-LINEAR SINGULAR INTEGRAL DENKLEMIN NEWTON-KANTIOROVICH PROCESS WITH SOME SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

Mesut KARA

Master Thesis

Thesis Advisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ABSTRACT

This thesis study has been prepared on the topic of "The Solution of a Singular Integral Equation with Some Singular Integral Operators and a Newton-Kantorovich Method Without Linearity".

The nonlinear nonlinear singular integrals equation (SID), which is an important application in the theory of basic particles and scattering, is studied in the thesis:

$$\varphi(t) = f(t)\{\varphi^2(t) + [\lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)]^2\}, t \in [0,1],$$

here,

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \text{ ve } S_+\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t} d\tau$$

The real-valued function $f(t)$ provides the λ and μ parameters $(1+\mu)\lambda = 0$.

This master thesis is a study on the existence and uniqueness of the solution of the equation $\varphi(t)$. Some properties of $S\varphi(t)$ and $S_+\varphi(t)$ operators included in the thesis $\varphi(t)$ equation are examined. Utilizing these properties, it has been shown that operator A, defined by the following, is a contraction transformation:

$$A\varphi(t) = f(t)\{\varphi^2(t) + [\lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)]^2\}, \qquad t \in [0,1].$$

Then the solution of the $\varphi(t)$ equation is applied and the Shrinking Transformation Principle is applied for unity.

Key words: integral operator, nonlinear singular integral equation, Newton method

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde benden değerli fikirlerini, bilgilerini, yardımlarını ve katkılarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya, bölümümüzün değerli öğretim üyelerine ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mesut KARA

SEMBOL DİZİNİ

SEMBOL	ANLAMI
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Negatif Olmayan Reel Sayıların Kümesi
$\omega(\varphi,\delta)$	φ'nin süreklilik modülü
$H(\varphi,\alpha)$	$H(\varphi,\alpha) = sup\left\{\frac{\omega(\varphi,x)}{x^{\alpha}}; 0 < x \leq 1\right\}$
$C[a,b]$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
J_0	$J_0 = \left\{\varphi \in C[0,1]: \int_0^1 \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi} d\xi < +\infty\right\}$
$H_{\alpha}(X)$	X'de Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{I}'(x_0)$	Freshet türevi

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır [1]. İntegral denklemlerin tamamını kapsayacak teoriyi kurmak imkânsızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı özellikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekir. Bu sebepten geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı gösterir [1].

İntegral denklemler ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılın başlarında yapıldı [1]. Önceleri dağınık ve rastgele yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha düzenli ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve birtakım sonuçların elde edilmeye başlandığı gözlenmektedir. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir [1]. İlk defa integral denklem ifadesini Du Bois REYMOND'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği bilinmektedir.

19. yüzyılda Abel'in integral denklemi üzerine olan çalışmalarından etkilenen matematikçilerin bazıları; Rouche, Sonine ve Bois-Reymond'dır. N. Sonine tarafından elde edilen Abel tipi integral denklemlerin bazı sonuçları LeviCivita tarafından genelleştirilmiştir. Goursat, Abel tipi integral denklemlerin çözümü ile ilgilenmekle birlikte integralin tersi problemi ile de uğraştı. Myller, Fredholm integral denklemleri ile beraber mekanikte kullanılan Abel tipi integral denklemleri ile ilgilenmiştir. Abel'in çalışmalarından uzun müddet sonra Tamarkin ve Tonelli gibi ünlü matematikçiler Abel integral denklemlerini çalışmışlardır [2].

Volterra ile birlikte 1895 yılından itibaren integral denklemler teorisi için yeni bir dönem başladı. Volterra kendisinden önce çalışan matematikçilerin çoğundan farklı olarak formüllerle integral denklemlerin çözümünü bulmakla birlikte sonradan Volterra denklemleri olarak bilinen integral denklemlerinin özel bir tipini bulmayı amaçladı. Volterra integral denklemi ilk olarak E. Picard'ın danışmanlığında tezini yazan T. Lalecso ifade etmiştir. Volterra daha genel integral denklemleri çalışmıştır. Aynı zamanda, fonksiyonel analize olan bakış açısı ve integral operatörlerinin tersi ile ilgili varlık problemleri ile uğraşmasından dolayı

Volterra, fonksiyonel analizin kurucularından biri olarak bilinmektedir. Volterra'nın integral denklemler teorisine olan ilk önemli katkısından kısa bir süre sonra, Fredholm integral denklemlerle ilgili parametre içeren yeni bir teori inşa etti. Banach da Banach uzaylarını ve Riesz-Sz.-Nagy lineer uzaylarında soyut operatörler için Fredholm teorisini geliştirdi. Fredholm'un çalışmalarını takiben bu yüzyılda ünlü matematikçilerin (Picard, Schmidt, Poincare, Weyl, Hilbert, Frechet, Heywood-Frechet) Fredholm teorisinin gelişmesinde önemli rolleri vardır. Onlar bu teorinin diğer bilim dallarına olan bağlantılarına da vurgu yaptılar. Özellikle, Hilbert ve Schmidt simetrik çekirdeğe sahip olan integral denklemler teorisini geliştirdiler. Bu bağlamda, ortogonal (diklik) seriler hakkında önemli sonuçlar elde edildi. Fredholm teorisinin ortaya çıkışıyla birlikte Volterra integral denklemleri bu teorinin gerisinde kaldı. Örneğin, integral denklemler üzerine çalışan matematikçiler Volterra integral denkleminin sıfır değere sahip olduğunu görerek başlangıçta Volterra integral denklemi ilginç bulunmadı. Sonradan Volterra, Volterra integral denkleminin diğer bilim dalları ile olan ilişkisini inceledi. Bu integral denklemini mekanikteki uygulamaları Boltzmann'a dayanır. Ayrıca, Volterra integral denklemleri popülasyon dinamiğinde oldukça önemli uygulamalara sahiptir.

Carleman ve Von Neuman integral operatörlere katkıda bulunan ünlü matematikçilerdir. Özellikle, Carleman sınırsız lineer integral operatörlere yaptığı katkıları ile bilinir [2]. Sınırsız lineer integral operatörler teorisi hala gelişime açık bir konudur. Korotkov, Carleman'ın sınırsız lineer integral operatörleri üzerine olan çalışmalarına ek olarak bu konuda bir monografi yazdı [2]. İntegral operatörlerinin spektral teorisi gelecek vaat eden diğer önemli konulardan biridir [2]. Bu konuda, Pietsch ve Elstner-Pietsch önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Bilindiği üzere tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Bundan dolayı, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de ünlü bilim adamı Albert Einstein'ın ‘‘Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır.’’ sözünün altında yatan gerçekler bunlardan bir tanesidir.

20. yüzyılın başı ve sonuna doğru SİD çok gelişmiştir. Bu yıllarda SİD teorisinde ve SİD'in yaklaşık çözümüne N. İ. Muskhelişvili, F. A. Gakkov, A. Hüseynov, V. Salaev,

A. A. Babaev, B. İ. Musaev gibi ünlü Sovyet ve Azerbaycan matematikçilerin katkısı büyüktür.

Lineer ve lineer olmayan SİD'in teorik incelenmesi ve yaklaşık çözümlerinin bulunması üzerine birçok çalışma vardır. Bunlardan örnek olarak N. İ. Muskhelişvili'nin [3], A. Hüseynov'un [4], V. Salaev'in [5], A. A. Babaev'in [6], B. İ. Musaev'in [7], N. M. Mustafa(yev)'in [8] çalışmalarını verilebilir.

İntegral denklemler bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiğinden dolayı global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi zor olan denklemlerdir.

Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemesidir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara gerek yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında önemli bir ilişkinin olması doğaldır.

Singüler integral denklemler teorisinin matematiğin bir çok problemlerinde, matematiksel fizik, hidrodinamik ve elastikiyet teorisi gibi birçok teorik ve pratik araştırmalarda geniş uygulamaları olduğu iyi bilinir [3,9].

Ayrıca, singüler integral denklemlerin teorik analizi ve yaklaşık çözümü üzerine birçok çalışma vardır [5,6,7,8,10].

Bu tip araştırmalar, integral denklemlerin içerdiği integral operatörlerin incelenmesini önemli kılar [10].

Temel parçacıklar ve saçılma teorisinde önemli uygulaması olan bir lineer olmayan singüler integral denklemi (SİD) ele alınır:

$$\varphi(t) = f(t)\{\varphi^2(t) + [\lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)]^2\}, t \in [0,1], \tag{1.1}$$

burada,

$$S\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \text{ ve } S_+\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau \tag{1.2}$$

$f(t)$ reel değerli fonksiyon, λ ve μ parametreleri $(1+\mu)\lambda=0$ şartını sağlamaktadır. (1.1) denkleminin çözümünün varlığının incelenmesinde (1.2) operatörlerini incelemek önemlidir.

Bu yüksek lisans tezi (1.1) denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine bir çalışmadır. Tezde (1.1) denkleminin içerdiği (1.2) operatörlerinin bazı özellikleri incelenir. Bu özelliklerden yararlanarak aşağıdaki şekilde tanımlanan A operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu gösterilir:

$$A\varphi(t)=f(t)\{\varphi^2(t)+[\lambda-S\varphi(t)+\mu S_+\varphi(t)]^2\}, \qquad t\in[0,1]. \tag{1.3}$$

Sonra (1.1) denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği için Daralma Dönüşüm Prensibi uygulanır.

2.TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak bazı temel bilgileri verilecektir.

Tanım 2.1: L boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer $+: L\times L \rightarrow L$ ve $\cdot: K\times L \rightarrow L$ fonksiyonları ve $\forall x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

i) $x + y \in L$ (kapalılık özelliği)

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)

iii) $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (birim elemanın varlığı)

iv) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (ters elemanın varlığı)

v) $x + y = y + x$ (değişme özelliği)

vi) $\alpha.x \in L$ (skalerle çarpma işleminde kapalılık)

vii) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

viii) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

ix) $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

x) $1 \in K$ birim eleman olmak üzere $1.x = x$

şartları sağlanıyorsa L kümesine bir *lineer uzay (vektör uzayı)* denir.

Tanım 2.2: X, elemanları $u, v, w, ...$ olan bir küme olsun. $X\times X$ kartezyen çarpımında tanımlı negatif olmayan bir d fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa d'ye bir *metrik* denir.

i) $d(u, v) \geq 0$ ve $d(u, v) = 0$ ancak ve ancak $u = v$ ise

ii) $d(u, v) = d(v, u)$

iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

d, X'de tanımlı bir metrik olmak üzere (X, d) çiftine bir *metrik uzay* denir.

