T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİLBERT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2018
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİLBERT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2018
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ'in Prof. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Hilbert Çekirdekli Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

02/ 01/ 2018

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV	
Üye	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Erhan DENİZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . ./. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

HİLBERT ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışması Hilbert çekirdekli bir singüler integral denklemin çözümü üzerine hazırlandı.

Tezde bir Hilbert çekirdekli singular integral denklemin çözümünün varlığı Daralma Dönüşümü üzerine Schauder teoremi kullanılarak ispatlandı. Bunun için ele alınan singular integral denklem daralma sabit nokta denklemine indirgenir ve indirgenmiş denkleme Schauder teoremi uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Singüler İntegral Denklemler, Hilbert Çekirdeği, Yaklaşım Yöntemi, Sabit Nokta Teoremi.

2018, 35 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

THE APPROXIMATE SOLUTION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH HILBERT KERNEL

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Math

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

This thesis work has been prepared on the solution of singular integral equations with Hilbert kernel.

In the thesis is proved the existence of the solution of a Hilbert kernel singular integral equation using the Schauder theorem on the Contraction Operator. For this, the singular integral equation is reduced to the constriction fixid point equation and to this reduced equation Schauder theorem is applied.

Key Words: Sıngular Integral Equatıon, Hilbert Kernel, Approximation Method, Fixed Point Theorem.

2018, 35 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak bu çalişma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapıldı. Bu tez konusunu bana vererek, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, bilgisini hiçbir zaman esirgemeyerek, bana engin tecrübesi ile yol gösteren Kafkas Üniveritesi Fen Fakültesi Matematik bölümü öğretim üyesi danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya saygılarımı ve en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
F	Cisim ($F=\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$)
$\lVert\cdot\rVert$	Norm
$\left(C[a,b],\mathbb{R}\right)$	$[a,b]$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların kümesi
$\left(C[a,b],\mathbb{C}\right)$	$[a,b]$ üzerinde sürekli kompleks değerli fonksiyonların kümesi
$H_\alpha[a,b]$	$[a,b]$ ‘de Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı
$S_r(z_0)$	$z_0\in\mathbb{C}$ noktasının $r-$ komşuluğu $S_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z-z_0\rvert<r\}$
$\overline{z}$	$z=x+iy\in\mathbb{C}$ nin eşleniği $\overline{z}=x-iy$
(X,d)	d metriği ile X metrik uzayı
$(X,\lVert\cdot\rVert)$	$\lVert\cdot\rVert$ normu ile X normlu uzayı
$W_p^1[-\pi,\pi]$	Sobolyev uzayı
$L_p[-\pi,\pi]$	$[-\pi,\pi]$'de p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\left(D(a,b),\mathbb{R}\right)$	(a,b) aralığında diferansiyellenebilir (türevlenebilir) fonksiyonlar kümesi
$\left(C^{(1)}(a,b),X\right)$	Sürekli türevlenebilir $f:(a,b)\to X$ fonksiyonlarının kümesi

1. GİRİŞ

Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemini incelerken ilk kez integral denkleme rastladığı, Du Bois Reymond'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında "integral denklem" terimini önerdiği bilinmekte olup 19. yy'ın ilk yarısında uğraşılmaya başlanan integral denklemler, günümüzde matematik fizik, uygulamalı matematik, elastiklik teorisi, aeorodinamik ve akışkanlar mekaniği gibi farklı alanlarda geniş uygulama alanına sahiptir. Bu yüzdendir ki günümüzde integral denklemlerin çözülebilirliği önemini koruyan bir problemdir.

Singüler integral denklemler teorisi ise Poincare ve Hilbert tarafından başlatıldı. Uzun süre önemi anlaşılamamış olan teori, Muskhelishvili'nin çalışmalarında singüler integral denklemler teorisini, Riemann-Hilbert Sınır Değer Problemlerini incelerken kullanması ile gerekli ilgiyi görmeye başladı. Günümüzde hala aktif olarak çalışılan bir konu olan singüler integral denklemler teorisi, fizik, matematik, uygulamalı matematik, akışkanlar mekaniği, elastiklik teorisi gibi birçok alanda kullandığından önemini korumaktadır.

Bu konu ile ilgili geçmişten günümüze çok sayıda matematikçi çalışmış olup, Pogorzelski [1], Gusejnov ve Mukhtarov [2], Wolfersdorf [3,4], Junghans ve Weber [5,6], Ladoupoulos [7-10] bunlardan birkaçıdır.
Singüler integral denklemlerde kendi içinde lineer ve lineer olmayan singüler integral denklemler olarak iki başlık altında incelenir ve lineer ve lineer olmayan singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü üzerine yapılmış birçok çalışmalar vardır [11-30].

İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılın başlarında başlamış olup, 19. yüzyılın ikinci yarısında sistematikleşmiştir [31].
Çözümü lineer ya da lineer olmayan singüler integral denklemlerin çözümüne indirgenen birçok fizik, mekanik ve uygulamalı matematik problemleri vardır [bkz. 31].

Diferansiyel denklemler dersinden de bilindiği üzere,

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y),\ y(x_0) = y_0$$

şekilli Cauchy sınır değer problemi, $F(x,y)$ fonksiyonu gerekli koşulları sağladığı zaman,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y(s))ds$$

şekilli integral denkleme denktir.

Şimdi de çözümü bir Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral denklemin çözümüne indirgenen bir problemi ele alalım.
D bölgesi sınırı birim çembere çok yakın olan ve denklemi polar koordinatlarda

$$\rho = 1 + \lambda\varphi(\theta)$$

ile ifade edilen bir bölge olsun. Birim diski D bölgesine resmeden analitik bir $f(z)$ fonksiyonunu bulalım. Bunun için $\ln\frac{f(z)}{z}$, $z = e^{i\psi}$ alalım. Bu durumda,

$$\ln\frac{f(z)}{z} = \ln\left[1 + \lambda\varphi(\theta)\right] + i(\theta - \psi)$$

yazılır.

$$\ln\frac{f(z)}{z} = u + iv,$$

yani $u = \ln\left[1 + \lambda\varphi(\theta)\right]$, $v = \theta - \psi$ dersek analitik fonksiyonlar için Hilbert formülünden

$$\theta - \psi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left[1 + \lambda\varphi(\theta(\alpha))\right]\cot\frac{\alpha - \psi}{2}\, d\alpha,$$

ya da,

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left[1 + \lambda\varphi(\theta(\alpha))\right]\cot\frac{\alpha - \psi}{2}\, d\alpha + \theta$$

elde edilir [40].

Böylece, ele alınan problemin çözümü Hilbert çekirdekli bir lineer olmayan singüler integral denklemin çözümüne indirgenmiş olur [32].

Matematiğin, fiziğin ve mekaniğin çok sayıda problemleri lineer olmayan singüler integral denklemlerin çözümüne indirgeniyor. Bu tür denklemlerin incelenmesindeki esas zorluklar bu tür denklemlerdeki operatörlerin tamamen (eş) sürekli olmamasından kaynaklanıyor.

20. asrın ortalarında Hüseyinov [31]

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F\left(x, s, u(x), \lambda\right) \cot \frac{s-x}{2} ds \equiv Sf$$

şekilli lineer olmayan singüler integral denklemleri Hölder sınıfında inceledi ve bu sınıfta denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini gösterdi.

Ele alınan tez çalışmasında, bu tür denklemler Sobolyev uzayında incelenir ve bu türden bir denklemin çözümünün varlığı gösterilir.

2. GENEL BİLGİLER

Tez çalışmasının bu kısmında, kullanılacak olan bazı kavram ve tanımlar verelim.

Tanım 2.1: Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasından belli bir uzaklıkta bulunan noktaların kümesine x_0'ın bir *komşuluğ*u denir ve $U\left(x_0\right)$ ile gösterilir [33].

Tanım 2.2: Bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in [a,b]$ noktası verilsin. Eğer, her $U\left(f(x_0)\right)$ komşuluğu ve her $x \in U\left(x_0\right)$ için $f(x) \in U\left(f(x_0)\right)$ olacak şekilde $U\left(x_0\right)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu x_0 noktasında *süreklidir* denir [33].

Bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığının her noktasında sürekli olan reel değerli fonksiyonların kümesi $\left(C[a,b],\mathbb{R}\right)$ ile gösterilir.

Bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığının her noktasında sürekli olan kompleks değerli fonksiyonların kümesi de $\left(C[a,b],\mathbb{C}\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: Bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, A sayısı ve $x_0 \in (a,b)$ noktası verilsin. Eğer, her $U(A)$ komşuluğu ve her $x \in U\left(x_0\right)$ için $f(x) \in U(A)$ olacak şekilde $U\left(x_0\right)$ komşuluğu varsa f fonksiyonunun x_0 noktasında *limiti* A'dır denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ yazılır [33].

Tanım 2.4: Bir $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in (a,b)$ noktası verilsin. Eğer, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sonlu limiti varsa f fonksiyonu x_0 noktasında *türevlenebilirdir* denir. Bu limit değerine fonksiyonun x_0 noktasında türevi denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ yazılır [33].

Bir $(a,b)\subset\mathbb{R}$ aralığının her noktasında türevlenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi $(D(a,b),\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Türevi sürekli olan fonksiyonlara sürekli türevlenebilir fonksiyonlar denir. $(a,b)\subset\mathbb{R}$ aralığında sürekli türevlenebilir fonksiyonların kümesi $C^{(1)}[a,b]$ olarak gösterilir [33].

<u>Tanım 2.5:</u> Bir $\gamma\in(C[a,b],\mathbb{C})$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$'de bir *eğri*, $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$'ye de sırasıyla, γ eğrisinin *başlangıç* ve *bitiş* noktaları denir [33].
Başlangıç ve bitiş noktaları (düzlemde aynı noktayı temsil eden) çakışan *eğrilere kapalı eğriler* denir.

<u>Tanım 2.6:</u> Bir γ eğrisi için $\gamma\in(C^{(1)}[a,b],\mathbb{C})$ oluyorsa böyle eğriye *diferansiyellenebilir eğri* denir [33].

<u>Tanım 2.7:</u> Tanım aralığının her noktasında diferansiyeli sıfırdan farklı olan eğrilere *düzgün* (*regüler*) *eğriler* denir [33].

<u>Tanım 2.8:</u> Her $t_1,t_2\in[a,b]$ için $t_1\neq t_2$ iken $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ ya da bir başka deyişle $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ iken $t_1=t_2$ oluyorsa γ eğrisine *basit eğ*ri denir. Basit eğrilere *Jordan eğrisi* de denir [33].

Yani basit eğriler grafiği kendisini kesmeyen eğrilerdir.

<u>Tanım 2.9:</u> Bir $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının belirli bir $S_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ komşuluğunun her noktasında diferansiyellenebilen bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir [34].

Tanım bölgesinin her noktasında analitik olan fonksiyona bu *bölgede analitik fonksiyon* denir.

Yukarıdaki tanımdan görüldüğü üzere, yani bir fonksiyonun noktada analitiklik kavramı aslında bölgesel bir kavramdır. Yan bir fonksiyon bir bölgede analitik olabilir.

Bu durumda şunu belirtmek önemlidir ki bir noktada analitik fonksiyon bu noktanın belirli bir komşuluğunda diferansiyellenebilir olmak zorundadır. Öyle ki, örneğin $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de sürekli ve $z_0=0$ noktasında diferansiyellenebilirdir ve $f'(0)=0$. Fakat, bu fonksiyon $z_0=0$ noktasında analitik değildir. Çünkü $z\neq 0$ noktalarında $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir değildir. Bu hükmün doğruluğu

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=z\frac{\mathrm{Re}(z+h)-\mathrm{Re}(z)}{h}+\mathrm{Re}(z+h)$$

eşitliğinden görülür. Dolayısıyla, $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ fonksiyonu $z_0=0$ noktasında analitik değildir.

Böylece, diferansiyellenebilme analitiklik için gerekli olup yeterli koşul değildir.

<u>Tanım 2.10:</u> Kompleks düzlemin her noktasında analitik fonksiyona *tam fonksiyon* denir [34].

Örneğin, e^z, $\sin z$, $\cos z$ fonksiyonları birer tam fonksiyonlardır.

Analitik fonksiyonların tanımı bazı kaynaklarda yakınsak serinin toplamı olarak da tanımlanır.

<u>Tanım 2.11:</u> Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu bir $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının bir $S_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının $S_\delta(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\delta\}$ komşuluğunda düzgün yakınsak

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ \ z\in S_\delta(z_0)$$

serisinin toplamı şeklinde gösterilebilirse $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında *analitiktir* denir [34].

Buna göre, tam fonksiyonlar kompleks düzlemin her noktasında düzgün yakınsak kuvvet serinin toplamı şeklinde yazılabilen fonksiyonlardır.

Tanım 2.12: Tanım bölgesinin bir noktasında hem açıyı, hem de yönü koruyan fonksiyona bu *noktada konform fonksiyon* denir [34].

Tanım 2.13: Tanım bölgesinde bire-bir konform fonksiyonla verilen $w=f(z)$ dönüşümüne *konform dönüşüm* denir [34].

Tanım 2.14: X boştan farklı bir küme ve F cismi $(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ verilsin. Eğer, $+:X\times X\to X,\ (x,y)\to x+y$ ve $\cdot:F\times X\to X,\ (a,x)\to ax$ toplama ve çarpma işlemlerine göre her $x,y,z\in X$ ve $a,b\in F$ için

1. $x+y=y+x$;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3. Her $x\in X$ için $x+\theta=x$ eşitliğini sağlayacak bir tek $\theta\in X$ vardır;
4. Her $x\in X$ için $x+(\tilde{x})=\theta$ eşitliğini sağlayacak bir tek $\tilde{x}=-x\in X$ vardır;
5. Her $x\in X$ için $ex=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $e\in X$ vardır;
6. $a(x+y)=ax+ay$;
7. $(a+b)x=ax+bx$;
8. $(ab)x=a(bx)$

koşulları sağlanıyorsa X'e F cismi üzerinde bir *vektör* (*lineer*) *uzay* denir. $F=\mathbb{R}$ olduğunda X'e reel lineer uzay, $F=\mathbb{C}$ olduğunda da kompleks lineer uzay denir [35,36] .

Tanım 2.15: X boştan farklı bir küme ve $d: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki

M_1. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

M_2. $d(x,y)=d(y,x)$;

M_3. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

koşulları sağlanıyorsa $d: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* veya *uzaklık fonksiyonu* ve (X,d) ikilisine de *metrik uzay* denir [36].

Tanım 2.16: (X,d) bir metrik uzayı ve $(x_n) \subset X, n \in \mathbb{N}$ dizisi verilsin. Eğer, $(d(x_n,x)) \subset \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ sayısal dizisi sıfıra yakınsıyorsa, yani $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ oluyorsa, $(x_n), n \in \mathbb{N}$ *dizisi* (x'e) *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olarak belirtilir [35, 36].

Tanım 2.17: (X,d) bir metrik uzayı ve $(x_n) \subset X, n \in \mathbb{N}$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, ya da her $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $(x_n), n \in \mathbb{N}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [35, 36].

Bilindiği üzere [35,36], bir metrik uzayda yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat, her Cauchy dizisi her metrik uzayda yakınsak değildir.

Örneğin, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x_n), n \in \mathbb{N}$ dizisi $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar metrik uzayında mutlak değer metriği ile bir Cauchy dizisidir. Fakat, bu dizi $(\mathbb{Q}, d)$ metrik uzayında yakınsak değildir.

Matematikte her Cauchy dizisi yakınsak olan metrik uzaylar çok önem taşımaktadır. Bu tür uzaylara tam metrik uzaylar denir. Tam metrik uzayların tanımı aşağıda verilir.

Tanım 2.18: Her Cauchy dizisi yakınsak olan metrik uzaylara bir *tam metrik uzay* denir [35, 36].

