T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS POTANSİYELLİ VE GRADYENT TERİMLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
VİLDAN ERUÇAN BAŞARAN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN-2018
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS POTANSİYELLİ VE GRADYENT TERİMLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
VİLDAN ERUÇAN BAŞARAN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

HAZİRAN-2018
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi **Vildan Eruçan Başaran'ın Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında **yüksek lisans tezi olarak** hazırladığı **"Kompleks potansiyelli ve gradiyent terimli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi"** adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından **Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği** uyarınca değerlendirilerek **oy birliği** ile **kabul** edilmiştir.

28/06/2018

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Fatma TOYOĞLU	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Vildan ERUÇAN BAŞARAN

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

KOMPLEKS POTANSIYELLI VE GRADYENT TERIMLI SCHRÖDINGER DENKLEMI IÇIN OPTIMAL KONTROL PROBLEMI

Vildan ERUÇAN BAŞARAN
Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Bu tezde kompleks potansiyelli ve gradyent terimli lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi incelendi. Bu tezin 2.1. kısmında öncelikle kompleks potansiyelli ve gradyent terimli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problem konuldu. 2.2. kısmında Galerkin yöntemi kullanılarak birinci çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı. Bu tezin 3.1.1. kısmında incelediğimiz problemin çözümünün varlığını ve tekliğini gösteren teorem ispatlandı. 3.1.2. kısmında incelediğimiz problemin en az bir çözümünün varlığı ispatlandı. 3.2.1. kısmında fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ispatlandı ve fonksiyonelin gradyenti için formüle ulaşıldı. Son olarak bu tezin 3.2.2. kısmında incelediğimiz problemin çözümü için gerek şart elde edildi. Tezin tartışma ve sonuç kısmında ise söz konusu problemin daha önce ele alınan problemlerden farkı ortaya konulmuş ve ulaşılan sonuçların daha önce incelenen problemlerin sonuçlarıyla aynı olmadığı da belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, optimal kontrol problemi, Galerkin yöntemi, gradyent terim.

2018, 58 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE COMPLEX POTENTIAL SCHRODINGER EQUATION WITH GRADIENT

Vildan ERUÇAN BAŞARAN
Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematic
Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

In this thesis, the optimal control problem was investigated for the complex potential linear Schrödinger equation with gradient. In section 2.1. of this thesis, firstly the optimal control problem was introduced for the complex potential Schrödinger equation with gradient. In section 2.2., the existence and uniqueness of the solution of the first type of initial boundary value problem were proved by using the Galerkin method. In section 3.1.1, the theorem shown the existence and uniqueness of the solution of the problem examined was proved. In section 3.1.2, the existence of at least one solution of the problem examined was proved. In section 3.2.1, the differentiability of the function was proved and a formula for the function's gradient was reached. Finally, in section 3.2.2. of this study, necessary condition for the solution of the examined problem was obtained. In the discussion and conclusion chapters of the thesis, the differences between the problem in question and the previously discussed problems were revealed and it was also stated that the results obtained were not the same as the results of the problems examined earlier.

Key Words: Schrödinger equation, Optimal control problem, Galerkin method, Gradient

2018, 58 Pages

ÖNSÖZ

İnsanlık tarihi kadar eski olan, tarihin her çağında insanların kültürel, sosyal, ekonomik, bilimsel ve yaşamsal gelişimine en büyük katkıyı vermiş ve tüm ilimlerin ana kaynağı olan matematik, günümüzde de tüm hızıyla insanlığın ve bilimin hizmetindedir.

Matematik ilminin gelişiminde dahi olan birçok ilim adamlarımız tarihi konjonktürde yerlerini almış, adından söz ettirmiş ve tarihte hak ettiği değeri bulmuşlardır. Günümüzde âcizane zatıâlim de bu değerli bilim adamlarımızın eserlerinden faydalanarak yüksek lisans eğitimimi tamamlamak amacıyla Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalına müracaat ettiğimde kapılarını sonuna kadar açmışlar, bana bu imkânı ve fırsatı bahşetmişlerdir.

Tez çalışmalarımı, yukarıda andığım üniversitenin değerli bilim adamı ve hocaları tarafından fevkalade katkılarıyla tamamlamış bulunmaktayım. Tez çalışmalarımda büyük katkıları bulunan, araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı ve önerilerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Başkanım Prof. Dr. Gabil YAGUB ile bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen, değerli zamanını benimle paylaşan sayın hocam Doc. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocalarıma ve üniversitenin diğer değerli bilim adamlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Bu zorlu süreçte, aynı zamanda bir matematik öğretmeni olan ve benim de matematik öğretmeni olmamda büyük katkıları olan başta sevgili babam ve beni bugünlere gelmemde anlatılmaz zorluklara katlanan ahlaki ve edep timsali anneme, tez çalışma sürecinde yakınımda olan ve sabırla destekleyen eşime sonsuz teşekkürler ediyorum.

Kars-2018 **Vildan ERUÇAN BAŞARAN**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$l > 0$	Verilen sayı
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$x \in [0, l]$	Uzay değişkeni
$t \in [0, T]$	Zaman değişkeni
$\Omega_t = (0, l) \times (0, t), \; \Omega = \Omega_T$	Verilen bölge
$\tilde{\Omega}_t = (0, l) \times (t, T)$	Verilen bölge

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar $[8, 25, 37]$. Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri daha önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır $[2-10, 12-20, 28, 31-34, 37-42, 44-46]$.Söylememiz gerekir ki, $[8, 37]$ çalışmalarında, yani A.G. Butkovski, Yu.İ. Samoilenko, M.A. Vorontsov ve V.İ. Şmalgauzen' in çalışmalarında kuantum mekanik süreçlerinin optimal kontrol teorisinin teknik temelleri atılmış ve ortaya çıkan problemler matematiğin klasik yöntemleri ile çözülmeye çalışılmıştır. Ancak yukarıda telaffuz ettiğimiz çalışmalardan A.D. İskenderov ve G.Yagub' un 1980-90 lı yıllardaki çalışmalarını önemle dikkate almamız gerekir ki, bu çalışmalarda A.D İskenderov ve G. Yagub tarafından hem lineer hem lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisinin matematiksel temelleri ciddi bir biçimde atılmış ve ortaya çıkan problemlerin çağdaş çözüm yöntemleri oluşturulmuştur. Sonraki yıllarda A.D İskenderov, G. Yagub ve onların öğrencileri tarafından kuantum mekanik süreçler için optimal kontrol teorisi ve bu teorinin problemlerinin çözüm yöntemleri ciddi bir biçimde geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında kompleks potansiyelli ve gradyent terimli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi incelenmiştir. Söylemek gerekir ki, sanal katsayılı gradyent içeren lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk kez $[1, 33]$ çalışmalarında ele alınmıştır. Sanal katsayılı gradyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ise ilk kez $[19, 20, 46]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu tezde ele alınan problem konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi bir biçimde farklılık göstermektedir. Bir önceki çalışmalarda kontroller sınıfı ya uzay değişkenine bağımlı ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfındandır ya da zaman değişkenine bağımlı olup kendisi ve türevi karesel integrallenebilir fonksiyonlar sınıfındandır. Bu tezde ise ele alınan problemde olası kontroller kompleks potansiyelin sanal ve reel kısımları olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfından seçilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk önce ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla kompleks katsayılı gradyent içeren lineer Schrödinger denklemi için I. çeşit sınır değer probleminin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği Galerkin yöntemiyle ispatlanmıştır. Bu teoremden yararlanarak söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiş ve optimal kontrollerin varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Daha sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve onun gradyenti için formül elde edilmiştir. Gradyent için olan formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart elde edilmiştir.

1.2. Kuramsal Temeller

Burada tüm çalışmamızda yararlanacağımız teorem ve tanımları inceleyeceğiz.

Tanım 1.2.1. $L_2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesque uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir.

Tanım 1.2.2. $L_2(\Omega)$,Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega=(0,l)\times(0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesque uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi ,\phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi ,\psi \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.3. $L_\infty(0,l)$, Banach uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir,sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in(0,l)\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.2.4. $L_\infty(\Omega)$, Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in(\Omega)}|\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 1.2.5. $C^0([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları [0,T] aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_B$$

Burada $B \equiv R$ alınırsa $C[0,T] \equiv C^0([0,T],R)$ elde edilir.

Tanım 1.2.6. $L_2([0,T],B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left[\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Tanım 1.2.7. $W_2^1(0,l)$,Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\overline{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$
$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^1(0,l)}}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 1.2.8. $W_2^2(0,l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\overline{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{d^2\overline{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$
$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^2(0,l)}}$$
$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$$

Tanım 1.2.9. $W_2^{1,0}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$
$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.10. $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda Ω nın sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

Tanım 1.2.11. $W_2^{0,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}$$

Tanım 1.2.12. $W_2^{2,1}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt$$

$$+ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}$$

ve

$$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$$

dır.

Tanım 1.2.13. Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c\in B^*$, $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle=\langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u\in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 1.2.14. $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u\in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\}\in U$ dizisi için $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k)\geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 1.2.15. Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma)=\{v:v\in B,\|v-u\|<\gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B\to 0}\frac{o(h,u)}{\|h\|_B}=0$$

olacak şekilde $\Delta J(u)=J(u+h)-J(u)=\langle J'(u),h\rangle_B+o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u)\in B^*$ elemanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Freschet anlamında diferansiyellenebilirdir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Teorem 1.2.16. ($[36]$): Diyelim ki U , B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. Mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_*=\left\{u\in U: J(u)=J_*=\inf\limits_u J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^*\in U_*$ için $\left\langle J'(u^*),u-u^*\right\rangle\geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 1.2.17. (Weierstrass teoremi, $[36]$): U , B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 1.2.18. (Goebel teoremi, $[11]$): Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0, \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^\beta$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

Lemma 1.2.19. (Gronwall lemması, $[36]$): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq K \ \exp(L(t - t_0))$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir.

