

**T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BURGERS DENKLEMİNİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Abidin GÖKSU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

EYLÜL- 2018

KARS



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BURGERS DENKLEMİNİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Abidin GÖKSU
YÜKSEK LİSANS TEZİ




DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

EYLÜL- 2018

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans öğrencisi Abidin GÖKSU'nun Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında tezi olarak hazırladığı “Burgers Denklemine Bir Nümerik Çözümü” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy..... ile kabul edilmiştir.

.../.../2018

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	: Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	
Üye	: Dr. Öğretim Üyesi Fatma TOYOĞLU	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../20... gün ve ...
.../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.


Abidin GÖKSU

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BURGERS DENKLEMİNİN BİR NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Abidin GÖKSU

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Burgers denklemi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde konuyla ilgili temel tanımlara yer verildi. Üçüncü bölümde çalışmada kullanılacak nümerik yöntemler, ele alınan model problemler ve elde edilen nümerik sonuçlar verildi. Dördüncü bölüm ise sonuç ve tartışmaya ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Burgers Denklemi, Logaritmik sonlu fark yaklaşımı, Üstel sonlu fark yaklaşımı

2018, 68 Sayfa

ABSTRACT

(Master Thesis)

A NUMERICAL SOLUTION OF BURGERS EQUATION

Abidin GÖKSU

Kafkas University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, we were given information about the Burgers equation. In the second chapter, fundamental definitions related to the subject were given. In the third chapter, numerical methods to be used in the study, model problems and obtained numerical results were given. The fourth chapter is devoted to conclusion and discussion.

Key Words: Burgers Equation, Logarithmic finite difference approach, Exponential finite difference approach.

2018,68 pages

ÖNSÖZ

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım değerli hocam sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan hocam Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN'e teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteklerinden dolayı hep yanımda olan hayat arkadaşım ve değerli eşim Meral METİN GÖKSU'ya, kızlarım Elif Su ve İkbâl Ada'ya sonsuz teşekkürler...

Abidin GÖKSU

İÇİNDEKİLER

İÇ KAPAK	I
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ÖNSÖZ	VI
İÇİNDEKİLER	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ	X
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kuramsal Temeller	3
1.2.1. Temel Tanım ve Kavramlar	3
1.2.2. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları	5
1.2.3. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	6
1.2.4. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	7
1.2.5. Burgers Denklemi	10
1.2.6. Denklemın Analitik Çözümü	10
1.2.7. Hopf-Cole Dönüşümü	11
1.2.8. Analitik Çözüm	17
2. MATERYAL VE YÖNTEM	24
2.1. Model Problemler	24
2.2. Nümerik Metotlar	26
2.2.1. Burgers Denklemının Açık Üstel Sonlu Fark Metodu İle Çözümü	26
2.2.1.1. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 1	28
2.2.1.2. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 2	29
2.2.1.3. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 3	29
2.2.1.4. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 4	30
2.2.2. Burgers denklemının Açık Logaritmik Sonlu Fark Metodu İle Çözümü	31
2.2.2.1. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 1	31
2.2.2.2. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 2	32
2.2.2.3. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 3	33

2.2.2.4. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 4.....	34
3. BULGULAR	35
3.1. Model Problemlerin Nümerik Çözümleri.....	35
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	64
5.KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	68



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1: Problem 2.1.1. için $v=0.1$, $h=0.0125$, $k=10^{-5}$ değerleri için $t=0.1,0.5,1,2,3$ zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı.45

Şekil 3.2: Problem 2.1.3. için $a=0, b=1.2$, $h=0.01, k=10^{-4}$ değerleri için $t=1,2,3,4$ zamanların da LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı.63



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1: Problem 2.1.1.için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen çözümlerin tam çözümler ile karşılaştırılması.	37
Tablo 3.2: Problem 2.1.1. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.	38
Tablo 3.3: Problem 2.1.1. için $\nu=0.1$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerleri için $t=0.4,0.6,0.8,1$ zamanlarında elde edilen nümerik sonuçların bazı diğer yöntemler $[2,4,6,19,20]$ ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması...39	39
Tablo 3.4: Problem 2.1.1. için $\nu=0.01$, $k=10^{-5}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I LSFY-II LSFY-III LSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	40
Tablo 3.5: Problem 2.1.1. için $\nu=1$, $k=10^{-4}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II yaklaşımları ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.	41
Tablo 3.6: Problem 2.1.1. için $\nu=0.01$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-5}$ değerleri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlere karşılaştırılması.	42
Tablo 3.7: Problem 2.1.1. için $\nu=0.005$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.	43
Tablo 3.8: Problem 2.1.1. için $\nu=0.1$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerleri için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin $[2,4,6,19,20]$ metotları ile elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması	44

Tablo 3.9: Problem 2.1.2. için $\nu = 1.0$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	47
Tablo 3.10: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$, $h = 0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	48
Tablo 3.11: Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$, $h = 0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.	49
Tablo 3.12. Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.....	50
Tablo 3.13. Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II yaklaşımlarıyla elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.....	51
Tablo 3.14: Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	52
Tablo 3.15: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	53
Tablo 3.16: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	54
Tablo 3.17: Problem 2.1.2 için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanların da ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.....	55

Tablo 3.18: Problem 2.1.2. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin karşılaştırılması.	56
Tablo 3.19: Problem 2.1.2. için $\nu=1$ ve h nin farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.	57
Tablo 3.20: Problem 2.1.2. için $\nu=0.1$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerleri için $t=0.4,0.6,0.8,1$ zamanlarında elde edile nümerik sonuçların $[2,4,6,19,20]$ yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması.	58
Tablo 3.21: Problem 2.1.2. için $\nu=0.01$, $h=0.0125$, $k=10^{-5}$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II yaklaşımı ile elde edile sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.	59
Tablo 3.22: Problem 2.1.2. için $\nu=0.01$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.	60
Tablo 3.23: Problem 2.1.2. için $\nu=0.005$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.	61
Tablo 3.24: Problem 2.1.3. için $a=0$, $b=8$, $\nu=0.5$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerlerinde ve farklı zamanlarda LSFY-I, LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.	62

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

LSFY I	: Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımları- I
LSFY II	: Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımları- II
LSFY III	: Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımları- III
LSFY IV	: Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımları-IV
ÜSFY I	: Üstel Sonlu Fark Yaklaşımları- I
ÜSFY II	: Üstel Sonlu Fark Yaklaşımları- II
ÜSFY III	: Üstel Sonlu Fark Yaklaşımları- III
ÜSFY IV	: Üstel Sonlu Fark Yaklaşımları- IV
I-EFDM	: Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu
FI-EFDM	: Tamamen Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu çalışmada,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b \quad (1.1)$$

şeklindeki bir boyutlu non-linear Burgers denklemi,

$$u(x, 0) = g(x)$$

başlangıç şartı ve

$$u(a, t) = h_1(t) \text{ ve } u(b, t) = h_2(t), t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı.

Burada v kinematik viskozitenin pozitif katsayısı ve g , h_1 ve h_2 ise bilinen fonksiyonlardır. Burgers denklemi, türbülansın matematiksel modeli ve viskoz bir akışkan içinde hareket eden bir şok dalgası ile akışın yaklaşık teorisi gibi çeşitli olguları ifade eder. Literatürde, Burgers denkleminin çözümünü bulmak için birçok nümerik yöntem önerilmiş ve uygulanmıştır. [1-21].

[2] çalışmasında Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kapalı üstel sonlu fark metodu ve tamamen kapalı üstel sonlu fark metodu kullanılmıştır. [3] çalışmasında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümleri açık sonlu fark metodu ile elde edilmiştir. [10] çalışmasında araştırmacılar en küçük kareler yaklaşımıyla bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümüne ulaşmışlardır. [11] çalışmasında kompakt sonlu farklar metodunu kullanarak bir boyutlu Burgers denklemi nümerik olarak çözülmüş ve metodun kararlılığı üzerinde inceleme yapılmıştır. [12] çalışmasında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümleri sonlu eleman yöntemi ile bulunmuştur. [13] çalışmasında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerine ulaşmak için zamanı ayrıştırma metodu üzerine kurulmuş sonlu eleman metodundan faydalanılmıştır. [14] çalışmasında ise araştırmacılar Varyasyonel İterasyon Metodu kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiş ve elde ettikleri çözümleri Adomian Decomposition metodu ile elde edilen çözümlerle karşılaştırmışlardır.