Örneğin, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$ uzayları, sırasıyla, $d(x,y)=|x-y|$, $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2\right)^{1/2}$ metrikleriyle birer tam metrik uzaylardır [35, 36].

Tanım 2.19: X uzayı F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

N_1. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

N_2. Her $a \in F$ ve her $x \in X$ için $\|ax\|=|a|\|x\|$;

N_3. Her $x, y \in X$ için $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

koşullarını sağlarsa $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm*, $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir [35, 36].

Normlu uzaylarda dizinin tanımı, dizilerin yakınsaklığının tanımı, Cauchy dizisinin tanımı vs. metrik uzaylardakine benzer şekilde verilir [36].

Tanım 2.20: Tam normlu uzaya *Banach uzayı* denir. Uzay reel veya kompleks oluşuna göre *reel yada kompleks Banach uzay* adlandırılır [36].

Teorem 2.1: (bkz. [36]) X bir metrik (ya da normlu) uzay olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. X'de her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir;
2. X'de her Cauchy dizisi sınırlıdır;
3. X'de yakınsak alt dizi bulunduran her Cauchy dizisi yaknsaktır.

Tanım 2.21: Sınırlı $f:[a,b]\to\mathbb{R}$(ya da $\mathbb{C}$) fonksiyonu verilsin. Eğer, her $x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le K|x_1-x_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $K > 0,\ \alpha \in (0,1]$ sayıları varsa f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında K sabiti ve α üssü ile *Hölder koşulu*nu sağlar denir. Buradaki K sayısına *Hölder katsayısı* ve α'ya da *Hölder üssü* denir.

$[a,b]$ aralığında K Hölder katsayısı ve α Hölder üssü ile Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $KH_\alpha[a,b]$ ile gösterilir. Katsayı söz konusu olmadığı durumda bu sınıf $H_\alpha[a,b]$ olarak belirtilir [36].

$H_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$ kapsamasının doğruluğu kolayca gösterilebilir.

$H_\alpha[a,b], \alpha \in (0,1]$ kümesinin fonksiyonların toplamı ve skalerle çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca, $\left(H_\alpha[a,b], \|\cdot\|_\alpha\right)$ uzayı

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_{C[a,b]} + H(f;\alpha),$$

burada

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max\left\{|f(x)| : x \in [a,b]\right\},$$

$$H(f;\alpha) = \sup\left\{\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} : x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in [a,b]\right\},$$

normu ile bir Banach uzayıdır [36].

<u>Tanım 2.22:</u> X Banach uzayı ve $A: X \to X$ operatörü verilsin.

$$Ax = x \tag{2.1}$$

denkleminin köküne A operatörünün *sabit nokta*sı denir [36].

Operatörlerin sabit noktalarının varlığı ve bulunması problemi matematikte önemli problemlerdendir. Bu konu geniş çalışma alanı olan bir problemdir.

Ele alınan tez çalışmada konu ile ilgili olarak Daralma Dönüşüm Prensibi veya Banach Sabit Nokta Teoremi denilen teorem verilir. Bu teorem (2.1) şekilli operatör denklemlerin tek bir çözümünün varlığı ve bu çözümün yaklaşık bulunması üzerine en yaygın olan bir yöntemi vermektedir. Bu teoremi vermeden önce aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.23: X Banach uzayının $D \subset X$ alt kümesinde tanımlı $A: D \to X$ operatörü verilsin. Eğer, her $x, y \in D$ için

$$\|Ax - Ay\| \le \alpha \|x - y\| \qquad (2.2)$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ sayısı varsa $A: D \to X$ operatörüne D'de bir *daralma dönüşüm*ü (*operatörü*) denir [35, 36].

Teorem 2.2 (Daralma Dönüşüm Prensibi veya Banach Sabit Nokta Teorem): X Banach uzayı ve kapalı $D \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer, $A: X \to X$ daralma dönüşüm operatörü D kümesini kendi içine dönüştürürse, yani $A(D) \subset D$ oluyorsa A operatörünün D'de bir tek x^* çözümü vardır; başka birdeyişle (2.1) denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm terimleri

$$x_n = Ax_{n-1}, n = 1, 2, ... \qquad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan ve *iterasyon dizisi* adlandırılan $(x_n), n \in \mathbb{N}$ dizisinin limitidir.

Burada $x_0 \in D$ keyfi elemandır. (2.3) iterasyon dizisinin x^* çözümüne yakınsama hızı

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_1 - x_0\| \qquad (2.4)$$

eşitsizliği ile verilir [36].

Şimdi de tez çalışmasının Materyal ve Yöntemler kısmında kullanacağımız ve Schauder teoremi olarak bilinen teoremi vermeden önce aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.24: X bir topolojik uzay ve $f \in C(X)$ verilsin. $x \in X$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ her $x, y \in U$ için için, $\sup\{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon$ özelliğinde bir U açık kümesi varsa, f'e X kümesi üzerinde *tamamen* (*eş*) *sürekli*dir denir [36].

Teorem 2.3 (Schauder Teoremi): X bir Banach uzayı ve $D \subset X$ kümesi X'te konveks kapalı bir küme olsun. Eğer, $A: X \to X$ operatörü D kümesini D kümesine dönüştüren tamamen (eş) sürekli bir operatör ise D'de bir sabit noktası vardır [36].

Şimdi de çalışmanın konusu olan integral denklemlerden bahis edelim.
İntegral denklemlerin en basit tanımını aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.26: Bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunu içeren

$$F\left(x, f(x), \int_a^b M(x,s,f(s),\lambda)\,ds\right) = 0 \qquad (2.5)$$

şekilli denklemlere *integral denklem* denir [31].

Özel durumda,

$$\alpha(x) f(x) = \lambda \int_a^b M(x,s) f(s)\,dt + \varphi(x) \qquad (2.6)$$

şekilli denklemlere *lineer integral denklem* denir [31]. Burada, $\alpha(x)$, $M(x,s)$, $\varphi(x)$ bilinen fonksiyonlar, $f(x)$ bilinmeyen fonksiyon olup, λ reel veya kompleks bir parametredir.

$\alpha(x) \neq$ durumunda, (2.6) denklemi

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)\,dt + h(x) \qquad (2.7)$$

şeklinde yazılır.

(2.7) şekilli denklemlere *2. çeşit Fredholm integral denklemler*,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)\,dt \qquad (2.8)$$

şekilli denklemlere de *2. çeşit homojen Fredholm integral denklemler* denir [31].
λ bir parametre olduğundan (2.6) denklemi

$$\alpha(x) f(x) = \int_a^b M(x,s) f(s) dt + \varphi(x) \tag{2.9}$$

şekilli denklemler ailesidir. $\alpha(x) = 0$ durumunda,

$$\int_a^b M(x,s) f(s) dt + \varphi(x) = 0 \tag{2.10}$$

şekilli denklemlere *1. çeşit Fredholm integral denklemleri* denir [31]. Böylece, 1. çeşit Fredholm integral denklemlerde bilinmeyen fonksiyon sadece integral içindedir. Görüldüğü üzere, 1. ve 2. çeşit Fredholm integral denklemler (2.6) denkleminin özel halidir. Bu yüzden (2.6) denklemine bazen *3. çeşit Fredholm integral denklem* denir [31].

Yukarıdaki tanımlardaki $K(x,s)$ fonksiyonuna *çekirdek fonksiyon,* $\varphi(x)$'e fonksiyonuna *integral denklemin sabit terimi* denir. Değişkenler reel olup $f(x), \varphi(x), K(x,s)$ fonksiyonları ve λ parametresi genelde reel yada kompleks değerler alabilirler.

İntegral denklemler çekirdek fonksiyonun durumuna göre çeşitlere ayrılırlar. İntegral denklemlerde çekirdek fonksiyon sürekli ya da

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds \tag{2.11}$$

integrali yakınsak olacak şekilli fonksiyon olabilir.

Çekirdeği, (2.11) şekilli inegral denklemlere *zayıf singüleriteli integral denklemler* denir [31].