Tanım 2.3: $X, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

N1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyor ise $\|.\|$'ye X üzerinde bir *norm*, $(X, \|.\|)$ ikilisine ise *normlu uzay* denir.

Tanım 2.4: (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a'ya *yakınsaktır* denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ veya } x_n \to a, n \to \infty$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5: Bir X kümesi üzerinde tanımlı $f_n: X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3, ...$ fonksiyon dizisi ve $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için sadece ε'na bağlı $\exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa ki, $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olsun. Diyeceğiz ki

$$f_n: X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3, ...$$

dizisi $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *düzgün yakınsar*. Düzgün yakınsama kısaca $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

Tanım 2.6: (x_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.7: (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa bu uzaya *tamdır* denir.

Tanım 2.8: Üzerinde bir norm tanımlanmış olan bir X lineer uzayına *lineer normlu uzay* denir.

Tanım 2.9: X normlu lineer uzay olsun. X uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ norm metriğine göre tam ise X'e bir *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.10: Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına ve a'ya bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ sayısı varsa f fonksiyunu X kümesine göre $a \in X$ noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.11: X ve Y boş olmayan, herhangi türden kümeler ve $E \subseteq X$ olsun. E kümesinin her elemanına Y kümesinin bir elemanını karşılık getiren bir kurala E'den Y'ye bir *dönüşüm* veya *operatör* denir.

Bir A operatörünün $x \in E$ elemanına karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir ve x'in A altında *görüntüsü* olarak adlandırılır.

Bu durumda E'ye A operatörünün *tanım kümesi* denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir.

$$\Re(A) = \{y \in Y: y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine A operatörünün *değer (veya görüntü) kümesi* denir.

Tanım 2.12: L ve L' aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \to L'$ operatörü $x, y \in L$ ve $\alpha \in T$ için,

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T'ye *lineer operatör* denir.

Tanım 2.13: Lineer L operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa ve

$$\|L(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu takdirde L operatörüne *sınırlı operatör* adı verilir.

Tanım 2.14:

$$y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)\, x(\tau) d\tau \text{ iken } y = Tx$$

ile tanımlanan $T: C[0,1] \to C[0,1]$'e *integral operatör* denir. Burada, k belirli bir fonksiyon olup *çekirdek* olarak adlandırılır ve $t\tau$-uzayında $G = [0,1] \times [0,1]$ kapalı karesinde sürekli olarak kabul edilir.

Tanım 2.15: X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T dönüşümünün *sabit noktası* denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarıdır. T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin;

1. $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ için $F(T) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$'tür.

2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşümü için X'in her noktası bir sabit noktadır.

3. $X = \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = a + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerinin sabit noktaları yoktur.

4. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ TX = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ sabit noktalardır.

5. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $TX = x^2 - 3x + 4$ şeklinde tanımlansın. O zaman $2, T$'nin sabit noktasıdır. Çünkü $T2 = 2^2 - 3(2) + 4 = 2$.

Tanım 2.16: X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

(i) Her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varsa T'ye *daralma dönüşümü* adı verilir.

(ii) Her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ ise T'ye *genişlemeyen dönüşüm* adı verilir.

Tanım 2.17: X topolojik uzayındaki bir S kümesi için S'nin kendisine tanımlanan her sürekli dönüşüm bir sabit noktaya sahipse S kümesine *sabit nokta özelliğine sahiptir* denir.

Tanım 2.18: İntegral işareti altında bilinmeyen fonksiyon bulunduran denklemlere *integral denklemler* denir.

Tanım 2.19: $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

formundaki bir integral denkleme integral operatörünün $u(x)$ fonksiyonuna göre lineer olması durumunda *lineer integral denklem* adı verilir.

Daha genel olarak, ϕ lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{x} \phi[x, t, u(t)]dt \tag{2.2}$$

integral denklemine de *lineer olmayan integral denklem* denir.

Tanım 2.20: (2.1) denklemindeki iki değişkenli $K(x,t)$ fonksiyonuna *çekirdek fonksiyon* denir. Eğer $K(x,t)$ fonksiyonu sürekli değilse integral denkleme *singüler (tekil) integral denklem* denir.

Tanım 2.21: $f[a,b] \to \mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < \infty)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A.|t_1 - t_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ sayıları varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde α üssü ve A katsayısı ile *Hölder koşulunu sağlar* denir. A ve α sayılarına sırasıyla *Hölder katsayısı* ve *Hölder üstü* denir. $[a,b]$ üzerinde α üstü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün fonksiyonlar kümesi $H_{\alpha}[a,b]$ ile gösterilir.

Özel durumda, $\alpha = 1$ için Hölder koşuluna *Lipshitz koşulu* denir.

Not 2.1: $C[0,1]$ ile

$$\|f\|_{\infty} = max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$$

maksimum normu ile $[0,1]$'de tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi gösterilir.

H sınıfı fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Eğer $\varphi \in H[0,1]$ ise $\varphi \in C[0,1]$'dir. Yani, $H[0,1] \subset C[0,1]$'dir.

2. Eğer $\varphi \in H_{\alpha}[0,1]$ ve $0 < \beta \leq \alpha$ ise $\varphi \in H_{\beta}[0,1]$'dır. Yani, eğer $0 < \beta \leq \alpha$ ise $H_{\alpha}[0,1] \subseteq H_{\beta}[0,1]$.

3. Eğer $\varphi, \psi \in H_{\alpha}[0,1]$ ise o zaman $\varphi \pm \psi$, $\varphi.\psi$, $\varphi/\psi \in H_{\alpha}, [0,1]$ $(\psi \neq 0)$ olur.

4. Eğer $\varphi,\psi \in H_\alpha[0,1]$ ise o zaman $\varphi+\psi$, $\varphi.\psi$ ve

$$H(\varphi+\psi;\alpha) = H(\varphi;\alpha) + H(\psi;\alpha)$$

$$H(\varphi.\psi;\alpha) \leq H(\varphi;\alpha)\|\psi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty H(\psi;\alpha)$$

dır.

$$\overset{0}{C}[0,1] = \{f \in C[0,1]: f(0) = 0 = f(1)\}$$

ve

$$\overset{0}{H}_\alpha[0,1] = \{\varphi \in H_\alpha: \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}$$

olsun.

$H_\alpha[0,1]$ ve $\overset{0}{H}_\alpha[0,1]$ fonksiyon uzayları

$$\|\varphi\|_\alpha = max(\|\varphi\|_\infty, H(\varphi;\alpha))$$

normu ile birer Banach uzaylarıdır. Burada

$$H(\varphi;\alpha) = sup\left\{\frac{\omega(\varphi,x)}{x^\alpha}: 0 < x \leq 1\right\}$$

dir.

Çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe $H_\alpha[0,1]\left(\overset{0}{H}_\alpha[0,1]\right)$ yerine $H_\alpha\left(\overset{0}{H}_\alpha\right)$ kullanılacaktır.

$$\|\varphi\|_{\alpha,0} = max(\|\varphi\|_\infty, H(\varphi;\alpha))$$

ile $\varphi \in \overset{0}{H}_\alpha$ fonksiyonunun normu ifade edilmektedir.

Ayrıca, $\mathfrak{I}: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ sınırlı lineer operatörünün normu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|\mathfrak{I}\|_\alpha = \|\mathfrak{I}\|_{\overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha} = sup\left\{\frac{\|\mathfrak{I}\varphi\|_\alpha}{\|\varphi\|_{\alpha,0}}: \varphi \in \overset{0}{H}_\alpha, \varphi \neq 0\right\}.$$

Buna ek olarak,

$$\|\Im\|_{\infty} = \|\Im\|_{\overset{0}{H}_{\alpha}\to C[0,1]} = sup\left\{\frac{\|\Im\varphi\|_{\infty}}{\|\varphi\|_{\alpha,0}} : \varphi \in \overset{0}{H}_{\alpha}, \varphi \neq 0\right\}$$

$$J_0 = \left\{\varphi \in C[0,1] : \int_0^1 \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi} < +\infty\right\}$$

ve

$$Z(\omega(\varphi,\cdot),t) = \int_0^t \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi} d\xi + t\int_t^1 \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi^2} d\xi \, , t \in [0,1]$$

olsun.

O halde aşağıdakiler sağlanır:

1. Eğer $\varphi \in \overset{0}{H}_{\alpha}$ ise $\varphi \in J_0$'dir. Yani, $\overset{0}{H}_{\alpha} \subset J_0$'dır.

2. $Z(\omega(\varphi,\cdot),t)$, $[0,1]$'de azalmayan bir fonksiyondur.

<u>Tanım 2.22:</u> Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakılmaksızın

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \, , x \in [a,b]$$

gibi tanımlanan denklemlere *Volterra integral denklemleri* denir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere ise *Fredholm integral denklemleri* denir.

Tanım 2.23: X ve Y Banach uzayları ve $F: D \subset X \to Y$ lineer olmayan operatörü verilmiş olsun. $intD$, D kümesinin iç noktalarından oluşan bir küme olmak üzere her $x \in intD$ için

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + W(x - x_0) \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $A \in L(X,Y)$ sürekli lineer operatörü ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|W(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir $W: D \to Y$ operatörü varsa $F(x)$ operatörüne $x_0 \in intD$ noktasında *Freshet türevlenebilir ($\Im$- türevlenebilir)* denir, burada $L(X,Y)$ X'ten Y'ye sürekli (sınırlı) lineer operatörlerin uzayıdır. (2.3)'deki A operatörüne $F(x)$ operatörünün x_0 noktasındaki *Freshet türevi ($\Im$- türevi)* denir. $\Im'(x_0)$ veya $D\Im(x_0)$ ile gösterilir. $x - x_0 = h$ alınırsa (2.3) ve (2.4) eşitlikleri sırasıyla

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + W(h) \tag{2.5}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|W(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.24: Sınırlı $\varphi: X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

$$\omega(\varphi,\delta) = sup\{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|: t_1, t_2 \in X, |t_1 - t_2| \leq \delta\},$$

$$\delta \in (0,\ell], \ell = max\{|t_1 - t_2|: t_1, t_2 \in X\} = diamX$$

şeklinde tanımlanan $\omega(\varphi,\delta), \delta \in (0,\ell]$ fonksiyonuna $\varphi(t), t \in X$ fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. Süreklilik modülü sürekli bir fonksiyondur.