Yaptığımız bu çalışmada ise Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için açık üstel sonlu fark ve açık logaritmik sonlu fark yaklaşımları kullanılacaktır. Açık üstel sonlu fark yöntemi ilk olarak [23] çalışmasında ısı denklemini çözmek için kullanıldı. [15] ve [16] çalışmalarında Burgers denklemini çözmek için açık üstel sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. [22] çalışmasında Korteweg–de Vries denklemini açık üstel sonlu fark yöntemi kullanılarak çözülmüştür. [25] çalışmasında araştırmacılar kapalı logaritmik sonlu fark yaklaşımını kullanarak iki boyutlu Burgers denklem sisteminin nümerik çözümlerini elde ettiler.



1.2. Kuramsal Temeller

1.2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1. f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine f fonksiyonunun a noktası civarındaki Taylor Serisi açılımı denir. Taylor serisindeki sonlu sayıda terimden oluşan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

polinomuna n . dereceden Taylor polinomu denir[26].

Benzer şekilde iki bağımsız değişkene bağlı f fonksiyonu, (a,b) noktası civarında sürekli bir fonksiyon ve bu noktada her mertebeden türevlenebilir olsun

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a, b)$$

$$= f(a,b) + \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a,b)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a,b) + \dots$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(a,b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \right] + \dots$$

seri açılımına f fonksiyonunun (a,b) noktası civarındaki Taylor serisi denir[26].

Tanım 1.2. f , $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında $(n+1)$. mertebeye kadar türevlenebilir ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda her $x \in [a,b]$ ve $x_0 < \xi(x) < x$ olacak şekilde öyle bir ξ sayısı vardır ki $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ yazılabilir. Burada $P_n(x)$ ve $R_n(x)$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dir. $P_n(x)$, n . mertebeden Taylor polinomu, $R_n(x)$ ise kesme hatasıdır [26].

1.2.2. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları

$u(x,t)$, x ve t bağımsız değişkenlerine göre yeterince türevlenebilen bir fonksiyon olsun. h , x yönünde artma miktarı olmak üzere $U(x+h,t)$, $U(x-h,t)$, $U(x+2h,t)$, $U(x-2h,t)$ fonksiyonlarının x civarında Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x+h,t) = U(x,t) + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1.1)$$

$$U(x-h,t) = U(x,t) - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1.2)$$

$$U(x+2h,t) = U(x,t) + 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1.3)$$

$$U(x-2h,t) = U(x,t) - 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1.4)$$

dır. Benzer düşünceyle ; k , t yönündeki artma miktarı olmak üzere $U(x,t+k)$ ve $U(x,t-k)$ fonksiyonlarının t civarındaki Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x,t+k) = U(x,t) + k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.1.5)$$

$$U(x,t-k) = U(x,t) - k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.1.6)$$

şeklindedir.

Şimdi $U(x,t)$ fonksiyonun x ve t ye göre sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımlarını bulalım.

1.2.3. Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonun x yönündeki birinci mertebeden $\frac{\partial U}{\partial x}$ türevini ele alalım. Sırasıyla

(1.1.1) ve (1.1.2) Taylor açılımlarında $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x,t)}{h} + O(h) \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x,t) - U(x-h,t)}{h} + O(h) \quad (1.1.8)$$

elde edilir. (1.1.1) eşitliğinden (1.1.2) eşitliği çıkarılır ve $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \quad (1.1.9)$$

elde edilir. Burada " O " sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi ise hatanın $h \rightarrow 0$ olduğunda h ile orantılı olduğunu ifade eder ve buna kesme hatası denir.

Benzer düşünceyle $U(x,t)$ fonksiyonunun t yönünde birinci mertebeden türevleri (1.1.5) ve (1.1.6) eşitliklerinden

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t+k) - U(x,t)}{k} + O(k) \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t) - U(x,t-k)}{k} + O(k) \quad (1.1.11)$$

olarak elde edilir. Burada $O(k)$ terimi hatanın k mertebesinde olduğunu ve hatanın k ile orantılı azalacağını göstermektedir.

1.2.4. İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

(1.1.1) ve (1.1.3) eşitliklerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x+h,t) + U(x+2h,t)}{h^2} + O(h) \quad (1.1.12)$$

bulunur. Benzer düşünceyle (1.1.2) ve (1.1.4) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x,t) - 2U(x-h,t) + U(x-2h,t)}{h^2} + O(h) \quad (1.1.13)$$

bulunur. (1.1.1) ve (1.1.2) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-h,t) - 2U(x,t) + U(x+h,t)}{h^2} + O(h) \quad (1.1.14)$$

bulunur.

Kabul edelim ki problemin çözüm bölgesi $0 \leq x \leq l$ (l , sonlu bir sayı) ve $t > 0$ olsun. Sonlu fark yaklaşımı için problemin çözüm bölgesi N eşit alt aralığı bölünür. Öyle ki $U(x,t)$ bağımlı değişkeni yalnız mesh(ağ, düğüm) noktalarında mevcuttur. $\Delta t \equiv k$ ve

$\Delta x \equiv h \equiv \frac{1}{N}$ olacak şekilde eşit ve (x_i, t_m) mesh noktaları

$$x_i = i\Delta x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.1.15)$$

$$t_m = m\Delta t = mk, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.16)$$

olarak alınır.

Bir $P(ih, mk)$ mesh noktası üzerinde U nun değeri

$$U_p = U(ih, mk) \cong U_{i,m} \cong U_i^m \quad (1.1.17)$$

ifadelerinden biri ile sunulur.

Bunların kullanılması ve hataların ihmal edilmesi ile birinci ve ikinci mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşımları formülleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} \quad (1.1.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} \quad (1.1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h} \quad (1.1.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} \quad (1.1.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{k} \quad (1.1.22)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^m - 2U_{i+1}^m + U_{i+2}^m}{h^2} \quad (1.1.23)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2}^m - 2U_{i-1}^m + U_i^m}{h^2} \quad (1.1.24)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^m - 2U_i^m + U_{i+1}^m}{h^2} \quad (1.1.25)$$

olarak elde edilirler. (1.1.18), (1.1.19) , (1.1.20) ile x 'e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta İleri (Forward) , Geri (Backward) ve Merkezi (Central) fark formülleri denir. Benzer biçimde (1.1.21) , (1.1.22) ile verilen t ' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki-nokta İleri ve Geri fark formülleri denir. (1.1.23), (1.1.24), (1.1.25) ile verilen x 'e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla üç-nokta İleri, Geri ve Merkezi fark formülleri denir.

1.2.5. Burgers Denklemi

Bu kısımda test problem olarak kullanılacak olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

Burges denkleminin analitik çözümü yapılacaktır.

1.2.6. Denklemin Analitik Çözümü

Burges denklemi quasi (yarı)-lineer kısmı diferansiyel denklem olduğundan analitik çözümünün doğrudan bulunması ve bu denkleme bilinen nümerik çözüm metotlarının

uygulanması zordur. Fakat Burgers denklemi bir dönüşüm yardımıyla lineer hale getirilip çözülebilen lineer olmayan denklemlerden birisidir[24].

1.2.7. Hopf-Cole Dönüşümü

Hopf 1950 yılında[23],

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \quad (1.1.26)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımladı. Burada $\theta(x, t)$;

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1.1.27)$$

ısı denkleminin bir çözümü ve $U(x, t)$ 'de (1.1) denkleminin çözümüdür. Bu dönüşümle Burgers denkleminin çözülebileceği Hopf ifade etmiş, 1951 yılında ise Cole aşağıda gösterilen teoremleri ifade ederek (1.1.27) ısı denklemini ile (1.1) Burgers denklemini arasındaki ilişkiyi ispatlamıştır[24].

Teorem 1.2.1.

$\theta(x, t)$; fonksiyonu

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

ısı denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu durumda;

$$U(x,t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dir. Burada $U(x,t)$;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Burgers denkleminin çözümüdür[21].

İspat:

$f = f(x,t)$ kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$U(x,t) = f_x(x,t) \tag{1.1.28}$$

Olsun. (1.1.28) denklemi (1.1)'de yerinde yazılırsa,

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = v f_{xxx} \tag{1.1.29}$$

elde edilir.

$f_{xt} = f_{tx}$ olduğu göz önünde bulundurarak, (1.1.29) denklemi x 'e göre integre edilebilir.

Böylece

$$\int f_x dx + \int f_x f_{xx} dx = \int v f_{xxx} dx$$

$$f_t + \frac{1}{2}(f_x)^2 = v f_{xx} \quad (1.1.30)$$

olur.