Lemma 1.2.20. (Cauch-Bunjakovskii eşitsizliği, $[23,24]$): $u,v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} u\bar{v}\,dx\,d\tau \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2\,dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2\,dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması

$$J_\alpha(v) = \left\| \psi(.,T) - y \right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha \left\| v - \omega \right\|^2_H \qquad (2.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(x) : v = (v_0, v_1), v_j \in L_2(0,l), j = 0,1, \left| v_j(x) \right| \le b_j, j = 0,1, \overset{0}{\forall} x \in (0,l) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \qquad (2.1.2)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), x \in (0,l) \qquad (2.1.3)$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \ , \forall t \in [0,T] \qquad (2.1.4)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $i = \sqrt{-1}$ olup; $l > 0$, $b_0 > 0,$ $\alpha \ge 0,$ $a_0 > 0$, $T > 0$, verilen sayılardır. $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\Omega_t = (0,l) \times (0,t),$ $\Omega = \Omega_T$; $a(x), a_1(x)$ reel değerli, ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır ve

$$0 \le a(x) \le \mu_0, \quad \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \quad \mu_0 = sabit > 0, \qquad (2.1.5)$$

$$\left|a_1(x)\right| \le \mu_1, \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right| \le \mu_2, \forall x \in \overset{0}{(0,l)}, \mu_1, \mu_2 = sabit > 0, \tag{2.1.6}$$

şartlarını sağlar. $\varphi(x), f(x,t), y(x)$ ise kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlardır ve

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \; f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{2.1.7}$$

$$y \in L_2(0,l) \tag{2.1.8}$$

şartlarını sağlar. $\omega \in H$ verilen bir elemandır. $H = L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ dir.

Her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) şartlarından $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (2.1.2) lineer Schrödinger denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemdir. Burada (2.1.1) fonksiyoneli amaç fonksiyoneli olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.1: Her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan ve (2.1.2)-(2.1.4) şartlarını $\forall \overset{0}{(x,t)} \in \Omega$ için sağlayan $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonudur.

Bu tanımı sağlayan çözüme (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin hemen hemen çözümü diyeceğiz. Bu çözümler sınıfında kullanılan amaç fonksiyonelinin birinci teriminin anlama sahip olduğu, başka bir deyişle $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T], L_2(0,l))$ uzayına gömüldüğünden fonksiyonelin birinci teriminin sonlu olduğu açıktır.

Söylemek gerekir ki, lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri farklı biçimlerde önceden $[1,12,13,16,17,33,39,44]$ vs. çalışmalarında geniş bir biçimde incelenmiştir. Ancak sanal katsayılı gradyent içeren lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri çok az incelenmiştir

$[1,29,33,43]$. Söz konusu $[1,33]$ çalışmalarında sanal katsayılı gradyent içeren bir ve iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri denklemin katsayılarının karesel integrallenebilir fonksiyonlar olması halinde ele alınmış ve Galerkin yönteminin yardımıyla varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Sanal katsayılı gradyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ise $[29,43]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda denklemin katsayıları uzay veya zaman değişkenine bağımlı olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlardır ve denklemin lineer olmayan kısmının katsayısı da sanal sayıdır. Söylemek gerekir ki, söz konusu problemlerden farklı olarak bu çalışmada gradyent içeren Schrödinger denkleminde kompleks potansiyel olduğunda söz konusu başlangıç sınır değer problemi lineer Schrödinger denklemi halinde az incelendiğinden her bir $v \in V$ için (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin incelenmesi her açıdan bilimsel önem taşımaktadır.

2.2 Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümü İçin Galerkin Yöntemi

Başlangıç sınır değer problemimizi inceleyelim:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \qquad (2.2.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),x\in(0,l), \qquad (2.2.2)$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,t\in(0,T). \qquad (2.2.3)$$

Burada $i=\sqrt{-1}$ olup; $l>0$, $T>0$, $a_0>0$ verilen sayılardır. $x\in[0,l]$, $t\in[0,T]$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$; $a(x),a_1(x)$ ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlardır ve (2.1.5), (2.1.6) şartlarını sağlar; $\varphi(x)$, $f(x,t)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlardır ve (2.1.7) şartını sağlar. $v_0(x),v_1(x)$ fonksiyonları da ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlardır.

Yukarıda bahsettiğimiz üzere her $v\in V$ için (2.2.1)-(2.2.3) şartlarından $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (2.2.1) denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olup (2.2.1)-(2.2.3) şartlarını $\forall(x,t)\in\overset{0}{\Omega}$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Şimdi bahsettiğimiz problemin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlayalım.

Teorem 2.2.1 Farz edelim ki $a(x), a_1(x), \varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.7) şartlarını sağlasın. O halde her $v\in V$ için (2.2.1)-(2.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \tag{2.2.4}$$

$c_0>0$ sabit sayıdır.

İspat. İspat için Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu sebeple $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak aşağıdaki

$$LX=-a_0\frac{d^2X}{dx^2}+a(x)X=\lambda X,\; X(0)=X(l)=0 \tag{2.2.5}$$

öz değer probleminin $\lambda=\lambda_k, k=1,2,...$ öz değerlerine karşılık gelen $X=u_k(x), k=1,2,...$ öz fonksiyonlarını alalım.[23] çalışmasından bilindiği üzere L operatörünün katsayısı bulunan $a(x)$ fonksiyonu $a(x)\ge 0$ olup $\lambda_k, k=1,2,...$ öz değerleri gerçel ve pozitiftirler.Ayrıca $u_k=u_k(x)$ $k=1,2,...$ öz fonksiyonları da gerçeldir ve $L_2(0,l), \overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l), \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzaylarında ortogonallık koşullarını yerine getirirler $[23]$. Diyelim ki $u_k = u_k(x)$ $k = 1,2,...$ öz fonksiyonları $L_2(0,l)$'de ortonormal olsun ve aşağıdaki

$$\left(u_k, u_m\right)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, k, m = 1,2,... \tag{2.2.6}$$

formülü geçerli olsun. Formülde geçen

$$\delta_k^m = \begin{cases} l, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}, k, m = 1,2,...$$

Kronecker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallık aşağıda verilen gibidir:

$$\left[u_k, u_m\right] = \left(u_k, u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m\right] dx = \lambda_k \delta_k^m, k, m = 1,2,... \tag{2.2.7}$$

$$\left\{u_k, u_m\right\} = \left(u_k, u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \int_0^l Lu_k Lu_m dx = \lambda_k^2 \delta_k^m, k, m = 1,2,... \tag{2.2.8}$$

Bunun dışında diyelim ki $u_k(x), k = 1,2,...$ fonksiyonları aşağıda verilen koşulu da sağlasın:

$$\left\|u_k\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \leq d_k, k = 1,2,... \tag{2.2.9}$$

$d_k > 0$ $k = 1,2,...$ sabit sayılardır.

(2.2.1)-(2.2.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımlarını şu şekilde arayabiliriz:

$$\psi^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(x). \qquad (2.2.10)$$

Yukarıdaki $C_k^N(t)=\left(\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}$ $k=1,...,N$ katsayıları aşağıda verilen Cauchy probleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)} &=\left(L\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}-\left(v_0(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}- \\ &-\left(ia_1(.)\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x},u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(v_1(.)\psi^N,u_k\right)_{L_2(0,l)}+f_k(t),k=1,...,N \end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

$$C_k^N(0)=\left(\varphi,u_k\right)_{L_2(0,l)}=\varphi_k,k=1,...,N \qquad (2.2.12)$$

Burada $f_k(t)=\left(f(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}$ dir.

(2.2.11) denklemler sistemi homojen olmayan, sabit katsayılı lineer olmayan adi diferansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemin sağ tarafındaki $f_k\in W_2^1(0,T),k=1,2,...,N$ fonksiyonları $f_k(t),k=1,2,...$şartını sağlayan fonksiyonlardır. Adi diferansiyel denklemler teorisine göre (2.2.11), (2.2.12) Cauchy probleminin $W_2^1(0,T)$ uzayında en az bir çözümü vardır $[30,36]$.

Şimdi (2.2.11), (2.2.12) Cauchy probleminin N' e bağlı çözümleri için kestirim bulalım.

Lemma 2.2.1. (2.2.11), (2.2.12) Cauchy probleminin N' e bağlı çözümleri için aşağıdaki kestirim doğrudur:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le$$

$$\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \qquad (2.2.13)$$

İspat: (2.2.11) denkleminin k. denklemini $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp, $k=1$ 'den $k=N$ 'e kadar toplar, $[0,t]$ aralığı üzerinden integrallersek aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - L\psi^N\overline{\psi}^N + v_0(x)\left|\psi^N\right|^2 + a_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + iv_1(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} f\overline{\psi}^N dxd\tau, \forall t\in[0,T]$$

Yukarıdaki eşitlikte $u_k(0)=u_k(l)=0, k=1,2,.$ şartlarının yardımıyla sol tarafta yer alan ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygularsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v_0(x)\left|\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + iv_1(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} f\overline{\psi}^N dxd\tau.$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniği

$$\int_{\Omega_t}\left(-i\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N - a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v_0(x)\left|\psi^N\right|^2 - ia_1(x)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\psi^N - iv_1(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} \overline{f}\psi^N dxd\tau$$

dir. Şimdi sol taraftaki ikinci terimine kısmi integrasyon formülü uygulayarak bulduğumuz eşitlikten yine kendisinin yukarıda yazdığımız kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N+\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t} ia_1(x)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N+\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right)dxd\tau+$$

$$+2i\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(f\bar{\psi}^N-\bar{f}\psi^N\right)dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]$$

eşitliğini elde ederiz . En son bulduğumuz eşitlikten de kolayca

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t} a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

eşitliğini yazarız. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$$

terimini ekleyelim. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+2\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau$$

$u_k(0)=u_k(l)=0, k=1,2,...$ şartlarını kullanırsak bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terim sıfıra eşit olur. Böylece aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx - \int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx = \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(f\bar{\psi}^N\right)dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t} v_1(x)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$$

Şimdi Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygulayıp (2.1.6) şartını kullanarak şu eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left(\mu_2 + 2b_1 + 1\right)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (2.2.14)$$

(2.2.10)’u kullanarak aşağıdakini buluruz:

$$\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^N C_k^N(0)u_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k u_k(x) = \varphi^N(x).$$

Şimdi de Parseval özdeşliğini kullanıp aşağıdaki bağıntıyı bulabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^N \left|\varphi_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \left|\varphi_k\right|^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}. \qquad (2.2.15)$$

Bulduğumuz bağıntıyı (2.2.14)’ü de kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \left(\mu_2 + 2b_1 + 1\right)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ \forall t \in [0,T].$$

Şimdi Gronwall lemmasını kullanarak kolayca aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\ \forall t \in [0,T]. \qquad (2.2.16)$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $c_1 > 0$ olup N 'den bağımsızdır.