2. Süreklilik modülü azalmayan bir fonksiyondur.

3. Her $x_1, x_2 > 0$ için $\omega(x_1 + x_2) \leq \omega(x_1) + \omega(x_2)$'dir.

4. $\omega(0) = 0$

5. Her $x > 0$ ve $\alpha > 0$ için $\frac{\omega(x)}{x}$ ve $\frac{\omega(x)}{x^\alpha}$ fonksiyonları azalandır.

Teorem 2.1 (Daralma Dönüşüm Prensibi veya Banach Sabit Nokta Prensibi): D, X Banach uzayında boş olmayan kapalı bir küme olsun ve A'nın, D'nin içinde daralma operatörü olduğunu varsayalım: $A(D) \subset D$. O zaman, D'de A'nın tek bir x^* sabit noktası vardır; başka bir deyişle

$$x = Ax$$

denkleminin D'de tek bir x^* çözümü vardır.

Teorem 2.2 (Ortalama Değer Teoremi): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a,b)'da türevlenebiliyorsa, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ olacak şekilde en az bir tane $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

Teorem 2.3(Lineer Olmayan Operatörler İçin Ortalama Değer Teoremi): $F: X \to Y$ operatörü dış bükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli $\mathcal{F}-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda her bir $x_0, x \in D$ için

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)\,(x - x_0)d\theta \qquad (2.7)$$

Lagrange formülü doğrudur[29].

İspat: $x = G(\theta) = x_0 + \theta(x - x_0), 0 \leq \theta \leq 1$ $(G: [0,1] \to D)$ olmak üzere

$F \circ G: [0,1] \to Y$ operatörünü göz önüne alalım. $G'(\theta) = x - x_0$ olacağından zincir kuralı dolayısıyla

$$(F \circ G)'(\theta) = F'\big(G(\theta)\big).G'(\theta)$$

veya

$$\frac{d}{d\theta}F\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big) = F'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)(x - x_0)$$

$$= F'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)d\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)$$

olur. O zaman

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$$

formülüne göre

$$\int_0^1 F'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)\,(x - x_0)d\theta = \int_0^1 F'\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)\,d\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)$$

$$= \int_{x_0}^{x} F'(t)dt = F(x) - F(x_0)$$

olduğu ve dolayısıyla (2.7) formülünün doğruluğu elde edilir.

Şimdi Banach Sabit Nokta Prensibini kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanır:

Teorem 2.4: $K(t,s,x)$ fonksiyonu G üzerinde sürekli 3. değişkene göre Lipshitz koşulunu sağlasın. Yani her $(t,s,x_1),(t,s,x_2) \in G$ için

$$|K(t,s,x_1) - K(t,s,x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \tag{2.8}$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda,

$$x(t) = \lambda \int_a^b K\big(t,s,x(s)\big)ds \tag{2.9}$$

denkleminin $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda $C[a,b]$ uzayında tek bir $x^*(t)$ çözümü vardır. Burada

$$\lambda_0 = min\left\{\frac{1}{L(b-a)}, \frac{r}{rL(b-a)+L}\right\}$$

$$L = max\left\{\int_a^b |K(t,s,o|ds: t \in [a,b]\right\}$$

$r > 0$ ve L ise (2.8) Lipshitz koşulunun sağlandığı sayıdır. Herhangi başlangıç $x_0 \in C[a,b], \|x\|_\infty \leq r$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K\big(t,s,x_n(s)\big)ds\,, n = 1,2, \ldots. \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanan $\big(x_n(t)\big)$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_\infty, \alpha = |\lambda|L(b-a) \tag{2.11}$$

değerlendirmesi doğrudur [30].

İspat: (2.8) koşulunun r herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$\bar{G} = \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^3 : a \leq t, s \leq b, -r \leq x \leq r\}$$

üzerinde sağlandığını varsayalım. $C[a,b]$ uzayının

$$\overline{S_r(\theta)} = \{x \in C[a,b] : \|x\| \leq r\}$$

kapalı yuvarında

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, x(s))ds \tag{2.12}$$

operatörü verilsin.

$x_1, x_2 \in \overline{S_r(\theta)}$ fonksiyonları için (2.8) koşulundan

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t, s, x_1(s)) - K(t, s, x_2(s))| ds$$

$$\leq \alpha \|x_1 - x_2\|_\infty, \alpha = |\lambda| L(b - a)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\alpha < \frac{1}{L(b-a)}$ olduğundan (2.12) şeklinde tanımlanan A operatörü daralma operatörü olur. $|\lambda| < \lambda_0$ olduğundan (2.9) denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[a, b]$ çözümü vardır ve (2.10) biçiminde tanımlı $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve (x_n) dizisinin x^* çözümüne yakınsama hızı (2.11) ile verilir.

Böylece Teorem 2.4 ispatlanmış olur.

Lineer olmayan

$$x(t) = \int_0^t f(t, s, x(s))ds + g(t), 0 \leq t \leq T \tag{2.13}$$

Volterra integral denklemi verilmiş olsun. Burada $x(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup $f(t, s, x)$ ve $g(t)$ fonksiyonları ise sırasıyla aşağıdaki koşulları sağlasın. f ve g fonksiyonları

$$\{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t, s \leq T \; -\infty \leq x \leq \infty\}$$

ve $[0, T]$ üzerinde verilen sürekli fonksiyonlar ve her

$$(t, s) \in [0, T]^2, x, y \in (-\infty, \infty)$$

için

$$|f(t,s,x) - f(t,s,y)| \leq a(t,s)|x - y| \tag{2.14}$$

olsun. Burada, $a(t,s)$ $[0,T]^2$ üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. $x(t) \in C[0,T]$ için

$$Ax(t) = \int_0^t f\big(t,s,x(s)\big)ds + g(t), 0 \leq t \leq T$$

şeklinde tanımlanan $A: C[0,T] \to C[0,T]$ operatörüne bakalım ve $x \in C[0,T]$ fonksiyonunun normu

$$\|x\|_0 = max\{e^{-L_1 t}|x(t)|: t \in [0,T]\} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlansın. Burada L_1 pozitif bir sayıdır. Her $x \in C[0,T]$ için

$$e^{-L_1 t}\|x\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq \|x\|_\infty$$

eşitsizliği doğru olduğundan ($\|x\|_\infty = max\{|x(t)|: t \in [0,T]\}$) $C[0,T]$ üzerindeki $\|.\|_\infty$ ve $\|.\|_0$ normları denktirler.

$x, y \in C[0,T]$ fonksiyonları için (2.14) koşulundan

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leq \int_0^t \big|f\big(t,s,x(s)\big) - f\big(t,s,y(s)\big)\big|ds \leq \int_0^t a(t,s)|x(s) - y(s)|ds$$

$$\leq \|x - y\|_0 \int_0^t a(t,s)e^{-L_1 s}ds$$

elde edilir. O halde,

$$e^{-L_1 T}|Ax(t) - Ay(t)| \leq \|x - y\|_0 e^{-L_1 t} \int_0^t a(t,s)e^{-L_1 s}ds$$

ve dolayısıyla

$$\|Ax - Ay\| \leq \alpha\|x - y\|_0, \alpha = max\left\{e^{-L_1 t}\int_0^t a(t,s)e^{-L_1 s}ds : t \in [0,T]\right\}$$

elde edilir. Eğer $a(t,s) = L > 0$ ise

$$\alpha = max\left\{\frac{L(1-e^{-L_1 t})}{L_1} : t \in [0,T]\right\} = \frac{L(1-e^{-L_1 T})}{L_1}.$$

Eğer $\alpha < 1$ ise ($a(t,s) = L > 0$ olduğunda $L \leq L_1$ ise) A operatörü $(C[0,T], \|.\|_0)$ uzayında daralma operatörü olur. O halde Banach Sabit Nokta Teoremi gereğince (2.13) denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[0,T]$ çözümü vardır ve her başlangıç $x_0(t) \in C[0,T]$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \int_0^t f\big(t,s,x_{n-1}(s)\big)ds + g(t), n = 1,2, \ldots. \tag{2.16}$$

biçiminde tanımlanan $\big(x_n(t)\big)$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna (2.15) normuna göre $[0,T]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve yakınsamanın hızı için

$$\|x_n - x^*\|_0 \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_0 \tag{2.17}$$

değerlendirmesi doğrudur.

(2.8) koşulunda $K(t,s,x) \equiv K(t,s)h(s,x)$ alalım. Burada $K(t,s)$ ve $h(s,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0,T]^2, G = \{(s,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq T, -\infty \leq x \leq \infty\}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır ve her $s \in [0,T], x,y \in (-\infty,\infty)$ için

$$|h(s,x) - h(s,y)| \leq a(s)|x-y|$$

olacak şekilde $[0,T]$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $a(s)$ fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$a(t,s) = |K(t,s)|a(s)$$

olduğundan

$$\alpha = max\left\{e^{-L_1 t}\int_0^t |K(t,s)|a(s)e^{-L_1 s}ds : t \in [0,T]\right\}$$

olur. Her $(t,s) \in [0,T]^2$ için $|K(t,s)| \leq L$ ve her $s \in [0,T]$ için $a(s) \leq l$ ise

$$\alpha = Ll\frac{1-e^{-L_1 T}}{L_1}$$

olur. Bununla beraber

$$Ax(t) = \int_0^t K(t,s)h(s,x(s))ds + g(t), x \in C[0,T]$$

için

$$\|Ax - Ay\|_0 \leq \alpha \|x - y\|_0$$

elde edilir. Eğer $\alpha < 1$ ise (her $(t,s) \in [0,T]^2$ için $|K(t,s)| \leq L$ ve $a(s) \leq l$ olduğunda $Ll \leq L_1$ ise) A operatörü daralma operatörü olur. Bu durumda

$$x(t) = \int_0^t K(t,s)h(s,x(s))ds + g(t) \tag{2.18}$$

denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[0,T]$ çözümü vardır. Her başlangıç $x_0 \in C[0,T]$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \int_0^t K(t,s)h(s,x_{n-1}(s))ds + g(t), n = 1,2, \dots ..$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna (2.15) normuna göre yakınsar ve (2.17) değerlendirmesi doğrudur.

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin çözümlerinin bulunması için en çok kullanılan metotlardan biri de Newton Metodudur. İlk kez bu metod reel değişkenli ve reel değerli $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$F(x) = 0 \tag{2.19}$$

şeklindeki denklemler için Newton tarafından ileri sürülmüş ve Banach uzaylarında verilen operatörlü denklemler için L. V. Kantorovich tarafından genelleştirilmiştir [27].

(2.19) denkleminin x^* kökü komşuluğunda F kesin artan ve yukarı dış bükey bir fonksiyon olsun. x^* köküne yeteri kadar yakın olan x_0 başlangıç yaklaşımını seçelim.