$\theta(x, t)$, (1.1.27) denklemini sağlamak üzere

$$f(x, t) = F[\theta(x, t)]$$

olsun. Bu durumda (1.1.30) denklemini;

$$F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2}[F'(\theta)\theta_x]^2 = v \left\{ [F'(\theta)\theta_x]' \right\}$$

$$= v [F''(\theta)\theta_x\theta_x + F'(\theta)\theta_{xx}]$$

$$= v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx}$$

olur. (1.1.27) denklemini kullanırsa

$$F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2}[F'(\theta)\theta_x]^2 = v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx}$$

$$F'(\theta)v\theta_{xx} + \frac{1}{2}[F'(\theta)\theta_x]^2 = v F''(\theta)\theta_x^2 + v F'(\theta)\theta_{xx}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$[F'(\theta)]^2 = 2vF''(\theta)$$

bulunur.

$$P(\theta) = F'(\theta) \text{ denilirse}$$

$$[F'(\theta)]^2 = 2vF''(\theta)$$

$$[P(\theta)]^2 = 2vP'(\theta)$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2v} [P(\theta)]^2$$

$$\frac{dP}{P^2} = \frac{1}{2v} d\theta$$

$$-P^{-1} = \frac{1}{2v} (\theta + c)$$

$$P^{-1} = -\frac{1}{2v} (\theta + c)$$

$$P = -2v(\theta + c)^{-1}$$

$$\frac{dF}{d\theta} = -2v(\theta + c)^{-1}$$

$$dF = -2v(\theta + c)^{-1} d\theta$$

$$f(x,t) = F(\theta) = -2v \ln(\theta + c) + c_1$$

elde edilir. Son olarak (1.1.28) kullanılır ve $c = 0$ alınırsa;

$$U(x,t) = [-2v \ln \theta + c_1]_x \text{ yani}$$

$$U(x,t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur[24].

Şimdi $\theta(x,t)$ başlangıç değerini bulmak için, (1.1.26) dönüşümünde $x = \xi$ değişken değişimiyle 0 'dan x 'e kadar integral alınırsa (1.1.26)

$$\int_0^x U(\xi,t) d\xi = -2v \ln \theta(\xi,t) \Big|_0^x$$

$$= -2v [\ln \theta(x,t) - \ln \theta(0,t)]$$

$$= -2v \ln \left\{ \frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)} \right\}$$

$$\Rightarrow -(2v)^{-1} \int_0^x U(\xi,t) d\xi = \ln \left(\frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)} \right)$$

$$\exp \left\{ -(2v)^{-1} \int_0^x U(\xi,t) d\xi \right\} = \frac{\theta(x,t)}{\theta(0,t)}$$

$$\theta(x,t) = \theta(0,t) \exp \left\{ -(2v)^{-1} \int_0^x U(\xi,t) d\xi \right\} \quad (1.1.31)$$

bulunur. Kabul edelim ki $U(x,t)$ 'nin başlangıç değeri

$$U(x,0) = U_0(x) \quad (1.1.32)$$

olsun. Bu durumda

$$U(x,0) = U_0(x) = c_0 \exp \left\{ -(2\nu)^{-1} \int_0^x U_0(\xi) d\xi \right\} \quad (1.1.33)$$

elde edilir. Burada $c_0 = \theta(0,0)$ 'dır. Ancak (1.1.26) dan c_0 değeri (1.1) için elde edilen çözüm üzerinde etkili değildir.

Teorem 1.2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

Burgers denkleminin

$$U(x,t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta}$$

ile verilen çözüm tektir[24].

İspat:

(1.1) in herhangi bir $U(x,t)$ çözümü (1.1.31) ile belli olan bir $\theta(x,t)$ fonksiyonu tanımlar ki bu $\theta(x,t)$ fonksiyonu (1.1.27) denklemini sağlar.

Farz edelim ki (1.1) denkleminin $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ gibi iki çözüm olsun. Başlangıç şartından dolayı $U(x,0) = V(x,0)$ 'dir. $\theta(x,t)$ 'nin başlangıç değeri, (1.1.33) ile verilen bir c_0 sabitine bağlı olarak verilir.

$\theta(x,0)$ yalnızca $U(x,0) = V(x,0)$ 'a bağlı olduğundan $\theta(x,0)$ her bir durumda c_0 sabitine kadar aynıdır. Aynı şekilde sınır değerleri için her iki çözüm aynı olduğundan, $\theta(x,t)$ çözümü aynıdır. Fakat $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ (1.1.26)'den elde edilirler.

Böylece;

$$U(x,t) = V(x,t)$$

olur[24].

1.2.8. Analitik Çözüm

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx}$$

$$U(x,0) = \sin(\pi x) \tag{1.1.34}$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \tag{1.1.35}$$

olarak verilen problemin analitik çözümünü bulalım.

Bu problem; $D = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesi üzerinde tanımlıdır. Analitik çözüm (1.1.27) ısı denkleminin karşılık gelen (1.1.26) dönüşümü ile tanımlanır. (1.1.33) ve (1.1.34) nun kullanılması ile $\theta(x,t)$ 'nin başlangıç şartı

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) = c_0 \exp\left\{-(2\nu)^{-1} \int_0^x \sin(\pi\xi) d\xi\right\}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) = c_0 \exp\left\{-(2\nu)^{-1} \int_0^x \sin(\pi\xi) d\xi\right\}$$

$$= c_0 \exp\left\{-(2)^{-1} \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi\xi)]_0^x\right\}$$

(1.1.36)

$$= c_0 \exp\left\{-(2)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\}$$

olarak elde edilir ve (1.1.26) 'nin kullanılması ile $\theta(x,t)$ için sınır şartları;

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0$$

(1.1.37)

şeklinde bulunur. Böylece (1.1), (1.1.34), (1.1.35) problemi

$$\theta = \nu \theta_{xx}$$

$$\theta_0(x) = \theta(x, 0) = c_0 \exp\left\{-(2\nu\pi)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\}$$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0 \quad (1.1.38)$$

şekline dönüşür.

(1.1.27) ısı denkleminin bir çözümü;

$$\theta(x, t) = X(x)T(t)$$

olsun.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

eşitlikleri (1.1.27) ısı denkleminde yerine yazılırsa

$$X(x)T'(t) = \nu X''(x)T(t)$$

olarak bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v} \frac{T'}{T} = -\lambda^2; \quad \lambda > 0 \quad (\text{sabit})$$

ve buradan

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T' + \lambda^2 v T = 0$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edilir. Bunların çözümleri sırasıyla

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

$$T = ce^{-\lambda^2 vt}$$

dır.

$$\theta(x, t) = X(x)T(t)$$

olduğundan

$$\theta(x, t) = [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)] [ce^{-\lambda^2 vt}]$$

dır.

$$cA_1 = A, \quad cB_1 = B$$

olmak üzere

$$\theta(x, t) = e^{-\lambda^2 vt} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)]$$

bulunur. Sınır şartlarının uygulanmasıyla

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{-\lambda^2 vt} [-A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x)]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = e^{-\lambda^2 vt} (B\lambda) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$B = 0 ,$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\theta(x, t) = Ae^{-\lambda^2 vt} \cos(\lambda x)$$

olur. Diğer sınır şartının kullanılmasıyla

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda x)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = -A\lambda e^{-\lambda^2 vt} \sin(\lambda) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\sin \lambda = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\sin(\lambda) = \sin(n\pi)$$

$$\lambda = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dır. Buradan

$$\theta_n(x, t) = A_n e^{-\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x) \quad (1.1.39)$$

denklemini elde edilir. (1.1.39) denklemini sınır şartlarını sağlar. Başlangıç şartını sağlaması için ;

$$\theta(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} A_n \cos(n\pi x)$$

olmalıdır. Böylece analitik çözüm için

$$\theta_n(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 vt} A_n \cos(n\pi x) \quad (1.1.40)$$

olarak elde edilir. Burada A_0, A_n fourier katsayılarıdır ve katsayılar alışılmış anlamda

$$A_0 = \int_0^1 \mathcal{G}_0(x) dx = c_0 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} dx \quad (1.1.41)$$

$$A_n = -2c_0 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.42)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (1.1.26)' yi kullanarak problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 \pi^2 vt} A_n \sin(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 vt} A_n \cos(n\pi x)}$$

$$U(x,t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 \pi^2 vt} A_n \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 vt} A_n \cos(n\pi x)} \quad (1.1.43)$$

olarak elde edilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Model Problemler

Problem 2.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

ile verilen Burgers denklemi

$$U(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1$$

başlangıç şartı ve

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Problemin tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) \cos(n\pi x)} \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Burada

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} dx$$

$$a_n = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dır [2].

Problem 2.1.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

ile verilen Burgers denklemi

$$U(x, 0) = 4x(1-x), \quad 0 < x < 1$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı.

Bu problemin tam çözümü yine (2.1.1) şeklindedir. Ancak burada

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\right\} dx$$

$$a_n = \int_0^1 \exp\left[-x^2(3v)^{-1}(3-2x)\right] \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dır [2].

Problem 2.1.3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

ile verilen Burgers denklemi

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp\left[\frac{1}{4v}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\right]}$$

başlangıç şartı ve

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Problemin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + [t/\exp(1/8v)]^{1/2} \exp(x^2/4vt)}$$

şeklindedir [2].