Ayrıca, çekirdek fonksiyon $K(x,s) = \dfrac{H(x,s)}{(x-s)^{\alpha}}$, burada $H(x,s)$ değişkenlerin sınırlı bir fonksiyonu, $\alpha \in (0,1)$'dir, şeklinde olabilir.

$A(x,s)$ değişkenlerin diferansiyellenebilir fonksiyonu olmak üzere, çekirdek fonksiyon $K(x,s)=\dfrac{A(x,s)}{x-s}$ şekilli integral denklemlere *singüler (ya da tekil) singüler integral denklemler* denir [31].

Yukarıda bahis edilen integral denklemlerin dışında da integra denklemler vardır. Üst sınırı değişken olan itegral içeren aşağıdaki şekilli integral denklemlere *2. çeşit Volterra integral denklemi denir* [31]:

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)\,f(s)\,ds+\varphi(x). \tag{2.12}$$

Aşağıdaki şekilli integral denkleme de *2. çeşit homojen Volterra integral denklemi denir* [31]:

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)\,f(s)\,ds. \tag{2.13}$$

(2.12) denkleminde $\varphi(x)=0$ olduğu durumda,

$$\int_a^x K(x,s)\,f(s)\,ds+\varphi(x)=0 \tag{2.14}$$

denklemine de *1. çeşit Volterra integral denklemi denir* [31].

Aşağıdaki

$$f(x)+\int_a^b K(x,s)F(s,f(s))\,ds=0 \tag{2.15}$$

şekilli denklemlere *Hammerstein integral denklemleri* denir [31].

Eğer, bir lineer olmayan denklem

$$f(x)+\int_a^b K(x,s)F(s,f(s))\,ds=\varphi(x) \tag{2.16}$$

şeklinde ise $g(x)=f(x)-\varphi(x)$ ve $G(s,g(s))=F(s,f(s)+\varphi(s))$ olmak üzere (2.16) denklemi

$$g(x)+\int_a^b K(x,s)G(s,g(s))ds=0 \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir.

Görüldüğü üzere lineer olmayan integral denklemlerde homojen ve homojen olmayan integral denklemlerin ayıca öğrenilmesini gerektirecek bir durum söz konusu değildir.

$K(x,s,z)$ fonksiyonu $a \le x,s \le b, -\infty < z < +\infty$ bölgesinde tanımlı olmak üzere

$$f(x)=\int_a^b K(x,s,f(s))ds$$

şekilli denklemlere *Urıson integral denklemleri* denir [31].

Yukarıda bahis edilen lineer olmayan integral denklemlerde çekirdek fonksiyonu değişkenlerin sürekli fonksiyonlarıdır. Fakat, bir çok uygulamalı problemlerin indirgendiği integral denklemlerde çekirdek fonksiyonu sürekli olmaya bilir. Bu tür integral denklemler lineer olmayan singüler integral denklemler olarak biliniyor [31].

Bu tür denklemlerin en önemli sınıfi aşağıdaki şekilli lineer olmayan singülar integral denklemlerdir.

$$f(x)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi} K(x,s,f(s))\cot\frac{s-x}{2}ds\,. \tag{2.18}$$

(2.18) tipinde singüler integral denklemlere *Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral denklemler* denir [31].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Çalışmanın bu bölümünde, Samir M.A., Mohmed H.S., Marwa H.A.'nın bir çalışması [37] bütün yönleri ile ele alındı. Adı geçen çalışmadaki bir hata da düzeltilerek literatüre katkıda bulunuldu.

Çalışmada $L_p[-\pi,\pi], 1<p<+\infty$ ile $[-\pi,\pi]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{L_p} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u(s)|^p \, ds\right]^{\frac{1}{p}}, \; 1<p<+\infty$$

olarak tanımlanır.

Buna ek olarak, $W_p^1[-\pi,\pi]$, $1<p<+\infty$ ile türevi $u' \in L_p[-\pi,\pi]$ koşulunu sağlayan $u \in L_p[-\pi,\pi]$ ölçülebilir fonksiyonların Sobolyev uzayı gösterilir. Sobolyev uzayında norm aşağıdaki gibi verilir [36,38]

$$\|u\|_p^1 = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |u(s)|^p \, ds + \int_{-\pi}^{\pi} |u'(s)|^p \, ds\right]^{\frac{1}{p}}, 1<p<+\infty \,. \tag{3.1}$$

$W_p^1[-\pi,\pi], 1<p<+\infty$ Sobolyev uzayı (3.1) normu ile bir Banach uzayıdır [36, 38].

$\varphi(s), f(s), m(s,\theta,\varphi(\theta))$ pozitif fonksiyonları

$$D_1 = \{s : s[-\pi,\pi]\} \text{ ve } D_2 = \{(s,\theta,\varphi(\theta)) : s,\theta \in [-\pi,\pi], \varphi \in (-\infty,+\infty)\}$$

tanım bölgelerinde sürekli fonksiyonlar ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(s) \, ds = \varepsilon > 0 \tag{3.2}$$

olmak üzere,

$$\varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(s,\theta,\varphi(\theta)) \cot\frac{\theta - s}{2} \, d\theta = f(s) \tag{3.3}$$

Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral denklemi ele alalım.

Bu denklemin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\varphi'(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} m_{\varphi}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\varphi'(\theta)\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta=F(s) \tag{3.4}$$

elde edilir [38]. Burada, $m_{\varphi}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$ fonksiyonu $m\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$ fonksiyonunun üçüncü değişkene göre kısmi türevidir. Ayrıca,

$$F(s)=f'(s)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[m_{s}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)+m_{\theta}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right]\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta, \tag{3.5}$$

$m_{s}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$, $m_{\theta}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$ fonksiyonları, sırasıyla, $m\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci değişkenlerine göre kısmi türevleridir.

Böylece, (3.3) Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral denklemi (3.4) şekilli bir denkleme denktir.

Şimdi, (3.4) denklemini daralma dönüşüm denklemine indirgeyelim. Bunun için $k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)=m_{\varphi}\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)$ fonksiyonunun $\delta>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$\left|k\left(s_2,\theta_2,\varphi_2(\theta_2)\right)-k\left(s_1,\theta_1,\varphi_1(\theta_1)\right)\right|\le\delta\left[\left|s_2-s_1\right|^{\alpha}+\left|\theta_2-\theta_1\right|^{\alpha}+\left|\varphi_2-\varphi_1\right|^{\alpha}\right] \tag{3.6}$$

Lipschitz koşulunu sağladığını kabul edeceğiz.

Singüler integral denklemler teorisinden bilindiği üzere, (3.4) dnkleminin çözümü

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(s)ds=v(0)=0,\ u(s)=\varphi'(s) \tag{3.7}$$

ek koşullarıyla

$$u(s)+iv(s)=c(s) \tag{3.8}$$

şekilli sınır değer probleminin çözümüne denktir [19, 39].

(3.8) sınır değer probleminin çözümü, $v(z)=w(x,y)+iw_1(x,y)$ ve β_0 bir sabit olmak üzere,

$$c(z)=G(z)=e^{iz}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta+i\beta_0\right], \quad (3.9)$$

şekilli bir fonksiyondur.

Eğer,

$$e^{iz}=\xi+i\eta \text{ ve } \psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta \quad (3.10)$$

alınırsa

$$G(s)=(\xi+i\eta)\big(\psi(s)+i\beta_0\big)=(\xi+i\eta)\big[\mathrm{Re}\psi(s)+i\big(\mathrm{Im}\psi(s)+\beta_0\big)\big] \quad (3.11)$$

yazılır.

$k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)$ fonksiyonunun birim diskte analitik ve reel fonksiyon olduğunu dikkate alırsak $\psi(z)$ fonksiyonunun reel ve imajener kısmı için Schwartz formülünden [40]

$$\mathrm{Re}\psi(s)=k\big(s,s,\varphi(s)\big)c(s)e^{w_1(s)} \quad (3.12)$$

yazılır.

Ayrıca,

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}=\frac{e^{i\theta}+e^{is}}{e^{i\theta}-e^{is}}=-i\cot\frac{\theta-s}{2} \quad (3.13)$$

olduğundan $\psi(z)$ fonksiyonunun imajener kısmı için de

$$\mathrm{Im}\psi(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta \quad (3.14)$$

elde edilir.

