T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ BİR ALT SINIFI İÇİN İKİNCİ HANKEL DETERMİNANTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
Eren Yavuz ERDAĞI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

MART-2018
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ BİR ALT SINIFI İÇİN İKİNCİ HANKEL DETERMİNANTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
Eren Yavuz ERDAĞI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

MART-2018
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Eren Yavuz ERDAĞI'nın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bi-ünivalent Fonksiyonların Belli Bir Alt Sınıfı İçin İkinci Hankel Determinantı" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .**birliği**. ile **kabul** edilmiştir.

05/03/2018

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**: Prof. Dr. Halit ORHAN**	………….
Üye	**: Doç. Dr. Erhan DENİZ**	…………..
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR**	………….

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Eren Yavuz ERDAĞI

05/03/2018

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BELLİ BİR ALTSINIFI İÇİN
İKİNCİ HANKEL DETERMİNANTI

Eren Yavuz ERDAĞI

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Bu tezde, bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfına ait fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı ele alınmış ve bu determinant için üst sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca bu sınıf için parametrelerin özel durumlarında oluşan bi-ünivalent fonksiyonların özel alt sınıfları için üst sınırlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Bi-ünivalent fonksiyon, Konveks fonksiyon, Yıldızıl fonksiyon, Hankel determinantı.

2018, 51 sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

SECOND HANKEL DETERMINANT FOR A CERTAIN SUBCLASS OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS

Eren Yavuz ERDAĞI

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

In this thesis, the second Hankel determinant was discussed for functions belonging to the subclass of bi-univalent functions and upper bounds for this determinant have been determined. In addition, for special values of the parameters, upper bounds are given for special subclasses of bi-univalent functions.

Key Words: Analytic functions, Univalent function, Bi-univalent function, Convex function, Starlike function, Hankel determinant.

2018, 51 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme teşekkür ederim.

Eren Yavuz ERDAĞI

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genelleştirilmiş kompleks düzlem
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$, Birim disk
$\mathcal{U}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
γ	$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri
$f^{(n)}$	f fonksiyonun n. dereceden türevi
$\mathcal{A}$	$\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
Σ	$\mathcal{A}$ ya ait bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	Caratheodory sınıfı
Ω	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{A}$ ya ait yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ ya ait konveks fonksiyonların sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu
$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Hankel matrisi
$H_\infty = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Hankel matrisi
$T_{n-1} = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$	Toeplitz matrisi
$T_\infty = \left(h_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$	Sonsuz mertebeden Toeplitz matrisi
$H_q(n)$	q. mertebeden Hankel determinantı

1. GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, diğer bir adı ile geometrik fonksiyonlar teorisi kompleks analizin önemli bir dalıdır. Bu teori; "Kompleks düzlemin her basit bağlantılı bölgesi konform olarak birim disk üzerine resmedilebilir." ifadesiyle yani Riemann Dönüşüm Teoremi ile birlikte daha da önem kazanmıştır. Koebe' nin [19] 1907 deki $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskindeki birebir her $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$ dönüşümünün resim bölgesinde, $|w|<c$ diski kapsanacak şekilde mutlak bir c sabitinin ve sadece z ye bağlı olan $|f'(z)|$ modülü üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı çalışması da bu teorinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Daha sonraki birçok matematikçinin çalışmaları da bu sınırları belirleme üzerinde yoğunlaşmıştır. Böylece ünivalent fonksiyonların sınıfları ile ilgili problemler üzerindeki çalışmalar artmıştır.

Bieberbach [2] tarafından ortaya atılan " $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu için $n=2,3,...$ olmak üzere $|a_n|\le n$ eşitsizliği sağlanır" tahmini uzun süre matematikçilerin çalıştığı bir problem olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2|\le 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk olarak Bieberbach tarafından 1916'da ispatlanmıştır. Daha sonra Loewner [22] 1923'te parametrik metod olarak isimlendirdiği kendi buluşuyla $|a_3|\le 3$ eşitsizliğini, 1955'te Schiffer ve Garabedian, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4|\le 4$ eşitsizliğini, 1968'de Pederson $|a_6|\le 6$ ve 1972'de Pederson ve Schiffer $|a_5|\le 5$ eşitsizliğini ispat etmiştir. Bu tahminin genelleştirilmiş hali yıllarca matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur. 1985'te nihayet L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak bütün $n=2,3,...$ için $|a_n|\le n$ eşitsizliğinin doğrulunu ispatlamıştır.

Bieberbach tahminin ispatlanmasından sonra bu konuyla ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıfları için bir takım katsayı bağıntıları elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlerinden bazıları yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıflarıdır.

Hem tersi hem de kendisi ünivalent olan fonksiyonlara bi-ünivalent fonksiyon denir. Bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma Lewin [20] tarafından 1967 yılında yapılmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ sembolüyle göstererek bu sınıfa ait fonksiyonlar için ikinci katsayının $|a_2| \leq 1.51$ olduğu Lewin tarafından ispatlanmıştır. 1967 yılında, Brannan ve Clunie [3] her $f \in \Sigma$ için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu ortaya atmıştır. Sonra 1969 da Netanyahu [23] her $f \in \Sigma$ için $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve 1985 te Tan [29] $|a_2| \leq 1.485$ olduğunu göstermişlerdir. 1985 yılında Kedzierawski [17], Brannan ve Clunie'nin $|a_2| \leq \sqrt{2}$ konjektürünü bi-yıldızıl fonksiyonlar için ispatlamıştır. 1985 ve 1986 yıllarında Brannan ve Taha [4] α-mertebeden bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının sınırlarıyla ilgili tahminler elde etmiştirler. Maalesef her $n = 2,3,...$ için $|a_n|$ nin üst sınırı henüz bulunamamıştır. Diğer bir problem de bulunan sınırların kesin olmayışıdır. Son zamanlarda bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayı tahminleri problemi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve bu konu halen güncelliğini korumaktadır.

Hankel determinantı probleminin ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yeri vardır. Çünkü Hankel determinantı yardımıyla birim diskte tanımlı fonksiyonların sınırlılığı araştırılabilir yani integral katsayılarına sahip orijinin komşuluğunda Laurent serileriyle temsil edilen iki sınırlı analitik fonksiyonun oranı olarak gösterilen bir fonksiyonun rasyonel olduğu gösterilebilir. Ayrıca, Hankel determinantı yardımıyla Fekete-Szegö problemi olarak bilinen $|a_3 - a_2^2|$ ve ikinci Hankel determinantı olarak tanımlanan $|a_2 a_4 - a_3^2|$ için üst sınır bulunabilir. 1976'da Noonan ve Thomas tarafından q. mertebeden Hankel determinantı tanımlanmıştır. Bu determinant birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Örneğin Noor [24]

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken $H_q(n)$ nin büyüme oranını tespit etmiştir. Janteng [16] yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarının Hankel determinantını çalışmıştır. Son zamanlarda Hankel determinantı ile ilgili yapılan çalışmaları incelemek için 2016 yılında Budak [5] tarafından yazılan yüksek lisans tezine bakılabilir.

2015 yılında Deniz ve arkadaşları [9] ilk kez β-mertebeden bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonların ikinci Hankel determinantı için üst sınırlar bulmuşlardır. Daha sonra bu çalışma ışığında; Orhan, Magesh ve Yamini [25], Altınkaya ve Yalçın [1], Frasin, Vijaya ve Kasthuri [11], Çağlar, Deniz ve Srivastava [7] bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları için ikinci Hankel determinantı problemini çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında, bi-ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı olan $\Sigma\ \tau,\gamma$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı problemi ele alınmıştır. $\Sigma\ \tau,\gamma$ alt sınıfı aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)+\gamma z f''(z)-1\right]\right\}>0 \qquad 0 \le \gamma \le 1, \tau \in \mathbb{C} / \ 0$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)+\gamma w g''(w)-1\right]\right\}>0 \qquad 0 \le \gamma \le 1, \tau \in \mathbb{C} / \ 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \tau,\gamma$ sınıfındandır denir.

Bu amaç doğrultusunda;

Kuramsal temeller bölümünde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanımlara, önemli bazı teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem bölümünde, bi-ünivalent fonksiyonlar, Cauchy, Hankel ve Toeplitz Matrisleri, Hankel determinantı kavramları ayrıntılı olarak verilmiştir. Daha sonra, son yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların belli alt sınıfları için ikinci Hankel determinantı problemi ile ilgili yapılan çalışmalar verilmiştir.

Araştırma bulguları bölümünde, yukarıda tanımlanan $\Sigma\ \tau,\gamma$ sınıfının ikinci Hankel determinantı $\left(H_2(2)=\left|a_2a_4-a_3^2\right|\right)$ için bir üst sınır elde edilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde, araştırma bulguları bölümünde elde edilen ana teoremdeki parametrelerin özel durumları için sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (ε-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere z_0 noktasının ε komşuluğu $\mathcal{D}(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümedir. $\mathcal{D}(z_0,\varepsilon)$ kümesine açık disk de denir. $\bar{\mathcal{D}}(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \varepsilon\}$ kümesi ise kapalı disk belirtir [28].
Özel durumda, orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): Bir $z \in S$ noktası için $\mathcal{D}(z,\varepsilon) \subset S$ olacak şekilde bir ε sayısı mevcutsa, z noktası S kümesinin bir iç noktasıdır denir [28].

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Eğer her $z \in S$ noktası S kümesinin iç noktası ise S kümesine açık küme denir [28].

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): Tümleyeni açık olan $S \subset \mathbb{C}$ kümesine kapalı küme denir [28].

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset M \cup N$, $S \cap M \ne \varnothing$, $S \cap N \ne \varnothing$ ve $S \cap M \cap N = \varnothing$ olacak şekilde ayrık ve açık M ve N kümeleri bulunmuyorsa $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir [30].
Örneğin; $\mathbb{C}$ nin kendisi bağlantılıdır.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı olan kümeye bölge denir [30].
$\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in S$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0,\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir [28].

