T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPLARDA CIRCULANT VE HURWITZ TİPLİ DİZİLER

Zafer ADIGÜZEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

KASIM-2018
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUPLARDA CIRCULANT VE HURWITZ TİPLİ DİZİLER

Zafer ADIGÜZEL
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tez çalışması 2017-FM-65 nolu proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

KASIM-2018
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Zafer Adıgüzel'in Prof. Dr. Ömür Deveci danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Gruplarda Circulant Ve Hurwitz Tipli Diziler" isimli bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . birliği. . . . . ile kabul edilmiştir.

22/ 11 / 20.18

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye	: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Sait TAŞ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Zafer Adıgüzel

Tarih

22.11.2018

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Kars-2018 Zafer ADIGÜZEL

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

GRUPLARDA CIRCULANT VE HURWITZ TİPLİ DİZİLER

Zafer ADIGÜZEL

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu çalışmada, Fibonacci-circulant, Padovan-circulant ve Jacobsthal-circulant dizilerinin karakteristik polinomları yardımıyla Hurwitz matrisleri elde edildi. Elde edilen bu matrisler yardımıyla da Fibonacci-circulant-Hurwitz, Padovan-circulant-Hurwitz ve Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizileri tanımlandı. Bu anlamda, tanımlanan bu dizilerin çeşitli özellikleri elde edildi.

Ayrıca, Padovan-circulant-Hurwitz ve Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizileri m modülüne göre incelendi ve bu dizilerin m modülüne göre periyotlarının belirlenmesi noktasında çeşitli kurallar verildi. Bu dizilerin üreteç matrislerinin m modülüne göre indirgenmeleri suretiyle bu matrisler üreteç olarak seçilip devirli gruplar üretildi. Üretilen devirli grupların mertebeleri ile dizilerin m modülüne göre periyotları arasında bağıntılar oluşturuldu.

Buna ek olarak, (x, y) geren çifti için SD_{2^m} semidihedral grubundaki birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbitlerinin periyotları belirlendi.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci-circulant-Hurwitz Dizileri, Padovan-circulant-Hurwitz Dizileri, Jacobsthal-circulant-Hurwitz Dizileri, Circulant Matrisi, Hurwitz Matrisi, Matris, Grup, Periyot.

2018, 121 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

CIRCULANT AND HURWITZ TYPE IN GROUPS

Zafer ADIGÜZEL

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

1Supervisor: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

In this study, Hurwitz matrices were obtained with the characteristic polynomials of Fibonacci-circulant, Padovan-circulant and Jacobsthal-circulant sequences. Fibonacci-circulant-Hurwitz, Padovan-circulant-Hurwitz and Jacobsthal-circulant-Hurwitz sequences were defined with the aid of the obtained these matrices. In this sense, miscellaneous properties of these identified sequences were obtained.

Furthermore, Padovan-circulant-Hurwitz and Jacobsthal-circulant-Hurwitz sequences were examined modulo m and various rules were given to determine the periods of these sequences modulo m. The cyclic groups have been obtained such that these matrices are chosen as generators by reducing the generator matrix of these sequences modulo m. The relations between the periods of the sequences modulo m and the orders of the cyclic groups obtained were generated.

In addition, the periods of Fibonacci-circulant orbits of the first and second kind in SD_{2^m} semidihedral groups which have (x, y) generating pair were determined.

Key Words: Fibonacci-circulant-Hurwitz Sequences, Padovan-circulant-Hurwitz Sequences, Jacobsthal-circulant-Hurwitz Sequences, Circulant Matrix, Hurwitz Matrix, Matrix, Group, Period.

2018, 121 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	:	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
G	:	Grup
$\lvert G \rvert$	:	Grubun mertebesi
$G=\langle A\rangle$	:	A dan üretilen grup
G/H	:	G nin H ye göre bölüm grubu
$H \leq G$	:	H, G nin alt grubu
$H\Delta G$	:	H, G nin normal alt grubu
$\langle H,+,.\rangle$	:	Halka
$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$	:	$m\times n$ boyutlu matris
$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$	:	$n\times n$ boyutlu kare matris
A'	:	A matrisinin transpozu
I_n	:	$n\times n$ mertebeden birim matris
E	:	Elemanter matris
$detA$	:	A matrisinin determinantı
$per(A)$	:	A matrisinin permanenti
H_n	:	Hurwitz matrisi
$K\left(k_1,k_2,\ldots,k_v\right)$	:	$v\times v$ tipli bir Companion matris
V_n	:	Vandermonde matrisi
$M\circ K$	:	M ve K matrislerinin Hadamard çarpımı
$\{F_n\}$	:	Fibonacci dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$	:	k -basamak Fibonacci dizisi
$\{P_n\}$	:	Pell dizisi

$\left\{P_n^k\right\}$	:	Genelleştirilmiş k-Pell sayıları
$\left\{J_n\right\}$	:	Jacobsthal dizisi
$\left\{J_n^i\right\}$	:	Genelleştirilmiş k-Jacobsthal sayıları
$\left\{P(n)\right\}$	:	Padovan dizisi
$M^{(1)}$	:	Birinci tür Fibonacci-circulant matrisi
$M^{(2)}$	:	İkinci tür Fibonacci-circulant matrisi
J_n^C	:	Genelleştirilmiş Jacobsthal-circulant dizisi
$M_J^{(1)}$	:	Birinci tür Jacobsthal-circulant matrisi
$M_J^{(2)}$	:	İkinci tür Jacobsthal-circulant matrisi
$M_J^{(3)}$	:	Üçüncü tür Jacobsthal-circulant matrisi
$M_P^{(1)}$	:	Birinci tür Padovan-circulant matrisi
$M_P^{(2)}$	:	İkinci tür Padovan-circulant matrisi
$M_P^{(3)}$	:	Üçüncü tür Padovan-circulant matrisi
$M_P^{(4)}$	:	Dördüncü tür Padovan-circulant matrisi
$PH^{(1)}$	:	Birinci tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisi
$PH^{(2)}$	:	İkinci tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisi
$PH^{(3)}$	:	Üçüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisi
$PH^{(4)}$	:	Dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisi
$F_{(x,y)}^1\left(SD_{2^m}\right)$	:	Birinci tür Fibonacci-circulant orbiti
$F_{(x,y)}^2\left(SD_{2^m}\right)$	:	İkinci tür Fibonacci-circulant orbiti
$JH^{(1)}$	:	Birinci tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrisi
$JH^{(2)}$	:	İkinci tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrisi
$JH^{(3)}$	:	Üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrisi

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi modern bilimde indirgemeli dizilerin farklı disiplinlerde kurgulanan bazı problemlerin çözümü noktasında kullanıldığı veya doğrudan doğruya farklı bilimsel disiplinlerdeki çeşitli problemlerin, bu dizilerin yapısal özellikleri göz önüne alınarak kurgulandığı sıkça karşımıza çıkan bir durumdur. Bu tür çalışmalara örnek olarak [1, 10, 35, 54, 63] daki bilimsel çalışmaları verilebilir.

Cebirsel anlamda indirgemeli dizilerin üreteç matrisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, üstel, permanental, toplamsal temsilleri vb gibi çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmalardan güncel olanlara örnek olarak [11, 21, 23, 24, 26, 28, 29, 35, 36, 39, 44, 50, 55, 84, 89] deki çalışmaları verilebilir. Bu çalışmaların birçoğunda çeşitli sonuçlar elde edebilmek için indirgemeli dizilere karşılık gelen matrisler kullanılmıştır.

Bu durumun tam tersine matrisler kullanılarak indirgemeli dizilerin tanımlanması ise ilk olarak [4, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 29] deki çalışmalarda ortaya atılmış yeni bir yöntemdir. Deveci, Adıgüzel ve Doğan, [30] daki çalışmalarında üreteç matrislerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Hurwitz matrisleri yardımıyla Fibonacci-circulant-Hurwitz dizisini tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizinin determinant ve permanent değerlerini, üreteç fonksiyonlarını, üreteç matrislerinin kuvvetlerini ve yapısal özelliklerini kullanarak Binet formüllerini, permanental, üstel ve toplamsal temsillerini ve sonlu toplamları gibi çeşitli özelliklerini belirlemişlerdir.

Adıgüzel, Erdağ ve Deveci, [2] deki çalışmalarında üreteç matrislerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Hurwitz matrisleri yardımıyla Padovan-circulant-Hurwitz dizilerini tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizinin determinant ve permanent değerlerini, üreteç fonksiyonlarını, permanental, üstel ve toplamsal temsillerini ve sonlu toplamları gibi çeşitli özelliklerini belirlemişlerdir. Ayrıca, [3] deki çalışmalarında Padovan-circulant-Hurwitz dizilerinin m modülüne göre periyotlarını incelemişlerdir.

Gölbaşı, Adıgüzel ve Deveci, [41] deki çalışmalarında (x, y) geren çifti için SD_{2^m} semidihedral grubundaki birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbitlerinin periyotlarını belirlemişlerdir.

Deveci, Adıgüzel ve Aküzüm, [31] deki çalışmalarında üreteç matrislerinin karakteristik polinomlarına karşılık gelen Hurwitz matrisleri yardımıyla Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizilerini tanımlamışlardır. Tanımlanan bu dizinin determinant ve permanent değerlerini, üreteç fonksiyonlarını, permanental, üstel ve toplamsal temsillerini ve sonlu toplamları gibi çeşitli özelliklerini belirlemişlerdir. Buna ek olarak, Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizilerinin m modülüne göre periyotlarını incelemişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Cebirsel Yapılar

<u>*Tanım 2.1.1:*</u> K bir küme olsun. $K \times K$ dan K ya tanımlı

$$*: K \times K \to K, \quad (x, y) \to x * y$$

fonksiyonuna K içinde bir ikili işlem denir. Bu takdirde $(K, *)$ ikili işlemine cebirsel yapı denir [51].

<u>*Örnek 2.1.1:*</u> $\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \oplus b = a + b$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir ikili işlemdir.

<u>*Tanım 2.1.2:*</u> K boştan farklı bir küme ve $*$, K üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(K, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

i. $\forall x, y \in K$ için $x * y \in K$ (Kapalılık şartı)

ii. $\forall x, y, z \in K$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ (Birleşme özelliği)

iii. $\forall x \in K$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde bir $e \in K$ (Birim elemanın varlığı)

iv. K kümesindeki her bir x için e, K nin biri elemanı olmak üzere

$$x * x' = x' * x = e$$

olacak şekilde $x' \in K$ vardır (Ters elemanın varlığı).

<u>*Örnek 2.1.2:*</u> $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ kümeleri bilinen toplama işlemine göre bir gruptur.

<u>*Tanım 2.1.3:*</u> $(K, *)$ bir grup olmak üzere $\forall x, y \in K$ için $x * y = y * x$ ise bu gruba değişmeli (abelyen grubu) grup denir.

<u>*Tanım 2.1.4:*</u> Tanım 2.1.2 deki sadece *i.* ve *ii.* şartları sağlanırsa, $(K, *)$ cebirsel yapısına bir yarı grup denir.

Teorem 2.1.1: $(G,*)$ bir grup olsun. Buna göre

$i.$ G nin birimi tektir.

$ii.$ G nin her elemanının tersi tektir.

$iii.$ $a \in G$ için $a*a=a$ ise $a=e$ dir.

$iv.$ G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a,b,c \in G$ için

$a*b=a*c$ ise $a=c$ (soldan kısaltma kuralı)

$b*a=c*a$ ise $b=c$ (sağdan kısaltma kuralı)

$v.$ $a,b \in G$ için $a*x=b$ ve $y*a=b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.

$vi.$ $a \in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ dır [81].