2.2. Nümerik Metotlar

Bu kısımda model problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılacak olan nümerik metotlar ele alınacaktır.

2.2.1. Burgers Denkleminin Açık Üstel Sonlu Fark Metodu İle Çözümü

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

ile verilen Burgers denkleminin bir nümerik çözümünü açık üstel sonlu fark metodu ile bulalım.

$U = U(x, t)$ olmak üzere $F(U)$ herhangi bir sürekli türevlenebilen fonksiyon olsun.

(1.1) denklemini F' 'nin türevi ile çarparsak;

$$\frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} = F'(U) \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'(U) \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \quad (2.1.2)$$

elde edilir.

$\frac{\partial F}{\partial t}$ yerine genel geri fark yaklaşımını kullanırsak (1.1) denkleminin sonlu fark yaklaşımını,

$$\frac{F(U_i^{n+1}) - F(U_i^n)}{k} = F'(U) \left(- \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \right)$$

$$\Rightarrow F'(U_i^{n+1}) = F(U_i^n) + kF'(U_i^n) \left(- \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \right)$$

olarak elde ederiz, burada k zaman adımımızdır. Eğer $F(U) = \ln U$ olarak alırsak açık üstel sonlu fark şeması;

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left(- \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \right) \right\} \quad (2.1.3)$$

şeklinde elde edilir.

2.2.1.1. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 1

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{2h} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.3) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{rv}{U_i^n} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık üstel sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.1.2. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 2

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2} \right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.3) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ -\frac{k}{4h} \left(\frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{U_i^n} \right) (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{rv}{U_i^n} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık üstel sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.1.3. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 3

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n + U_i^n}{2} \right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}\right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.3) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ -\frac{k}{4h} \left(\frac{U_{i-1}^n + U_i^n}{U_i^n} \right) (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{rv}{U_i^n} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık üstel sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.1.4. Üstel Sonlu Fark Yaklaşımı 4

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i+1}^n + U_i^n + U_{i-1}^n}{3}\right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h}\right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}\right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.3) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ -\frac{k}{6h} \left(\frac{U_{i+1}^n + U_i^n + U_{i-1}^n}{U_i^n} \right) (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + \frac{rv}{U_i^n} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık üstel sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.2. Burgers denkleminin Açık Logaritmik Sonlu Fark Metodu İle Çözümü

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b$$

ile verilen Burgers denkleminin bir nümerik çözümünü açık logaritmik sonlu fark metodu ile bulalım:

Denklemin açık üstel sonlu fark şemasının elde edilmesine benzer işlemler yapılır ve $F(U) = e^U$ olarak alınırsa açık logaritmik sonlu fark şeması

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 - k \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n + \nu k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \right\} \quad (2.1.4)$$

şeklinde elde edilir.

2.2.2.1. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 1

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong U_i^n \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}\right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 - \frac{k}{2h} U_i^n (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + rv (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık logaritmik sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.2.2. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 2

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2}\right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h}\right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2}\right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 - \frac{k}{4h} (U_i^n + U_{i+1}^n) (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + rv (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık logaritmik sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.2.3. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 3

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n + U_i^n}{2} \right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 - \frac{k}{4h} (U_{i-1}^n + U_i^n) (U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + rv (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık logaritmik sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

2.2.2.4. Logaritmik Sonlu Fark Yaklaşımı 4

$$\left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i+1}^n + U_i^n + U_{i-1}^n}{3} \right) \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \right)$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i^n \cong \left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right)$$

sonlu fark yaklaşımları (2.1.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \ln \left\{ 1 - \frac{k}{6h} (U_{i+1}^n + U_i^n + U_{i-1}^n)(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) + rv(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \right\}$$

açık logaritmik sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir.

3. BULGULAR

3.1. Model Problemlerin Nümerik Çözümleri

Bu bölümde ele alınan üç model problemin açık üstel sonlu fark metodu ve açık logaritmik sonlu fark metodu kullanılarak elde edilen nümerik çözümlerinin tam çözümler ve literatürdeki diğer çalışmalarda elde edilen nümerik çözümlerle uyumu tablolar ile sunulmuştur.

Sonuçların doğruluğunu göstermek için

$$L_2 = \|u - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - (U_N)_j|^2}$$

$$L_\infty = \|u - U_N\|_\infty = \max_j |u_j - (U_N)_j|$$

ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları kullanıldı, burada u ve U_n sırasıyla tam çözümleri ve nümerik çözümleri göstermektedir.

Problem 2.1.1.

Problem 2.1.1. için elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 3.1.-3.8. ve Şekil 3.1. ile verildi. Tablo 3.1. Problem 2.1.1.için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen çözümlerin tam çözümler ile karşılaştırılması sunmaktadır. Tablo 3.2., Problem 2.1.1. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması sunmaktadır. Tablo 3.1. ve Tablo 3.2. den görüleceği gibi h değerinin azalması ile L_2 ve L_∞ değerleri de azalmıştır. Problem

2.1.1. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerleri için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ zamanlarında elde edilen nümerik sonuçların bazı diğer yöntemler $[2, 4, 6, 19, 20]$ ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması Tablo 3.3. ile verildi. Karşılaştırma gösterdi ki sunulan yöntemler diğer yöntemlerden daha iyi sonuçlar verilmektedir. Tablo 3.4. ile Problem 2.1.1. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I LSFY-II LSFY-III LSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Problem 2.1.1. için $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II yaklaşımları ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.5. ile verildi. Tablo 3.6. ile Problem 2.1.1. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ değerleri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlere karşılaştırılması verildi. Problem 2.1.1. için $\nu = 0.005$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.7. ile sunuldu. Tablo 3.8. ile Problem 2.1.1. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerleri için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin $[2, 4, 6, 19, 20]$ metotları ile elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması verildi.

Şekil 3.1., Problem 2.1.1. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ değerleri için $t = 0.1, 0.5, 1, 2, 3$ zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı göstermektedir.

Tablo 3.1: Problem 2.1.1.için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen çözümlerin tam çözümler ile karşılaştırılması.

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109719	0.109577	0.109542	0.109538	0.109538
0.2	0.210149	0.209870	0.209800	0.209792	0.209792
0.3	0.292415	0.292010	0.291909	0.291896	0.291896
0.4	0.348578	0.348068	0.347941	0.347925	0.347924
0.5	0.372320	0.371742	0.371598	0.371581	0.371577
0.6	0.359809	0.359216	0.359069	0.359051	0.359046
0.7	0.310601	0.310062	0.309928	0.309911	0.309905
0.8	0.228352	0.227939	0.227836	0.227824	0.227817
0.9	0.120978	0.120754	0.120698	0.120691	0.120687
$L_2 \times 10^3$	0.533375	0.118971	0.015669	0.003837	
$L_\infty \times 10^3$	0.763022	0.171028	0.023216	0.006581	

Tablo 3.2: Problem 2.1.1. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.

x	$h=0.05$	$h=0.025$	$h=0.0125$	$h=0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109758	0.109587	0.109544	0.109539	0.109538
0.2	0.210214	0.209886	0.209804	0.209794	0.209792
0.3	0.292482	0.292026	0.291913	0.291899	0.291896
0.4	0.348621	0.348079	0.347943	0.347927	0.347924
0.5	0.372319	0.371742	0.371598	0.371581	0.371577
0.6	0.359760	0.359204	0.359066	0.359049	0.359046
0.7	0.310518	0.310042	0.309922	0.309908	0.309905
0.8	0.228266	0.227918	0.227831	0.227820	0.227817
0.9	0.120924	0.120740	0.120695	0.120689	0.120687
$L_2 \times 10^3$	0.524262	0.116596	0.014823	0.002661	
$L_\infty \times 10^3$	0.741868	0.164718	0.020578	0.003257	

Tablo 3.3: Problem 2.1.1. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerleri için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ zamanlarında elde edilen nümerik sonuçların bazı diğer yöntemler [2, 4, 6, 19, 20] ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması.