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yada yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir [28].

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan eğrilere kapalı eğri denir. γ kapalı eğri ise $\gamma(a)=\gamma(b)$ dir [28].

Tanım 2.1.10:

a) Basit Kapalı Eğri: Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir.

b) Düzgün Eğri: γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir [28].

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılıp bu fonksiyonlarla ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme): $A\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z=z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır [30].

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktası ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse $f(z)$ ye S kümesinde analitik denir. Tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir [30].

Örneğin; $f(z) = \sin z$ bir tam fonksiyon olup $f(z) = \arg z$ bir tam fonksiyon değildir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ile ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu tam ve sınırlı ise bu fonksiyon sabittir [30].

Analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur [30].

Bu teoremin belirtmek istediği en önemli nokta şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil Nokta): $w=f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\mathcal{U}(z_0,\varepsilon)-\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir [30].

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu $A(R_1;R_2)$ halka bölgesinde analitik ise bu bölgede a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

olur. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir [28].

Teorem 2.2.7 (Maksimum Modül Prensibi): $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer alamaz [28].

Sonuç 2.2.8: A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.7 un önemli bir sonucu olan Schwarz lemması aşağıdaki gibidir.

Lemma 2.2.9 (Schwarz lemması): $f(z)$, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ olur. $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile eşitlik sağlanır [28].

Teorem 2.2.10 (Minimum Prensibi): $f(z)$, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz [28].

Sonuç 2.2.11: $A\subset\mathbb{C}$ sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.12 (Ünivalent fonksiyon): $f(z)$, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in A$ için $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa (veya $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa) f (z) fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir [10].

Örneğin; $f(z)=\overline{z}$ bir ünivalent fonksiyondur.

Eğer f (z), z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.13: Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli koşul $f'(z_0)\neq 0$ olmasıdır [10].

$f'(z_0)\neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani, $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0)\neq 0$ dır. Tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.14: $f(z)=z^2$ fonksiyonu $A=\{z:1<|z|<2, 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0)\neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z\in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.12 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.15 (Konform dönüşüm): Belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyan dönüşümlere bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise $f(z)$ bu bölgede konformdur denir [28].

Örneğin; $f(z)=z^2$ dönüşümü $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ düzleminde konformdur.

Teorem 2.2.16: $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ konformdur [28].

Bundan dolayı bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq 0$ ve $T:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to T:\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \text{ veya } T(z)=\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

biçiminde tanımlanır. Neden $ad-bc\neq 0$ olmalıdır? Çünkü $z\neq w$ için

$$\begin{aligned} T(z)-T(w) &= \frac{az+b}{cz+d}-\frac{aw+b}{cw+d} \\ &= \frac{(ad-bc)(z-w)}{(cz+d)(cw+d)} \end{aligned}$$

eşitliğinden görülür. Eğer, $ad-bc=0$ ise $T(z)=T(w)$ olur. Buda T nin sabit olması anlamına gelir. Aynı zamanda $ad-bc\neq 0$ alınması T nin bire bir olduğunu gösterir. Sabit fonksiyonun bire bir olmadığı açıktır.

Teorem 2.2.17 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ $(\mathcal{D}\neq\mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0\in\mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [10].

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, bir keyfi basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonunun yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \quad (z\in\mathcal{U}) \tag{2.1}$$

biçiminde olur. Burada (2.1) biçiminde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \right\}$$

şeklinde gösterilir [10].

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.

(i) $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler doğrudur [10] :

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) $n.$ kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, ...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1, \operatorname{Re} p(z) > 0$ şartlarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir [10].

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z), z\in\mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^2$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen ünivalent değildir.

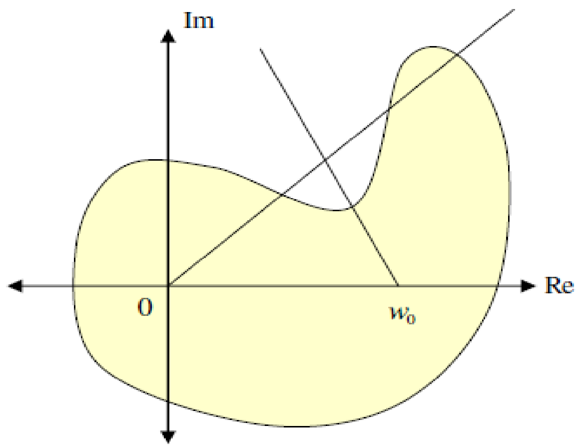
Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıf Schwarz fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve Ω ile gösterilir [10].

Bunlara ilaveten, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasındaki önemli bağ aşağıda verilmiştir:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)} \quad \left(\phi(z)\in\Omega\right)$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarının tanımlarından sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme (starlike küme) denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir [10].



Şekil 1: w_0 noktasına göre Yıldızıl Bölge

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \le n \; (n = 2,3...)$ ifadesi doğrudur [13,14].

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

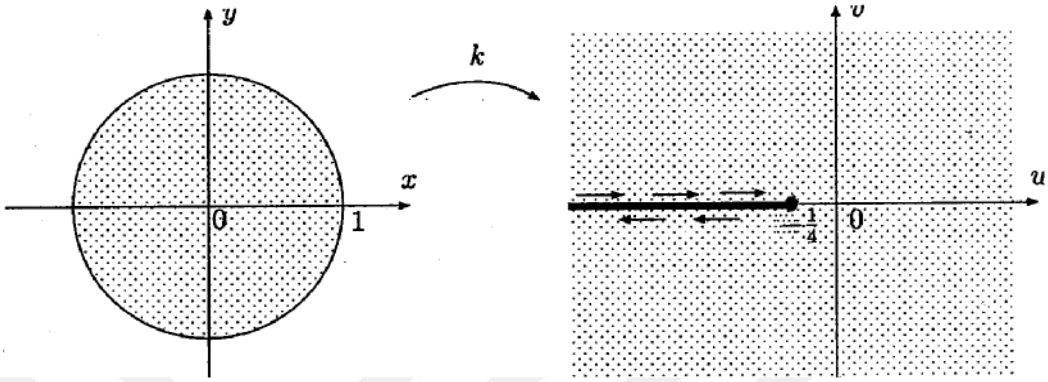
$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyon $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}\left[g(z) - 1 \right]$$

biçiminde yazılırsa $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğü görülebilir. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty} nz^n \in \mathcal{S}^*$ olduğu görülebilir. Ayrıca Teorem 2.3.8 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$
$$=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0$$

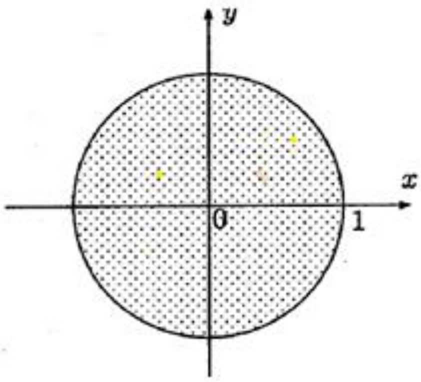
elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in\mathcal{U}$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

biçiminde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına aittir. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışını hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]$ fonksiyonu, "*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [10,27].



Şekil 3: Konveks Bölge

Konveks fonksiyonların analitik ifadesi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. O halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

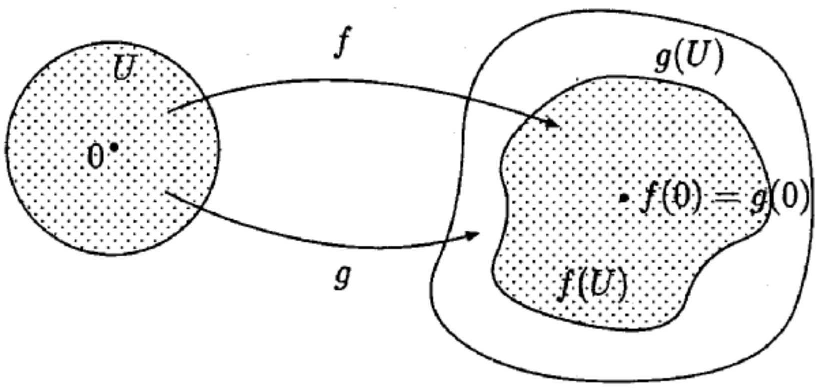
olur. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \ (n = 2, 3...)$ değerlendirmesi doğrudur [13,14,27].

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [10,13,14,27].

Yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset S \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [10].

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur. f nin g ye subordinasyonundan anlaşılacak şey aşağıdaki şekille izah edilmiştir.



Şekil 4: $f \prec g$ Subordinasyonu

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0) = f(0)$ ve $g(\mathcal{U}) \subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r) \subset f(\mathcal{U}_r)$ dir [10].

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)| \quad (r \in (0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z)\in\mathcal{P} \iff p(z)\prec\frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z)\in\Omega \iff \phi(z)\prec z$$

gerektirmeleri yazılır.

Tanım 2.3.11 (R sınıfı): $\mathcal{A}$ sınıfında

$$\mathrm{Re}\big(f'(z)\big)>0 \quad \big(z\in\mathcal{U}\big)$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına R sınıfındandır denir [13,14].

Ünivalentlik kriterlerinden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

- f fonksiyonu konveks bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z\in D$ için Re $f'(z)>0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak bi-ünivalent fonksiyonun tanımı ve seriye açılımı gibi bazı özellikleri verilmiştir. Akabinde Cauchy, Hankel ve Toeplitz matrisi tanımlanarak bu matrislere karşılık gelen Hankel ve Toeplitz determinantı kavramları verilmiştir. Son olarakta, bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için ikinci Hankel determinantı problemi $\left(\left|H_2(2)\right| = \left|a_2 a_4 - a_3^2\right|\right)$ ile ilgili son yıllarda yapılan çalışmalar tarihsel bir seyir içinde sunulmuştur.