Tanım 2.1.5: G bir grup ve $H \subseteq G$ boştan farklı bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H a, G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: $H=\{e\}$ ve $H=G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H=\{e\}$ alt grubuna aşikar alt grup ve G den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H, G nin bir öz alt grubu ise $H<G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $<A>$ ile gösterelim. Bu takdirde $<A>$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1}=H$ oluyorsa H a, G nin bir normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9: N, G nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh)=N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G:N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 2.1.10: G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $H<G$ ve $H<K\leq G$ den $K=G$ elde edilirse H a, G nin bir maksimal alt grubu denir.

$E=\{e\}$ olmak üzere $E<H$ ve $E\leq K<H$ dan $K=E$ elde edilirse H a, minimal alt grup denir.

Tanım 2.1.11: G bir grup olmak üzere $H=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen devirli alt grubu denir ve $\langle a\rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$a=\{a^n : n\in \mathbb{Z}\}=H$$

dir. Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir:

G bir grup olmak üzere G de $G=\{a^n : n\in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elamanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elamanına G nin üreteci denir ve $G=\langle a\rangle$ şeklinde gösterilir [81].

Tanım 2.1.12: G bir grup ve $a\in G$ olsun. a nın ürettiği $\langle a\rangle$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir [18].

Teorem 2.1.2: Her devirli grup değişmelidir [81].

Teorem 2.1.3: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir [81].

Teorem 2.1.4: G bir grup, $a\in G$ ve a nın mertebesi n yani $o(a)=n$ olsun. Buna göre [81]:

i. Eğer a nın mertebesi sonsuz ise bu takdirde a nın bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.

ii. Eğer a nın mertebesi sonlu ise yani $a^n = e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı n ise bu takdirde a nın ürettiği devirli grubun yani $\langle a \rangle$ nın mertebesi de n dir.

Diğer bir deyimle,

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

dir.

iii. a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k = a^l$ olması için gerek ve yeter şart $k \equiv l(mod\, n)$ olmasıdır.

iv. $o(a) = n$ sonlu olmak üzere $a^k = e$ olması için gerek ve yeter şart $n|k$ olmasıdır.

<u>*Sonuç 2.1.1:*</u> $G = a$ sonlu bir devir grubu ve $o(G) = k < \infty$ olsun. $H \neq \{e\}$ ve $a^n \in H$ olacak şekilde $n > 0$ pozitif tam sayılarının en küçüğü m olmak üzere $H = a^m$ olduğu kabul edilsin. O halde,

$$m \,|\, k \text{ ve } o(H) = \frac{k}{m}$$

dir [81].

<u>*Uyarı 2.1.1:*</u> $G = \langle a \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grubu ise o takdirde a^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından $H = \langle a^m \rangle$ devir grubu da sonsuz olur [81].

<u>*Teorem 2.1.5:*</u> $G = \langle a \rangle$ ve $o(G) = n$ olan bir devirli grup olsun. O takdirde G nin a^k tarafından üretilmesi için yani $G = \langle a^k \rangle$ olması için gerek ve yeter şart k ile n nin aralarında relatif asal yani $(k, n) = 1$ olmasıdır [81].

İspat: $\Rightarrow$: Olmayana ergi yöntemi ile birlikte ispatı yapalım. Bir an için $(k,n)=d>1$ olduğunu varsayalım. O zaman buradan $d|k$ ve $d|n$ ya da sırası ile $k=dt$ ve $n=dr$ yazılır. Bu durumda,

$$\left(a^k\right)^r=\left(a^{dt}\right)^r=\left(a^{dr}\right)^t=\left(a^n\right)^t=e$$

öyle ki

$$o\left(a^k\right)\leq r<n$$

dir. Bu ise a^k nın G nin bir üreteci olmadığını gösterir. Çünkü

$$G=\left\langle a^k\right\rangle$$

olsaydı o zaman $G=\langle a\rangle$ olduğundan $o(a)=n$ dolayısı ile $o\left(a^k\right)=n$ olmalıydı. Bu bir çelişkidir. Dolayısı ile eğer $G=\left\langle a^k\right\rangle$ ise o zaman $(k,n)=1$ olmalıdır.

$\Leftarrow$: $(k,n)=1$ olsun. Buna göre $G=\left\langle a^k\right\rangle$ olduğu gösterilmelidir.

$$G\subseteq\left\langle a^k\right\rangle$$

olduğu açıktır. Çünkü $a^k\in G$ ve G bir grup olduğundan kapalılık özelliğinden dolayı a^k nın kuvvetleri G ye aittir. Şimdi ters kapsama gösterilir ise,

$$(k,n)=1\Rightarrow ku+nv=1$$

olacak şekilde u,v tam sayıları vardır. O halde

$$a=a^{ku+nv}=a^{ku}a^{nv}$$

yazılır. Diğer taraftan $G=\left\langle a^k\right\rangle$ ve $o(G)=n$ olduğundan $o(a)=n$ dir. Böylece

$$a^{nv}=\left(a^n\right)^v=e^v=e$$

olup buradan $a=a^{ku}$ eşitliği elde edilir. Buna göre $a^m\in G$ ise o takdirde

$$a^m=\left(a^{ku}\right)^m=\left(a^k\right)^{um}\in\left\langle a^k\right\rangle$$

yazılır. Bu da,

$$G\subseteq\left\langle a^k\right\rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece $G=\left\langle a^k\right\rangle$ eşitliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 2.1.2: Bir k tam sayısının $(\mathbb{Z}_n,+)$ grubunun bir üretici olması için gerek ve yeter şart $(k,n)=1$ olmasıdır [81].

Bir H kümesi ile bu küme üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ ikili işlemlerinden oluşan cebirsel yapı $(H,+,.)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: $(H,+,.)$ cebirsel yapısı verilmiş olsun. Eğer H kümesindeki her x,y,z elemanları için

$$x(y+z)=(xy)+(xz)$$

ise, $(H,+,.)$ da sol dağılma özelliği vardır denir. Her $x,y,z\in H$ için

$$(x+y)z=(xz)+(yz)$$

ise, $(H,+,.)$ da sağ dağılma özelliği vardır denir [51].