$M_0(x_0, F(x_0))$ noktasından $y = F(x)$ eğrisine çizilen

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

teğet denklemini ele alalım. $F'(x_0) \neq 0$ olduğunda bu doğru ile x ekseninin kesiştiği nokta

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

olur. Ayrıca $M_1\big(x_1, F(x_1)\big)$ noktasından $y = F(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi

$$y = F(x_1) + F'(x_1)(x - x_1)$$

bulunur ve $F'(x_1) \neq 0$ olduğunda bu doğru ile x ekseninin kesiştiği nokta

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

olarak bulunur. $F'(x_n) \neq 0, n = 0,1,2, \ldots.$ olduğunda bu süreç benzer şekilde devam ettirilerek

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, \qquad n = 1,2, \ldots ..$$

biçiminde tanımlanan $(x_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi elde edilmiş olur.

$|x_n - x^*|$ yeteri kadar küçük olduğundan (x_n) dizisi x^* köküne yüksek hızla yaklaşır. Skaler denklemler için tanımlanan bu yönteme *Newton Teğetler Yöntemi* denir.

X ve Y Banach uzayı ve $F: X \to Y$ bir operatör olmak üzere $F(x) = 0$ şeklindeki denklemini ele alalım. F operatörü $r > 0$ yarıçaplı $S_r(x_0)$ yuvarında ($x_0 \in X$ olarak $F(x) = 0$ denkleminin istenen x^* çözümü için başlangıç yaklaşımı kabul edilir.) $\mathfrak{I}$-türevlenebilir olsun. Ardışık yaklaşımların

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}F(x_{n-1}), \quad n = 1,2, \ldots .. \tag{2.20}$$

formülü (iterasyon prosesi) yardımıyla hesaplanabilir.

Sonsuz boyutlu uzaylar halinde $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ ters operatörlerin bulunması yeteri kadar karmaşık bir problem olduğundan (2.20) formülü yardımıyla bulunan (x_n) dizisi yerine

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1}F(x_{n-1})\,, \quad n = 1,2,\ldots.. \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisine bakılması uygun olur. (2.21) dizisini bulmak için $[F'(x_0)]^{-1}$ ters operatörü her adımda hesaplanmaz ancak x argümentinin tek bir $x = x_0$ değerinde hesaplanır. Kaynaklarda (2.20) yöntemine esas, (2.21) yöntemine ise şekli değiştirilmiş *Newton Metodu* denir. Şimdi (2.20) ve (2.21) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir [30].

Teorem 2.5: X ve Y Banach uzayları $F: X \to Y$ operatörü şu koşulları sağlasın:

1) $r > 0$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere F operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathfrak{F}$-türevlenebilirdir.

2) $F'(x)$ türevi $S_r(x_0)$ yuvarında $l > 0$ katsayısı ile Lipschitz koşulu sağlanır.

3) $F'(x): S_r(x_0) \to L(X, Y)$ operatörünün sürekli tersi var ve $\forall x \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq m \tag{2.22}$$

olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır.

4) $\|F(x_0)\| \leq \eta$.

Bu durumda eğer

$$q = \frac{1}{2}m^2 l\eta < 1$$

ve

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} < r \tag{2.23}$$

ise (2.19) denkleminin (2.20) Newton iterasyon prosesinin yaklaştığı bir $x^* \in \overline{S_r(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (2.20) biçiminde tanımlanan x_n dizisinin x^* ‘a yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \leq m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}}$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

Teorem 2.6: X Banach uzayı, $F: X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathfrak{I}$-türevlenebilir ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq l\|x - y\| \tag{2.24}$$

olacak şekilde $l > 0$ sayısı mevcut olsun. İlave olarak $F'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F'(x_0)]^{-1}$ tersi var ve

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq m \,, \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \eta \tag{2.25}$$

olacak şekilde $m > 0$ ve $\eta > 0$ sayıları var olsun. Eğer $2ml\eta < 1$ ve

$$r_0 = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 2ml\eta}\right)}{ml} \leq 1$$

ise $F(x) = 0$ denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve (2.21) biçiminde tanımlanan Newton iterasyon prosesi bu çözüme

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 2ml\eta}\right)^n}{\sqrt{1 - 2ml\eta}} m\eta \tag{2.26}$$

hızla yaklaşır.

Şimdi $F(x)$ operatörünün

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

şeklinde gösterilebildiğini varsayalım. Eğer $F_1(x)$ operatörünün $F_1'(x)$, $\mathfrak{I}$-türevinin $[F_1'(x)]^{-1}$ tersi varsa ve kolayca hesaplanabiliyorsa, $F_2(x)$ operatörü ise norma göre yeteri kadar küçük bir operatör ise

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \tag{2.27}$$

denkleminin tahmini çözümünün bulunması için

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}\left(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})\right), n = 1,2, \ldots. \tag{2.28}$$

biçiminde veya

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_0)]^{-1}\left(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})\right), n = 1,2, \ldots. \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon proseslerinden birisinin kullanılması faydalı olur. Örneğin (2.29) prosesinin yakınsaklığına dair şu teorem ispatlanabilir:

Teorem 2.7: X bir Banach uzayı, $F_1: X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\mathfrak{I}$-türevlenebilir ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\| \leq l_1\|x - y\| \tag{2.30}$$

olacak şekilde $l_1 > 0$ sayısı ve $F_1'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F_1'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\| \leq m_1, \|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\| \leq \eta_1 \tag{2.31}$$

olacak şekilde $m_1 > 0$ ve $\eta_1 > 0$ sayıları var olsun. $F_2: X \to X$ operatörü her

$x \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x_0)\| \leq \eta_2 \tag{2.32}$$

ve her $x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1(x) - F_2(y)\| \leq l_2\|x - y\| \tag{2.33}$$

olacak şekilde $\eta_2 > 0$, $l_2 > 0$ sayıları var olsun. Eğer

$$m_1^2 l_2^2 < 1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2) \text{ ve } \delta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)}}{m_1 l_1} \leq r$$

ise (2.27) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (2.29) biçiminde tanımlanan iterasyon prosesi x^* çözümüne

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)} + m_1 l_2$$

olmak üzere

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q_1^n}{1 - q_1}(\eta_1 + \eta_2) \tag{2.34}$$

hızla yaklaşır.

Not 2.2: Teorem 2.5, Teorem 2.6 ve Teorem 2.7'ün koşullarından görüldüğü gibi (2.20), (2.21) ve (2.29) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı x_0 başlangıç yaklaşımının (2.19) denkleminin x^* çözümüne yeteri kadar yakın olduğu durumda gerçekleşebilir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip başlangıç yaklaşımlarının iyi seçilmesi önem taşımaktadır.

Not 2.3: $F_1(x) = 0$ denkleminin bir x_0^* çözümü varsa (2.29) prosesinde x_0 başlangıç yaklaşımı olarak x_0^* elemanı veya x_0^* elemanına yakın olan herhangi bir elemanın alınması faydalı olur.

3. BAZI SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, (1.2) formülü ile tanımlanan $S: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ ve $S_+: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ operatörlerinin bazı özellikleri verilecektir [10].

Teorem 3.1: $\varphi \in J_0$ ve $S: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ ve $S_+: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ operatörleri (1.2) şeklinde tanımlanmış olsun. O halde, her $x \in (0,1]$ için

$$\omega(S\varphi, x) \leq c_1 Z(\omega(\varphi,\cdot), x) \tag{3.1}$$

$$\omega(S_+\varphi, x) \leq c_2 Z(\omega(\varphi,\cdot), x) \tag{3.2}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{67}{6} + \ln 3\right) \text{ ve } c_2 = \frac{2}{\pi}$$

belirli sabitlerdir.

İspat: Aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$\phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0,1] \text{ için} \\ 0, & t \in [-1,2]/[0,1] \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$F\phi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{2} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in (-1,2)$$

$F: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ operatörü

$$F\phi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{2} \frac{\phi(\tau) - \phi(t)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi}\phi(t)\ln\frac{2-t}{1+t}, \qquad t \in (-1,2)$$

olarak yazılabilir.

$t_1, t_2 \in [0,1], 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 (0 < t_2 - t_1 \leq 1)$ ve $\varepsilon = \frac{t_2 - t_1}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$\pi\big(F\phi(t_1) - F\phi(t_2)\big)$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} d\tau - \int_{-1}^{2} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} d\tau + \phi(t_2) \ln \frac{2 - t_2}{1 + t_2}$$

$$- \phi(t_1) \ln \frac{2 - t_1}{1 + t_1}$$

$$= \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} d\tau - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} d\tau$$

$$+ \int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \left[\frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1}\right] d\tau$$

$$+ \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \left[\frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1}\right] d\tau + \phi(t_2) \ln \frac{2 - t_2}{1 + t_2}$$

$$- \phi(t_1) \ln \frac{2 - t_1}{1 + t_1}$$

$$= \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} d\tau - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} d\tau$$

$$+ \int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \left[\frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_2} - \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} + \frac{\phi(t_1) - \phi(t_2)}{\tau - t_2}\right] d\tau$$

$$+ \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \left[\frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_1} + \frac{\phi(t_1) - \phi(t_2)}{\tau - t_1}\right] d\tau$$

$$+ \phi(t_2) \ln \frac{2 - t_2}{1 + t_2} - \phi(t_1) \ln \frac{2 - t_1}{1 + t_1}$$

$$= \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} d\tau - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} d\tau$$

$$+ (t_2 - t_1) \int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau + [\phi(t_1) - \phi(t_2)] \int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - t_2}$$

$$+ (t_2 - t_1) \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau + [\phi(t_1) - \phi(t_2)] \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \frac{d\tau}{\tau - t_1}$$

$$+\phi(t_2)\ln\frac{2-t_2}{1+t_2}-\phi(t_1)\ln\frac{2-t_1}{1+t_1}$$

$$=\int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon}\frac{\phi(\tau)-\phi(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon}\frac{\phi(\tau)-\phi(t_1)}{\tau-t_1}d\tau$$

$$+(t_2-t_1)\int_{-1}^{t_1-\varepsilon}\frac{\phi(\tau)-\phi(t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau+(t_2-t_1)\int_{t_2-\varepsilon}^{2}\frac{\phi(\tau)-\phi(t_2)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau$$

$$+[\phi(t_1)-\phi(t_2)][\ln|t_1-\varepsilon-t_2|-\ln(1+t_2)]$$

$$+[\phi(t_1)-\phi(t_2)][\ln(2-t_1)-\ln|t_2-\varepsilon-t_1|]+\phi(t_2)\ln\frac{2-t_2}{1+t_2}$$