3.1 Bi-ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1: Hem kendisi hem de tersi ünivalent olan fonksiyona bi-ünivalent fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonun tersi f^{-1} ile gösterilirse

$$f^{-1}\left(f(z)\right) = z$$

yazılır. Diğer taraftan Koebe-çeyrek teoremine göre her $\mathcal{U}$ diskinin $f \in \mathcal{S}$ altında görüntüsü orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski ihtiva ettiğini biliyoruz. Böylece her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu

$$f^{-1}\left(f(z)\right) = z, \quad \left(z \in \mathcal{U}\right)$$

ve

$$f\left(f^{-1}(w)\right) = w, \quad \left(|w| < r_0(f),\, r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right)$$

olacak şekilde f^{-1} tersine sahiptir.

Bu durumda $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$ alınırsa, $f^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ olacağı açıktır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(w)\right) &= f^{-1}(w) + a_2\left[f^{-1}(w)\right]^2 + a_3\left[f^{-1}(w)\right]^3 + \ldots \\
&= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n + a_2\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^2 + a_3\left[w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n\right]^3 + \ldots \\
&= w + (a_2 + b_2)w^2 + (b_3 + 2a_2b_2 + a_3)w^3 + (b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2{}^2 + 3a_3b_2 + a_4)w^3 + \ldots \\
&= w
\end{aligned}
$$

olur. Buradan karşılıklı w nın aynı dereceli kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse a_n ile b_n ler arasında

$$
\begin{aligned}
&a_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -a_2 \\
&b_3 + 2a_2b_2 + a_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 2a_2^2 - a_3 \\
&b_4 + 2a_2b_3 + a_2b_2{}^2 + 3a_3b_2 + a_4 = 0 \Rightarrow b_4 = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4
\end{aligned}
$$

şeklinde bağıntılar elde edilir. Böylece

$$
f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right)w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)w^4 + \ldots \tag{3.1}
$$

olarak yazılır. Burada $f^{-1}(z) \in \mathcal{A}$ dır.

$\mathcal{S}$ sınıfında bi-ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıf Σ ile gösterilecektir. Yani

$$
\Sigma = \left\{ f \in \mathcal{S} : \ \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } f^{-1}(z) \in \mathcal{S} \right\}
$$

şeklinde yazılır.

Örneğin; $f_1(z) = \dfrac{z}{1-z}$, $f_2(z) = -\log(1-z)$, $f_3(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonları Σ sınıfına ait olmasına rağmen; $g_1(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, $g_2(z) = z - \dfrac{z^2}{2}$, $g_3(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$ fonksiyonları ise Σ sınıfına ait değildirler.

3.2 Cauchy, Hankel ve Toeplitz Matrisleri

Tanım 3.2.1: $x_i \neq y_i$ $(x_i, y_i \in \mathbb{C})$, $1 \leq i, \ j \leq n$ olmak üzere elemanları

$$
c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_i}
$$

ile tanımlı $C = \left[c_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisine Cauchy matrisi denir [6].

Tanım 3.2.2: $n \geq 1$ olmak üzere

$$H_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} h_{i+j} x_i x_j$$

quadrik formuna Hankel formu denir. Bu forma uyan matrise de Hankel matrisi denir ve

$$H_{n-1} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

olarak gösterilir [15].

Bir Hankel matrisinin açık gösterimi,

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_n & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \ldots & h_{2n-4} & h_{2n-3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \ldots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi Hankel matrisi simetriktir. Ayrıca sonsuz mertebeden Hankel matrisi de

$$H_{\infty} = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.3: $n \geq 1$ ve $t_{i-j} \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$T_{n-1}(x,x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} t_{i-j} x_i \bar{x}_j$$

kuadrik formuna Toeplitz formu denir [15].

Bu forma tekabül eden,

$$T_{n-1} = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

matrisine de Toeplitz matrisi denir. Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_{n-1}=\begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-n+2} & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{-n+3} & t_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada görüldüğü gibi bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca aynıdır. Ayrıca sonsuz mertebeden bir Toeplitz matrisi de

$$T_\infty=\left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır.

3.3. Hankel Determinantı

$q\geq 1$ ve $n\geq 1$ olmak üzere

$$H_q(n)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \ldots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & \ldots & \ldots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix} \quad \left(a_n\in\mathbb{C}\right)$$

determinantına $q.$ mertebeden Hankel determinantı denir [26].

Buradan q ve n nin özel durumlarında

$$H_2(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_3-a_2^2,$$

$$H_2(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}=a_2a_4-a_3^2,$$

$$H_3(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}=a_3\left(a_2a_4-a_3^2\right)-a_4\left(a_4-a_2a_3\right)+a_5\left(a_3-a_2^2\right), \quad \left(a_1=1\right)$$

determinantları yazılır.

Lemma 3.3.1: $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ şeklinde verilen bir kuvvet serisinin $\mathcal{U}$ diskinde $\mathcal{P}$ sınıfından bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $n\in\mathbb{N}^+$ için

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & 2 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

Toeplitz determinantının $c_{-k}=\overline{c}_k$ katsayılarının negatif olmayan sayılar olmasıdır. Ayrıca bunlar, $n<m-1$ için $D_n>0$ ve $n\geq m$ için $D_n=0$ olması durumunda $k\neq j$, $t_k\neq t_j$ ve t_k reel ve $\rho_k>0$ olmak üzere

$$p(z)=\sum_{k=1}^{m}\rho_k\rho_0(e^{it_kz})$$

fonksiyonu haricinde kesinlikle pozitiftir [12].

Lemma 3.3.2: $p\in\mathcal{P}$ olsun. $k=1,2,...$ için $|c_k|\leq 2$ eşitsizliği doğrudur. Bu sınır kesindir [10].

Lemma 3.3.3: $p\in\mathcal{P}$ olsun. $|x|\leq 1$ ve $|z|\leq 1$ olacak şekilde x ve z değerleri için

$$2c_2=c_1^2+x(4-c_1^2) \tag{3.2}$$

ve

$$4c_3=c_1^3+2c_1(4-c_1^2)x-c_1(4-c_1^2)x^2+2(4-c_1^2)(1-|x|^2)z \tag{3.3}$$

olur [21].

3.4. Bi-ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin İkinci Hankel Determinantı

Bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıflarına ait fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının üst sınırını belirleme problemi ilk defa 2015 yılında Deniz ve arkadaşları [9] tarafından çalışılmıştır. Onlar çalışmalarında $\beta.$ mertebeden bi-yıldızıl ve $\beta.$ mertebeden bi-konveks fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantının üst sınırlarını aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir.

Tanım 3.4.1: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $\beta.$ mertebeden bi-yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ ile gösterilir [9].

Teorem 3.4.2: $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{*}(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-\beta)^2(4\beta^2 - 8\beta + 5), & \beta \in \left[0, \dfrac{29-\sqrt{137}}{32}\right] \\ (1-\beta)^2\left(\dfrac{13\beta^2 - 14\beta - 7}{16\beta^2 - 26\beta + 5}\right), & \beta \in \left(\dfrac{29-\sqrt{137}}{32}, 1\right) \end{cases}$$

dır [9].

İspat: $f \in \mathcal{S}_{\sigma}^{*}(\beta)$ ve $g = f^{-1}$ olsun. O halde

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.4}$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{g(w)} = \beta + (1-\beta)q(w) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\mathcal{P}$ sınıfından $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ ve $q(w)=1+d_1w+d_2w^2+...$ fonksiyonları vardır.

(3.4) ve (3.5) eşitliklerinde $f(z)$ ve $g(w)$ yerine yazılıp polinom eşitliği kullanılırsa aşağıdaki katsayılar elde edilir:

$$a_2=(1-\beta)c_1, \tag{3.6}$$

$$2a_3-a_2^2=(1-\beta)c_2, \tag{3.7}$$

$$3a_4-3a_3a_2+a_2^3=(1-\beta)c_3 \tag{3.8}$$

ve

$$-a_2=(1-\beta)d_1, \tag{3.9}$$

$$3a_2^2-2a_3=(1-\beta)d_2, \tag{3.10}$$

$$-10a_2^3+12a_3a_2-3a_4=(1-\beta)d_3. \tag{3.11}$$

(3.6) ve (3.9) eşitliklerinden

$$c_1=-d_1 \tag{3.12}$$

bulunur.

(3.6), (3.7) ve (3.10) eşitlikleri yardımıyla a_3 katsayısı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$a_3=(1-\beta)^2c_1^2+\frac{(1-\beta)}{4}(c_2-d_2). \tag{3.13}$$

(3.8) ve (3.11) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp çıkan sonuçta (3.6) ve (3.13) yerine yazılırsa

$$a_4=\frac{2}{3}(1-\beta)^3c_1^3+\frac{5}{8}(1-\beta)^2c_1(c_2-d_2)+\frac{1}{6}(1-\beta)(c_3-d_3) \tag{3.14}$$

katsayısı bulunur.

Böylece (3.6), (3.13) ve (3.14) den

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right|=\Big|&-\frac{1}{3}(1-\beta)^4c_1^4+\frac{1}{8}(1-\beta)^3c_1^2(c_2-d_2)\\&+\frac{1}{6}(1-\beta)^2c_1(c_3-d_3)-\frac{1}{16}(1-\beta)^2(c_2-d_2)^2\Big|\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir.