x	t	[4]	[6]	[19]	[20]	I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.317062	0.308776	0.31215	0.30415	0.308936	0.308962	0.308877	0.308906	0.308894
	0.6	0.248472	0.240654	0.24360	0.23629	0.240775	0.240795	0.240730	0.240750	0.240739
	0.8	0.202953	0.195579	0.19815	0.19150	0.195709	0.195725	0.195674	0.195688	0.195676
	1.0	0.169527	0.162513	0.16473	0.15861	0.162599	0.162612	0.162570	0.162578	0.162565
0.50	0.4	0.583408	0.569527	0.57293	0.56711	0.569727	0.569762	0.569652	0.569687	0.569632
	0.6	0.461714	0.447117	0.40588	0.44360	0.447307	0.447337	0.447236	0.447254	0.447206
	0.8	0.373800	0.359161	0.36286	0.35486	0.359343	0.359368	0.359278	0.359282	0.359236
	1.0	0.306184	0.291843	0.29532	0.28710	0.292026	0.292046	0.291964	0.291959	0.291916
0.75	0.4	0.638847	0.625341	0.63038	0.61874	0.625659	0.625676	0.625656	0.625519	0.625438
	0.6	0.506429	0.487089	0.49268	0.47855	0.487495	0.487513	0.487432	0.487307	0.487215
	0.8	0.393565	0.373827	0.37912	0.36467	0.374187	0.374203	0.374104	0.374003	0.373922
	1.0	0.305862	0.029726	0.03038	0.27860	0.287700	0.287714	0.287618	0.287542	0.287474

Tablo 3.4: Problem 2.1.1. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I LSFY-II LSFY-III LSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması

x	t	$\nu = 0.01$				
		LSFY I	LSFY II	LSFY III	LSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.566349	0.563461	0.569275	0.566391	0.566328
	0.15	0.512170	0.508192	0.516179	0.512216	0.512148
	0.20	0.466605	0.461797	0.471435	0.466653	0.466583
	0.25	0.428015	0.422597	0.433450	0.428060	0.427995
0.50	0.10	0.947458	0.946990	0.947969	0.947493	0.947412
	0.15	0.900161	0.898975	0.901404	0.900217	0.900098
	0.20	0.848434	0.846380	0.850543	0.848506	0.848365
	0.25	0.796829	0.793919	0.799783	0.796906	0.796762
0.75	0.10	0.860121	0.858032	0.861999	0.860018	0.241738
	0.15	0.922827	0.921039	0.924353	0.922706	0.912024
	0.20	0.962071	0.961088	0.962869	0.961985	0.961755
	0.25	0.974938	0.974474	0.975340	0.961653	0.974687

Tablo 3.5: Problem 2.1.1. için $\nu=1$, $k=10^{-4}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II yaklaşımları ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.253214	0.253214	0.253690	0.253691	0.253638
	0.15	0.156629	0.156300	0.156651	0.156651	0.156601
	0.20	0.096466	0.096244	0.096484	0.096484	0.096442
	0.25	0.059237	0.059093	0.059251	0.059251	0.059218
0.50	0.10	0.308161	0.371076	0.371662	0.371662	0.371577
	0.15	0.226869	0.226430	0.226901	0.226901	0.226824
	0.20	0.138510	0.138204	0.138536	0.138536	0.138473
	0.25	0.084566	0.084365	0.084585	0.084585	0.084538
0.75	0.10	0.272624	0.272116	0.272650	0.272649	0.272582
	0.15	0.164405	0.164047	0.164429	0.164429	0.164369
	0.20	0.099464	0.099228	0.099482	0.099482	0.099435
	0.25	0.060369	0.060219	0.060382	0.060382	0.060347

Tablo 3.6: Problem 2.1.1. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ değerleri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlere karşılaştırılması.

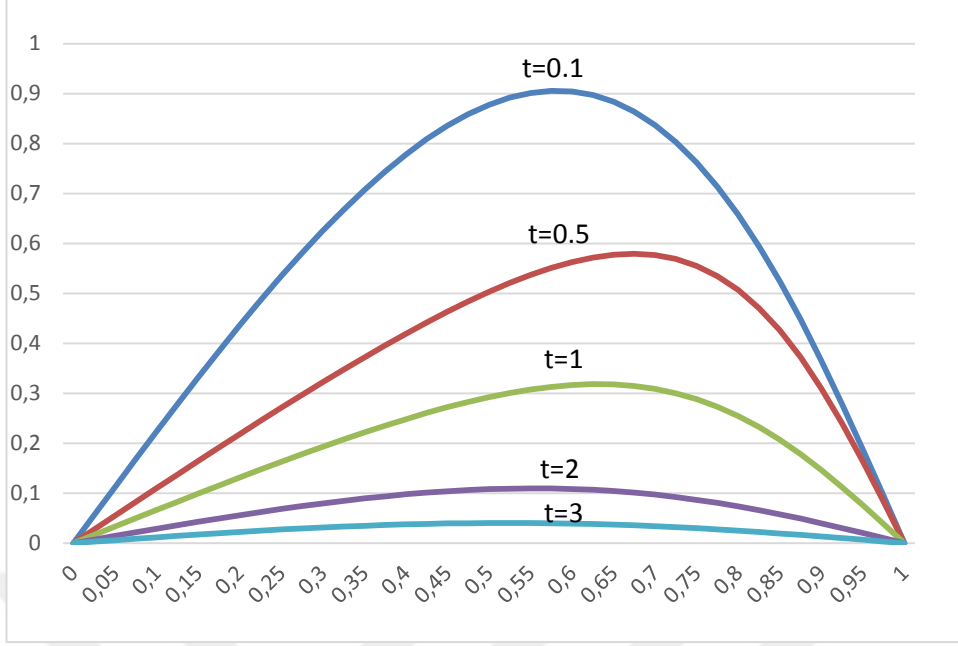
x	t	$\nu = 0.01$		
		LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.566349	0.566391	0.566328
	0.15	0.512170	0.512216	0.512148
	0.20	0.466605	0.466650	0.466583
	0.25	0.428015	0.428057	0.427995
0.50	0.10	0.947458	0.947493	0.947414
	0.15	0.900161	0.900217	0.900098
	0.20	0.848434	0.848503	0.848365
	0.25	0.796829	0.796902	0.796762
0.75	0.10	0.860121	0.860018	0.860134
	0.15	0.922827	0.922706	0.922756
	0.20	0.962071	0.961984	0.961891
	0.25	0.974938	0.974912	0.974689

Tablo 3.7: Problem 2.1.1. için $\nu=0.005$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.005$		
		LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	3	0.075227	0.075229	0.075227
	5	0.046964	0.046964	0.046963
	10	0.024217	0.024217	0.024217
	15	0.016308	0.016308	0.016308
0.50	3	0.150409	0.150413	0.150408
	5	0.093920	0.093922	0.093920
	10	0.048422	0.048422	0.048421
	15	0.032442	0.032441	0.032439
0.75	3	0.225499	0.225505	0.225498
	5	0.140837	0.140838	0.140832
	10	0.071173	0.071160	0.071134
	15	0.044174	0.044155	0.044133

Tablo 3.8: Problem 2.1.1. için $\nu=0.1$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerleri için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin [2,4,6,19,20] metotları ile elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümlerle karşılaştırılması

x	t	[4]	[6]	[19]	[20]	I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.317062	0.308776	0.31215	0.30415	0.308936	0.308962	0.308877	0.308906	0.308894
	0.6	0.248472	0.240654	0.24360	0.23629	0.240775	0.240795	0.240730	0.240750	0.240739
	0.8	0.202953	0.195579	0.19815	0.19150	0.195709	0.195725	0.195674	0.195688	0.195676
	1.0	0.169527	0.162513	0.16473	0.15861	0.162599	0.162612	0.162570	0.162578	0.162565
0.50	0.4	0.583408	0.569527	0.57293	0.56711	0.569727	0.569762	0.569652	0.569687	0.569632
	0.6	0.461714	0.447117	0.40588	0.44360	0.447307	0.447337	0.447236	0.447254	0.447206
	0.8	0.373800	0.359161	0.36286	0.35486	0.359343	0.359368	0.359278	0.359282	0.359236
	1.0	0.306184	0.291843	0.29532	0.28710	0.292026	0.292046	0.291964	0.291959	0.291916
0.75	0.4	0.638847	0.625341	0.63038	0.61874	0.625659	0.625676	0.625656	0.625519	0.625438
	0.6	0.506429	0.487089	0.49268	0.47855	0.487495	0.487513	0.487432	0.487307	0.487215
	0.8	0.393565	0.373827	0.37912	0.36467	0.374187	0.374203	0.374104	0.374003	0.373922
	1.0	0.305862	0.029726	0.03038	0.27860	0.287700	0.287714	0.287618	0.287542	0.287474



Şekil 3.1: Problem 2.1.1. için $\nu=0.1$, $h=0.0125$, $k=10^{-5}$ değerleri için $t=0.1,0.5,1,2,3$ zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı.

Problem 2.1.2.

Problem 2.1.2. için elde edilen nümerik sonuçlar Tablo 3.9.-3.21. ile verildi. Problem 2.1.2. için $\nu=0.01$, $k=10^{-5}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.9. ile verildi. Tablo 3.10. ile Problem 2.1.2. için $\nu=0.01$, $k=10^{-5}$, $h=0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. Problem 2.1.2. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$, $h=0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.11. ile sunuldu. Tablo 3.12. ile Problem 2.1.2. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.