Tanım 2.1.14: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir [48].

Tanım 2.1.15: X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R\subseteq F(X)$ olsun. $G=\langle X:R\rangle$ ye G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi, $r\in R$ için $r=e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine tanımlayıcı bağıntılar kümesi ve r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X:R\rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [48].

Tanım 2.1.16: $G=\langle X:R\rangle$ ve $H=\langle Y:S\rangle$ olmak üzere $G\times H$ direkt çarpımı, $[X,Y]=\{[x,y]:x\in X,\ y\in Y\}$

$$G\times H=\langle X,Y:R,S,[R,S]\rangle$$

şeklinde tanımlanır [48].

Tanım 2.1.17: G , j -gerenli bir grup ve

$$X=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_j\right)\in\underbrace{G\times G\times\cdots\times G}_{j}\middle|\left\langle\left\{x_1,x_2,\ldots,x_j\right\}\right\rangle=G\right\}$$

eşitliği verilsin. O halde $\left(x_1,x_2,\ldots,x_j\right)$ ye G nin bir geren j -lisi denir.

Tanım 2.1.18: $l,m,n>1$ için $\langle l,m,n\rangle$ binary polyhedral grubu

$$\left\langle x,y,z:x^l=y^m=z^n=xyz\right\rangle$$

takdimi ile tanımlanır.

$l=2$ olduğu zaman $\langle 2,m,n\rangle$ takdimi için

$$\left\langle y,z:y^m=z^n=\left(yz\right)^2\right\rangle$$

elde edilir.

Tanım 2.1.19: Her $m\geq 4$ için SD_{2^m} grubu

$$SD_{2^m}=\left\langle x,y:x^{2^{m-1}}=y^2=e,\ yxy=x^{-1+2^{m-2}}\right\rangle$$

şeklinde takdim edilirse 2^m mertebeli bir semidihedral grubu olarak tanımlanır. Burada x ve y nin mertebeleri sırasıyla 2^{m-1} and 2 dir.

Tanım 2.1.20: $n\geq 3$ için Q_{2^n} quaternion grubu

$$Q_{2^n}=\left\langle x,y:x^{2^{n-1}}=e,\ y^2=x^{2^{n-2}},\ y^{-1}xy=x^{-1}\right\rangle$$

takdimi ile tanımlanır.

Tanım 2.1.21: $n\geq 3$ için $2n$ mertebeli D_{2n} Dihedral grubu

$$D_{2n}=\left\langle a,b:a^n=b^2=\left(ab\right)^2=e\right\rangle$$

takdimi ile tanımlanır.

Tanım 2.1.22: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R,+,.)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.

ii. R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a,b \in R$ için $ab \in R$ dir.

iii. R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.

iv. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

ve

$$(b+c)a = ba + ca$$

dır [81].

Örnek 2.1.4: $(\mathbb{Z},+,.)$ bir halka olup bu halkaya tam sayılar halkası denir. Benzer şekilde $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$ ve $(\mathbb{C},+,.)$ cebirsel yapıları da birer halka olup bu halkalara da sırası ile rasyonel sayılar halkası, reel sayılar halkası ve kompleks sayılar halkası denir [81].

Tanım 2.1.23: Birimli ve değişmeli bir H halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise H ye bir cisim denir.

2.2 Matris Cebiri

Tanım 2.2.1: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. $i=1,2,\dots,m$ için $r_i=\left[a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}\right]$ ifadesine matrisin satırları ve $j=1,2,\dots,n$ için $c_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı n sütunlu bir matrise $m\times n$ boyutlu (mertebeli) ya da kısaca bir $m\times n$ matrisi denir. *i*-inci satır ve *j*-inci sütunun kesişiminde bulunan cismin elemanına matrisin (i,j)-inci elemanı denir. Matris kısaca $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ notasyonu ile gösterilir [80].

<u>*Teorem 2.2.1:*</u> A,B ve C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere,

i. $A+B=B+A$ (değişme özelliği)

ii. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (birleşme özelliği)

iii. $A+0=0+A=A$ (etkisiz eleman)

iv. $A-A=0$

v. $\lambda_1(A+B)=\lambda_1A+\lambda_1B$

vi. $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1A+\lambda_2A$

vii. $(\lambda_1\lambda_2)A=\lambda_1(\lambda_2A)$

viii. $1\cdot A=A\cdot 1=A$

özellikleri vardır [7].

<u>*Tanım 2.2.2:*</u> Bir satır matris ile bir sütun matrisinin çarpılabilmesi için onların her birinin aynı elemana sahip olması gerekir. Eğer $u=\left[u_1,\dots,u_m\right]$ ve $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ ise, o zaman uv aşağıdaki gibi tanımlanan 1×1 bir matristir [80]:

$$uv=\left[u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_mv_m\right]=\left[\sum_{j=1}^{m}u_iv_j\right].$$

Tanım 2.2.3: $A=\left[a_{ij}\right]$ bir $m\times r$-matris ve $B=\left[b_{ij}\right]$ bir $r\times n$-matris ise bunların çarpımı $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ için

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ir}b_{rj}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $AB=\left[c_{ij}\right]$, $m\times n$-matristir [7].