Lemma 3.3.3 e göre; $|x|\le 1$, $|y|\le 1$, $|z|\le 1$ ve $|w|\le 1$ olacak şekilde x, y, z ve w değerleri için ve $c_1=-d_1$ olduğundan

$$\left.\begin{array}{l}2c_2 = c_1^2 + x(4-c_1^2)\\ 2d_2 = d_1^2 + y(4-d_1^2)\end{array}\right\} \Rightarrow c_2 - d_2 = \frac{4-c_1^2}{2}(x-y), \tag{3.16}$$

$$\left.\begin{array}{l}4c_3 = c_1^3 + 2c_1(4-c_1^2)x - c_1(4-c_1^2)x^2 + 2(4-c_1^2)(1-|x|^2)z\\ 4d_3 = d_1^3 + 2c_1(4-d_1^2)y - d_1(4-d_1^2)y^2 + 2(4-d_1^2)(1-|y|^2)w\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$c_3 - d_3 = \frac{c_1^3}{2} + \frac{c_1(4-c_1^2)}{2}(x+y) - \frac{c_1(4-c_1^2)}{4}(x^2+y^2) + \frac{(4-c_1^2)}{2}\left(\left(1-|x|^2\right)z - \left(1-|y|^2\right)w\right) \tag{3.17}$$

eşitlikleri yazılır.

$p \in \mathcal{P}$ olduğundan $|c_1| \le 2$ dir. $c = |c_1|$, $\lambda = |x|$ ve $\mu = |y|$ olsun ve (3.15) eşitliğinde (3.16) ve (3.17) dikkate alınıp eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le T_1 + T_2(\lambda+\mu) + T_3(\lambda^2+\mu^2) + T_4(\lambda+\mu)^2 = F(\lambda,\mu) \ \left(\lambda \ge 0,\ \mu \le 1\right) \tag{3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c \in [0,2]$ olmak üzere

$$T_1 = T_1(c) = \frac{(1-\beta)^2}{12}\left[\left(1+4(1-\beta)^2\right)c^4 - 2c^3 + 8c\right] \ge 0,$$

$$T_2 = T_2(c) = \frac{1}{48}(1-\beta)^2 c^2(4-c^2)(7-3\beta) \ge 0,$$

$$T_3 = T_3(c) = \frac{1}{24}(1-\beta)^2 c(4-c^2)(c-2) \le 0,$$

$$T_4 = T_4(c) = \frac{1}{64}(1-\beta)^2 (4-c_1^2)^2 \ge 0$$

dır.

Şimdi, $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun $S = \{(\lambda,\mu) : 0 \le \lambda \le 1, 0 \le \mu \le 1\}$ kapalı bölgesinde maksimumunu inceleyelim.

$c \in (0,2)$ için $T_3 < 0$ ve $T_3 + 2T_4 > 0$ olduğundan $F_{\lambda\lambda} \cdot F_{\mu\mu} - \left(F_{\lambda\mu}\right)^2 < 0$ dır. Böylece, F fonksiyonu S bölgesinin içinde bir yerel maksimuma sahip değildir.

$\lambda = 0$ ve $0 \le \mu \le 1$ $\left(\text{benzer olarak } \mu = 0 \text{ ve } 0 \le \lambda \le 1\right)$ için

$$F(0,\mu) = G(\mu) = \left(T_3 + T_4\right)\mu^2 + T_2\mu + T_1$$

olur.

Şimdi, $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun S bölgesinin sınırında maksimumuna bakalım:

i. $T_3+T_4\geq 0$ durumu: $0<\mu<1$ ve $0\leq c<2$ için açıktır ki $G'(\mu)=2\left(T_3+T_4\right)\mu+T_2>0$ dır, yani $G(\mu)$ artan fonksiyondur. Dolayısıyla $c\in[0,2)$ için $G(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ noktasında alır ve

$$\max G(\mu)=G(1)=T_1+T_2+T_3+T_4$$

olur.

ii. $T_3+T_4<0$ durumu: $0<\mu<1$ ve $0\leq c<2$ için $T_2+2\left(T_3+T_4\right)\geq 0$ olduğundan $T_2+2\left(T_3+T_4\right)<2\left(T_3+T_4\right)\mu+T_2<T_2$ ve böylece $G'(\mu)>0$ dır. Dolayısıyla $c\in[0,2)$ için $G(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ noktasında alır. Ayrıca $c=2$ için

$$F(\lambda,\mu)=\frac{4}{3}\left(1-\beta\right)^2(4\beta^2-8\beta+5) \tag{3.19}$$

olur.

(3.19), i ve ii durumları göz önüne alınırsa, $0\leq\mu\leq 1$ ve $0\leq c\leq 2$ için,

$$\max G(\mu)=G(1)=T_1+T_2+T_3+T_4$$

dır.

$\lambda=1$ ve $0\leq\mu\leq 1$ $\left(\text{benzer olarak } \mu=1 \text{ ve } 0\leq\lambda\leq 1\right)$ için

$$F(1,\mu)=H(\mu)=\left(T_3+T_4\right)\mu^2+\left(T_2+2T_4\right)\mu+T_1+T_2+T_3+T_4$$

elde edilir.

Aynı şekilde, T_3+T_4 toplamının yukarıdaki durumları için

$$\max H(\mu)=H(1)=T_1+2T_2+2T_3+4T_4$$

yazılır.

$c\in[0,2]$ için $G(1)\leq H(1)$ olduğundan, S bölgesinin sınırında $\max F(\lambda,\mu)=F(1,1)$ olur. Böylece F maksimum değerini S kapalı bölgesinin içinde $\lambda=1$ ve $\mu=1$ noktalarında alır.

$K:[0,2]\to\mathbb{R}$,

$$K(c)=\max F(\lambda,\mu)=F(1,1)=T_1+2T_2+2T_3+4T_4 \tag{3.20}$$

olsun.

Substituting the values of T_1,T_2,T_3 ve T_4 değerleri (3.20) de tanımlanan K fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$K(c)=\frac{(1-\beta)^2}{48}\left[\left(16\beta^2-26\beta+5\right)c^4+24(2-\beta)c^2+48\right]$$

elde edilir.

Şimdi $K(c)$ fonksiyonunun $c\in[0,2]$ aralığında maksimumluğunu inceleyelim. $K(c)$ fonksiyonun türevi aşağıdaki gibidir:

$$K'(c)=\frac{(1-\beta)^2}{12}\left[\left(16\beta^2-26\beta+5\right)c^3+12(2-\beta)c\right]. \tag{3.21}$$

1. Durum: $16\beta^2-26\beta+5\geq 0,$ yani, $\beta\in\left[0,\frac{13-\sqrt{89}}{16}\right]$ olsun. Böylece $c\in(0,2)$ için $K'(c)>0$ olur. K fonksiyonu $(0,2)$ aralığında bir artan fonksiyon olduğundan K fonksiyonu maksimum değerini $c\in[0,2]$ aralığının sınırında yani $c=2$ noktasında alır. Böylece,

$$\max_{0\leq c\leq 2}K(c)=K(2)=\frac{4}{3}(1-\beta)^2\left(4\beta^2-8\beta+5\right)$$

olur.

2. Durum: $16\beta^2-26\beta+5<0,$ yani, $\beta\in\left(\frac{13-\sqrt{89}}{16},1\right)$ olsun. O halde, $c_{0_1}=0$ veya $c_{0_2}=\sqrt{\frac{-12(2-\beta)}{16\beta^2-26\beta+5}}$ noktaları $K'(c)=0$ ın kritik noktalarıdır. $\beta\in\left(\frac{13-\sqrt{89}}{16},\frac{29-\sqrt{137}}{32}\right]$ olduğunda, $c_{0_2}\geq 2$, yani, c_{0_2} noktası $(0,2)$ aralığının dışında kalır. Bu nedenle $K(c)$ fonksiyonu maksimum değerini $c_{0_1}=0$ veya $c=c_{0_2}$ noktalarında alır. K fonksiyonu $(0,2)$ aralığında artan olduğundan, K fonksiyonu maksimum değerini $c\in[0,2]$ aralığının sınırında, yani, $c=2$ noktasında alır. Böylece,

$$\max_{0\leq c\leq 2}K(c)=K(2)=\frac{4}{3}(1-\beta)^2\left(4\beta^2-8\beta+5\right)$$

olur.

$\beta\in\left(\frac{29-\sqrt{137}}{32},1\right)$ olduğunda $c_{0_2}<2$ olur, yani, c_{0_2} noktası $[0,2]$ aralığının bir iç noktasıdır. $K''(c_{0_2})<0$ olduğu için $K(c)$ fonksiyonu maksimum değerini $c=c_{0_2}$ noktasında alır. Bu nedenle

$$\max_{0\le c\le 2} K(c) = K(c_{0_2}) = K\left(\sqrt{\frac{-12(2-\beta)}{16\beta^2-26\beta+5}}\right) = (1-\beta)^2\left(\frac{13\beta^2-14\beta-7}{16\beta^2-26\beta+5}\right)$$

yazılır. Buradan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.4.3: $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\Sigma$ fonksiyonu her $z,w\in\mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\beta \qquad (0\le\beta<1)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)>\beta \qquad (0\le\beta<1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna β. mertebeden bi-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ ile gösterilir [9].

Teorem 3.4.4: $f\in\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{(1-\beta)^2}{24}\left(\frac{5\beta^2+8\beta-32}{3\beta^2-3\beta-4}\right)$$

dır [9].

Özel durum olarak yukarıdaki tanım ve teoremlerde $\beta=0$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$f\in\mathcal{S}_\Sigma^*(0)=f\in\mathcal{S}_\Sigma^*\Rightarrow\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{20}{3},$$

$$f\in\mathcal{K}_\Sigma(0)=\mathcal{K}_\Sigma\Rightarrow\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\frac{1}{3}.$$

Orhan ve arkadaşları [25] 2016 yılında β. mertebeden bi-yıldızıl ve bi-konveks fonksiyonların genelleştirilmesi olan β. mertebeden $\alpha-$konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Tanım 3.4.5: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left((1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)\geq\beta \qquad \left(0\leq\alpha\leq1, 0\leq\beta<1\right)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\alpha)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\alpha\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right)\geq\beta \qquad \left(0\leq\alpha\leq1, 0\leq\beta<1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna β. mertebeden $\alpha-$konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\alpha}(\beta)$ ile gösterilir [25].