Tablo 3.13. ile Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II yaklaşımlarıyla elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.. Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.14. ile sunuldu. Tablo 3.15 Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablo 3.16 Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablo 3.17. ile Problem 2.1.2 için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanların da ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması sunulmaktadır. Tablo 3.18 Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin karşılaştırılması sunulmaktadır. Tablo 3.19. ile Problem 2.1.2. için $\nu = 1$ ve h nın farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması. sunuldu. Tablo 3.18. ve Tablo 3.19 dan h değerinin azalması ile L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı görülmektedir. Tablo 3.20. ile Problem 2.1.2. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerleri için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ zamanlarında elde edile nümerik sonuçların $[2, 4, 6, 19, 20]$ yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması verildi. Tablo 3.21. ile Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II yaklaşımı ile elde edile sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Tablo 3.22. Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Problem 2.1.2. için $\nu = 0.005$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması Tablo 3.23. ile sunuldu.

Tablo 3.9: Problem 2.1.2. için $\nu = 1.0$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$				
		ÜSFY-I	ÜSFY-II	ÜSFY-III	ÜSFY-IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.253648	0.253195	0.254107	0.253652	0.261480
	0.15	0.156613	0.156284	0.156945	0.156615	0.161478
	0.20	0.096453	0.096231	0.096677	0.096454	0.099470
	0.25	0.059227	0.059084	0.059372	0.059228	0.059218
0.50	0.10	0.371598	0.371047	0.372149	0.371598	0.383422
	0.15	0.226845	0.226406	0.227283	0.226844	0.234055
	0.20	0.138491	0.138186	0.138798	0.138491	0.142888
	0.25	0.084552	0.084351	0.084753	0.084552	0.087233
0.75	0.10	0.272603	0.272095	0.273103	0.272597	0.281573
	0.15	0.164388	0.164029	0.164744	0.164385	0.169738
	0.20	0.099450	0.099215	0.099685	0.099449	0.102655
	0.25	0.060359	0.060209	0.060508	0.060358	0.062290

Tablo 3.10: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$, $h = 0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.01$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	ÜSFY III	ÜSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.566351	0.563463	0.569277	0.566393	0.566328
	0.15	0.512173	0.508195	0.516182	0.512219	0.512148
	0.20	0.466608	0.461800	0.471437	0.466653	0.466583
	0.25	0.428018	0.422600	0.433452	0.428060	0.427995
0.50	0.10	0.947459	0.946991	0.947970	0.947494	0.947412
	0.15	0.900162	0.898976	0.901406	0.848506	0.900098
	0.20	0.848437	0.846383	0.850546	0.796906	0.848365
	0.25	0.796833	0.793923	0.799786	0.796906	0.796762
0.75	0.10	0.860123	0.858034	0.862001	0.860021	0.886767
	0.15	0.922829	0.921041	0.924355	0.922707	0.912024
	0.20	0.962072	0.961089	0.962870	0.961985	0.961755
	0.25	0.974938	0.974475	0.975341	0.974913	0.974687

Tablo 3.11: Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$, $h = 0.0125$ ve farklı t zamanlarında ÜSFY-I, ÜSFY-II, ÜSFY-III, ÜSFY-IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	ÜSFY III	ÜSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.253214	0.253214	0.254125	0.253670	0.253638
	0.15	0.156629	0.156300	0.156631	0.156631	0.156601
	0.20	0.096466	0.096244	0.096689	0.096467	0.096442
	0.25	0.059237	0.059093	0.059381	0.059237	0.059218
0.50	0.10	0.308161	0.371076	0.372177	0.371626	0.371577
	0.15	0.226869	0.226430	0.226868	0.226868	0.226824
	0.20	0.138510	0.138204	0.138816	0.138510	0.138473
	0.25	0.084566	0.084365	0.084767	0.084566	0.084538
0.75	0.10	0.272624	0.272116	0.273124	0.272618	0.272582
	0.15	0.164405	0.164047	0.164403	0.164403	0.164369
	0.20	0.099464	0.099228	0.099698	0.099463	0.099435
	0.25	0.060369	0.060219	0.060518	0.060368	0.060347

Tablo 3.12. Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$			
		I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	LSFY I	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.261534	0.261535	0.261019	0.261480
	0.15	0.161529	0.161529	0.161147	0.161478
	0.20	0.099513	0.099513	0.099249	0.099470
	0.25	0.061121	0.061121	0.060947	0.281573
0.50	0.10	0.383509	0.383510	0.382872	0.383422
	0.15	0.234135	0.234135	0.233619	0.234055
	0.20	0.142953	0.142953	0.142587	0.142888
	0.25	0.087282	0.087282	0.087037	0.087233
0.75	0.10	0.281643	0.281643	0.281065	0.281573
	0.15	0.169800	0.169800	0.169382	0.169738
	0.20	0.102704	0.102704	0.102424	0.102655
	0.25	0.062326	0.062326	0.062145	0.062290

Tablo 3.13. Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II yaklaşımlarıyla elde edilen sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yaklaşımları ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.01$				
		LSFY I	LSFY II	I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.607367	0.604620	0.607370	0.607373	0.607363
	0.15	0.549427	0.545451	0.099470	0.549435	0.549421
	0.20	0.499835	0.494861	0.499841	0.499845	0.499828
	0.25	0.457421	0.451681	0.457427	0.457431	0.457413
0.50	0.10	0.956027	0.955690	0.956022	0.956023	0.956007
	0.15	0.914457	0.913546	0.914453	0.914454	0.914426
	0.20	0.867172	0.865497	0.867170	0.867172	0.867136
	0.25	0.818373	0.815873	0.818373	0.818376	0.818337
0.75	0.10	0.886734	0.885294	0.886728	0.886730	0.886767
	0.15	0.938505	0.937346	0.938493	0.938495	0.938437
	0.20	0.969880	0.961515	0.969863	0.969864	0.969741
	0.25	0.979643	0.979344	0.979625	0.979625	0.979469

Tablo 3.14: Problem 2.1.2. için $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$				
		LSFY I	LSFY II	LSFY III	LSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.261019	0.261495	0.261969	0.261495	0.261480
	0.15	0.161147	0.161492	0.161837	0.161492	0.161478
	0.20	0.099249	0.099482	0.099715	0.099482	0.099470
	0.25	0.060947	0.061098	0.061249	0.061098	0.061088
0.50	0.10	0.382872	0.383444	0.384015	0.383444	0.383422
	0.15	0.233619	0.234076	0.234535	0.234076	0.234055
	0.20	0.142587	0.142907	0.143227	0.142907	0.142888
	0.25	0.087037	0.087248	0.087459	0.087248	0.087233
0.75	0.10	0.281065	0.281589	0.282117	0.281589	0.281573
	0.15	0.169382	0.169755	0.170130	0.169755	0.169738
	0.20	0.102424	0.102670	0.102917	0.102670	0.102655
	0.25	0.062145	0.062302	0.062459	0.062302	0.062290

Tablo 3.15: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında LSFY I, LSFY II, LSFY III, LSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.01$				
		LSFY I	LSFY II	LSFY III	LSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.607367	0.604620	0.610167	0.607426	0.607363
	0.15	0.549427	0.545451	0.553451	0.549499	0.549421
	0.20	0.499835	0.494861	0.504846	0.499913	0.499828
	0.25	0.457421	0.451681	0.463189	0.457500	0.457413
0.50	0.10	0.956027	0.955690	0.956397	0.956053	0.956007
	0.15	0.914457	0.913546	0.915417	0.914503	0.914426
	0.20	0.867172	0.865497	0.868900	0.867234	0.867172
	0.25	0.818373	0.815873	0.820919	0.818445	0.818337
0.75	0.10	0.886734	0.885294	0.888022	0.886657	0.886704
	0.15	0.938505	0.937346	0.939496	0.938422	0.938410
	0.20	0.969880	0.961515	0.970385	0.969824	0.969732
	0.25	0.979643	0.979344	0.979909	0.979629	0.979467

Tablo 3.16: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve $h = 0.0125$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması

x	t	$\nu = 0.01$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	ÜSFY III	ÜSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.607369	0.604622	0.610169	0.607429	0.607363
	0.15	0.549430	0.545454	0.553453	0.549502	0.549421
	0.20	0.499838	0.494864	0.504849	0.499916	0.499828
	0.25	0.457424	0.451685	0.463193	0.457503	0.457413
0.50	0.10	0.956027	0.955691	0.956398	0.956054	0.956007
	0.15	0.914458	0.913548	0.915418	0.914505	0.914426
	0.20	0.867174	0.865499	0.868902	0.867237	0.867172
	0.25	0.818376	0.815876	0.820922	0.818448	0.818337
0.75	0.10	0.886736	0.885295	0.888023	0.886658	0.886704
	0.15	0.938506	0.937347	0.939497	0.938423	0.938410
	0.20	0.969880	0.969263	0.970386	0.969825	0.969732
	0.25	0.979643	0.979344	0.979909	0.979629	0.979467