(3.12) ve (3.14) ifadelerini (3.11)'de yerine koyarsak

$$G(s)=\left(\xi(s)+i\eta(s)\right)\left\{\begin{array}{l} k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}+ \\ i\left[\beta_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\right]\end{array}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{l} \xi(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}- \\ \eta(s)\left[\beta_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\right]\end{array}\right\}+$$

$$i\left\{\begin{array}{l} \xi(s)\left[\beta_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\right]+ \\ \eta(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}\end{array}\right\}$$

bulunur. $G(s)=u(s)+iv(s)$ olduğunu göz önünde bulundurursak yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{array}{l} u(s)=\xi(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}- \\ \eta(s)\left[\beta_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\right]\end{array} \tag{3.15}$$

ve de

$$\begin{array}{l} v(s)=\xi(s)\beta_0+\eta(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}- \\ \frac{\xi(s)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\end{array} \tag{3.16}$$

elde edilir.

(3.7) koşulunun birincisinden

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\begin{array}{l} \xi(s)\beta_0+\eta(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}- \\ \frac{\xi(s)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\end{array}\right\}ds=0,$$

dolayısıyla,

$$\begin{array}{l} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\xi(s)\beta_0ds+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\eta(s)k\left(s,s,\varphi(s)\right)c(s)e^{w_1(s)}ds- \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\xi(s)ds\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta=0\end{array} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) denklemi

$$\beta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \xi(s)\,ds + \int_{-\pi}^{\pi} \eta(s) k(s,s,\varphi(s)) c(s) e^{w_1(s)} ds - \\ \int_{-\pi}^{\pi} k(s,\theta,\varphi(\theta)) c(\theta) e^{w_1(\theta)} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi(s) \cot\frac{\theta - s}{2} ds = 0 \tag{3.18}$$

şeklinde yazılır.

Analitik fonksiyonlar için Hilbert formülünden [39]

$$\xi(s) + i\eta(s) = \xi(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{2\xi(\tau)}{\tau - s} d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi(\theta) d\theta + i\eta_0 \tag{3.19}$$

yazılır. Ayrıca,

$$\frac{2}{i}\frac{d\tau}{\tau - s} = \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + d\theta, \tau = e^{i\theta}$$

olduğundan (3.19) eşitliğinden

$$\xi(s) + i\eta(s) = \xi(s) + i\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + e^{is}}{e^{i\theta} - e^{is}} \xi(\theta) d\theta + \eta_0\right]$$

elde edilir, burada $\eta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(\theta) d\theta$ 'dır . Buradan, (3.13)'ü de dikkate alırsak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi(s) \cot\frac{\theta - s}{2} ds = \eta_0 - \eta(s)$$

yazılır. Bunu (3.18) denkleminde dikkate alırsak

$$\beta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \xi(s)\,ds + \int_{-\pi}^{\pi} \eta(s) k(s,s,\varphi(s)) c(s) e^{w_1(s)} ds - \\ \int_{-\pi}^{\pi} k(s,\theta,\varphi(\theta)) c(\theta) e^{w_1(\theta)} \left[\eta_0 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(\theta) d\theta\right] d\theta = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi sadeleştirirsek

$$\beta_0 \int_{-\pi}^{\pi} \xi(s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(\theta) d\theta \int_{-\pi}^{\pi} k(s,\theta,\varphi(\theta)) c(\theta) e^{w_1(\theta)} d\theta = 0 \tag{3.20}$$

elde edilir.

Böylece, (3.15)'ten bulunur:

$$u(s)=\xi(s)k\big(s,s,\varphi(s)\big)c(s)e^{w_1(s)}+$$
$$\frac{\eta(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta-\beta_0\eta(s).$$

(3.7)'nin $u(s)=\varphi'(s)$ şartından

$$\varphi'(s)=\xi(s)k\big(s,s,\varphi(s)\big)c(s)e^{w_1(s)}+$$
$$\frac{\eta(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta-\beta_0\eta(s) \tag{3.21}$$

yazılır. (3.21) denkleminin her iki tarafını $[0,s]$ aralığında integrallediğimizde

$$\varphi(s)=A+\int_0^s K\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)d\theta \tag{3.22}$$

denklemi elde edilir. Burada, $A=\varphi(0)$ ve

$$K\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)=\xi(s)k\big(s,s,\varphi(s)\big)c(s)e^{w_1(s)}-\beta_0\eta(s)+$$
$$\frac{\eta(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta \tag{3.23}$$

olarak tanımlanır. $S\varphi$ operatörünü

$$S\varphi=A+\int_0^s K\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)d\theta$$

olarak tanımlarsak (3.22) integral denklemi

$$S\varphi=\varphi \tag{3.24}$$

operatör denklemi şeklinde yazılır.

Böylece, (3.3) Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral denklem onunla denk olan (3.24) operatör denklemine indirgenir.

Şimdi (3.24) operatör denklemini inceleyelim. Bunun için $K\big(s,\theta,\varphi(\theta)\big)$ çekirdeğinin sınırlılığı üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1: Eğer, $\xi(s), \eta(s), c(s)$ ve $w_1(s)$ fonksiyonları Hölder sınıfındansa, dolayısıyla

$$\begin{gathered}
\left|\xi(s_2)-\xi(s_1)\right| \le \lambda_1 \left|s_2-s_1\right|^{\alpha},\ \left|\eta(s_2)-\eta(s_1)\right| \le \lambda_2 \left|s_2-s_1\right|^{\alpha}, \\
\left|c(s_2)-c(s_1)\right| \le \lambda_3 \left|s_2-s_1\right|^{\alpha},\ \left|w(s_2)-w(s_1)\right| \le \lambda_4 \left|s_2-s_1\right|^{\alpha}
\end{gathered} \tag{3.25}$$

koşulları sağlanıyorsa (3.23) formülü ile tanımlanan $K(s,\theta,\varphi(\theta))$ fonksiyonu $L_p[-\pi,\pi], 1<p<+\infty$ uzayında sınırlıdır.

İspat: $L_p[-\pi,\pi], 1<p<+\infty$ uzayında aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\left\|K(s,\theta,\varphi(\theta))\right\|_{L_p} \le |\beta_0| \left\|\eta(s)\right\|_{L_p} + \left\|B_1(s)\right\|_{L_p} + \left\|B_2(s)\right\|_{L_p}. \tag{3.26}$$

Burada,

$$B_1(s) = \xi(s) k(s,s,\varphi(s)) c(s) e^{w_1(s)} \tag{3.27}$$

ve

$$B_2(s) = \frac{\eta(s)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(s,\theta,\varphi(\theta)) c(\theta) e^{w_1(\theta)} \cot\frac{\theta-s}{2} d\theta \tag{3.28}$$

olarak tanımlanır.

(3.25)'in ikincisinden

$$\left\|\eta(s)\right\|_{L_p} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} |\eta(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right]^p ds\right]^{\frac{1}{p}} = c_1 \tag{3.29}$$

elde edilir. Burada,

$$c_1 = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right] ds\right]^{\frac{1}{p}} = (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right].$$

(3.27)'den $B_1(s)$ için

$$\left\|B_1(s)\right\|_{L_p} \le \left\|\xi(s)\right\|_{L_{p_1}} \left\|k(s,s,\varphi(s))\right\|_{L_{p_2}} \left\|c(s)\right\|_{L_{p_3}} \left\|e^{w_1(s)}\right\|_{L_{p_4}}, \tag{3.30}$$

burada $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{p_k}=\frac{1}{p}$ 'dir, yazılır .