Teorem 3.4.6: $f \in \mathcal{M}_{\Sigma}^{\alpha}(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\begin{cases}\dfrac{4(1-\beta)^2}{3(1+\alpha)^3(1+3\alpha)}\left[4(1-\beta)^2+(1+\alpha)^2\right], \\ \beta\in\left[0,1-\dfrac{(1+\alpha)\left[3(1+3\alpha)+\sqrt{9(1+3\alpha)^2-48(1+\alpha)(1+3\alpha)+128(1+2\alpha)^2}\right]}{16(1+2\alpha)}\right] \\ \dfrac{(1-\beta)^2}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}\dfrac{\left[(1-\beta)^2(1+3\alpha)(13+7\alpha)-12(1-\beta)(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)-4(1+\alpha)^2\left(9\alpha^2+8\alpha+2\right)\right]}{\left[16(1-\beta)^2(1+2\alpha)-6(1-\beta)(1+\alpha)(1+3\alpha)\right](1+2\alpha)+(1+\alpha)^2\left[3(1+\alpha)(1+3\alpha)-8(1+2\alpha)^2\right]}, \\ \beta\in\left(1-\dfrac{(1+\alpha)\left[3(1+3\alpha)+\sqrt{9(1+3\alpha)^2+128(1+2\alpha)^2}\right]}{32(1+2\alpha)},1\right)\end{cases}$$

dır [25].

Teorem 3.4.6 da $\alpha=0$ alınırsa Teorem 3.4.2; $\alpha=1$ alınırsa Teorem 3.4.4 elde edilir.

Tanım 3.4.7: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1-\beta} f'(z)\right) > \alpha \qquad \left(0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1\right)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{w}{g(w)}\right)^{1-\beta} g'(w)\right) > \alpha \qquad \left(0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ sınıfındandır denir [1].

Teorem 3.4.8: $f \in \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{4(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^3(3+\beta)}\left[2(3+\beta)(2+\beta)(1-\alpha)^2 + 3(1+\beta)^2\right], \\ \alpha \in \left[0, 1 - \dfrac{3(1+\beta)(3+\beta) + (1+\beta)\sqrt{9(3+\beta)^2 + 48(2+\beta)^3(3+\beta)}}{8(2+\beta)^2(3+\beta)}\right] \\ (1-\alpha)^2 \left\{ \dfrac{4}{(2+\beta)^2} - \dfrac{3\left[\left(\beta^2+5\beta+6\right)(1-\alpha) + (1+\beta)\left(\beta^2+4\beta+6\right)\right]^2}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)\left[2(2+\beta)^3(3+\beta)(1-\alpha)^2 - 3(3+\beta)(2+\beta)(\beta+1)(1-\alpha) - 3(1+\beta)^2\left(\beta^2+4\beta+5\right)\right]} \right\}, \\ \alpha \in \left(1 - \dfrac{3(1+\beta)(3+\beta) + (1+\beta)\sqrt{9(3+\beta)^2 + 48(2+\beta)^3(3+\beta)}}{8(2+\beta)^2(3+\beta)}, 1\right) \end{cases}$$

dır [1].

Teorem 3.4.8 de $\beta = 0$ alınırsa Teorem 3.4.2 deki sonuçlar elde edilir.

2016 yılında Frasin ve arkadaşları [11], subordinasyon özelliğini kullanarak Orhan ve arkadaşlarının [25] çalışmalarını genelleştirerek aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Tanım 3.4.9: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$(1-\alpha)\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \phi(z) \qquad (\alpha \geq 0)$$

ve

$$(1-\alpha)\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)+\alpha\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) \prec \phi(w) \qquad (\alpha \geq 0)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\mathcal{F}_{\Sigma}(\phi, \alpha)$ sınıfındandır denir [11].

Teorem 3.4.10: $f \in \mathcal{F}_{\Sigma}(\phi, \alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} H(2), & f(\alpha, B_1, B_2, B_3) \geq 0,\ C(\alpha, B_1, B_2, B_3) \geq 0 \\ \max\left\{\dfrac{B_1^2}{4(1+2\alpha)^2}, H(2)\right\}, & f(\alpha, B_1, B_2, B_3) > 0,\ C(\alpha, B_1, B_2, B_3) < 0 \\ \dfrac{B_1^2}{4(1+2\alpha)^2}, & f(\alpha, B_1, B_2, B_3) \leq 0,\ C(\alpha, B_1, B_2, B_3) \leq 0 \\ \max\{H(t_0), H(2)\}, & f(\alpha, B_1, B_2, B_3) < 0,\ C(\alpha, B_1, B_2, B_3) > 0 \end{cases}$$

dır. Burada

$$H(2) = \frac{B_1|2B_1 - 2B_2 + B_3|(1+\alpha)^2(1+2\alpha)^2 + B_1^4(1+2\alpha)^2 + 2B_1\left|B_2 - B_1(1+\alpha)^3(1+2\alpha)^2\right|}{3(1+\alpha)^3(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)},$$

$$H\left(t_0 = \sqrt{\frac{2C(\alpha, B_1, B_2, B_3)}{f(\alpha, B_1, B_2, B_3)}}\right) = \frac{B_1^2}{4(1+2\alpha)^2} - \frac{[C(\alpha, B_1, B_2, B_3)]^2}{48(1+\alpha)^3(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)f(\alpha, B_1, B_2, B_3)},$$

$$\begin{aligned} f(\alpha, B_1, B_2, B_3) = {} & 4B_1|2B_1 - 2B_2 + B_3|(1+\alpha)^2(1+2\alpha)^2 + 4B_1^4(1+2\alpha)^2 \\ & -3B_1^3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha) - 12B_1^2(1+\alpha)^2(1+2\alpha)^2 \\ & +3B_1^2(1+\alpha)^3(1+3\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\alpha, B_1, B_2, B_3) = {} & 3B_1^3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha) + 8B_1|B_2 - B_1|(1+\alpha)^3(1+2\alpha)^2 \\ & +12B_1^2(1+\alpha)^2(1+2\alpha)^2 - 6B_1^2(1+\alpha)^3(1+3\alpha) \end{aligned}$$

dır [11].

2017 yılında, Çağlar ve arkadaşları [7], Tanım 2.3.11 deki alt sınıfı genelleştirerek aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Tanım 3.4.11: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(f'(z)\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(g'(w)\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\mathcal{N}_\Sigma(\beta)$ sınıfındandır denir [7].

Teorem 3.4.12: $f \in \mathcal{N}_\Sigma(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)^2}{2}\left(2(1-\beta)^2 + 1\right), & \beta \in \left[0, \dfrac{11-\sqrt{37}}{12}\right] \\ \dfrac{(1-\beta)^2}{16}\left(\dfrac{60\beta^2 - 84\beta - 25}{9\beta^2 - 15\beta + 1}\right), & \beta \in \left(\dfrac{11-\sqrt{37}}{12}, 1\right) \end{cases}$$

dır [7].

Tanım 3.4.11 ve Teorem 3.4.12 de $\beta = 0$ alınırsa

$$f \in \mathcal{N}_\Sigma(0) = \mathcal{N}_\Sigma \Rightarrow \left|a_2 a_4 - a_3^2\right| \le \frac{3}{2}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 3.4.13: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\left|\arg(f'(z))\right| \le \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0 < \alpha \le 1)$$

ve

$$\left|\arg(g'(w))\right| \le \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0 < \alpha \le 1)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\mathcal{N}_\Sigma^\alpha$ sınıfındandır denir [7].

Teorem 3.4.14: $f \in \mathcal{N}_{\Sigma}^{\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \dfrac{4\alpha^2}{9}, & 0 < \alpha \le \dfrac{7}{24} \\ \dfrac{\alpha^2}{48}\left(\dfrac{64\alpha^2 - 144\alpha + 5}{12\alpha^2 - 12\alpha + 1}\right), & \dfrac{7}{24} \le \alpha \le \dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\alpha^2(8\alpha^2+1)}{6}, & \dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

dır [7].

Bu tez çalışmasında, bi-ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı olan $\Sigma\ \tau,\gamma$ aşağıdaki gibi tanımlanarak, bu sınıf için ikinci Hankel determinantı problemi ele alınmıştır. Yani $\left|a_2a_4 - a_3^2\right|$ fonksiyoneli için bir üst sınır bulunmuştur. Teoremin ispatı için Deniz ve arkadaşlarının [9] 2015 yılında yapmış oldukları çalışmanın ispat yöntemi kullanılmıştır.

Tanım 3.4.15: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[f'(z) + \gamma z f''(z) - 1\right]\right\} > 0 \qquad 0 \le \gamma \le 1, \tau \in \mathbb{C}/\ 0$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right]\right\} > 0 \qquad 0 \le \gamma \le 1, \tau \in \mathbb{C}/\ 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \tau,\gamma$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.4.15 de τ ve γ nın özel durumları için aşağıdaki alt sınıflar da elde edilebilir.