$$-\phi(t_1)\ln\frac{2-t_1}{1+t_1}$$

yazılabilir. Basit hesaplamalar sonucunda

$$[\phi(t_1)-\phi(t_2)][\ln|t_1-\varepsilon-t_2|-\ln(1+t_2)]$$

$$+[\phi(t_1)-\phi(t_2)][\ln(2-t_1)-\ln|t_2-\varepsilon-t_1|]+\phi(t_2)\ln\frac{2-t_2}{1+t_2}$$

$$-\phi(t_1)\ln\frac{2-t_1}{1+t_1}$$

$$=[\phi(t_1)-\phi(t_2)]\left[\ln\frac{3}{2}(t_2-t_1)-\ln(1+t_2)\right]$$

$$+[\phi(t_1)-\phi(t_2)]\left[\ln(2-t_1)-\ln\frac{t_2-t_1}{2}\right]$$

$$+\phi(t_2)[\ln(2-t_2)-\ln(1+t_2)]-\phi(t_1)[\ln(2-t_1)-\ln(1+t_1)]$$

$$=[\phi(t_1)-\phi(t_2)]\left[\ln 3+\ln\frac{t_2-t_1}{2}-\ln(1+t_2)\right]$$

$$+[\phi(t_1)-\phi(t_2)]\left[\ln(2-t_1)-\ln\frac{t_2-t_1}{2}\right]$$

$$+\phi(t_2)[\ln(2-t_2)-\ln(1+t_2)]-\phi(t_1)[\ln(2-t_1)-\ln(1+t_1)]$$

$$=\phi(t_1)\ln\frac{1+t_1}{1+t_2}+\phi(t_2)\ln\frac{2-t_2}{2-t_1}+[\phi(t_1)-\phi(t_2)]\ln 3$$

yazılır. Böylece

$$\pi\big(F\phi(t_2)-F\phi(t_1)\big)=\sum_{v=1}^{7}I_v$$

yazılabilir.

Burada,

$$I_1 = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{\tau - t_2} d\tau \,,$$

$$I_2 = -\int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{\tau - t_1} d\tau$$

$$I_3 = (t_2 - t_1) \int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_1)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau \,,$$

$$I_4 = (t_2 - t_1) \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \frac{\phi(\tau) - \phi(t_2)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau,$$

$$I_5 = \phi(t_1) \ln \frac{1 + t_1}{1 + t_2},$$

$$I_6 = \phi(t_2) \ln \frac{2 - t_2}{2 - t_1},$$

$$I_7 = \big(\phi(t_1) - \phi(t_2)\big) \ln 3.$$

Şimdi $v = 1, \dots ., 7$ için $|I_v|$'nın değerlendirmesini ele alalım. O halde,

$$|I_1| \le \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\omega(\phi, |\tau - t_2|)}{|\tau - t_2|} d\tau = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+t_2-t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi = \int_{0}^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi, \xi + \varepsilon)}{\xi + \varepsilon} d\xi$$

$$\le \int_{0}^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi$$

sağlanır. Benzer şekilde,

$$|I_2| \le \int_{t_1-\varepsilon}^{t_2-\varepsilon} \frac{\omega(\phi,|\tau-t_1|)}{|\tau-t_1|}d\tau = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \frac{\omega(\phi,t_1-\tau)}{t_1-\tau}d\tau + \int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\tau-t_1)}{\tau-t_1}d\tau$$

$$= 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi = 2\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi/2)}{\xi}d\xi \le 2\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$|I_3| \le (t_2-t_1)\int_{-1}^{t_1-\varepsilon} \frac{\omega(\phi,t_1-\tau)}{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}d\tau = (t_2-t_1)\int_{\varepsilon}^{1+t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi+t_2-t_1)}d\xi = \sum_{v=1}^{3} I_3^v$$

yazılabilir. Burada,

$$I_3^{(1)} = (t_2-t_1)\int_{\varepsilon}^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi+t_2-t_1)}d\xi,$$

$$I_3^{(2)} = (t_2-t_1)\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi+t_2-t_1)}d\xi$$

$$I_3^{(3)} = (t_2-t_1)\int_{1}^{1+t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi+t_2-t_1)}d\xi.$$

$I_3^{(1)}$ ve $I_3^{(2)}$ için

$$I_3^{(1)} \le \int_{\varepsilon}^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi = \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi+\varepsilon)}{\xi+\varepsilon}d\xi \le \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi = \int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi/2)}{\xi}d\xi$$

$$\le \int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi$$

$$I_3^{(2)} \le (t_2-t_1)\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi.\xi}d\xi = (t_2-t_1)\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2}d\xi$$

elde edilir. Ayrıca,

$$I_3^{(3)} = (t_2 - t_1)\int_1^{1+t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi = (t_2 - t_1)\int_0^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi+1)}{(\xi+1)(\xi + t_2 - t_1)}d\xi$$

$$\leq (t_2 - t_1)\int_0^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi$$

Bu integralin değerlendirilmesinde iki durumu dikkate almak gerekir: $t_1 \leq t_2 - t_1$ ve $t_1 > t_2 - t_1$.

<u>Durum 3.1:</u> Eğer $t_1 \leq t_2 - t_1$ ise, o zaman

$$I_3^{(3)} \leq (t_2 - t_1)\int_0^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi \leq (t_2 - t_1)\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi$$

$$\leq \int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi$$

<u>Durum 3.2:</u> Eğer $t_1 > t_2 - t_1$ ise, o zaman

$$I_3^{(3)} \leq (t_2 - t_1)\int_0^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi$$

$$= (t_2 - t_1)\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi + (t_2 - t_1)\int_{t_2-t_1}^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi$$

Ek olarak,

$$(t_2 - t_1)\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi \leq \int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi\,,$$

$$(t_2 - t_1)\int_{t_2-t_1}^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)}d\xi \leq (t_2 - t_1)\int_{t_2-t_1}^{t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2}d\xi$$

$$\leq (t_2 - t_1)\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2}d\xi$$

yazılabilir. Bundan dolayı,

$$I_3^{(3)} \leq \int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + (t_2 - t_1) \int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi$$

elde edlir. Böylece, $I_3^{(1)}$, $I_3^{(2)}$ ve $I_3^{(3)}$ dikkate alındığında

$$|I_3| \leq 2\left(\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + (t_2 - t_1) \int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi\right)$$

elde edilir.

Şimdi I_4'ü değerlendirelim.

$$|I_4| \leq (t_2 - t_1) \int_{t_2-\varepsilon}^{2} \frac{\omega(\phi,|\tau - t_2|)}{|\tau - t_1||\tau - t_2|} d\tau = \sum_{v=1}^{3} I_4^v$$

yazılır. Burada

$$I_4^{(1)} = (t_2 - t_1) \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} \frac{\omega(\phi,\tau - t_2)}{(\tau - t_2)(\tau - t_1)} d\tau ,$$

$$I_4^{(2)} = (t_2 - t_1) \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\tau - t_2)}{(\tau - t_2)(\tau - t_1)} d\tau ,$$

$$I_4^{(3)} = (t_2 - t_1) \int_{t_2+\varepsilon}^{2} \frac{\omega(\phi,\tau - t_2)}{(\tau - t_2)(\tau - t_1)} d\tau.$$

$I_4^{(1)}$ için

$$I_4^{(1)} = (t_2 - t_1)\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(t_2 - t_1 - \xi)} d\xi = (t_2 - t_1)\int_{\varepsilon}^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, t_2 - t_1 - \xi)}{(t_2 - t_1 - \xi)\xi} d\xi$$

$$\leq 2\int_{\varepsilon}^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, t_2 - t_1 - \xi)}{t_2 - t_1 - \xi} d\xi = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi = 2\int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi/2)}{\xi} d\xi$$

$$\leq 2\int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$I_4^{(2)} = (t_2 - t_1)\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi = \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi/2)}{\xi} d\xi$$

$$\leq \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi$$

yazabilir. $I_4^{(3)}$ için

$$I_4^{(3)} = (t_2 - t_1)\int_{t_2 + \varepsilon}^{2} \frac{\omega(\phi, \tau - t_2)}{(\tau - t_2)(\tau - t_1)} d\tau = (t_2 - t_1)\int_{\varepsilon}^{2 - t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi = \sum_{v=1}^{3} I_4^{(3,v)}$$

eşitliğini yazılır. Burada

$$I_4^{(3,1)} = (t_2 - t_1)\int_{\varepsilon}^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi\ ,$$

$$I_4^{(3,2)} = (t_2 - t_1)\int_{t_2 - t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi\ ,$$

$$I_4^{(3,3)} = (t_2 - t_1)\int_{1}^{2 - t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi$$

şeklinde tanımlanır.

$I_4^{(3,1)}$ ve $I_4^{(3,2)}$ için,

$$I_4^{(3,1)} = (t_2 - t_1) \int_{\varepsilon}^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi = (t_2 - t_1) \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi, \xi + \varepsilon)}{(\xi + \varepsilon)(\xi + 3\varepsilon)} d\xi$$

$$\leq \frac{(t_2 - t_1)}{3\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi, \xi + \varepsilon)}{\xi + \varepsilon} d\xi = \frac{2}{3} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi, \xi + \varepsilon)}{\xi + \varepsilon} d\xi \leq \frac{2}{3} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, \xi/2)}{\xi} d\xi \leq \frac{2}{3} \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi$$

$$I_4^{(3,2)} = (t_2 - t_1) \int_{t_2 - t_1}^{1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi \leq (t_2 - t_1) \int_{t_2 - t_1}^{1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi . \xi} d\xi$$

$$= (t_2 - t_1) \int_{t_2 - t_1}^{1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi^2} d\xi$$

yazılabilir.

Şimdi $I_4^{(3,3)}$ göz önüne alalım.

İlk olarak,

$$I_4^{(3,3)} = (t_2 - t_1) \int_1^{2 - t_2} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi = (t_2 - t_1) \int_0^{1 - t_2} \frac{\omega(\phi, \xi + 1)}{(\xi + 1)(\xi + t_2 - t_1)} d\xi$$

$$\leq (t_2 - t_1) \int_0^{1 - t_2} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi$$

yazılabilir.

Burada iki durumu dikkate almak gerekir: $1 - t_2 \leq t_2 - t_1$ ve $1 - t_2 > t_2 - t_1$.