(2.2.11) sistemini aşağıdaki biçime dönüştürelim:

$$i\left(\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}=\left(a_0\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x},\frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)}+\left(a(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}-$$
$$-\left(v_0(.)\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(a_1(.)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(v_1(.)\psi^N,u_k\right)_{L_2(0,l)}+ \quad (2.2.17)$$
$$+f_k(t),k=1,...,N$$

Bu eşitliğin her iki tarafının t ' ye göre türevini alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$i\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2},u_k\right)_{L_2(0,l)}=\left(a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial t},\frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)}+\left(a(.)\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}-$$
$$-\left(v_0(.)\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(a_1(.)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t\partial x},u_k\right)_{L_2(0,l)}-i\left(v_1(.)\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)} \quad (2.2.18)$$
$$+\frac{df_k(t)}{dt},k=1,...,N$$

Şimdi yukarıdaki eşitliğin k. denklemini $\frac{d\bar{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpalım ve $k=1$'den $k=N$'e kadar topladıktan sonra $[0,t]$ aralığında integralleyelim. Böylece aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}-a_0\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+ia_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+v_0(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\right.$$
$$\left.iv_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniği

$$\int_{\Omega_t}\left(-i\frac{\partial^2\bar{\psi}^N}{\partial t^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}-a_0\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2-ia_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+v_0(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\right.$$

$$\left.-iv_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]$$

dir. Şimdi bu eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım ve bulduğumuz bağıntının her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau$$

terimini ekleyelim. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau+2\int_{\Omega_t}v_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau=\\&\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}v_1(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau\end{aligned}\qquad(2.2.19)$$

$u_k(0)=u_k(l)=0, k=1,2,...$ şartlarını ve (2.2.10) kestirimini kullanarak şu şartları elde edebiliriz:

$$\frac{\partial\psi^N(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial\psi^N(1,t)}{\partial t}=0,\ \ \forall t\in[0,T].\qquad(2.2.20)$$

Yukarıdaki şartlardan yararlanarak (2.2.19) eşitliğinin sol tarafındaki 2. terim sıfıra eşittir. Böylece (2.2.20) ve (2.1.5) şartlarından yararlanarak (2.2.19)'dan aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+(\mu_2+2b_1+1)\int_0^l \left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau,\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.2.21}$$

Öncelikle yukarıdaki bağıntının sağ tarafındaki ilk terimi ele alalım. (2.2.11) eşitliğinin $k.$ denkleminde $t=0$ alıp bulunan denklemi $\frac{d\bar{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarpalım. Daha sonra $k=1$' den $k=N$ 'e kadar toplarsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\int_0^l i\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2 dx = \int_0^l \Big[L\psi^N(x,0) - ia_1(x)\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x} -$$

$$-v_0(x)\psi^N(x,0) + f(x,0)\Big]\left|\frac{\partial\bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t}\right| dx.$$

Yukarıdaki bağıntıdan Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\int_0^l |a_1(x)|\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right| dx +$$

$$+5\int_0^l |v_0(x)|^2\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx + 5\int_0^l \left|f(x,0)\right|^2 dx + 5\int_0^l |v_1(x)|^2\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx.$$

$\psi^N(x,0)=\varphi^N(x)$ eşitliğini ve denklemin katsayıları ile ilgili şartları kullanıp aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\| L\varphi^N \right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\mu_2^2 \left\| \frac{d\varphi^N}{dx} \right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+5b_0^2 \left\| \varphi^N \right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\left\| f(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + 5b_1^2 \left\| \varphi^N \right\|^2_{L_2(0,l)}$$

Bu bağıntıda

$$\left\| L\varphi^N \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2 \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \tag{2.2.22}$$

$$\left\| \frac{d\varphi^N}{dx} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_3 \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \tag{2.2.23}$$

$$\left\| \varphi^N \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\| \varphi \right\|^2_{L_2(0,l)} \tag{2.2.24}$$

$$\left\| f(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_5 \left\| f \right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.2.25}$$

eşitsizliklerinden yararlanarak şu kestirimi yazabiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_6 \left(\left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\| f \right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right). \tag{2.2.26}$$

Burada $c_6 > 0$ sabit sayısı N ’den bağımsızdır. Bu kestirimi (2.2.21) bağıntısında dikkate alıp Gronwall lemmasını kullanırsak, kolayca şu kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_7\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right).\ \forall t\in[0,T]. \qquad (2.2.27)$$

Burada $c_7 > 0$ sabit sayısı N 'den bağımsızdır.

Şimdi $\frac{\partial \psi^N}{\partial x}$ i değerlendirelim. (2.2.11)' nın k. terimini $\lambda_k \bar{C}_k^N(t)$ ile çarparak $k=1$ 'den $k=N$ 'e kadar toplayalım. Daha sonra $[0,t]$ aralığında integrallersek şu eşitliği elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}L\bar{\psi}^N - \left|L\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}L\bar{\psi}^N + v(x)\psi^N L\bar{\psi}^N \right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} fL\bar{\psi}^N dxd\tau, \forall t\in[0,T].$$

L operatörü için olan ifadeden ve (2.2.20) şartlarından yararlanırsak kısmi integrasyonu kullanarak yukarıdaki eşitlikten

$$\int_{\Omega_t}\left(ia_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + ia(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N - \left|L\psi^N\right|^2 \right)dxd\tau +$$
$$+\int_{\Omega_t}\left(ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}L\bar{\psi}^N + v_0(x)\psi^N L\bar{\psi}^N + iv_1(x)\psi^N L\bar{\psi}^N \right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} fL\bar{\psi}^N dxd\tau, \forall t\in[0,T].$$

bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntının kompleks eşleniği

$$\int_{\Omega_t}\left(-ia_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}-ia(x)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N-\left|L\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}\left(-ia_1(x)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}L\psi^N+v_0(x)\overline{\psi}^N L\psi^N-iv_1(x)\overline{\psi}^N L\psi^N\right)dxd\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}\overline{f}L\psi^N dxd\tau,\forall t\in[0,T]$$

dir. Yukarıdaki iki bağıntı taraf tarafa çıkarılırsa şu bağıntıyı yazabiliriz.

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau=$$
$$-2\int_{\Omega_t}a_1(x)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}v_0(x)\operatorname{Im}\left(\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau-$$
$$-\int_{\Omega_t}v_1(x)\operatorname{Re}\left(\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(fL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

$a(x)$ ve $a_1(x)$ için verilen şartları kullanarak üstteki bağıntıdan şu bağıntıyı elde edebiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$
$$+2\mu_2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|L\overline{\psi}^N\right|dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\left|v_0(x)\right|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\left|v_1(x)\right|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau$$
$$+2\int_{\Omega_t}|f|\left|L\psi^N\right|dxd\tau,\forall t\in[0,T].$$

Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini ve $v_0(x),v_1(x)$ fonksiyonları için verdiğimiz şartı kullanıp aşağıdaki bağıntıyı yazarız:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu_2\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + (1+b_1+b_0+\mu_2)\int_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \qquad (2.2.28)$$

$$+(b_0+b_1)\int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \forall t\in[0,T].$$

Şimdi (2.2.15) kestiriminden ve $\psi^N(x,0)=\varphi^N(x)$ eşitliğinden yararlanarak şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right) + c_9\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \qquad (2.2.29)$$

$$+c_{10}\int_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \forall t\in[0,T].$$

Yukarıda yer alan $c_8>0$, $c_9>0$, $c_{10}>0$ sabit sayıları N ’den bağımsızdırlar. Şimdi (2.2.29) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan son terimi ele alalım. (2.2.11) sisteminin k. denklemini $\lambda_k\bar{C}_k^N(t)$ ile çarpalım ve $k=1$’ den $k=N$ ’e kadar toplayalım. Böylece şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$\int_0^l\left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = \int_0^l\Big[ia_1(x)\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x} + i\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t} + v_0(x)\psi^N(x,t) +$$

$$+iv_1(x)\psi^N(x,t) - f(x,t)\Big]L\psi^N(x,t)dx, \forall t\in[0,T].$$

Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanarak şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\mu_2^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+5b_1^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5b_0^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5\left\|f(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}, \forall t\in[0,T].$$

(2.2.25) , (2.2.16) ve (2.2.27) kestirimlerinden yararlanarak kolayca şu bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{11}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) + \\ + c_{12}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}, \forall t\in[0,T]. \tag{2.2.30}$$

Burada $c_{11} > 0$ ve $c_{12} > 0$ sabit sayıları N ’den bağımsızdırlar. Son bağıntıdan ve (2.1.2.29) kestiriminden de yararlanarak şu eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) + c_{14}\int_0^t \left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Yukarıdaki bağıntıda Gronwall lemmasını uygularsak şu eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.2.31}$$

Burada $c_{15} > 0$ sabit sayısı N ’den bağımsızdır. Son eşitsizliği kullanarak (2.2.30) dan şu kestirimi elde edebiliriz:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{16}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.2.32}$$

Burada $c_{16} > 0$ sabit sayısı N ’den bağımsızdır.

L operatörü için olan formülü kullanarak şu bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} = \left\| -a_0 \frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2} + a(.)\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \geq$$

$$\geq a_0 \left\| \frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)} - \mu_1 \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Böylece

$$\left\| \frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{a_0}\left\| L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} + \frac{\mu_1}{a_0}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}$$

bağıntısını yazabiliriz. Burada (2.2.16) ve (2.2.32) kestirimlerinden yararlanarak şu eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{17}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \tag{2.2.33}$$

Burada $c_{17} > 0$ sabit sayısı N 'den bağımsızdır.