Tanım 3.4.16: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\ f'(z) + \gamma z f''(z)\ > 0 \qquad 0 \le \gamma \le 1$$

ve

$$\operatorname{Re}\ g'(w) + \gamma w g''(w)\ > 0 \qquad 0 \le \gamma \le 1$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ 1,\gamma$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.4.17: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\ \ f'(z) + zf''(z)\ \ > 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\ \ g'(w) + wg''(w)\ \ > 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \ 1,1$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.4.18: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[f'(z) + zf''(z) - 1\right]\right\} > 0 \qquad \tau \in \mathbb{C} /\ \ 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[g'(w) + wg''(w) - 1\right]\right\} > 0 \qquad \tau \in \mathbb{C} /\ \ 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \ \tau,1$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.4.19: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[f'(z) - 1\right]\right\} > 0 \qquad \tau \in \mathbb{C} /\ \ 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{\tau}\left[g'(w) - 1\right]\right\} > 0 \qquad \tau \in \mathbb{C} /\ \ 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \ \tau,0$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.4.20: $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu her $z, w \in \mathcal{U}$ için

$$\mathrm{Re}\ \ f'(z)\ \ > 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\ \ g'(w)\ \ > 0$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonu $\Sigma\ \ 1,0$ sınıfındandır denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlıkta, bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\Sigma \;\tau,\gamma$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı verilmiştir. Ayrıca parametrelerin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1: $f\in\Sigma\left(\tau,\gamma\right)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\le\begin{cases}\max\left\{H(2-),H(t_0)\right\}, & \delta\in(0,\delta_0)\\ H(2-), & \delta\in\left[\delta_0,+\infty\right)\end{cases}$$

dır. Burada

$$\delta_0=\delta_0\left(\gamma\right)=\frac{\left(1+\gamma\right)\left[\left(1+\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)+\sqrt{d}\,\right]}{6\left(1+2\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)},$$

$$d=\left(1+\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)\left[36\left(1+2\gamma\right)^2-15\left(1+\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)\right],$$

$$H(2-)=\frac{\delta^2}{2\left(1+\gamma\right)^4\left(1+3\gamma\right)}\left[2\left(1+3\gamma\right)\delta^2+\left(1+\gamma\right)^3\right],$$

$$H(t_0)=\frac{4\delta^2}{9\left(1+2\gamma\right)^2}-\frac{\delta^2 b(\gamma,\delta)}{144\left(1+2\gamma\right)^2\left(1+3\gamma\right)a(\gamma,\delta)},\;\; t_0=\left(1+\gamma\right)\sqrt{\frac{b(\gamma,\delta)}{-a(\gamma,\delta)}},$$

$$\begin{aligned}a(\gamma,\delta)=&\,9\left(1+2\gamma\right)^2\left(1+3\gamma\right)\delta^2-3\left(1+\gamma\right)^2\left(1+2\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)\delta\\&+\left(1+\gamma\right)^3\left[4\left(1+\gamma\right)\left(1+3\gamma\right)-9\left(1+2\gamma\right)^2\right],\end{aligned}$$

$$b(\gamma,\delta)=6(1+2\gamma)(1+3\gamma)\delta+(1+\gamma)\left[27(1+2\gamma)^2-16(1+\gamma)(1+3\gamma)\right],\;\;\delta=\left|\tau\right|,$$

dır [8].

İspat: $f\in\Sigma\left(\tau,\gamma\right)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. O halde

$$1+\frac{1}{\tau}\left[f'(z)+\gamma zf''(z)-1\right]=p(z) \tag{4.1}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[g'(w)+\gamma wg''(w)-1\right]=q(w) \tag{4.2}$$

olacak şekilde $\mathcal{P}$ sınıfından $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ ve $q(w)=1+d_1w+d_2w^2+...$ fonksiyonları vardır.

(4.1) ve (4.2) eşitlikleri açık olarak

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\tau}\left[2(1+\gamma)a_2z+3(1+2\gamma)a_3z^2+4(1+3\gamma)a_4z^3+...\right]\\&=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+...\end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\tau}\left[-2(1+\gamma)a_2w+3(1+2\gamma)(2a_2^2-a_3)w^2+4(1+3\gamma)(-5a_2^3+5a_3a_2-a_4)w^3+...\right]\\&=1+d_1w+d_2w^2+d_3w^3+....\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde de yazılabilir.

(4.3) ve (4.4) de polinom eşitliği kullanılırsa aşağıdaki katsayılar elde edilir:

$$a_2=\frac{\tau c_1}{2(1+\gamma)}, \tag{4.5}$$

$$a_3=\frac{\tau c_2}{3(1+2\gamma)}, \tag{4.6}$$

$$a_4=\frac{\tau c_3}{4(1+3\gamma)}, \tag{4.7}$$

ve

$$-a_2=\frac{\tau d_1}{2(1+\gamma)}, \tag{4.8}$$

$$2a_2^2-a_3=\frac{\tau d_2}{3(1+2\gamma)}, \tag{4.9}$$

$$-5a_2^3+5a_3a_2-a_4=\frac{\tau d_3}{4(1+3\gamma)}. \tag{4.10}$$

Buradan (4.5) ve (4.8) eşitliklerinden

$$c_1=-d_1, \tag{4.11}$$

(4.5), (4.6) ve (4.9) eşitlikleri yardımıyla a_3 katsayısı

$$a_3=\frac{\tau^2c_1^2}{4(1+\gamma)^2}+\frac{\tau(c_2-d_2)}{6(1+2\gamma)} \tag{4.12}$$

ve (4.7) ve (4.10) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılıp çıkan sonuçta (4.5) ve (4.12) yerine yazılırsa a_4 katsayısı

$$a_4 = \frac{5\tau^2 c_1(c_2-d_2)}{24(1+\gamma)(1+2\gamma)} + \frac{\tau(c_3-d_3)}{8(1+3\gamma)} \tag{4.13}$$

olarak bulunur.

Böylece (4.5), (4.12) ve (4.13) den

$$\begin{aligned}\left|a_2a_4-a_3^2\right| = \Bigg| &-\frac{\tau^4 c_1^4}{16(1+\gamma)^4} + \frac{\tau^3 c_1^2}{48(1+2\gamma)(1+\gamma)^2}(c_2-d_2) \\ &+ \frac{\tau^2 c_1}{16(1+3\gamma)(1+\gamma)}(c_3-d_3) - \frac{\tau^2}{36(1+2\gamma)^2}(c_2-d_2)^2\Bigg|\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir.

Diğer taraftan Lemma 3.3.3 e göre; $|x|\le 1$, $|y|\le 1$, $|z|\le 1$ ve $|w|\le 1$ olacak şekilde x, y, z ve w değerleri için ve $c_1 = -d_1$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} 2c_2 &= c_1^2 + x(4-c_1^2) \\ 2d_2 &= d_1^2 + y(4-d_1^2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2 - d_2 = \frac{4-c_1^2}{2}(x-y), \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned} 4c_3 &= c_1^3 + 2c_1(4-c_1^2)x - c_1(4-c_1^2)x^2 + 2(4-c_1^2)(1-|x|^2)z \\ 4d_3 &= d_1^3 + 2c_1(4-d_1^2)y - d_1(4-d_1^2)y^2 + 2(4-d_1^2)(1-|y|^2)w\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_3-d_3 = \frac{c_1^3}{2} + \frac{c_1(4-c_1^2)}{2}(x+y) - \frac{c_1(4-c_1^2)}{4}(x^2+y^2) + \frac{(4-c_1^2)}{2}\left(\left(1-|x|^2\right)z - \left(1-|y|^2\right)w\right) \tag{4.16}$$

eşitlikleri yazılır.

$p \in \mathcal{P}$ olduğundan $|c_1| \le 2$ dir. Kolaylık açısından $t = |c_1|$, $\delta = |\tau|$, $\lambda = |x|$ ve $\mu = |y|$ olsun. Bu durumda (4.14) eşitliğinde (4.15) ve (4.16) dikkate alınıp eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le T_1(t) + T_2(t)(\lambda+\mu) + T_3(t)(\lambda^2+\mu^2) + T_4(t)(\lambda+\mu)^2 = F(\lambda,\mu) \quad \left(\lambda \ge 0, \mu \le 1\right) \tag{4.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t \in [0,2]$ olmak üzere

$$T_1(t)=\frac{\delta^2 t}{32(1+3\gamma)(1+\gamma)^4}\left\{\left[2\delta^2(1+3\gamma)+(1+\gamma)^3\right]t^3+2(4-t^2)(1+\gamma)^3\right\}\geq 0,$$

$$T_2(t)=\frac{\delta^2 t^2(4-t^2)}{96(1+2\gamma)(1+3\gamma)(1+\gamma)^2}\left[\delta(1+3\gamma)+3(1+\gamma)(1+2\gamma)\right]\geq 0,$$

$$T_3(t)=\frac{\delta^2(4-t^2)(t-2)t}{64(1+\gamma)(1+3\gamma)}\leq 0,$$

$$T_4(t)=\frac{\delta^2(4-t^2)^2}{144(1+2\gamma)^2}\geq 0$$

dır.

Şimdi, $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun $S=\{(\lambda,\mu):0\leq\lambda\leq 1, 0\leq\mu\leq 1\}$ kapalı bölgesinde maksimumunu inceleyelim. $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun kat sayıları t değişkenine bağlı olduğundan S bölgesinde $t=0$, $t\in(0,2)$ ve $t=2$ durumlarında fonksiyonun maksimumuna bakılmalıdır.

1. $t=0$ olsun. Bu durumda $F(\lambda,\mu)=\dfrac{\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}(\lambda+\mu)^2$, $(\lambda,\mu)\in S$ olur.

$F'_\lambda(\lambda,\mu)=\dfrac{2\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}(\lambda+\mu)=0$, $F'_\mu(\lambda,\mu)=\dfrac{2\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}(\lambda+\mu)=0$ denklemlerinden ve $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun tanımından kolaylıkla görülüyor ki fonksiyon S bölgesinin içinde bir kritik noktaya sahip değildir, yani, fonksiyon S bölgesinin içinde bir yerel maksimuma sahip değildir.

Şimdi, $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun S bölgesinin sınırında maksimumuna bakalım:

1.1. $\lambda=0$, $0\leq\mu\leq 1$ olsun. Bu durumda $F(0,\mu)=\dfrac{\delta^2\mu^2}{9(1+2\gamma)^2}=\varphi_1(\mu)$ olur. Her $\mu\in[0,1]$ için $\varphi_1'(\mu)=\dfrac{2\delta^2\mu}{9(1+2\gamma)^2}\geq 0$ olduğundan $\varphi_1(\mu)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artandır. Dolayısıyla $\varphi_1(\mu)$ fonksiyonu $\mu=1$ de maksimum değerini alır ve

$$\max\{\varphi_1(\mu):0\leq\mu\leq 1\}=\varphi_1(1)=\frac{\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$$

dir. Böylece,

$$\max\{F(0,\mu):0\leq\mu\leq 1\}=\frac{\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$$

olur.