Teorem 2.2.2: Eğer $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}$ ve $C=(c_{ij})_{t\times q}$ ise, o zaman matrislerin çarpma işlemine göre birleşme (assosyatif) kuralı denilen aşağıdaki kural geçerlidir [80]:

$$A(BC)=(AB)C \tag{2.1}$$

İspat: İspat için matrislerin eşitliği tanımı kullanılacaktır. Buna göre eğer (2.1) eşitliğinin her iki tarafındaki matris çarpımlarından elde edilen matrislerin mertebelerinin ve karşılıklı elemanlarının eşit olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Önce (2.1) eşitliğinin sol tarafını göz önüne alalım. $BC=D$ ve D nin genel elemanını d_{ij} ile gösterilirse, o zaman

$$BC=\left(b_{ij}\right)_{n\times t}\left(c_{ij}\right)_{t\times q}=\left(d_{ij}\right)_{n\times q}=D$$

ve

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{t}b_{ij}c_{jk} \tag{2.2}$$

yazılır. Şimdi ise $det\left(AB\right)=\left(detA\right)\left(detB\right)$ $A\left(BC\right)=AD=E$ ve E nin genel elemanı e_{ij} olarak alınırsa, bu takdirde

$$AD=(a_{ij})_{m\times n}(d_{ij})_{n\times q}=(e_{ij})_{m\times q}=E \tag{2.3}$$

ve

$$e_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}d_{sj} \tag{2.4}$$

yazılır. (2.2) ifadesinden

$$d_{sj}=\sum_{k=1}^{t}b_{sk}c_{kj} \tag{2.5}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. (2.5) ifadesi (2.4) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{k=1}^{t} b_{sk}c_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{t}\sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(b_{sk}c_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{t}\sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sk}\right)c_{kj} \end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin sağ tarafını göz önüne alalım. $AB = F$ ve F nin genel elemanına f_{ij} denilirse, o zaman

$$AB = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}\left(b_{ij}\right)_{n\times t} = \left(f_{ij}\right)_{m\times t} = F$$

ve

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} \tag{2.7}$$

yazılır. Bu defa da $\left(AB\right)C = FC = G$ ve G nin genel elemanına g_{ij} denirse, o zaman da

$$(AB)C = FC = (f_{ij})_{m\times t}(c_{ij})_{t\times q} = (g_{ij})_{m\times q} = G \tag{2.8}$$

ve

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{t} f_{ik}c_{kj} \tag{2.9}$$

yazılır. (2.7) ifadesinden

$$f_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} \tag{2.10}$$

yazmak mümkündür. (2.10) ifadesi (2.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}\right)c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{t}\sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sk}\right)c_{kj} \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. Böylece (2.3) ve (2.8) ifadelerinden E ve G matrislerinin mertebelerinin eşit olduğu, (2.6) ve (2.11) den E ve G nin karşılıklı elemanlarının eşit olduğu sonucu ortaya çıkar. Yani $E=G$ olur. Bu ise (2.1) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

<u>*Teorem 2.2.3:*</u> *i.* $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times t}$ ve $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times t}$ olmak üzere, sol dağılma kuralı denilen

$$A(B+C)=AB+AC \tag{2.12}$$

kuralı geçerlidir.

ii. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{t\times m}$ ve $C=\left(c_{ij}\right)_{t\times m}$ olmak üzere, sağ dağılma kuralı denilen

$$(B+C)A=BA+CA \tag{2.13}$$

kuralı geçerlidir [80].

<u>*İspat:*</u> *i.* Önce (2.12) nin sol tarafını göz önüne alalım. $B+C=D$ ve D nin genel elemanı d_{ij} olsun. Bu durumda

$$B+C=\left(b_{ij}\right)_{n\times t}+\left(c_{ij}\right)_{n\times t}=\left(d_{ij}\right)_{n\times t}=D$$

ve

$$d_{ij}=b_{ij}+c_{ij} \tag{2.14}$$

yazılır. Şimdi de $A\left(B+C\right)=AD=E$ ve E nin genel elemanın e_{ij} olduğunu farzedelim. Buna göre

$$AD=(a_{ij})_{m\times n}(d_{ij})_{n\times t}=(e_{ij})_{m\times t}=E \tag{2.15}$$

ve

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj} \tag{2.16}$$

yazılır ve (2.14) den

$$d_{kj}=b_{kj}+c_{kj} \tag{2.17}$$

yazılabileceği kolaylıkla görülür. Böylece (2.17) ifadesi (2.16) da yerine yazılırsa

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(b_{kj}+c_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \tag{2.18}$$

elde edilir. Şimdi de (2.12) ifadesinin sağ tarafı göz önüne alalım. Burada da $AB = Y$; Y nin genel elemanı y_{ij}, $AC = Z$ ve Z nin genel elemanın z_{ij} olduğu kabul edilsin. Buna göre

$$AB = (a_{ij})_{m\times n}(b_{ij})_{n\times t} = (y_{ij})_{m\times t} = Y \tag{2.19}$$

ve

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{2.20}$$

yazılır. Yine aynı şekilde

$$AC = (a_{ij})_{m\times n}(c_{ij})_{n\times t} = (z_{ij})_{m\times t} = Z \tag{2.21}$$

ve

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \tag{2.22}$$

ifadeleri yazılır. Son olarak $AB + AC = T$ ve T nin genel elemanı t_{ij} ile gösterilirse o zaman

$$AB + AC = Y + Z = \left(y_{ij}\right)_{m\times t} + \left(z_{ij}\right)_{m\times t}$$

$$(y_{ij} + z_{ij})_{m\times t} = (t_{ij})_{m\times t} = T \tag{2.23}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \tag{2.24}$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda (2.15) ve (2.23) den E ve T matrislerinin mertebeleri eşit olduğu, yine (2.18) ve (2.24) den E ve T matrislerinin elemanlarının eşit olduğu sonucu elde edilir. Bu da matrislerin eşitliği tanımına göre $E = T$ olmasını gerektirir. Bu eşitlik ise (2.12) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.
ii. için ispat benzerdir.

Tanım 2.2.4: Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir. Sıfır matris 0 ile gösterilir [7].

Tanım 2.2.5: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise kare matris denir.

$$E=\begin{bmatrix} i-1 & 0 \\ 2 & i-5 \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 mertebeden bir kare matristir [7].

<u>*Tanım 2.2.6:*</u> $A=\left[a_{ij}\right]$, $n\times n$ mertebesinden bir kare matris ise $a_{11},a_{22},a_{33},\ldots,a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa bu matrise köşegen matris denir [7].