Tablo 3.17: Problem 2.1.2 için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve $h=0.0125$ değerleri için farklı t zamanların da ÜSFY I, ÜSFY II, ÜSFY III, ÜSFY IV yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1.0$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	ÜSFY III	ÜSFY IV	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.261509	0.261038	0.261988	0.261514	0.261480
	0.15	0.161507	0.161163	0.161853	0.161508	0.161478
	0.20	0.099494	0.099262	0.099728	0.099495	0.099470
	0.25	0.061107	0.060957	0.061259	0.061107	0.061088
0.50	0.10	0.383473	0.233644	0.384045	0.383473	0.383422
	0.15	0.234102	0.234076	0.234560	0.234102	0.234055
	0.20	0.142926	0.142606	0.143247	0.142926	0.142888
	0.25	0.087262	0.087052	0.087473	0.087262	0.087233
0.75	0.10	0.281617	0.281087	0.282139	0.281611	0.281573
	0.15	0.169776	0.169400	0.170149	0.169774	0.169738
	0.20	0.102685	0.102438	0.102931	0.102684	0.102655
	0.25	0.062312	0.062156	0.062469	0.062302	0.062290

Tablo 3.18: Problem 2.1.2. için $\nu=1$, $k=10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin karşılaştırılması.

x	$h=0.05$	$h=0.025$	$h=0.0125$	$h=0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.113078	0.112932	0.112896	0.112892	0.112892
0.2	0.216618	0.216332	0.216260	0.216251	0.216252
0.3	0.301498	0.301082	0.300978	0.300966	0.300966
0.4	0.359535	0.359011	0.358880	0.358864	0.358863
0.5	0.384187	0.383592	0.383444	0.383426	0.383422
0.6	0.371446	0.370834	0.370682	0.370663	0.370658
0.7	0.320787	0.320229	0.320089	0.320073	0.320066
0.8	0.235926	0.235498	0.235391	0.235378	0.235371
0.9	0.125021	0.124788	0.124730	0.124723	0.124718
$L_2 \times 10^3$	0.550267	0.122888	0.016284	0.004151	
$L_\infty \times 10^3$	0.787827	0.176631	0.024176	0.007117	

Tablo 3.19: Problem 2.1.2. için $\nu=1$ ve h nin farklı değerleri için $t=0.1$ zamanında LSFY-III yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.

x	$h=0.05$	$h=0.025$	$h=0.0125$	$h=0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.113120	0.112943	0.112899	0.112893	0.112892
0.2	0.216688	0.216349	0.216264	0.216254	0.216252
0.3	0.301571	0.301100	0.300983	0.300969	0.300966
0.4	0.359582	0.359023	0.358883	0.358866	0.358863
0.5	0.384187	0.383592	0.383444	0.383426	0.383422
0.6	0.371393	0.370821	0.370678	0.370661	0.370658
0.7	0.320698	0.320207	0.320084	0.320069	0.320066
0.8	0.235834	0.235475	0.235385	0.235374	0.235371
0.9	0.124963	0.124774	0.124727	0.124721	0.124718
$L_2 \times 10^3$	0.540670	0.120375	0.015356	0.002836	
$L_\infty \times 10^3$	0.764293	0.169825	0.021208	0.003387	

Tablo 3.20: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerleri için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ zamanlarında elde edile nümerik sonuçların $[2, 4, 6, 19, 20]$ yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar ve tam çözümler ile karşılaştırılması.

x	t	$k = 10^{-5}$			$k = 10^{-4}$					
		[4]	[6]	[19]	[20]	I-EFDM[2]	FI-EFDM[2]	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.306529	0.317399	0.32091	0.31247	0.317567	0.317595	0.317502	0.317536	0.317523
	0.6	0.236051	0.246058	0.24910	0.24148	0.246175	0.246196	0.246127	0.246150	0.246138
	0.8	0.190181	0.199437	0.20211	0.19524	0.199589	0.199606	0.199552	0.199568	0.199555
	1.0	0.156646	0.165529	0.16782	0.16153	0.165633	0.165647	0.165602	0.165612	0.165599
0.50	0.4	0.565994	0.584429	0.58788	0.58176	0.584627	0.584664	0.584551	0.584592	0.584537
	0.6	0.438926	0.457888	0.46174	0.45414	0.458077	0.458110	0.458004	0.458026	0.457976
	0.8	0.348328	0.367320	0.37111	0.36283	0.367507	0.367533	0.367439	0.367446	0.367398
	1.0	0.280038	0.298271	0.30183	0.29336	0.298455	0.298476	0.298391	0.298388	0.298343
0.75	0.4	0.626990	0.645527	0.65054	0.63858	0.645850	0.645866	0.645848	0.645703	0.645616
	0.6	0.477908	0.502564	0.50825	0.49362	0.502969	0.502987	0.502904	0.502774	0.502676
	0.8	0.360630	0.385232	0.39068	0.37570	0.385613	0.385630	0.385527	0.385422	0.385336
	1.0	0.272623	0.295779	0.30057	0.28663	0.296092	0.296106	0.296006	0.295928	0.295857

Tablo 3.21: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ değerleri için farklı t zamanlarında ÜSFY I, ÜSFY II yaklaşımı ile elde edile sonuçların I-EFDM ve FI-EFDM yöntemleri ile elde edilen sonuçlar ve tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.01$				
		ÜSFY I	ÜSFY II	I-EFDM	FI-EFDM	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.566351	0.563463	0.566353	0.566355	0.566328
	0.15	0.512173	0.508195	0.512175	0.512179	0.512148
	0.20	0.466608	0.461800	0.428021	0.466614	0.466583
	0.25	0.428018	0.422600	0.428021	0.428024	0.427995
0.50	0.10	0.947459	0.946991	0.947453	0.947454	0.947414
	0.15	0.900162	0.898976	0.900157	0.900159	0.900098
	0.20	0.848437	0.846383	0.848433	0.848436	0.848365
	0.25	0.796833	0.793923	0.796831	0.796835	0.796762
0.75	0.10	0.860123	0.858034	0.922814	0.860119	0.860134
	0.15	0.922829	0.921041	0.922814	0.922817	0.961891
	0.20	0.962072	0.961089	0.962051	0.962053	0.961891
	0.25	0.974938	0.974475	0.974916	0.974916	0.974689

Tablo 3.22: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.01$		
		LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	0.10	0.607367	0.607426	0.607363
	0.15	0.549427	0.549499	0.549421
	0.20	0.499835	0.499913	0.499828
	0.25	0.457421	0.457500	0.457413
0.50	0.10	0.956027	0.956053	0.956007
	0.15	0.914457	0.914503	0.914426
	0.20	0.867172	0.867234	0.867136
	0.25	0.818373	0.818445	0.818337
0.75	0.10	0.886734	0.886657	0.886704
	0.15	0.938505	0.938422	0.938410
	0.20	0.969880	0.969824	0.969732
	0.25	0.979643	0.979629	0.979467

Tablo 3.23: Problem 2.1.2. için $\nu = 0.005$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değeri için LSFY-I ve LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 0.005$		
		LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.25	3	0.076392	0.076398	0.076391
	5	0.047415	0.047417	0.047415
	10	0.024336	0.024337	0.024336
	15	0.016362	0.016362	0.016362
0.50	3	0.152681	0.152692	0.152679
	5	0.094815	0.094819	0.094814
	10	0.048661	0.048662	0.048660
	15	0.032553	0.032553	0.032550
0.75	3	0.228770	0.228785	0.228768
	5	0.142160	0.142165	0.142154
	10	0.071557	0.071544	0.071517
	15	0.044370	0.044352	0.044328

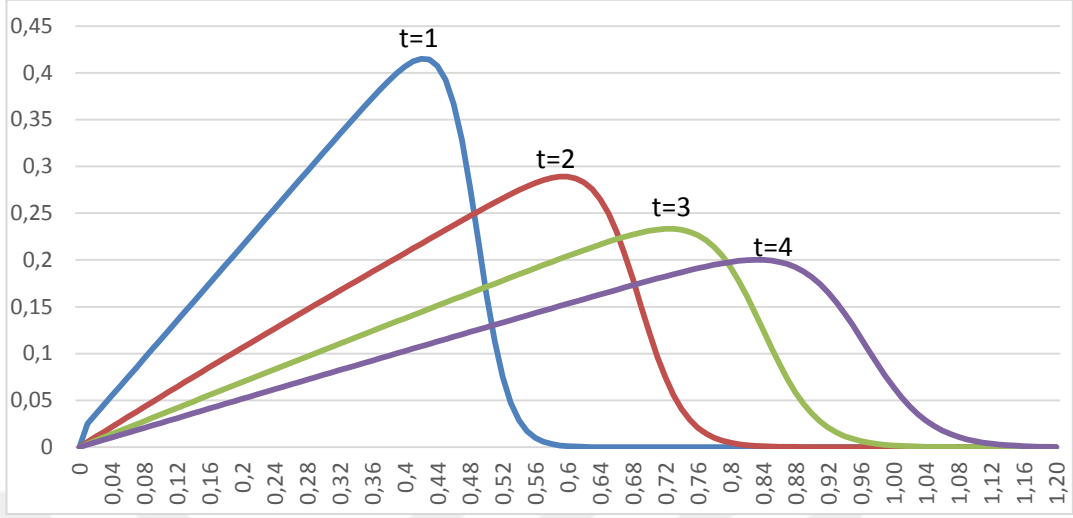
Problem 2.1.3.