1.2. $\mu = 0$, $0 \le \lambda \le 1$ olsun. Bu durumda yukarıdaki duruma benzer olarak $\max\{F(\lambda,0): 0 \le \lambda \le 1\} = \dfrac{\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$ yazılır.

1.3. $\lambda = 1$, $0 \le \mu \le 1$ olsun. Bu durumda $F(1,\mu) = \dfrac{\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}(1+\mu)^2 = \varphi_2(\mu)$ olur. 1.1 durumuna benzer olarak $\max\{F(1,\mu): 0 \le \mu \le 1\} = \dfrac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$ elde edilir.

1.4. $\mu = 1$, $0 \le \lambda \le 1$ olsun. Bu durumda yukarıdaki duruma benzer olarak $\max\{F(\lambda,1): 0 \le \lambda \le 1\} = \dfrac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$ yazılır.

Yukarıdaki durumlar göz önünde bulundurulduğunda sonuç olarak $t = 0$ için

$$\max\{F(\lambda,\mu): 0 \le \lambda,\mu \le 1\} = \frac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2} \tag{4.18}$$

elde edilir.

2. $t \in (0,2)$ olsun. Bu durumda $F'_\lambda(\lambda,\mu) = T_2(t) + 2T_3(t)\lambda + 2T_4(t)(\lambda+\mu)$ ve $F'_\mu(\lambda,\mu) = T_2(t) + 2T_3(t)\mu + 2T_4(t)(\lambda+\mu)$ dır.

Kolaylıkla görülür ki $\lambda_0 = \mu_0 = \dfrac{-T_2(t)}{2\left[T_3(t)+2T_4(t)\right]}$, $T_2(t) + 2T_3(t)\lambda + 2T_4(t)(\lambda+\mu) = 0$ ve $T_2(t) + 2T_3(t)\mu + 2T_4(t)(\lambda+\mu) = 0$ denklemlerinin ortak çözümüdür.

Bu durumda her $t \in (0,2)$ için $\lambda_0 = \mu_0 < 0$ veya $1 < \lambda_0 = \mu_0$, yani, $(\lambda_0,\mu_0) \notin S$ dir. Böylece $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonu S bölgesinin içinde bir kritik noktaya sahip değildir, yani, fonksiyon S bölgesinin içinde bir yerel maksimuma sahip değildir.

Şimdi, $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonunun S bölgesinin sınırında maksimumuna bakalım:

2.1. $\lambda = 0$, $0 \le \mu \le 1$ olsun. Bu durumda $F(0,\mu) = T_1(t) + T_2(t)\mu + \left[T_3(t)+T_4(t)\right]\mu^2 = \varphi_3(\mu)$ olur. Şimdi $\varphi_3(\mu)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında maksimumluğunu inceleyelim. $\varphi_3(\mu)$ fonksiyonunun μ ye göre türevi $\varphi_3'(\mu) = T_2(t) + 2\left[T_3(t)+T_4(t)\right]\mu$ dır.

2.1.1. $t \in (0,2)$ için $T_3(t)+T_4(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda $\varphi_3'(\mu) \geq 0$, yani, $\varphi_3(\mu)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında bir artan fonksiyondur.

2.1.2. $t \in (0,2)$ için $T_3(t)+T_4(t) < 0$ olsun. Bu durumda $\dfrac{-T_2(t)}{2[T_3(t)+T_4(t)]} > 0$ dır. Öyleyse, $T_2(t)+2[T_3(t)+T_4(t)] > 0$ dır. Ayrıca, kolaylıkla görülür ki her $\mu \in [0,1]$ için $T_2(t)+2[T_3(t)+T_4(t)]\mu \geq T_2(t)+2[T_3(t)+T_4(t)]$ dır. Buradan $\varphi_3'(\mu) > 0$ olduğu aşikârdır. Böylece $\varphi_3(\mu)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında bir artan fonksiyondur. Sonuç olarak, her iki durumda da $\varphi_3(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır ve

$$\max\{\varphi_3(\mu) : 0 \leq \mu \leq 1\} = \varphi_3(1) = T_1(t)+T_2(t)+T_3(t)+T_4(t),$$

yani,

$$\max\{F(0,\mu) : 0 \leq \mu \leq 1\} = F(0,1) = T_1(t)+T_2(t)+T_3(t)+T_4(t)$$

dir.

2.2. $\mu = 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda, 2.1 durumuyla benzer olarak $\max\{F(\lambda,0) : 0 \leq \lambda \leq 1\} = T_1(t)+T_2(t)+T_3(t)+T_4(t)$ yazılır.

2.3. $\lambda = 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$F(1,\mu) = \sum_{n=1}^{4} T_n(t) + [T_2(t)+2T_4(t)]\mu + [T_3(t)+T_4(t)]\mu^2 = \varphi_4(\mu)$$

olur.

2.1 durumuna benzer olarak kolaylıkla gösterilebilir ki $\varphi_4(\mu)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında bir artan fonksiyondur. Dolayısıyla $\varphi_4(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır ve $\max\{\varphi_4(\mu) : 0 \leq \mu \leq 1\} = \varphi_4(1) = T_1(t)+2[T_2(t)+T_3(t)]+4T_4(t)$, yani, $\max\{F(1,\mu) : 0 \leq \mu \leq 1\} = F(1,1) = T_1(t)+2[T_2(t)+T_3(t)]+4T_4(t)$ dir.

2.4. $\mu = 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda 2.3 durumuna benzer olarak $\max\{F(\lambda,1) : 0 \leq \lambda \leq 1\} = T_1(t)+2[T_2(t)+T_3(t)]+4T_4(t)$ yazılır. Ayrıca kolaylıkla gösterilebilir ki her $t \in (0,2)$ için

$$T_1(t)+T_2(t)+T_3(t)+T_4(t)<T_1(t)+2\left[T_2(t)+T_3(t)\right]+4T_4(t)$$

dir.

Sonuç olarak $t\in(0,2)$ durumunda

$$\max\left\{F(\lambda,\mu):0\le\lambda,\mu\le 1\right\}=T_1(t)+2\left[T_2(t)+T_3(t)\right]+4T_4(t)$$

olur.

$H:(0,2)\to\mathbb{R}$, $H(t)=T_1(t)+2\left[T_2(t)+T_3(t)\right]+4T_4(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $T_1(t),T_2(t),T_3(t),T_4(t)$ değerleri $H(t)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$H(t)=\frac{\delta^2t^2}{144(1+3\gamma)(1+2\gamma)^2(1+\gamma)^4}\left[a(\gamma,\delta)t^2+2(1+\gamma)^2b(\gamma,\delta)\right]+\frac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2}$$

olur. Burada

$$a(\gamma,\delta)=9(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)\delta^2-3(1+\gamma)^2(1+2\gamma)(1+3\gamma)\delta+(1+\gamma)^3\left[4(1+\gamma)(1+3\gamma)-9(1+2\gamma)^2\right]$$

$$b(\gamma,\delta)=6(1+2\gamma)(1+3\gamma)\delta+(1+\gamma)\left[27(1+2\gamma)^2-16(1+\gamma)(1+3\gamma)\right]$$

dır.

Şimdi, $(0,2)$ aralığında $H(t)$ fonksiyonunun maksimumluğunu inceleyelim. $H(t)$ fonksiyonunun t ye göre türevi aşağıdaki gibidir:

$$H'(t)=\frac{\delta^2t}{36(1+3\gamma)(1+2\gamma)^2(1+\gamma)^4}\left[a(\gamma,\delta)t^2+(1+\gamma)^2b(\gamma,\delta)\right].$$

$H'(t)$ fonksiyonunun işaretini $a(\gamma,\delta)$ ve $b(\gamma,\delta)$ fonksiyonlarının işaretlerinin farklı durumlarına bağlı olarak incelemek gerekir. Her bir $\delta>0$ ve her $\gamma\in[0,1]$ için $b(\gamma,\delta)>0$ dır.

(i) Eğer $\delta\ge\delta_0$ ise $a(\gamma,\delta)>0$ dır. Burada

$$\delta_0=\delta_0(\gamma)=\frac{(1+\gamma)\left[(1+\gamma)(1+3\gamma)+\sqrt{d}\right]}{6(1+2\gamma)(1+3\gamma)},$$

$$d=(1+\gamma)(1+3\gamma)\left[36(1+2\gamma)^2-15(1+\gamma)(1+3\gamma)\right]>0$$

dır. Böylece, eğer $\delta\ge\delta_0$ ise $H'(t)>0$ dır; yani, $H(t)$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Bu nedenle $\delta\ge\delta_0$ için

$$\max\left\{H(t):t\in(0,2)\right\}=H(2-)=T_4(2)=\frac{\delta^2}{2(1+\gamma)^4(1+3\gamma)}\left[2\delta^2(1+3\gamma)+(1+\gamma)^3\right]$$

olur.

(ii) Eğer $\delta < \delta_0$ ise $a(\gamma,\delta) < 0$ dır. Bu durumda $t_0 = (1+\gamma)\sqrt{\dfrac{b(\gamma,\delta)}{-a(\gamma,\delta)}}$, $H(t)$ fonksiyonunun bir kritik noktasıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki $t_0 \in (0,2)$ dir. $H''(t_0) = \dfrac{-\delta^2 b(\gamma,\delta)}{18(1+\gamma)^2(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)} < 0$ olduğu için t_0 noktası $H(t)$ fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır. Dolayısıyla,

$$\max\{H(t): t \in (0,2)\} = H(t_0) = \frac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2} - \frac{\delta^2 b(\gamma,\delta)}{144(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)a(\gamma,\delta)}$$

olur.

Her $\delta > 0$, $\gamma \in [0,1]$ için $H(0+) = \dfrac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2} < \dfrac{\delta^2}{2(1+\gamma)(1+3\gamma)}$ ve $\dfrac{4\delta^2}{9(1+2\gamma)^2} < H(t_0)$ olduğu için

$$\max\{H(0+), H(t_0), H(2-)\} = \max\{H(2-), H(t_0)\} \tag{4.19}$$

dır.