<u>*Tanım 2.2.7:*</u> Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{nn}=k$ ise matrise skaler matris denir [7].

<u>*Tanım 2.2.8:*</u> Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki bütün elemanları 1 ise bu matrise birim matris denir. $n\times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir [7].

Örneğin;

$$I_1=[1],\ I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer birim matristir.

<u>*Tanım 2.2.9:*</u> Bir n-kare $A=\left[a_{ij}\right]$matrisi; $j>i$, her $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ için $a_{ij}=0$ iken alt üçgen matris ve $j<i$, her $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ için $a_{ij}=0$ iken üst üçgen matris diye adlandırılır.

Buna göre; n-kare $A=\left[a_{ij}\right]$ alt ve $B=\left[b_{ij}\right]$ üst üçgen matrisler;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.2.10: Bir n-kare A matrisi; $A^T = A$ olması halinde simetrik matris ve $A^T = -A$ olması halinde de ters simetrik matris diye adlandırılır.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ simetrik bir matris ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ ters simetrik bir matristir.

Tanım 2.2.11: Eğer $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi için $a_{i,j+1} = 1,\ a_{n1} = 1$ ve diğer bütün elemanlar sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matris denir[80].

Tanım 2.2.12: Eğer A bir $n\times n$ kare matris ve I , $n\times n$ birim matris olmak üzere,

$$AB = BA = I$$

olacak şekilde bir $n\times n$ tipli bir B matrisi varsa, o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün, tekil olmayan) matrisler denir [80].

Teorem 2.2.4: Bir kare matrisin tersi varsa o zaman bu ters tektir [80].

İspat: Bir A kare matrisin B ve C gibi iki tane tersinin olduğunu varsayalım. Bu durumda ters matrisin tanımından dolayı A matrisinin tersi B ise,

$$AB = BA = I \tag{2.25}$$

ve eğer A matrisinin tersi C ise,

$$AC = CA = I \tag{2.26}$$

yazılır. Eğer $B = C$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunu için (2.25) ve (2.26) ifadelerini ve matrislerin çarpma işlemine göre birleşme özelliğini göz önüne alarak

$$B = I\ B = \left(CA\right)B = C\left(AB\right) = C\ I = C$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.13: Bir terse sahip olan A kare matrisine tekil olmayan veya ters çevrilebilir bir matris denir. Eğer A matrisi terse sahip değilse, o takdirde A matrisine tekil veya ters çevrilemez matris denir [80].

Teorem 2.2.5: Eğer A ve B ters çevrilebilir iki $n \times n$ tipli matris ise, o zaman AB çarpımı da ters çevrilebilirdir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dir [80].

İspat: Eğer A ve B matrisleri ters çevrilebilir matrisler ise, o takdirde ters matris tanımından

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \text{ve} \quad BB^{-1} = B^{-1}B = I$$

yazılır. Diğer taraftan matris çarpımının birleşme özelliğini kullanarak

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I \quad \text{ve} \quad \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$$

yazılır. Böylece bunları birleştirerek

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$$

yazmak mümkündür. Bu son ifade ise ters matris tanımı gereğince AB matrisinin tersinin $B^{-1}A^{-1}$ olduğunu ifade eder. Böylece AB ters çevrilebilirdir ve bu ters(invers) tek olduğundan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.14: A sıfır olmayan bir n kare matris olmak üzere

$$AB = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B, n kare matris varsa, o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir n kare matris olmak üzere

$$CA = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir C, n-kare matris varsa, o zaman da A matrisine sağ sıfır bölen matrisi denir. Eğer A matrisi hem sol sıfır bölen matrisi hem de sağ sıfır bölen matrisi ise, o takdirde A matrisine sadece sıfır bölen matris denir[80].

Teorem 2.2.6: A sıfır olmayan bir kare matris olmak üzere eğer tersi mevcut ise, o takdirde A matrisi bir sıfır bölen matrisi değildir [80].

İspat: Eğer $AB=0$ ya da $CA=0$ ve A matrisinin tersi A^{-1} ise, o takdirde

$$A^{-1}(AB)=\left(A^{-1}A\right)B=IB=B=0$$

veya

$$(CA)A^{-1}=C\left(AA^{-1}\right)=CI=C=0$$

yazılır. Bu ise A matrisinin bir sıfır bölen matrisi olmadığını gösterir.

Tanım 2.2.15: Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır denir [7]:

i. İlk k tane satır sıfırdan farklı ve $(k+1)$-inci satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

ii. Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir ve bu 1 ler $s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ olacak şekilde s_j -inci sütunda bulunurlar.

iii. Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij}=1$ ise j -inci sütundaki a_{ij} nin altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Yukarıdaki *iii* koşulu 'a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır' şeklinde alınırsa, *i-ii* koşullarını sağlayan matrise satırca indirgenmiş eşolon formdadır denir. Satır yerine sütunlar alınarak sütunca indirgenmiş form ve sütunca indirgenmiş eşolon form elde edilir[6].

Tanım 2.2.16: I, $n\times n$ birim matris olmak üzere I dan sadece bir elemanter satır işlemi ile elde edilen bir $n\times n$ matrise bir elemanter matris denir ve E ile gösterilir [80].

Teorem 2.2.7: *i*. Eğer B, $m\times n$ matrisi; bir elemanter satır işleminin uygulanması ile A, $m\times n$ matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde B matrisi A matrisi ile bu elemanter satır işlemlerine karşılık gelen $m\times m$ elemanter matrisin çarpımına eşittir. Yani eğer ε ile elemanter satır işlemi gösterilirse, o zaman

$$B=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

dır.

ii. Her elemanter matris ters çevrilebilirdir. Üstelik her elemanter matrisin tersi de yine bir elemanter matristir [80].