Daha önce verilen (2.2.16), (2.2.27), (2.2.31) ve (2.2.33) kestirimlerini taraf tarafa toplayalım ve $[0,T]$ aralığında integralleyelim. Böylece şu kestirimi yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_{18}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{2.2.34}$$

Burada $c_{18} > 0$ sabit sayısı N 'den bağımsızdır.

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left| C_k^N(t)\right|^2 + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left(\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right)^2 = \left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}$$

Yukarıdaki bağıntı ve (2.2.34) eşitsizliğinden yararlanarak lemmanın hükmünün geçerliliği sonucuna ulaşırız. Lemma 2.2.1 ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim.

$$l_{N,k}(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}, k, N = 1, 2, ... \tag{2.2.35}$$

Biçiminde $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden ve $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının ortonormallik şartından yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} = \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Şimdi

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{19} \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)} \tag{2.2.36}$$

bağıntısından ve (2.2.13) eşitsizliğinden yararlanarak şu eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{20,} \forall t \in [0,T], k, N = 1, 2, ... \tag{2.2.37}$$

Bu eşitsizlikler $l_{N,k}(t), k, N = 1, 2, ...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Bu fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında belirlenmiş k ve $\forall N \ge k$ için eş sürekli fonksiyonlar ailesi olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten (2.2.11) kestiriminin k. denklemini $(t, t+\Delta t)$ aralığında integralleyerek kısmi integrasyon uygularsak bulduğumuz sonuçtan kolayca şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\| \frac{du_k}{dx} \right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\mu_2 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\| u_k \right\|_{L_2(0,l)} + \mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\| u_k \right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+b_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\| u_k \right\|_{L_2(0,l)} + b_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(0,l)} d\tau + \tag{2.2.38}$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left\| f(.,\tau) \right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\| u_k \right\|_{L_2(0,l)}, \forall t \in [0,T].$$

Şimdi (2.2.9) ve (2.2.38)' den şu bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_{21} d_k \left|\Delta t\right|^{1/2}, \ \ \forall t \in [0,T], k, N = 1,2,... \tag{2.2.39}$$

Burada $c_{21} > 0$ sabit sayısı N, k ve Δt 'den bağımsızdır. (2.2.39)'dan tespit edilmiş k ve $\forall N \ge k$ için $\{l_{N,k}(t)\}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında eş sürekli olduğu sonucuna ulaşılır. $\{l_{N,k}(t)\}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli (aynı dereceden sürekli) olduğu ispatlanmış oldu. Bu durumda köşegen süreci kullanarak öyle $N_m, m = 1,2,...$ alt dizisi bulabiliriz ki bulduğumuz alt dizi üzerinden $\{l_{N_m,k}(t)\}$ dizisi $[0,T]$ aralığında her bir $k = 1,2,...$ için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarından yararlanarak şu fonksiyonu tanımlayalım:

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) u_k(x) \tag{2.2.40}$$

Şimdi $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisinin yukarıda tanımladığımız $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsaklığını gösterelim. $\forall g \in L_2(0,l)$ ve $\forall t \in [0,T]$ için $[10]$ çalışmasındaki yöntemden yararlanarak $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\left|\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g\right)_{L_2(0,l)}\right|<\varepsilon \tag{2.2.41}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikten gereken hükmü kolayca bulabiliriz. (2.2.13) eşitsizliğine göre yukarıda tanımladığımız $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinden zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. $\psi(x,t)$ fonksiyonuna seçtiğimiz alt diziyi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ile gösterelim. Böylece şu limit bağıntılarını yazabiliriz: $m\to\infty$ için

$$\psi^{N_m}\to\psi \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{2.2.42}$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial x}\to\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{2.2.43}$$

$$\frac{\partial^2\psi^{N_m}}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{2.2.44}$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t}\to\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{2.2.45}$$

yazabiliriz. Bu bağıntılardan yararlanarak daha önce tanımladığımız $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.1) ve (2.2.3) probleminin çözümü olduğunu ispatlayabiliriz. En başta bu fonksiyonun (2.2.1) denklemini $\forall(x,t)\in\overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim. Bunun için de (2.2.11) sisteminin k. denklemini $[0,T]$ aralığında sürekli olan $\forall\bar{\eta}_k(t)$ fonksiyonuyla çarpalım. Daha sonra $k=1$'den $k=N'\le N$' e kadar toplayalım ve $[0,T]$ aralığında integral alalım. Böylece şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Bigg[\, & i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}-a(x)\psi^N+ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}+ \\ & +v_0(x)\psi^N+iv_1(x)\psi^N-f(x,t)\Bigg]\bar{\eta}^N(x,t)\,dxdt=0,\end{aligned} \tag{2.2.46}$$

$$\forall \overline{\eta}^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\eta_k(t)u_k(x). \tag{2.2.47}$$

Şimdi (2.2.42)-(2.2.45) limit bağıntılarından yararlanarak (2.2.46) ifadesinde $N=N_m$ alarak $m\to\infty$ için limit uygularsak şu eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi-f(x,t)\right]\times \\ \times\overline{\eta}^N(x,t)\,dxdt=0.\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

(2.2.47) şeklindeki fonksiyonların $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğun olduğunu bildiğimizden $N'\to\infty$ için yukarıdaki (2.2.48) eşitliğinde limit uygularsak $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi-f(x,t)\right]\overline{\eta}^N(x,t)\,dxdt=0$$

eşitliğini yazarız. Böylelikle $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.1) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağladığını söyleyebiliriz.

$\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.2) şartını sağladığını gösterelim. $[7]$ çalışmasına göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0,\ \ \forall t\in[0,T]$$

limit bağıntısını elde ederiz. $t=0$ alarak $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\psi(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0$$

yazarız. Bu bağıntıyı $\psi^{N_m}(x,0)=\varphi_1^{N_m}(x),\ x\in(0,l)$ şartını dikkate alıp

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|\psi(.,0)-\psi^{N_m}(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\varphi_1\right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinde limite geçersek

$$\left\|\psi(.,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0$$

eşitliğini yazarız. Bu bağıntıdan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\overset{0}{\forall}x\in(0,l)$ için (2.2.2) başlangıç şartını sağladığını söyleyebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.31) şartını sağladığını gösterelim.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,l],L_2(0,T))$ uzayına kompakt gömüldüğünden ($[23,26]$)

$m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(s,.)-\psi(s,.)-\right\|_{L_2(0,T)}\to 0,\quad s=0,1$$

olur. Bu limit bağıntılarını ve $\psi^{N_m}(s,t)=0, s=0,1, t\in(0,T)$ şartlarını göz önünde bulundurarak

$$\left\|\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\le\left\|\psi(s,.)-\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|\psi^{N_m}(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}$$

bağıntısında $m\to\infty$ için limit uygularsak

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad \forall t\in[0,T]$$

sınır şartlarını yazabiliriz. Böylelikle $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (2.2.1)-(2.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ sınıfından çözümü olduğu ispatlandı. (2.2.13) eşitsizliğinde $N=N_m$ alarak $m\to\infty$ için limit uygularsak ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu göz önünde bulundurarak (2.2.4) kestiriminin doğruluğunu ispatlarız. Bu kestirimden de kolayca diyebiliriz ki (2.2.1)-(2.2.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü tektir. Teorem 2.2.1 ispatlanmıştır.

3. BULGULAR

3.1. Kompleks Potansiyelli ve Gradyent Terimli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Burada kompleks potansiyelli ve gradyent terimli Schrödinger denklemi için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin varlığını ve tekliğini ele alacağız. Öncelikle α 'nın sıfırdan büyük olması durumunda bu optimal kontrol probleminin tek bir çözümünün olduğunu ispatlayacağız. Daha sonra bu problemin, α 'nın sıfıra eşit ve sıfırdan büyük olması durumunda en az bir çözümünün varlığını göstereceğiz.

3.1.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Burada α 'nın sıfırdan büyük olması durumunda optimal kontrol probleminin tek bir çözümü olduğunu ispatlayalım.

Teorem 3.1.1.1 Farz edelim ki Teorem 2.2.1. in şartları sağlansın. $y \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyon olmak üzere $H = L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$, $\alpha > 0$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözümü mevcuttur.

İspat: İlk olarak

$$J_0(v) = \left\| \psi(.,T) - y \right\|_{L_2(0,l)}^2 \tag{3.1.1.1}$$

fonksiyonelinin V kümesinde sürekliliğini ispatlayalım ve diyelim ki $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde $\Delta v \in L_2(0,l)$ elemanı $\forall v \in V$ ye verilen artış olsun. Böylelikle $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunun artışı $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ dir. Buradaki $\psi(x,t;v)$ ve $\psi(x,t;v+\Delta v)$ fonksiyonları (2.1.2)-(2.1.4) şartlarının sırasıyla $v \in V$ ve $v+\Delta v \in V$ ye karşılık gelen çözümleridir ve bu şartlardan açıkça diyebiliriz ki $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonu aşağıda verilen başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$
\begin{aligned}
& i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi + \left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)\psi + \\
& + i\left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)\psi = -i\Delta v_1(x)\psi(x,t;v) - \Delta v_0(x)\psi(x,t;v), (x,t)\in\Omega,
\end{aligned} \tag{3.1.1.2}
$$

$$
\Delta\psi(x,0) = 0, x \in (0,l), \tag{3.1.1.3}
$$

$$
\Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0, t \in (0,T). \tag{3.1.1.4}
$$

(2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v+\Delta v \in V$ ye karşılık gelen çözümü buradaki $\psi_\Delta = \psi_\Delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v)$ fonksiyonudur.