Ayrıca, $\left\|\xi(s)\right\|_{L_{p_1}}$ ve $\left\|c(s)\right\|_{L_{p_3}}$ için (3.29)'a benzer şekilde, sırasıyla,

$$\left\|\xi(s)\right\|_{L_{p_1}}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|\xi(s)\right|^{p_1}ds\right]^{\frac{1}{p_1}}\leq\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[\xi(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_1\right]ds\right]^{\frac{1}{p_1}}=c_2 \qquad (3.31)$$

ve

$$\left\|c(s)\right\|_{L_{p_3}}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|c(s)\right|^{p_3}ds\right]^{\frac{1}{p_3}}\leq\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[c(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_3\right]ds\right]^{\frac{1}{p_3}}=c_3 \qquad (3.32)$$

yazılabilir.

$\left\|k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right\|_{L_{p_2}}$ normunu değerlendirelim. (3.6) koşulu gereğince, (3.29)'a benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left\|k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right\|_{L_{p_2}}&=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right|^{p_2}ds\right]^{\frac{1}{p_2}}\leq\\ \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left|k\left(0,0,\varphi(0)\right)\right|+\delta\left[\left(2+\delta_{\varphi}\right)(2\pi)^{\alpha}+\left|\varphi(0)\right|\right]\right]^{p_2}ds\right\}^{\frac{1}{p_2}}&=c_4\end{aligned} \qquad (3.33)$$

elde edilir. Burada, δ_{φ} sayısı φ fonksiyonunun Hölder katsayısı ve

$$c_4=(2\pi)^{\frac{1}{p_2}}\left\{\left|k\left(0,0,\varphi(0)\right)\right|+\delta\left[\left(2+\delta_{\varphi}\right)(2\pi)^{\alpha}+\left|\varphi(0)\right|\right]\right\}$$

dir.

Şimdi $\left\|e^{w_1(s)}\right\|_{L_{p_4}}$ normunu değerlendirelim. (3.25) varsayımının dördüncüsünden

$$\begin{aligned}\left\|e^{w_1(s)}\right\|_{L_{p_4}}&\leq\left\{1+\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right)^{p_4}\right]^{\frac{1}{p_4}}\right\}\exp\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right)^{p_4}\right]^{\frac{1}{p_4}}\leq\\ &\left\{1+(2\pi)^{\frac{1}{p_4}}\left[\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right]\right\}\exp\left\{(2\pi)^{\frac{1}{p_4}}\left[\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right]\right\}=c_5\end{aligned}$$

(3.34)

yazılır.

Böylece, (3.31) - (3.34) ve (3.30)'dan

$$\left\|B_1(s)\right\|_{L_p} \le c_6 = c_2 c_3 c_4 c_5 \tag{3.35}$$

elde edilir.

$\left\|B_2(s)\right\|_{L_p}$ normu için (3.28)'den (3.30)'a benzer şekilde

$$\left\|B_2(s)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2\pi}\left\|\eta(s)\right\|_{L_{p_5}} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)} \cot\frac{\theta - s}{2}\, d\theta \right\|_{L_{p_6}} \tag{3.36}$$

yazılır. Burada, $\sum_{k=5}^{6}\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$'dir.

Bilindiği üzere, Hilbert çekirdekli singüler integral için

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)} \cot\frac{\theta - s}{2}\, d\theta \right\|_{L_{p_6}} \le c_7 \left\|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\right\|_{L_{p_6}} \tag{3.37}$$

değerlendirmesi doğrudur [4]. Ayrıca,

$$\left\|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\right\|_{L_{p_6}} \le \left\|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_{p_7}} \left\|c(\theta)\right\|_{L_{p_8}} \left\|e^{w_1(\theta)}\right\|_{L_{p_9}}, \tag{3.38}$$

burada, $\sum_{k=7}^{9}\frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_6}$'dır, yazar ve $\left\|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_{p_7}}$, $\left\|c(\theta)\right\|_{L_{p_8}}$ ve $\left\|e^{w_1(\theta)}\right\|_{L_{p_9}}$ normları için (3.33), (3.32) ve (3.34) değerlendirmelerinin benzeri olan

$$\left\|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_{p_7}} = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right|^{p_7} ds\right]^{\frac{1}{p_7}} \le$$

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left|k\left(0,0,\varphi(0)\right)\right| + \delta\left[\left(2+\delta_\varphi\right)(2\pi)^\alpha + \left|\varphi(0)\right|\right]\right]^{p_7} ds\right\}^{\frac{1}{p_7}} = c_8,$$

$$\left\|c(\theta)\right\|_{L_{p_8}} = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|c(s)\right|^{p_8} ds\right]^{\frac{1}{p_8}} \le \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[c(0) + (2\pi)^\alpha \lambda_3\right] ds\right]^{\frac{1}{p_8}} = c_9,$$

$$\left\|e^{w_1(\theta)}\right\|_{L_{p_9}} \le \left\{1+\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right)^{p_9}\right]^{\frac{1}{p_9}}\right\}\exp\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right)^{p_9}\right]^{\frac{1}{p_9}} \le$$

$$\left\{1+(2\pi)^{\frac{1}{p_9}}\left[\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right]\right\}\exp\left\{(2\pi)^{\frac{1}{p_9}}\left[\left|w_1(0)\right|+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right]\right\}=c_{10}$$

değerlendirmelerini dikkate alırsak (3.37) ve (3.38)’den

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi} k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)c(\theta)e^{w_1(\theta)}\cot\frac{\theta-s}{2}\,d\theta\right\|_{L_{p_6}} \le c_{11}=c_7c_8c_9c_{10} \qquad (3.39)$$

elde edilir.

$\left\|\eta(s)\right\|_{L_{p_5}}$ normu için (3.29)’a benzer şekilde

$$\left\|\eta(s)\right\|_{L_{p_5}}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|\eta(s)\right|^{p_5}ds\right]^{\frac{1}{p_5}} \le \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right]^{p_5}ds\right]^{\frac{1}{p_5}}=c_{12}, \qquad (3.40)$$

burada,

$$c_{12}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right]ds\right]^{\frac{1}{p_5}}=(2\pi)^{\frac{1}{p_5}}\left[\eta(0)+(2\pi)^{\alpha}\lambda_2\right]$$

elde edilebilir.

Böylece, $\left\|B_2(s)\right\|_{L_p}$ normu için (3.36), (3.39) ve (3.40) değerlendirmelerinden

$$\left\|B_2(s)\right\|_{L_p} \le c_{13}=\frac{1}{2\pi}c_{11}c_{12} \qquad (3.41)$$

yazılır.

Sonuç olarak $\left\|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_p}$ normu için (3.26), (3.29), (3.30) ve (3.41) değerlendirmeleri gereğince

$$\left\|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_p} \le c_{14}=\left|\beta_0\right|c_1+c_6+c_{13} \qquad (3.42)$$

değerlendirmesi doğrudur.

Bununla Teorem 3.1’in ispatı tamamdır.

Şimdi, (3.24) denkleminin çözümünün varlığı üzerine aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2: Teorem 3.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca, $D \subset W_p^1[-\pi,\pi]$,

$$D = \left\{\varphi \in W_p^1[-\pi,\pi] : |\varphi| \le c_{15}, |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le \mu |s_2 - s_1|^{\alpha}; s_2, s_1 \in [-\pi,\pi]\right\},$$
$$1 < p < +\infty$$

ve $c_{14} \le c_{15}$, $|A| + (2\pi)^{\frac{1}{q}} c_{14} \le c_{15}$ olsun. Bu durumda, (3.24) yani (3.3) denkleminin $W_p^1[-\pi,\pi], 1 < p < +\infty$ uzayında tek bir çözümü vardır.

İspat: Öncelikle D kümesinin konveks kapalı bir küme olduğunu gösterelim. Bunun için her $\varphi, \psi \in D$ ve her $t \in [0,1]$ için $t\varphi + (1-t)\psi \in D$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\phi = t\varphi + (1-t)\psi$ olsun. O halde,

$$\phi(s_2) - \phi(s_1) = t[\varphi(s_2) - \varphi(s_1)] + (1-t)[\psi(s_2) - \psi(s_1)]$$

eşitliğinden

$$|\phi(s_2) - \phi(s_1)| \le t|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| + (1-t)|\psi(s_2) - \psi(s_1)| \le$$
$$[t\mu + (1-t)\mu]|s_2 - s_1|^{\alpha} = \mu |s_2 - s_1|^{\alpha},$$

dolayısıyla, $\phi \in D$ olduğu görülür.