<u>*İspat:*</u> *i*. E_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $E_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris ve $E_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i+\alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matris olmak üzere,

$$E_{ij}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olur. Bu da $E_{ij}A$ matrisinin i-inci satırı ile j-inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen bir matris olduğunu gösterir. Gerçekten I, $m\times m$ birim matris olmak üzere bu birim matrisin i-inci satırı ile j-inci satırın yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise $\varepsilon(I_m)$ denilir ise ve bu matris ile A matrisi soldan çarpılırsa yine $E_{ij}A$ matrisi elde edilir. Bu da E_{ij} elemanter matrisi için

$$B=E_{ij}A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$B=E_i(\alpha)A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

ve

$$B=E_{ij}(\alpha)A=\varepsilon(A)=\varepsilon(I_m)A$$

olduğu gösterilebilir.

ii. Basit bir hesap ile

$$(E_{ij})^{-1}=E_{ij}$$

$$\left(E_i(\alpha)\right)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(E_{ij}(\alpha)\right)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

olduğu görülebilir. Buradan gerçekten elemanter matrislerin ters çevrilebilir olduğu ve aynı zamanda elemanter matrisin tersinin de bir elemanter matris olduğu sonucu çıkar.

<u>*Tanım 2.2.17:*</u> $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ reel sayılar olmak üzere 2×2 tipinde bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır [80].

<u>*Not 2.2.1:*</u> Determinant her bir 2×2 matrisine bir reel sayı karşılık getiren bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ilk üçü bir 2×2 matrisin üzerinde satır işlemlerinin etkin olduğu, aşağıdaki dört önemli özelliğe sahiptir [80]:

i. Eğer B matrisi; bir k reel sayısı ile A matrisinin bir satırının çarpılması ile A matrisinden elde edilen bir matris ise, o takdirde

$$detB = k.detA$$

dır.

ii. Eğer B matrisi; A matrisinin satırlarının yer değiştirilmesi ile A dan elde edilen bir matris ise, o zaman

$$detB = -detA$$

dır.

iii. Eğer B matrisi; A nın bir satırının bir skaler katının A nın diğer satırına ilave edilmesi ile A matrisinden elde edilen bir matris ise, o zaman

$$detB = detA$$

dır.

iv. $det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ dir.

Teorem 2.2.8: Her $n \times n$ tipli matrise bir reel sayıyı karşılık getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon, det vardır [80]:

i. B matrisi; verilen bir $n \times n$ tipli A matrisinin bir satırının bir $\alpha \neq 0$ reel sayısı ile çarpılması sonucu A matrisinden elde edildiği her zaman

$$detB = \alpha detA$$

ii. B matrisi; verilen bir $n \times n$ tipli A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A dan elde edildiği her zaman

$$detB = -detA$$

iii. B, $n \times n$ tipli A matrisinin bir satırının bir skaler katının diğer bir satıra ilave edilmesi ile A dan elde edildiği matris olduğunda

$$detB = detA$$

iv. I , $n \times n$ birim matris olmak üzere

$$\det I = 1$$

dir.

Teorem 2.2.9: A bir $n \times n$ kare matris olsun. Buna göre [80]:

i. Eğer A matrisinin iki satırı eşit ise , o zaman $detA = 0$ dır.

ii. Eğer A matrisi bir sıfır satırına sahipse, o zaman $detA = 0$ dır.

İspat: *i.* A matrisinin iki satırının eşit olduğunu farzedelim. B matrisi eşit satırların yer değiştirilmesi ile A dan elde edilen bir matris olsun. Bu durumda $detB = -detA$ yazılabilir. Halbuki yer değiştirilen satırlar eşit olduğundan $B = A$ dır. Sonuç olarak buradan $detA = detB$ olduğu görülür. Böylece

$$detA = detB = -detA$$

ifadesinden $detA = 0$ bulunur.

ii. A matrisinin bir satırının sıfır olduğunu varsayalım. A nın herhangi bir başka satırını seçelim ve onu bir B matrisi elde etmek için sıfır satırına ilave edilsin. Bu durumda $detA = detB$ yazılabilir. Halbuki B matrisi iki eşit satıra sahip olduğundan $detB = 0$ yazmak mümkündür. Bundan dolayı $detA = 0$ olur.

Teorem 2.2.10: Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [80].

İspat: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ olsun. $detB=\alpha detA$ özelliği kullanılarak:

$$detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{a}_{11} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \dots = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{nn} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\cdot \det I$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{nn}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.11: Bir üst üçgen (ya da alt üçgen) matrisin determinantı, matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [80].

İspat: İspat üst üçgen matris için yapılır. Benzer düşünce ile alt üçgen matrisler için ispat yapılabilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olsun. $detB=\alpha detA$ ve $detB=detA$ özelliklerini kullanarak;

$$detA = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$...=\mathrm{a}_{22}\mathrm{a}_{33}...\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}...\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{\mathrm{nn}} det\ I$$

$$= \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22}\dots\mathrm{a}_{\mathrm{nn}}$$

yazılır.

Teorem 2.2.12: Bir A kare matrisinin determinantı ile A nın transpozunun determinant değeri aynıdır. Yani

$$detA = detA^T$$

dır [80].

Tanım 2.2.18: $A\left(a_{ij}\right)$ bir $n \times n$ kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir ve A_{ij} ile gösterilir [80].

Teorem 2.2.13: Eğer E, bir elemanter matris ise, o zaman [80]:

$i.\ detE \neq 0$,

$ii.\ detE^T = detE,$

$iii.\ E^{-1}$ bir elemanter matristir.

İspat: $\alpha \neq 0$ olmak üzere $P_i(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow \alpha r_i$ elemanter satır işlemine karşılık gelen elemanter matris, P_{ij} ile $r_i \leftrightarrow r_j$ elemanter satır işlemlerine karşılık gelen elemanter matris ve $P_{ij}(\alpha)$ ile $r_i \leftrightarrow r_i + \alpha r_j$ satır işlemine karşılık gelen elemanter matris gösterilsin. Buna göre bu üç farklı tipten elemanter matrislerin determinantları alınır ise, o takdirde

$$detP_i(\alpha) = detP_i(\alpha)^T = \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$detP_{ij} = detP_{ij}^T = -1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$detP_{ij}(\alpha) = detP_{ij}(\alpha)^T = 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) yi ispatlar. (iii) ü ispatlamak için sırasıyla

$$P_i(\alpha)^{-1} = P_i(\alpha^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir.