Şimdi yukarıdaki (3.1.1.2) eşitliğinin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi}(x,t)$ ile çarpalım:

$$
\begin{aligned}
& i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2}\Delta\overline{\psi} + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\Delta\overline{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2 + \left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)|\Delta\psi|^2 + \\
& + \left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)|\Delta\psi|^2 + i\left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2 = \\
& = -\Delta v_0(x)\psi(x,t;v)\Delta\overline{\psi}(x,\tau) - i\Delta v_1(x)\psi(x,t;v)\Delta\overline{\psi}(x,\tau), (x,t)\in\Omega
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki eşitlikte $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integral alırsak şu bağıntıyı yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2}\Delta\overline{\psi} + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\Delta\overline{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau + \\
& + \int_{\Omega_t}\left(\left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)|\Delta\psi|^2 + i\left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau =
\end{aligned}
$$

$$= -\int_{\Omega_t} \left(\Delta v_0(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\bar{\psi}(x,\tau) - i\Delta v_1(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\bar{\psi}(x,\tau) \right) dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Yukarıdaki eşitlikte $\Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0, t \in (0,T)$ şartlarından yararlanarak sol taraftaki ilk integralin ikinci terimine kısmi integral uygulayalım. Böylelikle aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \left(i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}\Delta\bar{\psi} - a_0\left|\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\Delta\bar{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau +$$
$$+ \int_{\Omega_t} \left(\left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)|\Delta\psi|^2 + i\left(v_1(x) + \Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau =$$
$$= -\int_{\Omega_t} \left(\Delta v_0(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\bar{\psi}(x,\tau) - i\Delta v_1(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\bar{\psi}(x,\tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Elde ettiğimiz bu bağıntının kompleks eşleniğini yazalım:

$$\int_{\Omega_t} \left(-i\frac{\partial \Delta\bar{\psi}}{\partial t}\Delta\psi - a_0\left|\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\right|^2 - ia_1(x)\frac{\partial \Delta\bar{\psi}}{\partial x}\Delta\psi - a(x)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau +$$
$$+ \int_{\Omega_t} \left(\left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)|\Delta\psi|^2 - i\left(v_1(x) + \Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2 \right) dx d\tau =$$
$$= -\int_{\Omega_t} \left(\Delta v_0(x)\bar{\psi}(x,\tau;v)\Delta\psi(x,\tau) + i\Delta v_1(x)\bar{\psi}(x,\tau;v)\Delta\psi(x,\tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Kısmi integral uygulayarak elde ettiğimiz bağıntıdan yine kendisinin kompleks eşleniğini çıkaralım. Böylelikle aşağıdaki bağıntıyı kolayca yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}|\Delta\psi|^2 dx d\tau + 2\int_{\Omega_t} \left(v_1(x) + \Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2 dx d\tau =$$
$$-2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_0(x) dx d\tau -$$
$$-2\int_{\Omega_t} \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_1(x) dx d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Son yazdığımız bağıntının her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau$$

integralini ekleyelim. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau = -2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_0(x)\, dxd\tau +$$
$$+\int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau - 2\int_{\Omega_t} \left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2\, dxd\tau$$
$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_1(x)\, dxd\tau, \forall t\in[0,T].$$

Elde ettiğimiz bağıntının sol tarafındaki son integral (3.1.1.4) şartlarından dolayı sıfırdır. Bu bilgiyi dikkate alıp $\Delta\psi(x,0)=0, x\in(0,l)$ şartından yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\int_0^l \left|\Delta\psi(x,t)\right|^2 dx + 2\int_{\Omega_t} \left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2\, dxd\tau =$$
$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_0(x)\, dxd\tau + \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2\, dxd\tau -$$
$$-2\int_{\Omega_t} \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v_1(x)\, dxd\tau - 2\int_{\Omega_t} \left(v_1(x)+\Delta v_1(x)\right)|\Delta\psi|^2\, dxd\tau, \forall t\in[0,T].$$

Şimdi (2.1.5) ve (2.1.7) şartlarından yararlanarak $\left|v_1(x)+\Delta v_1(x)\right| \le b_1$ olduğunu da dikkate alıp Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\Delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \int_{\Omega_t} \left|\psi(x,t)\Delta v_0(x)\right|^2 dxd\tau +$$
$$+\int_{\Omega_t} \left|\psi(x,t)\Delta v_1(x)\right|^2 dxd\tau + \left(2+\mu_2+b_1\right)\int_{\Omega_t} |\Delta\psi|^2\, dxd\tau \qquad (3.1.1.5)$$

Burada şu eşitsizliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} |\Delta v_m(x)|^2 |\psi|^2 \, dxd\tau \le \int_{\Omega_t} |\psi(x,t)|^2 \, dxd\tau \, \|\Delta v_m(x)\|_{L_\infty(0,l)} \tag{3.1.1.6}$$

Son eşitsizlikten ve (3.1.1.5) ile (2.2.4) kestiriminden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\begin{gathered}\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le (2+\mu_2+b_1)\int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \\ +c_{22}\left(\|\Delta v_0\|^2_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta v_1\|^2_{L_\infty(0,l)}\right) \forall t \in [0,T].\end{gathered} \tag{3.1.1.7}$$

Yukarıdaki bağıntıda Gronwall lemmasını kullanalım. Elde ettiğimiz bağıntıyı son bağıntıda kullanarak aşağıdaki kestirimi ispatlarız:

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{23}\left(\|\Delta v_0\|^2_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta v_1\|^2_{L_\infty(0,l)}\right), \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.1.8}$$

Burada $c_{23} > 0$ sabit sayısı Δv ' den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v) = \|\psi(.,T) - y(x)\|^2_{L_2(0,l)}$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ için artışını araştıralım. Böylece aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\begin{gathered}\Delta J_0(v) = \Delta J_0(v+\Delta v) - J_0(v) = \\ = 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[(\psi(x,T) - y(x))\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx + \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}.\end{gathered} \tag{3.1.1.9}$$

Elde ettiğimiz son eşitlikte Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanalım. (2.2.4) ve (3.1.1.8) kestirimlerinden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{23}\left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta v_0\|^2_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta v_1\|^2_{L_\infty(0,l)}\right). \tag{3.1.1.10}$$

Burada $c_{23} > 0$ sabit sayısı Δv den bağımsızdır. (3.1.1.10) dan $J_0(v) = \|\psi(.,T) - y(x)\|^2_{L_2(0,l)}$ formülünün $\forall v \in V$ için sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

$$\|\Delta v_m\|_{L_\infty(0,l)} \to 0, \;\; m = 0,1 \text{ için } |\Delta J_0(v)| \to 0 \qquad (3.1.1.11)$$

dir. Öte yandan $\forall v \in V$ için $J_0(v) \geq 0$ olur. V kümesi $L_\infty(0,l) \times L_\infty(0,l)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks kümedir. $H = L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ uzayı da düzgün konveks uzay olup $[11]$ çalışmasındaki teoremin bütün şartları sağlanmıştır. Bu teorem göz önünde bulundurularak diyebiliriz ki $H = L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun bir G alt kümesi vardır. Ayrıca bu G kümesinin herhangi $\omega \in G$ elemanı için α sıfırdan büyük olmak üzere (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözümü vardır diyebiliriz. Teorem 3.1.1.1 ispatlanmış oldu.

3.1.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı

Daha önce α nın sıfırdan büyük olması durumunda $\omega \in G$ için (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin tek bir çözümü olduğunu ispatlamıştık. Bu alt bölümde ise α nın sıfıra eşit ve sıfırdan büyük olması durumunda herhangi $\omega \in H$ olmak üzere (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin en az bir çözümünün varlığını ispatlayacağız.

Teorem 3.1.2.1. Farz edelim ki, Teorem 3.1.1.1 in şartları sağlansın ayrıca $\alpha \geq 0$ sayısı verilsin. Böyle bir durumda $\forall \omega \in H$ olmak üzere (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini ele alırsak,

$$\lim_{m \leftarrow \infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha^*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v).$$

dir.

Diyelim ki $\psi_m(x,t)\equiv\psi\left(x,t;v^m\right), m=1,2,...$ olsun. Her v^m elemanı V kümesinden olduğu için Teorem 2.1.1 e dayanarak söyleyebiliriz ki (2.1.2)- (2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü $\psi_m(x,t)=\psi\left(x,t;v^m\right), m=1,2,...$ dir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi_m\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)=c_{24}, m=1,2,... \tag{3.1.2.1}$$

Burada $c_{24}>0$ sabit sayısı m den bağımsızdır. Daha önce belirtildiği gibi V kümesi $L_\infty(0,l)\times L_\infty(0,l)$ de kapalı, sınırlı ve koveks bir kümedir. Ayrıca $L_\infty(0,l)\times L_\infty(0,l)$ uzayı Banach uzayı olup $\left\{v^m\right\}\subset V$ dizisinden $v\in V$ ye $*$ zayıf yakınsayan alt dizi seçelim. Seçtiğimiz diziyi de $\left\{v^m\right\}$ ile gösterelim. Böylece $\forall q\in L_1(0,l)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^l v_p^m(x)q(x)dx=\int_0^l v_p(x)q(x)dx,\ \ p=0,1 \tag{3.1.2.2}$$

Kestirim (3.1.2.1) den $\left\{\psi^m(x,t)\right\}$ dizisi $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında düzgün sınırlıdır sonucuna ulaşırız. Bu sebeple $\left\{\psi^m(x,t)\right\}$ dizisinden öyle bir alt dizi seçelim ki $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsasın. Seçtiğimiz bu diziyi de $\left\{\psi^m(x,t)\right\}$ ile gösterelim. Böylece $m\to\infty$ için aşağıdaki limit bağıntılarını elde edebiliriz:

$$\psi_m\to\psi\ \ L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{3.1.2.3}$$

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\to\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \ L_2(\Omega)\text{'da zayıf,} \tag{3.1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \ L_2\left(\Omega\right) \text{'da zayıf,} \tag{3.1.2.5}$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \to \frac{\partial \psi}{\partial t} \ L_2\left(\Omega\right) \text{'da zayıf,} \tag{3.1.2.6}$$

Şimdi $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonunun (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. Öncelikle $\overset{0}{\forall}\left(x,t\right)\in\Omega$ olmak üzere $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonu (2.1.2) eşitliğini sağlar ifademizi kanıtlayalım. Son yazdığımız limit bağıntılarından yararlanarak $\forall\eta\in L_2\left(\Omega\right)$ olmak üzere $m\to\infty$ için kolayca aşağıdaki limit bağıntısını elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial \psi_m}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2}+ia_1\left(x\right)\frac{\partial \psi_m}{\partial x}-a\left(x\right)\psi_m\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt\to\\&\to\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial \psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+ia_1\left(x\right)\frac{\partial \psi}{\partial x}-a\left(x\right)\psi\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt\end{aligned} \tag{3.1.2.7}$$