Şimdi de D kümesinin kapalı bir küme olduğunu gösterelim. Bunun için $D' \subset D$ bağlantısının sağlandığını göstermek yeterlidir. Burada D' kümesi D'nin yığılma noktaları kümesidir. Keyfi $\varphi \in D'$ alalım. O halde, kümelerin yığılma noktasının tanımından $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p^1 = 0$ olacak şekilde bir $(\varphi_n) \subset D, n \in \mathbb{N}$ dizisi vardır. Bu durumda $|\varphi_n(s_2) - \varphi_n(s_1)| \le \mu |s_2 - s_1|^{\alpha}$ olur. Burada $n \to \infty$ iken limite geçilirse $|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le \mu |s_2 - s_1|^{\alpha}$, dolayısıyla $\varphi \in D$ bulunur. Bu da D'nin kapalı olması anlamına gelir.

Şimdi (3.24) formülü ile tanımlanan S operatörünün D kümesini kendi içine dönüştürdüğünü gösterelim. (3.24)'den her $s \in [-\pi, \pi]$ ve $\varphi(s) \in D$ için, Hölder eşitsizliğinin integral formundan yararlanırsak [36]

$$\left|S\varphi(s)\right| \le |A| + \int_0^s \left|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right| d\theta \le |A| + \left\|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_p} (2\pi)^{\frac{1}{q}} \tag{3.43}$$

elde edilir, burada $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 'dir. Ayrıca, (3.42) gereğince

$$\left|S\varphi(s)\right| \le |A| + (2\pi)^{\frac{1}{q}} c_{14} \tag{3.44}$$

olur. Her $0 < s_1 < s_2$ için

$$\left|S\varphi(s_2) - S\varphi(s_1)\right| \le \int_{s_1}^{s_2} \left|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right| d\theta$$

ve Hölder eşitsizliği ve (3.42)'den

$$\left|S\varphi(s_2) - S\varphi(s_1)\right| \le \left\|K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right\|_{L_p} \left|s_2 - s_1\right|^{\frac{1}{q}} \le c_{14} \left|s_2 - s_1\right|^{\frac{1}{q}} \tag{3.45}$$

yazılır.

Böylece, (3.44) ve (3.45)'den görüldüğü üzere eğer, $c_{14} \le c_{15}$, $|A| + (2\pi)^{\frac{1}{q}} c_{14} \le c_{15}$ olursa $S\varphi(s) \in D$ sağlanır. Yani, bu durumda (3.24) formülü ile tanımlanan S operatörü D kümesini kendi içine dönüştürüyor.

Şimdi de S operatörünün tamamen (eş) sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için D kümesinin keyfi $\varphi \in D$ elemanına düzgün yakınsayan keyfi $(\varphi_n) \subset D, n \in \mathbb{N}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left[S\varphi_n(s) - S\varphi(s)\right] = 0 \tag{3.46}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$S\varphi_n(s) - S\varphi(s)$ farkı için

$$S\varphi_n(s) - S\varphi(s) = \int_0^s \left[K\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right) - K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right] d\theta$$

yazılır. O halde,

$$\left|S\varphi_n(s)-S\varphi(s)\right|\le\int_0^s\left|K\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right)-K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right|d\theta \tag{3.47}$$

doğrudur. (3.23) ‘ten $\left|K\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right)-K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right|$ farkı için

$$\left|K\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right)-K\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right|\le\left|\xi(s)c(s)e^{w_1(s)}\left[k\left(s,s,\varphi_n(s)\right)-k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right]\right|+$$
$$\left|\frac{\eta(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c(\theta)e^{w_1(\theta)}\left[k\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right)-k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right]\cot\frac{\theta-s}{2}d\theta\right|=B_3+B_4$$

değerlendirmesi elde edilir. Buna göre, (3.47)’den

$$\left|S\varphi_n(s)-S\varphi(s)\right|\le 2\pi\left(B_3+B_4\right) \tag{3.48}$$

yazarız.

Şimdi B_3 ve B_4 için değerlendirmeler yapalım.

B_3 için (3.6)’dan

$$\begin{aligned} B_3&=\left|\xi(s)c(s)e^{w_1(s)}\left[k\left(s,s,\varphi_n(s)\right)-k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right]\right|\le\\ &\left|\xi(s)\right|\left|c(s)\right|\left|e^{w_1(s)}\right|\left|k\left(s,s,\varphi_n(s)\right)-k\left(s,s,\varphi(s)\right)\right|\le\\ &\delta\left|\xi(s)\right|\left|c(s)\right|\left|e^{w_1(s)}\right|\left|\varphi_n(s)-\varphi(s)\right|^{\alpha}\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.25)’den $\left|\xi(s)\right|$, $\left|c(s)\right|$ ve $\left|e^{w_1(s)}\right|$ için, sırasıyla,

$$\left|\xi(s)\right|\le\left|\xi(0)\right|+\lambda_1(2\pi)^{\alpha}, \tag{3.50}$$

$$\left|c(s)\right|\le\left|c(0)\right|+\lambda_3(2\pi)^{\alpha}, \tag{3.51}$$

$$\left|e^{w_1(s)}\right|\le\left|e^{w_1(0)}\right|+\lambda_4\left|e^{w_1(\theta)}\right|(2\pi)^{\alpha}\le e_1\left[1+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right], \tag{3.52}$$

burada, $e_1=\max\left\{\left|e^{w_1(\theta)}\right|:\theta\in[-\pi,\pi]\right\}$, değerlendirmeleri doğrudur.

Böylece, (3.49) – (3.52)’den

$$B_3\le c_{16}\left|\varphi_n(s)-\varphi(s)\right|^{\alpha},\ \alpha\in(0,1), \tag{3.53}$$

burada, $c_{16}=\delta e_1\left[\left|\xi(0)\right|+\lambda_1(2\pi)^{\alpha}\right]\left[\left|c(0)\right|+\lambda_3(2\pi)^{\alpha}\right]\left[1+\lambda_4(2\pi)^{\alpha}\right]$, elde edilir.

(3.53)'den $\lim_{n\to\infty} B_3 = 0$ olduğu kolayca görülür.

B_4 için

$$B_4 = \left| \frac{\eta(s)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(\theta) e^{w_1(\theta)} \left[k\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right) - k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right) \right] \cot\frac{\theta - s}{2} d\theta \right| \leq$$

$$\frac{|\eta(s)|}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |c(s)| \left|e^{w_1(\theta)}\right| \left|k\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right) - k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right| \cot\frac{\theta - s}{2} d\theta$$

yazılır. (3.25)'den $|\eta(s)|$ için, (3.50)'ye benzer şekilde

$$|\eta(s)| \leq |\eta(0)| + \lambda_2 (2\pi)^{\alpha}$$

yazar (3.51) ve (3.52)'yi de dikkate alırsak

$$B_4 \leq c_{16} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|k\left(s,\theta,\varphi_n(\theta)\right) - k\left(s,\theta,\varphi(\theta)\right)\right| \cot\frac{\theta - s}{2} d\theta, \qquad (3.54)$$

burada, $e_1\left(|\eta(0)| + \lambda_2 (2\pi)^{\alpha}\right)\left(|c(0)| + \lambda_3 (2\pi)^{\alpha}\right)\left[1 + \lambda_4 (2\pi)^{\alpha}\right]$, elde edilir. Buradan, $\lim_{n\to\infty} B_4 = 0$ olduğu çıkar.

(3.48), (3.53) ve (3.54)'den

$$\lim_{n\to\infty} \left|S\varphi_n(s) - S\varphi(s)\right| = 0$$

sonucuna varırız. Bu da (3.46) eşitliğini doğrular.

Böylece, S operatörü için Teorem 2.3'ün varsayımları sağlandığından adı geçen teoremin hükmü gereğince (3.24) denkleminin, dolayısıyla da (3.3) denkleminin $W_p^1[-\pi,\pi], 1 < p < +\infty$ uzayında tek bir çözümü vardır.