3. Son olarak, $t = 2$ olsun. Bu durumda $F(\lambda,\mu)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi sabittir:

$$F(\lambda,\mu) = T_4(2) = H(2-). \tag{4.20}$$

Böylece, (4.18), (4.19) ve (4.20) den Teorem 4.1 in ispatı tamamlanır.

Bu kısımda, Teorem 4.1 deki τ ve γ parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 4.2: $f \in \Sigma(1,\gamma)$ olsun. Bu durumda

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \le \begin{cases} \max\{H(2-), H(t_0)\}, & \delta_0 \in (0,1] \\ H(2-), & \delta_0 \in (1,+\infty) \end{cases}$$

dır. Burada

$$\delta_0 = \delta_0(\gamma) = \frac{(1+\gamma)\left[(1+\gamma)(1+3\gamma) + \sqrt{d}\,\right]}{6(1+2\gamma)(1+3\gamma)},$$

$$d = (1+\gamma)(1+3\gamma)\left[36(1+2\gamma)^2 - 15(1+\gamma)(1+3\gamma)\right],$$

$$H(2-) = \frac{1}{2(1+\gamma)^4(1+3\gamma)}\left[2(1+3\gamma)+(1+\gamma)^3\right],$$

$$H(t_0) = \frac{4}{9(1+2\gamma)^2} - \frac{b(\gamma,1)}{144(1+2\gamma)^2(1+3\gamma)a(\gamma,1)},\ t_0 = (1+\gamma)\sqrt{\frac{b(\gamma,1)}{-a(\gamma,1)}},$$

$$a(\gamma,1) = 9(1+2\gamma)^2(1+3\gamma) - 3(1+\gamma)^2(1+2\gamma)(1+3\gamma)$$
$$+(1+\gamma)^3\left[4(1+\gamma)(1+3\gamma) - 9(1+2\gamma)^2\right],$$

$$b(\gamma,1) = 6(1+2\gamma)(1+3\gamma) + (1+\gamma)\left[27(1+2\gamma)^2 - 16(1+\gamma)(1+3\gamma)\right],$$

dır.

Sonuç 4.3: $f \in \Sigma(\tau,1)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \max\{H(2-), H(t_0)\}, & \delta \in (0,\delta_0) \\ H(2-), & \delta \in [\delta_0, +\infty) \end{cases}$$

dır. Burada

$$\delta_0 = \delta_0(1) = \frac{2+\sqrt{102}}{9},$$

$$H(2-) = \frac{\delta^2(\delta^2+1)}{16},$$

$$H(t_0) = \frac{4\delta^2}{81} - \frac{\delta^2 b(1,\delta)}{5184a(1,\delta)},\ t_0 = 2\sqrt{\frac{b(1,\delta)}{-a(1,\delta)}},$$

$$a(1,\delta) = 324\delta^2 - 144\delta - 392,$$

$$b(1,\delta) = 72\delta + 115,\ \delta = |\tau|,$$

dır.

Sonuç 4.4: $f \in \Sigma(\tau,0)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \le \begin{cases} \max\{H(2-), H(t_0)\}, & \delta \in \left(0, \frac{1+\sqrt{11}}{6}\right) \\ H(2-), & \delta \in \left[\frac{1+\sqrt{11}}{6}, +\infty\right) \end{cases}$$

dır. Burada

$$H(2-)=\frac{\delta^2\left(2\delta^2+1\right)}{2},$$

$$H(t_0)=\frac{4\delta^2}{9}-\frac{\delta^2 b(0,\delta)}{144a(0,\delta)},\ \ t_0=\sqrt{\frac{b(0,\delta)}{-a(0,\delta)}},$$

$$a(0,\delta)=9\delta^2-3\delta-5$$

$$b(0,\delta)=6\delta+11,\ \ \delta=|\tau|,$$

dır.

Sonuç 4.5: $f\in\Sigma(1,1)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{1}{8}$$

dır.

Sonuç 4.6: $f\in\Sigma(1,0)$ olsun. Bu durumda

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq\frac{3}{2}$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\Sigma(\tau,\gamma)$ ait fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı ele alınmış ve bu determinant için üst sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca bu sınıftaki parametrelerin özel durumlarından oluşan bi-ünivalent fonksiyonların özel alt sınıfları için üst sınırlar verilmiştir.

Bu çalışmadan yola çıkarak araştırmacılar, bi-ünivalent fonksiyonlar teorisinde ele alınan diğer alt sınıflara ait fonksiyonlar için $H_2(1)$ ve $H_3(1)$ gibi Hankel determinantlarının üst sınırlarını bulabilirler.

KAYNAKLAR

[1] Altınkaya Ş. and Yalçın S. (2016). Second Hankel Determinant for Bi-starlike Functions of Order β. Le Matematiche, Vol. LXXI, Fasc. I, 115-125.

[2] Bieberbach, L., (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Pottenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math. Kl. pp. 940-955.

[3] Brannan, D. A. and Clunie, J. G. (Eds.), (1980). Aspects of Contemporary Complex Analysis. (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), Academic Press, New York and London.

[4] Brannan, D. A. and Taha, T. S., (1986). On Some Classes of Bi-Univalent Functions. in: S.M. Mazhar, A. Hamoui, N.S. Faour (Eds.), Math. Anal. and Appl., Kuwait; February 18-21, 1985, in: KFAS Proceedings Series, vol. 3, Pergamon Press, Elsevier Science Limited, Oxford, 1988, pp. 53.60. see also Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 31(2), 70-77.

[5] Budak L., (2016). Hankel Determinantı Kullanılarak Ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizliği. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[6] Calivetti, D. and Reichel, L., (1997). Factorizations of Cauchy Matrices. Journal of Compution and Applied Mathematics, 86, 103-123.

[7] Çağlar M., Deniz E., and Srivastava H. M., (2017). Second Hankel Determinant for Certain Subclasses of Bi-Univalent Functions. Turk. J. Math., 41, 694-706.

[8] Çağlar M., Erdağı E. Y. and Deniz E., (2017). Upper Bound of Second Hankel Determinant for A Subclass of Bi-univalent Functions. AIP Conference Proceedings 1833, 020009.

[9] Deniz E., Çağlar M. and Orhan H., (2015). Second Hankel Determinant for Bi-starlike and Bi-convex Functions of Order β. Appl. Math. Compt., 271, 301-307.

[10] Duren, P. L., (1983). Univalent Functions. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 259, Springer, New York.

[11] Frasin B. A., Vijaya K. and Kasthuri M., (2016). Second Hankel Determinant for A Certain Subclass of Analytic and Bi-univalent Functions. TWMS J. Pure Appl. Math., 7(2), 185-199.

[12] Grenander, U. and Szegö G., (1958). Toeplitz Forms and Their Applications. Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles.

[13] Goodman, A. W., (1983). Univalent Functions-I. Mariner Publishing Company., s-245, Tapma, Florida.

[14] Goodman, A. W., (1983). Univalent Functions-II. Mariner Publishing Company., s-311, Tapma, Florida.

[15] Iohvidov, I. S., (1982). Hankel and Toeplitz Matrices and Forms. Birk Hauser, Boston.

[16] Janteng, A., Halim SA. and Darus M., (2007). Hankel Determinant for Starlike and Convex Functions. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, No. 13, 619-625.

[17] Kedzierawski, A. W., (1988). Some Remarks on Bi-univalent Functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 39, 77-81.

[18] Keogh, F.R. and Merkes, E. P., (1969). A Coefficient Inequality for Certain Classes of Analytic Functions. Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8-12.

[19] Koebe, P., (1907). Über die Uniformisierung Beliebeger Analytischer Kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen 191-210.

[20] Lewin, M., (1967). On A Coefficient Problem for Bi-univalent Functions. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 63-68.

[21] Libera, R. J. and Zlotkiewicz, E. J., (1983). Coefficient Bounds for The Inverse of A Function with Derivative in P. Proc. Amer. Math. Soc. 87(2). 251- 257.

[22] Loewner, C., (1917). Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises |z|<1, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, 69, 89-106.

[23] Netanyahu, E., (1969). The Minimal Distance of the Image Boundary From The Origin and The Second Coefficient of a Univalent Function in |z|<1. Arch. Rational Mech. Anal., 32, 100-112.

[24] Noor, K.I., (1983). Hankel Determinant Problem for The Class of Functions with Bounded Boundary Rotation. Rev. Roum. Math. Pures Et Appl., 28(8) 731-739.

[25] Orhan H., Magesh N. and Yamini J. (2016). Bounds for The Second Hankel Determinant of Certain Bi-univalent Functions. Turk. J. Math., 40, 679-687.

[26] Pommerenke, Ch., (1966). On the Coefficients and Hankel Determinants of Univalent Functions. J. London Math. Soc., 41, 111- 22.

[27] Pommerenke, Ch., (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Rupercht, Göttingen.

[28] Ponnusamy, S. and Silverman, H., (2006). Complex Variables With Applications. Birkhäuser. Boston.

[29] Tan D.-L., (1984). Coefficient Estimates for Bi-univalent Functions. Chinese Ann. Math. Ser. A 5, 559‑568.

[30] Zill, D. G. and Shanahan, P. D., (2013). Complex Analysis With Applications. Jones and Bartlett Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eren Yavuz ERDAĞI

Doğum Yeri ve Tarihi : Arpaçay/1978

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : eryaer2011@hotmail.com

Eğitim Durumu:

Lise : Kars Alpaslan Lisesi (1996)

Lisans: Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: Kars Cumhuriyet Lisesi (2003-2005),
Kars Alpaslan Lisesi(2005-2006),
Kars Hüsnü M. Özyeğin Anadolu Lisesi (2007-…)

Yayınları: Çağlar M., Erdağı E. Y. and Deniz E., (2017). Upper Bound of Second Hankel Determinant for A Subclass of Bi-univalent Functions. AIP Conference Proceedings 1833, 020009.