Bundan sonra $\forall\eta\in L_2\left(\Omega\right)$ olmak üzere $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}v_p^m\left(x\right)\psi_m\left(x,t\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt\to\int_{\Omega}v_p\left(x\right)\psi\left(x,t\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt,\quad p=0,1 \tag{3.1.2.8}$$

limit bağıntısının doğruluğunu kanıtlayalım. Aşağıdaki bağıntının geçerliliği aşikardır:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}v_p^m\left(x\right)\psi_m\left(x,t\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt=\int_{\Omega}\left(v_p^m\left(x\right)-v_p\left(x\right)\right)\psi\left(x,t\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt+\\&+\int_{\Omega}v_p^m\left(x\right)\left(\psi_m\left(x,t\right)-\psi\left(x,t\right)\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt+\int_{\Omega}v_p\left(x\right)\psi\left(x,t\right)\overline{\eta}\left(x,t\right)dxdt,\ p=0,1\end{aligned} \tag{3.1.2.9}$$

Şimdi $\psi \in W_2^{2,1}(\Omega)$ ve $\eta \in L_2(\Omega)$ olmak üzere (3.1.2.2) limit bağıntısından yararlanarak $\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)$ fonksiyonu için

$$q(x)=\int_0^T \psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dt$$

fonksiyonunun $L_1(0,l)$ den olduğu göz önünde bulundurularak (3.1.2.9) bağıntısının sağındaki ilk teriminin limiti $m \to \infty$ için sıfırdır diyebiliriz. Böylece

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \left(v_p^m(x)-v_p(x)\right)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=0,\quad p=0,1 \tag{3.1.2.10}$$

eşitliğini yazabiliriz. $[7,23,24,26,27]$ çalışmalarına göre $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğü için $m \to \infty$ olmak üzere

$$\left\|\psi_m-\psi\right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \tag{3.1.2.11}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Şimdi (3.1.2.11) den yararlanarak (3.1.2.9) nin sağında ortadaki terimi değerlendirelim. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left|\int_\Omega v_p^m(x)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt\right| \le \left\|v_p^m\right\|_{L_\infty(0,l)}\left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le b_p\left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{L_2(\Omega)},\ p=0,1.$$

Son yazdığımız limit bağıntısından yararlanarak bu bağıntının her iki tarafına limit uygularsak (3.1.2.9) un sağındaki ortadaki terimin limiti sıfırdır.

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega v_p^m(x)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=0,\quad p=0,1 \tag{3.1.2.12}$$

olur. Böylelikle bu son yazdığımız limit bağıntısından ve (3.1.2.10) dan yararlanarak (3.1.2.9) nin her iki yanında $m \to \infty$ olmak üzere limit uygularsak (3.1.2.8) in doğruluğunu kanıtlarız. Son olarak (3.1.2.7) ve (3.1.2.8) bağıntılarından yararlanıp

$$\int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + i a_1(x) \frac{\partial \psi_m}{\partial x} - a(x)\psi_m + v_0^m(x)\psi_m + i v_1^m(x)\psi_m - f(x,t) \right] \times$$
$$\times \overline{\eta}(x,t)\,dxdt = 0$$

eşitliğinde $\eta \in L_2(\Omega)$ ve $m \to \infty$ olmak üzere limit uygularsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v_0(x)\psi + i v_1(x)\psi - f(x,t) \right] \overline{\eta}(x,t)\,dxdt = 0$$

Yani ψ fonksiyonu (2.1.2) eşitliğini sağlar diyebiliriz.

Bundan sonra (2.1.3) başlangıç şartını ψ fonksiyonunun sağladığını gösterelim.

$m \to \infty$ ve $\forall t \in [0,T]$ olmak üzere $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T], L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğü için $[7]$ aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\left\| \psi_m(.,t) - \psi_m(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \to 0. \qquad (3.1.2.13)$$

Elde ettiğimiz bağıntıda $t = 0$ olmak üzere $\psi_m(x,0) = \varphi(x), x \in (0,l), m = 1,2,...$ başlangıç şartlarından da yararlanırsak,

$$\left\| \psi(.,0) - \varphi \right\|_{L_2(0,l)} \le \left\| \psi(.,0) - \psi_m(.,0) \right\|_{L_2(0,l)} + \left\| \psi_m(.,0) - \varphi \right\|_{L_2(0,l)}$$

bağıntısından $m \to \infty$ için limit uygularsak

$$\left\| \psi(.,0) - \varphi \right\|_{L_2(0,l)} = 0$$

buluruz. Böylece

$$\psi(x,0)=\varphi(x), \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$$

başlangıç şartını elde ederiz. Şimdi ψ fonksiyonunun (2.1.4) şartını sağladığını gösterelim. Fonksiyonların izi ile ilgili teorem gereği $\psi_m \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), m=1,2,...$ fonksiyonlarının $L_2(0,T)$ den olan izi vardır ve $m\to\infty$ olmak üzere aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left\|\psi_m(s,.)-\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\to 0, s=0,l. \tag{3.1.2.14}$$

Son yazdığımız bağıntı,

$$\psi_m(0,t)=\psi_m(l,t)=0, t\in(0,T), m=1,2,...$$

sınır şartlarından yararlanarak

$$\left\|\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\le\left\|\psi(s,.)-\psi_m(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|\psi_m(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}, s=0,l$$

yazılır. $m\to\infty$ olmak üzere yukarıda son yazdığımız bağıntının her iki yanında limit uygularsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}=0, s=0,l$$

Böylelikle

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \overset{0}{\forall} t\in(0,T)$$

sınır değer şartlarını yazabiliriz.

Yani ψ fonksiyonu (2.1.1)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür ve bu fonksiyon $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına aittir. $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ dir ve ψ fonksiyonu için (2.2.4) kestirimi geçerlidir. Bunu da (3.1.2.1) eşitsizliğinde limit uygulayarak ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olması göz önünde bulundurularak elde ederiz.

$\{v^m\}\subset V$ minimalleştirici alt dizisi $L_\infty(0,l)\times L_\infty(0,l)$ de, $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisi $L_2(\Omega)$ da ψ fonksiyonuna $*$ zayıf yakınsar. α sayısı sıfıra eşit veya sıfırdan büyük olup $L_2(0,l)$ ve H uzaylarında normlar alttan zayıf yarı süreklidir. Bütün bunları göz önünde bulundurarak diyebiliriz ki $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $v\in V$ elemanı üzerinde alttan zayıf yarı süreklidir. Böylelikle aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{\alpha^*}\le J_\alpha(v)\le \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m)=J_{\alpha^*}$$

Son bağıntıdan da $J_{\alpha^*}=J_\alpha(v)$ yazabiliriz. Burada $J_\alpha(v)$ yi minimum yapan eleman $v\in V$ elemanıdır. Yani (2.1.1)-(2.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü $v\in V$ dir. Teorem 3.1.2.1 ispatlanmıştır.

3.2. Kompleks Potansiyelli ve Gradyent Terimli Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gerek Şart

Burada kompleks potansiyelli ve gradyent terimli Schrödinger denklemi için optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde etmeye çalışacağız. Öncelikle problemdeki amaç fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğini göstereceğiz. Daha sonra gradyenti için formül elde edip varyasyon eşitliği şeklinde gerek şart elde edeceğiz.

3.2.1. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği

Burada (2.1.1)-(2.1.4) başlangıç sınır değer probleminde amaç fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Şimdi aşağıdaki eşlenik problemini inceleyelim:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\phi\right)-a(x)\phi+v_0(x)\phi-iv_1(x)\phi=0,(x,t)\in\Omega \tag{3.2.1.1}$$

$$\phi(x,T)=-2i\left(\psi(x,T)-y(x)\right),x\in(0,l) \tag{3.2.1.2}$$

$$\phi(0,t)=\phi(l,t)=0,t\in(0,T) \tag{3.2.1.3}$$

Daha önce buradaki ψ fonksiyonunun $v\in V$ olmak üzere (2.1.2)-(2.1.4) probleminin çözümü olduğunu belirtmiştik.

Tanım 3.2.1.1 (3.2.1.1)-(3.2.1.3) eşlenik probleminin çözümü olarak $C^0\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan $\eta_1(x,0)=0$ şartını sağlayan $\forall\eta_1\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\int_\Omega\phi\left(-i\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\eta}_1}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\overline{\eta}_1}{\partial x}-a(x)\overline{\eta}_1+v_0(x)\overline{\eta}_1-iv_1(x)\overline{\eta}_1\right)dxdt=\\=-2\int_0^l\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\overline{\eta}_1(x,T)dx\end{aligned} \tag{3.2.1.4}$$

İntegral özdeşliğini sağlayan $\phi=\phi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Şimdi $[16,7,23,39]$ çalışmalarında olduğu üzere Galerkin yönteminden yararlanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.2.1.1 Diyelim ki $a(x),a_1(x),\varphi(x),f(x,t),y(x)$ fonksiyonları (2.1.5)-(2.1.8) şartlarını sağlasın. Her bir $v\in V$ olmak üzere (3.2.1.1)-(3.2.1.3) eşlenik problemin $C^0\left(\left[0,T\right],L_2\left(0,l\right)\right)$ uzayında bir tek çözümü mevcuttur. Problemin çözümü için aşağıdaki kestirimi geçerlidir:

$$\left\|\phi\left(.,t\right)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{25}\left\|\psi\left(.,T\right)-y\right\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (3.2.1.5)$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $c_{25}>0$ belirli bir sayıdır.

Şimdi teorem 3.2.1.1 i kullanarak amaç fonksiyonelin diferansiyellenebilirliğini ispatlayalım.

Teorem 3.2.1.2 Diyelim ki 3.2.1.1. teoreminin şartları geçerli olsun. ω elemanı $L_2\left(0,l\right)$ uzayına ait olmak üzere $J_\alpha\left(v\right)$ fonksiyoneli V kümesinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olup gradyenti için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$J'_\alpha\left(v\right)=\left(J'_{\alpha_0}\left(v\right),J'_{\alpha_1}\left(v\right)\right)$$

olmak üzere,

$$J'_{\alpha_0}\left(v\right)=\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi\left(x,t\right)\overline{\phi}\left(x,t\right)\right)dt+2\alpha\left(v_0\left(x\right)-\omega_0\left(x\right)\right)$$

ve

$$J'_{\alpha_1}\left(v\right)=-\int_0^T \operatorname{Im}\left(\psi\left(x,t\right)\overline{\phi}\left(x,t\right)\right)dt+2\alpha\left(v_1\left(x\right)-\omega_1\left(x\right)\right) \qquad (3.2.1.6)$$

dir.