Böylece, Teorem 3.2'nin ispatı tamamdır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışması bir kaynak taraması olup konu ile ilgili ele alınan bir çalışmadaki hatalar da düzeltilerek literatüre katkıda bulunuldu. Bu çalışma bu konuda çalışan yüksek lisans ve doktora öğrencilerine bir ışık tutabilir.

5. KAYNAKLAR

[1]. Pogorzelski,W., (1966). Integral Equatıons and Their Applications. Vol(1) 1.Oxford Pergamon Press/PWN,Oxford/Warszawa.

[2]. Guseinov, A.I. and Mukhtarov, S.K., (1980). Introduction to The Theory of Nonlinear Singular İntegral Equations. Nauka, Moscow (Rusça).

[3]. Wolfersdorf, L.V., (1989). Class of Nonlinear Singular Integral and Integro-Differential Equations with Hilbert Kernel. Zeitschrift Analytic Anwend, 8, 563-570.

[4]. Wolfersdorf, L.V., (1985). On The Theory of Nonlinear Singular Integral Equations of Cauchy Type. Mathematic Methods Application Science, 7, 493-517.

[5]. Junghanns, P. and Weber, U., (1993). On The Solvability of Nonlinear Singular İntegral Equations. Z.Anal.Anwend, 12, 683-698.

[6]. Junghanns, P., Weber, U.,Semmler, G. and Wegert, E., (2001). Nonlinear Singular Integral Equations On a Finite Interval. Mathematic Methods Application Science, 24, 1275-1288.

[7]. Ladopoulos, E.G. and Zisis, V.A.,(2000). Nonlinear Finite-Part Singular Integral Equations Arising in Two Dimensional Fluid Mechanics. Theory Methods Application, 42,277-290.

[8]. Ladopoulos, E.G. and Zisis, V.A.,(1997). Existence and Uniqueness for Nonlinear Singular Integral Equations Used in Fluid Mechanics Application.

[9]. Ladopoulos, E.G. and Zisis, V.A.,(1996). Nonlinear Singular Integral Equations Approximations in Banach Spaces. Method Application, 26, 1293-1299.

[10]. Ladopoulos, E.G.,(2005). Nonlinear Singular Integral Equations in Real Elastodynamics by Using Hilbert Transformations. Real World Application, 6, 531-536.

[11]. Belotserkovski, S.M. and Lifanov, İ.K. (1985). Singüler İntegral Denklemler için nümerik yöntemler. Moskova, Nauka, 2535.

[12]. Bertheim, B.A., (1957). Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatör Denklemlerin Bazı Yaklaşık Çözüm Yöntemleri Üzerine, UMN, 12(1), 166-169.

[13]. Zolotaryevski, V.A., (1979). Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü. Programlama ve Uygulamalı Matematiğin Güncel Problemleri Kishinev, 50-52.

[14]. Musaev, B.İ., (1986). Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü. ABAH (Azerbaycan Bilimler Akademisi Haberleri), 5, 15-21.

[15]. Musaev, B.İ., (1988). Singüler İntegral Denklemler Teorisinde Konstruktif Yöntemler. Doktora Tezi, Tiflis Devlet Üniversitesi ,Tiflis.

[16]. Mustafaev, N.M., (1987). Kapalı Düzgün Eğri Üzerinde Tanımlı Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü. Singüler İntegral Operatörler. Bakü 91-99.

[17]. Mustafaev, N.M., (1988). Nonlineer Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü. VINITI, No: 1774-B88, Bakü, 22.

[18]. Mustafaev, N.M., (1988). Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü Üzerine. Bakü, Elm. 269-278.

[19]. Muskhelishwili, N.İ., (1968). Singüler İntegral Denklemler Moskova, Nauka, 511.

[20]. Babaev, A.A. and Malsakov, S.M., (1968).Nonlineer.Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü.ABAS (Azerbeycan Bilimler Akademisi Sunu mu), 5, 3-8.

[21]. Babaev, A.A. and Musaev, B.İ.,.(1971). Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemler İçin Bir Nümerik Çözüm Yönteminin Yakınsaklığı Üzerine. ABAS (Azerbeycan Bilimler Akademisi Sunumu), 27(2), 3-7.

[22]. Mustafaev, N.M., (1991). Singüler İntegraller İçin Kuadratik Formüller ve Düzgün Eğri Üzerinde Tanımlı Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümüne Uygulamaları. Doktora Tezi, Azerbaycan Bakü Devlet Üniversitesi, Bakü.

[23]. Güner Aksoy, H., (2015). Singüler İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Kars.

[24]. Mustafa(ev), N., (2008). Fixed Point Theory and Approximate Solution of Non-linear Singüler Integral Equations. Complex Variables and Eliptic Equations, 53(11), 1047-1058.

[25]. Mustafa(ev), N. and Yazar, M.I., (2007). On the Approximate Solution of Non-linear Singüler Integral Equation with Cauchy Kernel. Far East Journel of Applied Mathematics, 27(1), 101-119.

[26]. Mustafa(ev), N. and Ardil, C. (2009). On The Approximate Solution of Non-linear Singüler Integral Equations. International Journal of Computatioual and Mathematical Sciences. 3(1), 1-7.

[27]. Mustafa(ev), N. and Çağlar, M., (2010). Approximate Solution of Non-linear Operator Equations with Negative Index. Gazi University Journall of Sciences (GUJ Sci), 23(4) 449-455.

[28]. Mustafayev, N., (1985). On The Approximation of Function Defiled on Smooth Closed Curve. VI. Republic Conf. Of Young Scientist on Mathematic and Mechanic Abstacts, Bakü, Elm., 171-174.

[29]. Mustafayev, N., (1988). On The Approximate Solution of Non-Linear Singüler Integral Equations. Some Problems of Mathematical Modelling. Bakü, Elm., 269-278.

[30]. Mustafayev, N., (1989). On The Approximate Solution of Singüler Integral Equations in the Exceptional Case. "All. Union.Scool_Conf." Modern Problems of the Theory of Functions Abstacts, Bakü, ASU, 78 (Russian).

[31]. Hüseyinov, A., (1981). İntegral Denklemler. Maarif, Bakü (Azeri Türkçesinde).

[32]. Hüseyinov, A., (1946). Birim Diskin Birim Diske Yakın Bölgeye Konform Dönüşümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik, 2, 18-22 (Azeri Türkçesinde).

[33]. Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., Ekincioğlu, İ., (2007). Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz-1,3, Seçkin Yayınevi, Ankara, Türkiye.

[34]. Başkan, T., (2000). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, VİPAŞ A.Ş., 4.Baskı, Bursa,125-129,307-311.

[35]. Bayraktar, M.,(2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

[36]. Musayev, B. ve Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd.Şti., Baskı, Kütahya, 313-317.

[37]. Mohmed,H. S., Samir, H. A. and Marwa, H. A., (2009). Existence Results for Non-linear Singülar Integral Equations with Hilbert Kernel in Banach Spaces, Applications of Mathematics, V(54), No(4), 337-349.

[38]. Mikhlin, S.G. and Prössdorf, S., (1986). Singülar Integral Operators. Akademie-Verlag, Berlin.

[39]. Gakhov, F.D., (1990). Boundary Value Problems. Dover Publication, New York.

[40]. Sidorov, Yu.V., Fedoryuk, M.B., Shabunin, M.İ., (1989). Kompleks Değişkenli Teorisi. Moscowa, Nauka, Rusiya (Rusça).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nur Şeyma ÇİÇEKSİZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Sarıkamış/Kars, 13/06/1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (E-Posta)	: nurseyma_ciceksiz@hotmail.com
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Kars Fen Lisesi, 2002-2006.
Lisans	: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2007-2012.
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı, 2014-2018.

Çalıştığı Kurum (Kurum ve Yıl):

1. Aşkale Kaymakamlığı Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni, 2013-2016.
2. Palandöken Kaymakamlığı Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni, 2016-...

Yayınları (SCI ve Diğer) **:**

[1] New Subclasses of Analytic Functions and Their Various Prorperties, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, 18-21 April 2017, Antalya, Turkey.