<u>Durum 3.3:</u> Eğer $1 - t_2 \leq t_2 - t_1$ ise, o zaman

$$I_4^{(3,3)} \leq (t_2 - t_1) \int\limits_0^{1-t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi \leq (t_2 - t_1) \int\limits_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi$$

$$\leq \int\limits_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi.$$

<u>Durum 3.4:</u> Eğer $1 - t_2 > t_2 - t_1$ ise, o zaman

$$I_4^{(3,3)} \leq (t_2 - t_1) \int\limits_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi + (t_2 - t_1) \int\limits_{t_2-t_1}^{1-t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi(\xi + t_2 - t_1)} d\xi$$

$$\leq \int\limits_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + (t_2 - t_1) \int\limits_{t_2-t_1}^{1-t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi$$

$$\leq \int\limits_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + (t_2 - t_1) \int\limits_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Böylece, $I_4^{(3,v)}, v = 1,2,3$ için sonuçları kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$I_4^{(3)} \leq \frac{5}{3} \int\limits_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + 2(t_2 - t_1) \int\limits_{t_2-t_1}^{1-t_2} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Benzer şekilde, $I_4^v, v = 1,2,3$ için sonuçları kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|I_4| \leq \frac{14}{3} \int\limits_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi} d\xi + 2(t_2 - t_1) \int\limits_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Şimdi, $I_v, v = 5,6,7$ göz önüne alalım.

İlk olarak,

$$|I_5| = |\phi(t_1)|(\ln(1 + t_2) - \ln(1 + t_1)).$$

olsun. Sağ taraf için, $[1 + t_1, 1 + t_2]$ aralığı üzerinde ortalama değer teoremini kullanırsak $\theta \in [0,1]$ için aşağıdaki elde edilir:

$$|I_5| = |\phi(t_1)|\frac{t_2 - t_1}{2 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)} = |\phi(t_1) - \phi(-1)|\frac{t_2 - t_1}{2 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)}.$$

Buradan

$$|I_5| \leq \omega(\phi, 1 + t_1)\frac{t_2 - t_1}{2 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)} \leq \frac{\omega(\phi, t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}(1 + t_1)\frac{t_2 - t_1}{2 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)}$$
$$\leq \frac{2}{2 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)}\omega(\phi, t_2 - t_1) \leq \omega(\phi, t_2 - t_1)$$

elde edilir. Şimdi,

$$I_6 = \phi(t_2)\ln\frac{2 - t_2}{2 - t_1}$$

terimini göz önüne alalım. Bunun için, $\ln(2 - t_1) - \ln(2 - t_2)$ farkı aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$\ln(2 - t_1) - \ln(2 - t_2) = \ln\big(1 + (1 - t_1)\big) - \ln\big(1 + (1 - t_2)\big).$$

$1 - t_1 = w_1, 1 - t_2 = w_2$ dersek, $w_1, w_2 \in [0,1]$ ve $0 \leq w_2 < w_1 \leq 1$ sonucuna varılır. Böylece,

$$\ln(2 - t_1) - \ln(2 - t_2) = \ln(1 + w_1) - \ln(1 + w_2)$$

olduğundan

$$|I_6| = |\phi(t_2)|(\ln(1 + w_1) - \ln(1 + w_2))$$

yazılır. Daha sonra, $\ln(1 + w)$ fonksiyonu için, bir öncekine benzer şekilde, $\theta \in [0,1]$ iken $[1 + w_1, 1 + w_2]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$|I_6| = |\phi(t_2)|\frac{w_1 - w_2}{2 + w_2 + \theta(w_1 - w_2)} = |\phi(t_2) - \phi(0)|\frac{w_1 - w_2}{2 + w_2 + \theta(w_1 - w_2)}$$

olur. Burada,

$$|I_6| = |\phi(t_2) - \phi(0)|\frac{t_2 - t_1}{2 + w_2 + \theta(t_2 - t_1)} \leq \frac{t_2 - t_1}{2}(\phi, t_2) \leq \frac{t_2 - t_1}{2}\frac{\omega(\phi, t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}t_2$$
$$\leq \frac{\omega(\phi, t_2 - t_1)}{2}$$

dir.

Ek olarak

$$|I_7| = |\phi(t_1) - \phi(t_2)| \ln 3 \leq \omega(\phi, t_2 - t_1) \ln 3$$

yazılabilir. Bundan dolayı aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|I_5| + |I_6| + |I_7| \leq \left(\frac{3}{2} + \ln 3\right) \omega(\phi, t_2 - t_1).$$

Ayrıca,

$$\omega(\phi, t_2 - t_1) = \frac{\omega(\phi, t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}(t_2 - t_1) = \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$|I_5| + |I_6| + |I_7| \leq \left(\frac{3}{2} + \ln 3\right) \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi$$

elde edilir. Ancak bunun yanında her $x \in (0,1]$ için $\omega(\varphi, x) = \omega(\phi, x)$ ve her $t \in [0,1]]$ için $F\phi(t) = S\varphi(t)$, önceki gözlemler kullanılarak

$$|S\varphi(t_2) - S\varphi(t_1)| \leq c_1 Z(\omega(\varphi, \cdot), t_2 - t_1), c_1 = \frac{67}{6} + \ln 3 \tag{3.3}$$

sonucuna varılır. Şimdi $S_+\varphi(t_2) - S_+\varphi(t_1)$ farkını düşünelim.

$$\begin{aligned} &S_+\varphi(t_2) - S_+\varphi(t_1) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t_2} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{t_2 - t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t_1} d\tau \\ &+ \frac{t_2 - t_1}{\pi} \int_{t_2 - t_1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau + t_1)(\tau + t_2)} d\tau \end{aligned}$$

yazılır ve $|\varphi(\tau)| \leq |\varphi(\tau) - \varphi(0)| \leq \omega(\phi, \tau)$ olduğundan

$$|S_+\varphi(t_2) - S_+\varphi(t_1)|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{t_2-t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau+t_2}d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{t_2-t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau+t_1}d\tau$$

$$+\frac{t_2-t_1}{\pi}\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau+t_1)(\tau+t_2)}d\tau$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{t_2-t_1} \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi}d\xi + \frac{t_2-t_1}{\pi}\int_{t_2-t_1}^{1} \frac{\omega(\varphi,\xi)}{\xi^2}d\xi \leq \frac{2}{\pi}Z(\omega(\varphi,\cdot),t_2-t_1)$$

elde edilir. Böylece,

$$|S_+\varphi(t_2) - S_+\varphi(t_1)| \leq c_1 Z(\omega(\varphi,\cdot),t_2-t_1), c_1 = \frac{2}{\pi}. \quad (3.4)$$

$Z(\omega(\varphi,\cdot),t)$ fonksiyonu, $t \in [0,1]$'de azalmayan olduğundan, (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinden (3.1) ve (2.2) eşitsizliklerinin doğruluğu çıkar.

Böylece, Teorem 3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2: $S: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ ve $S_+: \overset{0}{H}_\alpha \to H_\alpha$ operatörleri (1.2) denklemindeki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$\|S\|_\alpha \leq A(\alpha), \|S_+\|_\alpha \leq B(\alpha), \quad (3.5)$$

$$\|S\|_\infty \leq C(\alpha), \|S_+\|_\infty \leq D(\alpha) \quad (3.6)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ ve $D(\alpha)$ α parametresine bağlı sabitlerdir.

İspat: Teorem 4.1'e göre, her $\varphi \in J_0$ ve $x \in (0,1]$ için

$$\omega(S\varphi,x) \leq c_1 Z(\omega(\varphi,\cdot),x) = c_1\left(\int_0^x \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi}d\xi + x\int_x^1 \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^2}d\xi\right)$$

$$= c_1\left(\int_0^x \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^\alpha}\xi^{\alpha-1}d\xi + x\int_x^1 \frac{\omega(\phi,\xi)}{\xi^\alpha}\xi^{\alpha-2}d\xi\right)h$$

$$\leq c_1 H(\varphi,\alpha)\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{x^{\alpha-1}-1}{1-\alpha}\right) = c_1 H(\varphi,\alpha)\frac{x^\alpha(1-\alpha x^{\alpha-1})}{\alpha(1-\alpha)}$$

yazılır. Böylece

$$\omega(S\varphi, x) \leq \frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} x^\alpha H(\varphi, \alpha)$$

ve

$$H(S\varphi, \alpha) \leq \frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} H(\varphi, \alpha) \leq \frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi\|_{\alpha,0} \tag{3.7}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\omega(S_+\varphi, x) \leq \frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)} x^\alpha H(\varphi, \alpha)$$

ve

$$H(S_+\varphi, \alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)} H(\varphi, \alpha) \leq \frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)} \|\varphi\|_{\alpha,0} \tag{3.8}$$

yazılır. $F\phi(t)$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
\pi|F\phi(t)| &\leq \int_{-1}^{2} \frac{\omega(\phi, |\tau - t|)}{|\tau - t|} d\tau + \omega(\phi, 1+t)\ln 2 \\
&= \int_{-1}^{t} \frac{\omega(\phi, t-\tau)}{t-\tau} d\tau + \int_{t}^{2} \frac{\omega(\phi, \tau - t)}{\tau - t} d\tau + \omega(\phi, 1+t)\ln 2 \\
&= \int_{0}^{1+t} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi} d\xi + \int_{0}^{2-t} \frac{\omega(\phi, \xi)}{\xi^2} d\xi + \omega(\phi, 1+t)\ln 2 \\
&\leq H(\varphi, \alpha)\left(\int_{0}^{1+t} \xi^{\alpha-1} d\xi + \int_{0}^{2-t} \xi^{\alpha-1} d\xi + (1+t)^\alpha \ln 2\right) \\
&= H(\varphi, \alpha)\left(\frac{(1+t)^\alpha + (2-t)^\alpha}{\alpha} + (1+t)^\alpha \ln 2\right) \\
&\leq 2^\alpha \left(\frac{2}{\alpha} + \ln 2\right) H(\varphi, \alpha)
\end{aligned}$$

yazılır. O halde

$$\|S\varphi\|_\infty \leq \frac{2^\alpha}{\pi}\left(\frac{2}{\alpha} + \ln 2\right) H(\varphi, \alpha) \leq \frac{2^\alpha}{\pi}\left(\frac{2}{\alpha} + \ln 2\right) \|\varphi\|_{\alpha,0} \tag{3.9}$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\|S\|_\infty \leq C(\alpha), C(\alpha) = \frac{2^\alpha}{\pi}\left(\frac{2}{\alpha} + \ln 2\right).$$

Ayrıca (3.7) ve (3.9)'dan

$$\|S\varphi\|_\infty \leq A(\alpha)\|\varphi\|_{\alpha,0}, A(\alpha) = max\left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)}, C(\alpha)\right)$$

elde edilir. Son olarak

$$\|S\|_\infty \leq A(\alpha)$$

olur. Şimdi $S_+\varphi$'yi göz önüne alalım.

$$S_+\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t} d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau + t} d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau^\alpha} \frac{\tau^\alpha}{\tau + t} d\tau$$

yazılırsa

$$|S_+\varphi| \leq \frac{H(\varphi,\alpha)}{\pi}\int_0^1 \frac{\tau^\alpha}{\tau + t} d\tau \leq \frac{H(\varphi,\alpha)}{\pi}\int_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau = \frac{H(\varphi,\alpha)}{\alpha\pi} \leq \frac{1}{\alpha\pi}\|\varphi\|_{\alpha,0}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|S_+\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha\pi}\|\varphi\|_{\alpha,0} \tag{3.10}$$

olur. Buna göre,

$$\|S_+\|_\infty \leq D(\alpha), D(\alpha) = \frac{1}{\alpha\pi}$$

olur. (3.8) ve (3.10)'den

$$\|S_+\varphi\|_\alpha \leq B(\alpha)\|\varphi\|_{\alpha,0}, B(\alpha) = max\left(\frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)}, D(\alpha)\right)$$

elde edilir.