Burada ψ fonksiyonu (2.1.2)-(2.1.4) probleminin çözümü olup ϕ fonksiyonu da (3.2.1.1)-(3.2.1.3) eşlenik probleminin $v\in V$ olmak üzere çözümüdür.

İspat: $\forall v \in V$ olmak üzere $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını bulmak için (2.1.1) ve (3.1.1.9) eşitliklerinden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \\ &+ 2\alpha\int_0^l \left(v_0(x) - \omega_0(x)\right)\Delta v_0(x)\,dx + 2\alpha\int_0^l \left(v_1(x) - \omega_1(x)\right)\Delta v_1(x)\,dx + \\ &+ \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\left(\left\|\Delta v_0\right\|^2_{L_\infty(0,l)} + \left\|\Delta v_1\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\right)\end{aligned} \tag{3.2.1.7}$$

$v \in V$ olmak üzere (3.1.1.2)-(3.1.1.4) probleminin çözümü $\Delta\psi$ fonksiyonudur ve $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ olmak üzere ψ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğu için kolayca aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt + \\ &+ \int_\Omega \left(\left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)\Delta\psi + i\left(v_1(x) + \Delta v_1(x)\right)\Delta\psi\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt = \\ &= -\int_\Omega \Delta v_0(x)\psi(x,t;v)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt - i\int_\Omega \Delta v_1(x)\psi(x,t;v)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt\end{aligned} \tag{3.2.1.8}$$

Elde ettiğimiz en son eşitlikle beraber $\Delta\psi$ fonksiyonu (3.1.1.3) ve (3.1.1.4) şartlarını sağlar. Şimdi bu son eşitlikte $L_2(\Omega)$ uzayının elemanı olan η yerine $\phi(x,t)$ fonksiyonunu alırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi\right)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt + \\ &+ \int_\Omega \left(\left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)\Delta\psi + i\left(v_1(x) + \Delta v_1(x)\right)\Delta\psi\right)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt = \\ &= -\int_\Omega \Delta v_0(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt - i\int_\Omega \Delta v_1(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt\end{aligned} \tag{3.2.1.9}$$

Öte yandan $\phi(x,t)$ fonksiyonu eşlenik probleminin çözümüdür ve bu sebeple (3.2.1.4) eşitliğini sağlayacaktır. $\Delta\psi$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olup (3.1.1.3) ve (3.1.1.4) şartlarını sağladığı için (3.2.1.4) eşitliğinde η_1 fonksiyonu yerine $\Delta\psi$ fonksiyonu yazarsak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi\left(-i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial x}-a(x)\Delta\bar{\psi}+v_0(x)\Delta\bar{\psi}-iv_1(x)\Delta\bar{\psi}\right)dxdt=\\&=-2\int_0^l\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)dx.\end{aligned} \quad (3.2.1.10)$$

Yukarıdaki son bağıntının kompleks eşleniğini yazalım:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \bar{\phi}\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-a(x)\Delta\psi+v_0(x)\Delta\psi+iv_1(x)\Delta\psi\right)dxdt=\\&\qquad=-2\int_0^l\left(\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx\end{aligned} \quad (3.2.1.11)$$

Şimdi (3.2.1.9) bağıntısından (3.2.1.11) bağıntısını çıkaralım:

$$\begin{aligned}2\int_0^l\left(\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx&=\int_\Omega \Delta v_0(x)\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt+\\&+i\int_\Omega \Delta v_1(x)\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt\\+\int_\Omega \Delta v_0(x)\Delta\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt&+i\int_\Omega \Delta v_1(x)\Delta\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)dxdt\end{aligned}$$

(3.2.1.12)

Şimdi de elde ettiğimiz bu bağıntının kompleks eşleniğini yazalım:

$$2\int_0^l \left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx = \int_\Omega \Delta v_0(x)\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt -$$

$$-i\int_\Omega \Delta v_1(x)\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt \qquad (3.2.1.13)$$

$$+\int_\Omega \Delta v_0(x)\Delta\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt - i\int_\Omega \Delta v_1(x)\Delta\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt$$

(3.2.1.12) ve (3.2.1.13) bağıntılarını taraf tarafa toplayalım. Böylelikle aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$2\int_0^l \left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx + 2\int_0^l \left(\overline{\psi}(x,T)-\overline{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx =$$

$$= \int_\Omega \Delta v_0(x)\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt - i\int_\Omega \Delta v_1(x)\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \Delta v_0(x)\Delta\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt + i\int_\Omega \Delta v_1(x)\Delta\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \Delta v_0(x)\Delta\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt - i\int_\Omega \Delta v_1(x)\Delta\overline{\psi}(x,t;v)\phi(x,t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \Delta v_0(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt + i\int_\Omega \Delta v_1(x)\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\,dxdt$$

Buradan da

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx = \int_\Omega \Delta v_0(x)\,\mathrm{Re}\left(\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt -$$

$$-\int_\Omega \Delta v_1(x)\,\mathrm{Im}\left(\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt + \int_\Omega \Delta v_0(x)\,\mathrm{Re}\left(\Delta\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt - \qquad (3.2.1.14)$$

$$-\int_\Omega \Delta v_1(x)\,\mathrm{Im}\left(\Delta\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt$$

bağıntısı elde edilir. (3.2.1.14) ve (3.2.1.7) bağıntılarını göz önünde bulundurarak fonksiyonelin artışını aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \int_\Omega \Delta v_0(x)\,\mathrm{Re}\left(\psi(x,t;v)\overline{\phi}(x,t)\right)dxdt -$$

$$-\int_{\Omega}\Delta v_1(x)\operatorname{Im}\left(\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt+2\alpha\int_0^l\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right)\Delta v_0(x)\,dx+$$
$$+2\alpha\int_0^l\left(v_1(x)-\omega_1(x)\right)\Delta v_1(x)\,dx+R(\Delta v) \tag{3.2.1.15}$$

Bu eşitlikteki $R(\Delta v)$' yi

$$R(\Delta v)=\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\left(\left\|\Delta v_0\right\|^2_{L_\infty(0,l)}+\left\|\Delta v_1\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\right)+$$
$$+\int_{\Omega}\Delta v_0(x)\operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt-\int_{\Omega}\Delta v_1(x)\operatorname{Im}\left(\Delta\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt \tag{3.2.1.16}$$

olarak gösterelim. Şimdi Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinden yararlanarak $R(\Delta v)$ kalan terimini şu şekilde değerlendirelim:

$$\left|R(\Delta v)\right|\le\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\left(\left\|\Delta v_0\right\|^2_{L_\infty(0,l)}+\left\|\Delta v_1\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\right)+$$
$$\sqrt{T}\left\|\phi\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta v_0\right\|_{L_\infty(0,l)}+\sqrt{T}\left\|\phi\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta v_1\right\|_{L_\infty(0,l)} \tag{3.2.1.17}$$

Şimdi de $R(\Delta v)$ için (3.1.1.10) kestiriminden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|R(\Delta v)\right|\le c_{26}\left(\left\|\Delta v_0\right\|^2_{L_\infty(0,l)}+\left\|\Delta v_1\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\right) \tag{3.2.1.18}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $c_{26}>0$, Δv' den bağımsızdır. $B=L_\infty(0,l)\times L_\infty(0,l)$ olmak üzere

$$R(\Delta v)=o\left(\left\|\Delta v\right\|_B\right) \tag{3.2.1.19}$$

dir. Burada aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\lim_{\left\|\Delta v\right\|_B\to\infty}\frac{R(\Delta v)}{\left\|\Delta v\right\|_B}=0$$

Böylece (3.2.1.19) eşitliğini göz önünde bulundurarak fonksiyonelin artışı formülünü şu şekilde düzenleyebiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v)=\int_\Omega \Delta v_0(x)\operatorname{Re}\left(\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt-\int_\Omega \Delta v_1(x)\operatorname{Im}\left(\psi(x,t;v)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt$$
$$+2\alpha\int_0^l\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right)\Delta v_0(x)dx+2\alpha\int_0^l\left(v_1(x)-\omega_1(x)\right)\Delta v_1(x)dx+o\left(\|\Delta v\|_B\right) \quad (3.2.1.20)$$

Bu eşitlikten kolayca söyleyebiliriz ki $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $\forall v\in V$ için Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve fonksiyonelin gradyenti için

$$J'_\alpha(v)=\left(J'_{\alpha_0}(v),J'_{\alpha_1}(v)\right) \text{ olmak üzere,}$$

$$J'_{\alpha_0}(v)=\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right) \quad \text{ve}$$

$$J'_{\alpha_1}(v)=-\int_0^T \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v_1(x)-\omega_1(x)\right) \quad (3.2.1.21)$$

formülü yazılır ve bu formül V kümesinde geçerlidir. Teorem 3.2.1.2. ispatlanmıştır.

3.2.2 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gerek Şart

Burada (2.1.1)-(2.1.4) probleminin çözümünün gerek şartıyla ilgili soruyu ele alacağız. Yukarıda en son bölümde ulaştığımız (3.2.1.21) formülünden yararlanarak söz konusu problemin çözümünde varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şarta ulaşacağız.