Problem 2.1.3. için $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-4}$ değerlerinde ve farklı zamanlarda LSFY-I, LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması Tablo 3.24. ile verildi.

Şekil 3.2. Problem 2.1.3. için $a = 0$, $b = 1.2$, $h = 0.01$, $k = 10^{-4}$ değerleri için $t = 1, 2, 3, 4$ zamanların da LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı.

Tablo 3.24: Problem 2.1.3. için $a=0$, $b=8$, $\nu=0.5$, $h=0.0125$ ve $k=10^{-4}$ değerlerinde ve farklı zamanlarda LSFY-I, LSFY-III yaklaşımları ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümler ile karşılaştırılması.

	$t=1.5$			$t=3.0$			$t=4.5$		
x	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm	LSFY-I	LSFY-III	Tam Çözüm
0.5	0.153273	0.153278	0.153273	0.064262	0.064264	0.064262	0.037989	0.037990	0.037989
1.0	0.265773	0.265777	0.265771	0.118804	0.118807	0.118804	0.071869	0.071870	0.071869
1.5	0.304127	0.304128	0.304125	0.155087	0.155090	0.155087	0.097930	0.097932	0.097931
2.0	0.261419	0.261419	0.261422	0.167623	0.167625	0.167623	0.113386	0.113389	0.113387
2.5	0.172163	0.172164	0.172169	0.156294	0.156295	0.156296	0.116983	0.116985	0.116984
3.0	0.088065	0.088067	0.088070	0.127378	0.127379	0.127382	0.109489	0.109490	0.109491
3.5	0.035819	0.035820	0.035820	0.091320	0.091321	0.091324	0.093682	0.093684	0.093685
4.0	0.011859	0.011859	0.011859	0.057971	0.057972	0.057975	0.073602	0.073603	0.073605
4.5	0.003247	0.003247	0.003246	0.032842	0.032843	0.032844	0.053297	0.053298	0.053300
5.0	0.000741	0.000741	0.000741	0.016734	0.016735	0.016735	0.035713	0.035714	0.035717
$L_2 \times 10^3$	0.006373	0.007707		0.017987	0.017903		0.408777	0.408686	
$L_\infty \times 10^3$	0.006599	0.006304		0.038152	0.038152		0.743130	0.743127	



Şekil 3.2: Problem 2.1.3. için $a=0, b=1.2, h=0.01, k=10^{-4}$ değerleri için $t=1,2,3,4$ zamanların da LSFY-I yaklaşımı ile elde edilen nümerik sonuçların davranışı.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde bir boyutlu Burgers denklemi farklı başlangıç ve sınır şartları ile ele alındı. Ele alınan model problemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için logaritmik sonlu fark yaklaşımları ve üstel sonlu fark yaklaşımları kullanıldı. Sonuçların doğruluğunu göstermek için üç model problem ele alındı ve L_2, L_∞ hata normlarına bakıldı. Kullanılan sonlu fark yaklaşımları ile elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümler ve literatürdeki diğer çalışmalarda elde edilen nümerik çözümlerle uyumu tablolar ile sunuldu. Tablolardan elde edilen nümerik sonuçların literatürdeki [2,4,6,19,20] çalışmalarında elde edilen nümerik çözümler ve tam çözümler ile uyumlu olduğu görüldü. Böylece sunulan yaklaşımların bir boyutlu Burgers denklemini çözmek için uygun yaklaşımlar olduğu kanaatine varıldı.

5.KAYNAKLAR

- [1] Bahadır, A. R., (1999). Numerical Solution For one- dimensional Burgers' equation using a fully implicit finite-difference method. *International Journal of Applied Mathematics*, 1, 897-909.
- [2] İnan, B. and Bahadır, A.R., (2013). Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods. *Pramana journal of physics*, 881, 547-556.
- [3] Kutluay, S., Bahadır, A.R., Özdeş, A.,(1999). Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103, 251-261.
- [4] Gülsu, M. And Öziş, T., (2005). Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 171, 1192-1200.
- [5] Kadalbajoo, M. K. and Awasthi A., (2006). A Numerical Method Based on Crank-Nicolson Scheme for Burgers' Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 182 (2),1430-1442. doi:10.1016/j.amc.2006.05.030.
- [6] Gülsu, M., (2006). A finite difference approach for solution of Burgers' equation. *Appl. Math. Comput.* 175, 1245-1255.
- [7] Aksan, E. N., and Özdeş, A. (2004). A numerical solution of Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 156, 395-402.
- [8] Sari, M. and Gürarlan, G.,(2009). Sixth order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 208, 475-487.
- [9] Zhang, P.G. and Wang, J.P., (2012). A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (3), 892-898, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.06.064>.

- [10] Aksan, E. N., Özdeş, A., Öziş T., (2006). A numerical solution of Burgers' equation based on least squares approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 176, 270-279.
- [11] Xie, S., Li, G., Yi, S. and Heo, S., (2010). A compact finite difference method for solving Burgers' equation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 62, 747-764.
- [12] Öziş, T., Aksan, E. N. and Özdeş, A. (2003). A finite element approach for solution of Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 139, 417–428.
- [13] Aksan, E. N., (2005). A numerical solution of Burger's equation by finite element method constructed on the method of discretization in time. *Applied Mathematics and Computation*, 170, 895-904.
- [14] Abdou, M. A. and Soliman, A. A., (2005). Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181, 245-251.
- [15] Bhattacharya, M. C. (1990) Finite Difference Solutions of Partial Differential Equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6, 173-184.
- [16] Handschuh, R. F., Keith, T. G. (1992) Applications of an exponential finite-difference technique, *Numerical Heat Transfer*, 22, 363-378.
- [17] Evans, D.J. and Abdullah, A.R., (1984). The group explicit method for the solution of Burgers' equation. *Computing*, 32, 239-253.
- [18] Cole, J. D. (1951). On a quasi linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Apply. Math.* 9, 225-236.
- [19] Kutluay, S., Esen, A. and Dag, I. (2004). Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167, 21-33.

- [20] Salkuyeh, D. K. and Sharafeh, F. S., (2009). On the numerical solution of the Burgers's equation. *Int. J. Comput. Math.* 86, 1334-1344.
- [21] İnan, B. and Bahadır, A. R., (2013). An explicit exponential finite difference method for the Burgers' equation. *European International Journal of Science and Technology*, 2(10), 61-72.
- [22] Bahadır, A. R. (2005) Exponential finite-difference method applied to Korteweg-de Vries equation for small times. *Applied Mathematics and Computation* 160, 675-682.
- [23] Bhattacharya, M. C.(1985). An Explicit Conditionally Stable Finite Difference Equation for Heat Conduction Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 239-265.
- [24] Aksan, E. N., (1999). Lineerleştirilmiş Burgers' Denklemi için Sonlu Eleman Teknikleri. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Malatya.
- [25] Srivastava, V. K., Awasthi, M. K. And Singh,S. (2013). An implicit logarithm finite difference technique for two dimensional coupled viscous Burgers' equation. *AIP Advances* 3, 122105.
- [26] James Stewart (2007). *Kalkülüs: Diferansiyel ve İntegral Hesap*, TÜBA yayınları, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Abidin GÖKSU
Doğum Yeri ve Tarihi :Adıyaman/ 10.12.1982
Yabancı Dili :İngilizce
İletişim (e-posta) :a.goksu0054@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Adıyaman Lisesi/ 2002

Lisans : Erciyes Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü /2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Kars İl Emniyet Müdürlüğü

Yayımları (SCI ve diğer) :

Çelikten, G., Göksu, A. and Yagub, G. (2017). Explicit Logarithmic Finite Difference Schemes For Numerical Solution of Burgers Equation. *European International Journal of Science and Technology*, 6 (5), 57-67