Son olarak

$$\|S_+\|_\alpha \le B(\alpha)$$

elde edilir.

Böylece, Teorem 3.2'nin ispatı tamamdır.

4. (1.1) SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (1.1) denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. (1.1) denklemini aşağıdaki operatör denklem şeklinde yazalım:

$$\varphi(t) = A\varphi(t), t \in [0.1]. \tag{4.1}$$

Burada, $A: \overset{0}{H}_\alpha \to \overset{0}{H}_\alpha$ operatörü (1.3) formülü ile tanımlanır. (4.1) operatör denklemine, Banach daralma dönüşüm prensibi uygulanacaktır [31].

<u>Teorem 4.1:</u> $r > 0$ için $\varphi \in \overset{0}{H}_\alpha$ ve $\overset{0}{H}_{\alpha,r} = \left\{\varphi \in \overset{0}{H}_\alpha : \|\varphi\|_{\alpha,0} \le r\right\}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} p(\alpha) = {} & \|f\|_{\alpha,0}\{r^2 + (|\lambda| + C(\alpha) + |\mu| D(\alpha) r)^2\} \\ & + 2\|f\|_\infty \Big\{r^2 \\ & + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu| D(\alpha)\big) r\big)\left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + |\mu| \frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)}\right) r\Big\} \le r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(\alpha) = {} & 2\|f\|_{\alpha,0}\Big\{3r \\ & + \Big(|\lambda| + r\big(C(\alpha) + |\mu| D(\alpha)\big)\Big)\Big(C(\alpha) + 4A(\alpha) + |\mu|\big(4B(\alpha) + D(\alpha)\big)\Big)\Big\} \\ & < 1 \end{aligned}$$

ise, o zaman (4.1) denkleminin $\overset{0}{H}_{\alpha,r}$ küresinde tek bir $\varphi^* \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ çözümü vardır.

Ayrıca, keyfi $\varphi_0 \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ için aşağıdaki ardışık yaklaşımlar $\overset{0}{H}_{\alpha,r}$ küresinde (4.1) denkleminin φ^* çözümüne yakınsar.

$$\varphi_n(t) = A\varphi_{n-1}(t), n = 1,2, \ldots. \tag{4.2}$$

Ardışık yaklaşımın yakınsama hızı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\|\varphi_n - \varphi^*\|_{\alpha,0} \le \frac{\big(q(\alpha)\big)^n}{1 - q(\alpha)} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{\alpha,0}, n = 1,2, \ldots . \tag{4.3}$$

İspat:

$$u(t) = \lambda - S\varphi(t) + \mu S_+\varphi(t)$$

olsun. (1.1) denkleminden

$$\varphi(t) = f(t)\big(\varphi^2(t) + u^2(t)\big) = f(t)g(t)$$

$$g(t) = \varphi^2(t) + u^2(t)$$

yazarız. Aşağıdaki eşitsizlik kolayca ispatlanabilir:

$$H(\varphi,\alpha) \le H(f,\alpha)\|g\|_\infty + H(g,\alpha)\|f\|_\infty.$$

Ayrıca,

$$\|g\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty^2 + \|u\|_\infty^2$$

ve Teorem 3.4 kullanılırsa

$$\|u\|_\infty \le |\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0} \tag{4.4}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\|g\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)^2 \tag{4.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} H(g,\alpha) &\le H(\varphi^2,\alpha) + H(u^2,\alpha) \\ &\le 2(H(\varphi,\alpha)\|\varphi\|_\infty + H(u,\alpha)\|u\|_\infty). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ek olarak, (2.15) ve (2.16) eşitsizliklerini ve $u(t)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$H(u,\alpha) \le \left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{|\mu|}{\alpha(1-\alpha)}c_2\right)H(\varphi,\alpha) \tag{4.7}$$

elde edilir. O zaman, (4.4), (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} H(g,\alpha) \le 2\Bigg(H(\varphi,\alpha)\|\varphi\|_\infty + \left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{|\mu|}{\alpha(1-\alpha)}c_2\right)H(\varphi,\alpha)\Bigg) \\ \times\Big(\big(|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)\Big) \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. $H(\varphi,\alpha)$ için verilen eşitsizlik ve (4.5) ve (4.8) eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$H(\varphi,\alpha) \leq H(f,\alpha)\left\{\|\varphi\|_\infty^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)^2\right\}$$

$$+2\|f\|_\infty \left\{\begin{matrix}\left(H(\varphi,\alpha)\|\varphi\|_\infty + \left(\dfrac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + \dfrac{|\mu|}{\alpha(1-\alpha)}c_2\right)H(\varphi,\alpha)\right) \\ \text{x}\big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)\end{matrix}\right\} \quad (4.9)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.5) eşitsizliği ve $\varphi(t)$ ifadesi kullanılarak

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$
$$\leq \|f\|_\infty\left\{\|\varphi\|_\infty^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)^2\right\} \qquad (4.10)$$

yazılır. O zaman, (4.9) ve (4.10) kullanılarak

$$\|\varphi\|_{\alpha,0} \leq \|f\|_{\alpha,0}\left\{\|\varphi\|_{\alpha,0}^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)^2\right\}$$

$$+2\|f\|_\infty\left\{\|\varphi\|_{\alpha,0}^2 + \left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{|\mu|}{\alpha(1-\alpha)}c_2\right)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi\|_{\alpha,0}\big)\right\}$$

elde edilir.

Bir önceki eşitsizlik ve (4.1) denklemi her $\varphi \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ için

$$\|A\varphi\|_{\alpha,r} \leq \|f\|_{\alpha,0}\left\{r^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)r\big)^2\right\}$$
$$+\,2\|f\|_\infty\left\{r^2 + \big(|\lambda| + \big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)r\big)\left(\frac{c_1}{\alpha(1-\alpha)} + |\mu|\frac{c_2}{\alpha(1-\alpha)}\right)r\right\}$$

eşitsizliğini sağlar. $A:\overset{0}{H}_\alpha \to \overset{0}{H}_\alpha$ operatörünün bir içine dönüşüm olduğunu bu son eşitsizlik ve teoremin varsayımı gösteriyor.

Şimdi $A:\overset{0}{H}_{\alpha,r} \to \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ operatörünün bir daralma operatörü olduğunu göstereceğiz.

Her $\varphi,\psi \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ için

$$A\varphi(t) - A\psi(t) = f(t)G(t)$$

$$G(t) = \varphi^2(t) - \psi^2(t) + u^2(t) - v^2(t)$$

$$v(t) = \lambda - S\psi(t) + \mu S_+\psi(t)$$

yazılır. Ayrıca

$$H(A\varphi - A\psi, \alpha) \leq H(f, \alpha)\|G\|_\infty + H(G, \alpha)\|f\|_\infty. \tag{4.11}$$

Ek olarak

$$\|G\|_\infty \leq \|\varphi - \psi\|_\infty(\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty) + \|u - v\|_\infty(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)$$

$$\|u - v\|_\infty \leq \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0}$$

ve

$$\|v\|_\infty \leq |\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)H(\psi, \alpha)$$

ifadesinden

$$\|G\|_\infty \leq \begin{Bmatrix} (\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty) + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big(2|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big) \\ \mathrm{x}\big(H(\varphi, \alpha) + H(\psi, \alpha)\big) \end{Bmatrix}$$

$$\times\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0} \tag{4.12}$$

yazılır. Şimdi, $H(G, \alpha)$'yi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} H(G, \alpha) &= H(\varphi^2 - \psi^2, \alpha) + H(u^2 - u^2, \alpha) \\ &\leq H(\varphi - \psi, \alpha)\|\varphi + \psi\|_\infty + H(\varphi + \psi, \alpha)\|\varphi - \psi\|_\infty \\ &\quad + H(u - v, \alpha)\|u + v\|_\infty + H(u + v, \alpha)\|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca,

$$H(u - v, \alpha) \leq \big(A(\alpha) + |\mu|B(\alpha)\big)\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0}$$

$$\|u + v\|_\infty \leq \Big(2|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big)\|\varphi + \psi\|_{\alpha,0}$$

$$H(u + v, \alpha) \leq \big(A(\alpha) + |\mu|B(\alpha)\big)\|\varphi + \psi\|_{\alpha,0}$$

ve

$$\|u - v\|_\infty \leq \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0}$$

ifadesinden

$$H(G,\alpha) \leq H(\varphi-\psi,\alpha)\|\varphi+\psi\|_\infty + H(\varphi+\psi,\alpha)\|\varphi-\psi\|_\infty$$
$$+\big(A(\alpha)+|\mu|B(\alpha)\big)\|\varphi-\psi\|_{\alpha,0}$$
$$\text{x}\left(2|\lambda|+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right)\|\varphi+\psi\|_{\alpha,0}+\big(A(\alpha)+|\mu|B(\alpha)\big)\|\varphi+\psi\|_{\alpha,0}$$
$$\text{x}\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\|\varphi-\psi\|_{\alpha,0}$$

olur. Başka bir deyişle

$$H(G,\alpha) \leq \begin{Bmatrix} \|\varphi+\psi\|_\infty + H(\varphi+\psi,\alpha) \\ +4\big(A(\alpha)+|\mu|B(\alpha)\big)\left(|\lambda|+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right)\|\varphi+\psi\| \end{Bmatrix}\|\varphi-\psi\|_{\alpha,0} \quad (4.13)$$