Teorem 3.2.2.1 Farz edelim ki 3.2.1.2. Teoreminin şartları geçerli olsun. Bu taktirde (2.1.1)-(2.1.4) probleminin çözüm kümesi

$$V_*=\left\{v^*\in V: J_\alpha\left(v^*\right)=J_{\alpha^*}=\inf_{v\in V} J_\alpha(v)\right\}$$

olmak üzere V kümesinin her v^* elemanı için

$$\int_0^l \left[\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v_0^*(x)-\omega_0(x)\right) + 2\alpha\left(v_1^*(x)-\omega_1^*(x)\right) \right] \times$$

$$\times \left[\left(v_0(x)-v_0^*(x)\right) + \left(v_1(x)-v_1^*(x)\right) \right] -$$

$$-\int_0^l \left[\int_0^T \operatorname{Im}\left(\psi^*(x,t)\bar{\phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v_0^*(x)-\omega_0(x)\right) + 2\alpha\left(v_1^*(x)-\omega_1^*(x)\right) \right] \times$$

$$\times \left[v_1(x)-v_1^*(x) \right] dx \geq 0, \quad \forall v \in V \qquad (3.2.2.1)$$

bağıntısı doğrudur. Bu bağıntıda $v^* \in V$ olmak üzere $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$ (2.1.2)-(2.1.4) başlangıç sınır değer problemin çözümü ve $\phi^*(x,t) \equiv \phi(x,t;v^*)$ (3.2.1.1)-(3.2.1.3) eşlenik problemin çözümüdür. Teorem, [36] çalışmasında ve kuramsal temellerde yer alan Teorem 1.2.16. nın şartının sağlanmasıyla [48] çalışmasında olduğu gibi ispatlanır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Tezde ele alınan kompleks potansiyelli ve sanal katsayılı gradiyent içeren bir boyutlu lineer Schrödinger denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problem konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi bir biçimde farklıdır. Öncelikle söylemek gerekir ki,uzay değişkenli kompleks potansiyelin reel ve sanal kısımları olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfından seçilmiştir. Kontrol rolünü oynayan reel değerli potansiyeller önce $[1,33]$ çalışmalarında sanal katsayılı gradiyent içeren lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde ele alınmıştır. Kontrollerin uzay veya zaman değişkenine bağlı olup ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olması durumu ise sanal katsayılı gradiyent içeren lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde önceki $[19,20,46]$ çalışmalarında incelenmiştir. Bu tez çalışmasında incelenen problem güncel ve konulma açısından ciddi bir biçimde önceki çalışmalarda incelenen problemlerden farklı olduğundan bu çalışmada elde edilen sonuçlar da güncel olup gerek teorik gerekse pratik açıdan bilimsel önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında alınan sonuçlar önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla örtüşmez.

KAYNAKLAR

[1] Akbaba, D.G., (2011). Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[2] Aksoy, Y.N., Yagubov, G.Ya., Yıldız, B., (2012). The finite difference approximationş of theoptimal control problem for a nonlinear Schrödinger equation. IJMMNO 3(3), pp.158-183 .

[3] Aksoy, Y.N., Yıldız, B., Yetişkin, H., (2012). Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathjematical Sciences, 122(3), pp. 469-484.

[4] Aksoy, Y.N., (2015). The variational formulation of an inverse problem for multi-dimensional nonlinear time dependent Schrödinger equation. DOİ:10.1515/jiip-2015-0029.

[5] Aksoy, Y.N., Din, N.H., Yagub, G., (2016). Finite difference method for an optimal control problemfor a nonlinear time-dependent Schrödinger equation. Numerical Funktional Analysis and Optimization, DOI: 10.1080/01630563.2016.1266656, 28 p.

[6] Aksoy, Y.N., Yagub, G., Aksoy, E., (2016). An identification problem for nonlinear Schrödinger equation. AIP Conferance Proceedings 1726,020079; doi: 10.1063/1.4945905, 4 p.

[7] Baudoin L., KavianO., Puel, J.P., (2005). Regularityfor a Schrödinger equation with singular potentials and applicationto bilinearoptimal control // J. Differential Equations, 216, pp.-188-222.

[8] Butkovskiy, A.G., Samoilenko, Y.I., (1984). Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. M.: Nauka, 256 s. (Rusça) 68 .

[9] Cances E., Le Bris C., Pilot M., (2000). Controle optimal bilineaire d'una equation de Schrödinger // C.R. Acad. SCİ, Paris, t.330,Serie 1. Controle optimal, pp.-567-571.

[10] Dın Nıo Hao (1986). Kuantum Objektlerin Optimal Kontrolü//Otomatik ve Telemekanik.1986, No 2, S.1420 (Rusça) .

[11] Goebel , M., (1979). On Existence Of Optimal Control//Math.Nacr.,Vol.53-s.67-73 .

[12] İskenderov,A.D., Yagubov, G.Ya.,(1988). Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi//DAN SSSR, vol. 303, No: 5, s.1044- 1048 (Rusça).

[13] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., (1989). Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü//Otomatik ve Telemekanik, No:12, s.27-38 (Rusça).

[14] İskenderov A.D., Mahmudov, N.M., (1995). Kuantum Mekaik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol // AMEA ’nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-c.16,No:5-6-30-35 (Rusça) .

[15] İskenderov A.D., Yagubov G.Ya.,(1998). Kuantum mekanik potansiyelle optimal kontrol// Azerbaycan BA MME'nin eserleri, vol. VIII, s.46-51(Rusça) .

[16] İskenderov A.D., Yagubov G.Ya.,(2007). Durgun ve lineer olmayan çok boyutlt Schrödinger denkleminde sınırlı olmayan potansiyelle optimal kontrol // Procedings Lenkara State University. Series Natural Sciences. Lenkaran, pp. 3-56.

[17] İskenderov A.D., Yagubov G.Ya., Musayeva, M.A.,(2012). Kuantum potansiyellerinin identifikasyonu. Baku, Çaşıoğlu, 552 s. (Rusça).

[18] Iskenderov, A.D., Yagubov, G., İbragimov N.S.,Y.Aksoy, N., (2014). Variation formulation of the inverse problem of determining the complex-coefficient of equation of quasioptics. // Euroasian Journal of mathematical and computer applications, vol. 2, issue 2 , pp.102-121.

[19] Iskenderov, A.D.,Yagub, G., Y.Aksoy, N., (2015). An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15-pp.27-28.

[20] İskenderov, A.D., Yagub, G., Zengin, M., (2016). Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27 , - pp.79-80.

[21] Iyosida,K. (1967). Functional Analysis-M,:Mir-s.624 (Rusça) .

[22] Kolmogorov, A.N., Formin, S.V., (1989). Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. M.Nauka.1989-s.624 (Rusça) .

[23] Ladyzenskaja, O.A., (1973). Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri-M:Nauka, (Rusça) .

[24] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A.,Uraltseva, N.N., (1968). Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Amer. Math. Soc. (english trans) Providence, R.I.Nauka, 765s.

[25] Landau, L.D., Lifşis E.M., (1963). Kuantum Mekaniği. Cilt 3. - s.702 (Rusça).

[26] Lions, J.-L., Magenes E., (1972). Non-homogeneous boundary value problems and applications, vol. 2. Berlin, 307 p.

[27] Lions, J.L.,(1987). Dağılmış parametreli singuler sistemlerle kontrol. M.:Nauka, 308 s. (Rusça).

[28] Mahmudov, N.M., (1997). Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri- c.7.s.392 (Rusça).

[29] Özeroğlu, Y., (2017). Lineer olmayan bir Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[30] Pontryagin, L.S., (1982). Adi diferansiyel denklemler. Moskova, Nauka, 332 s. (Rusça).

[31] Razgulin, A.V.,(1988). Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 1 (Nümerik Analiz ve Sibernetik), No 2 ,s.28-33 (Rusça).

[32] Silla, N., (1991). Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, Bakü,165 s. (Rusça) .

[33] Toyoğlu, F., (2012). İki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümü. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[34] Toyoğlu, F., Yagubov, G**.,** (2015). Numerical solution of an optimal control problem governed by two dimensional Schrödinger equation // Applied and Computational Mathematics, vol.4, issue 2, pp.30-38.

[35] Vasilyev, F.P., (1980). Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metotları. Moskova, Nauka, 518 s. (Rusça).

[36] Vasilyev, F.P., (1981). Extremal Problemlerin ÇözümMetodları. M: Nauka, 400 s. (Rusça).

[37] Vorontsov, M.A., Shmalgauzen, V., (1984). Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka, 288 s Rusça).

[38] Yagubov, G., (1984). Schrödinger tip denklem için optimal kontrol problemi // 'Sayısal yöntemler ve bilgisayarlaın matematiksel donanımı' , Bakü, ADU nun yayın evi, s. 116-125 (Rusça).

[39] Yagubov, G., (1994). Kuazi Lineer Schrödinger denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. Bilimler Doktoru Tezi. Kiev Devlet Universitesi, Kiyev., 318 s.(Rusça) .

[40] Yagubov, G., Musayeva, M.A., (1995). Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri, vol. 16, No:1-2, s.46-51(Rusça) .

[41] Yagubov, G., Musayeva, M.A.,(1997). Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında, Diferansiyel Denklemler. Vol. 33, No:12, s.1691-1698 (Rusça).

[42] Yagubov, G., Haşimov, S.A.,(2008). Lineer olmayan Schrödinger denkleminde zamana bağımlı sınırlı olmayan potansiyelle optimal kontrol problemi hakkında, Azerbaycan MBA nin Haberleri. Fiz. -Tekn.-Matem.-İnformat. serisi, vol. 28, No 6, s.19-24 (Rusça).

[43] Yagub, G., Ibrahimov, N.S., Zengin, M.,(2015). Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a spesial gradient terms, Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15 , pp.53-54.

[44] Yetişkin, H.,(2005). Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[45] Yıldırım A., Nigar, (2009). Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayılarla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum. 72 .

[46] Yıldırım A., Nigar, Aksoy E., Kocak Y., (2016). An Optimal Control Problem with Final Observation for Systems Governed by Nonlinear Schrödinger Equation. Filomat, 30(3), 649-665.

[47] Yıldız, B., Yagubov, G. ,(1997). On an optimal control problem, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.38, pp. 275-287.

[48] Zengin, M., (2017), Yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrolü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Vildan ERUÇAN BAŞARAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Kilis 21/03/1987

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : vildanerucan@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kilis Anadolu Öğretmen Lisesi / 2001-2005

Lisans : Selçuk Üniversitesi / 2005-2010

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi / 2016-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Ankara Polatlı Duatepe Anadolu Lisesi 2010-2013

Ankara Gölbaşı Zübeyde Hanım Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi 2013-2016

Ardahan Halitpaşa Anadolu Lisesi 2016-