(4.11)'de (4.12) ve (4.13) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$H(A\varphi-A\psi,\alpha)$$
$$\leq \left\{H(F,\alpha)\left\{(\|\varphi\|_\infty+\|\psi\|_\infty)\right.\right.$$
$$+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\left(2|\lambda|+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right)\big(H(\varphi,\alpha)$$
$$\left.+H(\psi,\alpha)\big)\right\}$$
$$+\left\{\|\varphi+\psi\|_\infty+H(\varphi+\psi,\alpha)\right.$$
$$\left.\left.+4\big(A(\alpha)+|\mu|B(\alpha)\big)\left(|\lambda|+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right)\|\varphi+\psi\|_{\alpha,0}\right\}\|f\|_\infty\right\}$$
$$\text{x}\|\varphi-\psi\|_{\alpha,0} \quad (4.14)$$

elde edilir. O zaman önceki eşitsizlikleri ve $A: \overset{0}{H}_{\alpha,r} \to \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ operatörünün tanımı kullanılarak

$$\|A\varphi-A\psi\|_\infty \leq \|f\|_\infty\left\{\|\varphi\|_\infty+\|\psi\|_\infty+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right.$$
$$\left.+\left(2|\lambda|+\big(C(\alpha)+|\mu|D(\alpha)\big)\right)\big(H(\varphi,\alpha)+H(\psi,\alpha)\big)\right\}$$
$$\times\|\varphi-\psi\|_{\alpha,0} \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece, (4.14) ve (4.15)'den

$$\|A\varphi - A\psi\|_{\alpha,0}$$

$$\leq \Big\{\|f\|_{\alpha,0}\Big\{\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty} + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)$$

$$+ \Big(2|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big)\big(H(\varphi,\alpha) + H(\psi,\alpha)\big)\Big\}$$

$$+ \|f\|_{\infty}\Big\{\|\varphi + \psi\|_{\infty} + H(\varphi + \psi, \alpha)$$

$$+ 4\big(A(\alpha) + |\mu|B(\alpha)\big)\Big(|\lambda| + \big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big)\|\varphi + \psi\|_{\alpha,0}\Big\}\Big\}$$

$$\mathrm{x}\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0}.$$

Bu son eşitsizlikten keyfi (ve farklı) $\varphi, \psi \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ için

$$\|A\varphi - A\psi\|_{\alpha,0}$$

$$\leq \Big\{2\|f\|_{\alpha,0}\Big\{3r$$

$$+ \Big(|\lambda| + r\big(C(\alpha) + |\mu|D(\alpha)\big)\Big)\Big(C(\alpha) + 4A(\alpha)$$

$$+ |\mu|\big(4B(\alpha) + D(\alpha)\big)\Big)\Big\}\Big\}\|\varphi - \psi\|_{\alpha,0}$$

doğrudur. Sonuç olarak, teoremin varsayımından dolayı, $A: \overset{0}{H}_{\alpha,r} \to \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ operatörü $\overset{0}{H}_{\alpha,r}$ küresinin içinde bir daralma dönüşümüdür.

Böylece, Teorem 2.4'e göre (4.1) denkleminin $\varphi^* \in \overset{0}{H}_{\alpha,r}$ şeklinde tek bir çözümü vardır. Kolayca bu çözüm (4.2) iterasyon dizisinin limiti olduğu ve (4.3) tahmininin doğru olduğu ispat edilebilir.

Böylece, Teorem 4.1'in ispatı tamamlanır.

Şimdi $\big(\varphi_n(t)\big), n \in \mathbb{N}$ (4.2)'de tanımlanan dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi^*(t)$$

olduğunu ve (4.3) değerlendirmesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\varphi_{n+1}(t) = A\varphi_n(t), \varphi_n(t) = A\varphi_{n-1}(t), n = 2, 3, \ldots.$$

olduğundan

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|A\varphi_n - A\varphi_{n-1}\| \leq q(\alpha)\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|$$

Benzer şekilde

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq q(\alpha)\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|$$

Bu sürece devam edilirse

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq q(\alpha)\|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

yazılabilir.

O halde

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq \left(q(\alpha)\right)^n \|\varphi_1 - \varphi_0\|.$$

Buradan $\forall p, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\right\| &\leq \left\|\varphi_{n+p} - \varphi_{n+p-1}\right\| + \left\|\varphi_{n+p-1} - \varphi_{n+p-2}\right\| + \ldots + \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \\ &\leq \left\{\left(q(\alpha)\right)^{n+p-1} + \left(q(\alpha)\right)^{n+p-2} + \ldots \left(q(\alpha)\right)^n\right\} \|\varphi_1 - \varphi_0\| = \\ &= \frac{1 - \left(q(\alpha)\right)^p}{1 - q(\alpha)} . \left(q(\alpha)\right)^n \|\varphi_1 - \varphi_0\| \end{aligned} \qquad (4.16)$$

yazılır.

O halde $\lim_{n \to \infty} \left(q(\alpha)\right)^n = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten $\left(\varphi_n(t)\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Ayrıca, $\overset{o}{H}_{\alpha,r}$ uzayı bir Banach uzayı olduğundan $\varphi_n(t) \to \varphi^*(t) \in \overset{o}{H}_{\alpha,r}$ limiti vardır.

$$\|\varphi_{n+1} - A\varphi^*\| = \|A\varphi_n - A\varphi^*\| \leq q(\alpha)\|\varphi_n - \varphi^*\|$$

ve $\varphi_n \to \varphi^*$ olduğundan $\varphi_{n+1} \to A\varphi^*$ olur. Ayrıca, $\varphi_{n+1} \to \varphi^*$ olduğundan

$$0 \leq \|\varphi^* - A\varphi^*\| \leq \|\varphi^* - \varphi_{n+1}\| + \|\varphi_{n+1} - A\varphi^*\|$$

eşitsizliğinden $\varphi^* = A\varphi^*$ olduğu görülür.

(4.16)'da $p \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\|\varphi_n - \varphi^*\| \leq \frac{\left(q(\alpha)\right)^n}{1 - q(\alpha)} \|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

değerlendirmesinin doğruluğu görülür.

İspat tamamdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında (1.2) operatörlerinin sınırlılık özellikleri incelenir. Bu özelliklerden yararlanılarak bu operatörleri içeren (1.1) SİD’nin Newton-Kantorovich yöntemiyle tek bir çözümünün varlığı ve bu çözümün kurulan iterasyon dizisinin limiti olduğu gösterilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Tulga, İ., (2006). İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Isparta

[2]. Eker, E., (2014). Abel ve Tekil İntegral Denklemlerin Farklı Çözüm Metotları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Erzurum

[3]. Muskhelişvili, N. I., (1962). Singularyaruıye İntegraluıye Uravneniye, Gas. İzd. Fiz. Mat. Lit., Moskowa, (Rusça)

[4] Huseynov, A. I., Myxtarov, Kh. Sh., (1980). Introduction to theory of nonlinear singular integral equations. M., Nauka, 415p

[5] Salaev, V. V., (1976). Direct and inverse estimates for a singular Cauchy integral along a closed curve, Mathematical Notes, Springer

[6] Babaev, A. A., Musaev, B. İ., (1971). Lineer olmayan Singüler İntegral Denklemler İçin Bir Nümerik Çözüm Yönteminin Yakınsaklığı Üzerine, ABAS (Azerbaycan Bilimler Akademisi Sunumu), 27(2), 3-7.

[7] Musaev, B. İ., (1988). Singüler İntegral Denklemler Teorisinde Konstruktif Yöntemler, Doktora Tezi, 339s., Tiflis.

[8] Mustafaev, N. M., (1988). Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü Üzerine, Elm 269-278.

[9] Gakkov, F. D., (1977). Krayeveye Zadaçi, İzd. Nauka, Moskowa.

[10] Mustafa, N., (2016). Some Singular Integral Operators and Their Properties, Kuwait J. Sci. 43(4) pp. 45-55.

[11] Bayraktar, M., (2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.

[12] Dönmez, A., (1997). Analiz, Hatipoğlu Yayınevi, Ankara.

[13] (Barım) Başel, P., (2008) Normlu Uzaylarda Lineer Operatörlerin Spektral Teorisi Üzerine, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Denizli.

[14] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., Ekincioğlu, İ., (2007). Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1, Seçkin Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.

[15] Tekcan, A., (2013). İleri Analiz, Dora Basım-Yayın Ltd. Şti., 2. Baskı, Bursa.

[16] Mustafa, N., (2006). Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz, Bizim Büro Basımevi, Ankara.

[17] Çağlar, M., (2009). Kapalı Düzgün Eğri Üzerinde Tanımlı Singüler İntegrallere Yaklaşım, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Kars.

[18] Kreysing, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. New York-Chichester-Brisbanc-Toronto-Singapore.

[19] Keleş, M. Ö., (2011) Değişken Üstlü Lebesque Uzaylarında $L^{p(.)}(\Omega)$ Hardy Operatörünün Sınırlılığı, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Diyarbakır.

[20] Çakar, Ö., (2007). Fonksiyonel Analize Giriş 1, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, Ankara.

[21] Mohammad, N. A., (2008). Banach Uzaylarında Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

[22] Doğan, K., (2016). Bazı Geometrik Özellikler ve Sabit Nokta İterasyonu, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, İstanbul.

[23] Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

[24] Tortop, Ş., (2014). Epi-Yakınsaklık, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Afyon.

[25] İçer, F., (2013). Klasik Lebesgue Uzaylarında Hardy Operatörünün Sınırlılığı, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Diyarbakır.

[26] Yazar, M. İ., (2007). Sonlu Elemanlı Kümelerde Fonksiyonlara Polinomlarla yaklaşım, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisan Tezi, Kars.

[27] Kantaroviç, L.V., Akilov G. P., (1984). Funkstionalıy Analiz, Nauka, Moskova.

[28] Türkan, Ş., (2014). Asimtotik Genişlemeyen Dönüşümler ve Sabit Nokta İterasyonları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Erzurum.

[29] Musayev, B., Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya Kasım.

[30] Boz, A., (2000). Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Newton Metodu İle Çözümü, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Kütahya.

[31] Mustafa, N., Nezir, V., Kara, M., (2017). On The Existence and Uniqueness of the Solution of a Nonlinear Singular Integral Equation, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, 18-21 Nisan 2017, Antalya, Turkey.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mesut Kara

Doğum Yeri ve Tarihi : Akyaka/Kars 23/10/1991

İletişim (e-posta) : mesutkara36100@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Gebze Endüstri Meslek Lisesi 2005-2009

Lisans : Kafkas Üniversitesi 2010-2014

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi 2014-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

1. Kars Merkez Subatan Ortaokulu
2. Gebze Pelikan Ortaokulu
3. Gebze Fatih Sultan Mehmet Anadolu Lisesi
4. Akyaka 70. Yıl Hüseyin Öztürk Ortaokulu

Yayınları (SCI ve diğer):

[1] Mustafa, N., Nezir, V., Kara, M., (2017). On The Existence and Uniqueness of the Solution of a Nonlinear Singular Integral Equation, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, 18-21 Nisan 2017, Antalya, Turkey.