Teorem 2.2.14: Eğer E, $n \times n$ tipli bir elemanter matris ise, o zaman her $n \times n$ tipli A matrisi için

$$det(EA) = (detE)(detA)$$

dır [80].

Teorem 2.2.15: Bir A kare matrisinin ters çevrilebilir olması için gerek ve yeter şart $detA \neq 0$ olmasıdır [80].

İspat: Eğer A ters çevrilebilir bir matris ise, o zaman

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = I$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elemanter matrisleri vardır. Böylece

$$det(E_1)det(E_2)\ldots det(E_k)det(A) = \det I = 1$$

yazılır. Bundan dolayı $detA \neq 0$ sonucu elde edilir.

Tersine; eğer A ters çevrilebilir bir matris değilse, o zaman

$$E_1E_2\ldots E_kA=R$$

olacak şekilde $E_1,E_2,\ldots,E_k$ elemanter matrisleri vardır. Burada R, bir sıfır satırını kapsayan $n\times n$ bir eşolon matristir.

Böylece $detR=0$ olur ve $detE_i\neq 0\ (i=1,2,\ldots,k)$ olduğundan $detA=0$ olduğu görülür.

<u>*Teorem 2.2.16:*</u> A ve B, $n\times n$ tipinde iki matris olsun. Bu takdirde

$$det(AB)=(detA)(detB)$$

dir [80].

<u>*İspat:*</u> Eğer A bir elemanter matris ise, o zaman iddianın doğru olduğu söylenebilir. A matrisi elemanter matrislerin bir çarpımı olduğundan eşitlik yine doğrudur. Gerçekten E_1 ve E_2 elemanter matrisler olmak üzere

$$A=E_1E_2$$

ise, o zaman elemanter matris için determinant özelliği iki kez art arda uygulanması ile

$$\begin{aligned}det(AB)&=det(E_1E_2B)=det(E_1)det(E_2B)\\&=det(E_1)det(E_2)det(B)\\&=det(E_1E_2)det(B)\\&=det(A)det(B)\end{aligned}$$

yazılır. $k>2$ olmak üzere

$$A=E_1E_2\ldots E_k$$

olduğu zaman da ispat benzer olarak yapılabilir. Diğer taraftan her ters çevrilebilir matris elemanter matrislerin bir çarpımı olarak yazılabildiğinden A matrisinin ters çevrilebilir olduğu her zaman

$$det(AB)=det(A)det(B)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer A matrisi ters çevrilebilir değilse, o takdirde $detA=0$ ve $det(AB)=0$ dır. Böylece bu durumda da $det(AB)=(detA)(detB)$ ifadesi geçerlidir.

Tanım 2.2.19: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sayılarının $n \times n$ tipli Circulant matrisi:

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $(n-1)$-inci dereceden $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$ polinomu da C_n matrisinin yardımcı polinomu olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.20: n-inci dereceden P reel polinomu

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

şekinde verilmiş olsun. P polinomuna karşılık gelen Hurwitz matrisi aşağıdaki gibidir [45]:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2.21: $C(c_1, c_2, \ldots, c_v)$ matrisi $v \times v$ tipli bir Companion matris olsun. O halde aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$C(c_1, c_2, \ldots, c_v) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_v \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2.22: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için $n \times n$ tipli Vandermonde matrisi:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

<u>*Tanım 2.2.23:*</u> Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti $p(A)$ veya $per(A)$ ile gösterilir ve

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_n simetrik grubu ve σ permütasyonu gösterir.

<u>*Tanım 2.2.24:*</u> $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ boyutlu matrisler olsun. $A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]_{m \times n}$ çarpımına A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

<u>*Tanım 2.2.25:*</u> Bir M matrisi için $perM = \det(M \circ K)$ olacak şekilde bir $n \times n$ tipli (1, -1) K matrisi var ise, bu takdirde $M \circ K$ notasyonu ile Hadamard çarpımı gösterilir ve M matrisi değiştirilebilir(convertible) matris olarak adlandırılır.

2.3 Lineer İndirgemeli Diziler

<u>*Tanım 2.3.1:*</u> R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n \tag{2.27}$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, ..., c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz [35].

Tanım 2.3.2: $f(x)=x^k+c_1x^{k-1}+...+c_{k-1}x+c_k$ şeklindeki k. dereceden polinoma, (2.27) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir. Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla tam sayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k, R nin terslenebilir bir elemanı ise (2.27) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, ...,$ şeklinde devam eder [35].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.3.3: R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+...+c_ka_n+c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1}=(c_1+1)a_{n+k}+\sum_{i=1}^{k-1}(c_{i+1}-c_i)a_{n+k-i}-c_ka_n \tag{2.28}$$

şeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir.

(2.28) bağıntısı için

$$F(x)=\left(x^k-c_1x^{k-1},...,c_{k-1}x-c_k\right)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir [35].

Tanım 2.3.4: $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+...+c_{k-1}a_{n+k-1}$$

şeklindeki k-basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanları:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir [50].

Tanım 2.3.5: Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra sadece sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodiktir ve tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,c,d,e,c,d,e,...$ dizisi periyodik olup başlangıç elemanı a ve periyodu 3 tür.

Tanım 2.3.6: Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k -periyotlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,a,b,c,d,e,...$ dizisi periyodu 5 olan basit periyodiktir.

2.4 Fibonacci Dizileri

Tanım 2.4.1: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $n \geq 0$ ve $F_0=0, F_1=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$$

şeklindedir.

Fibonacci dizileri

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matris tarafından üretilebileceği gösterilmiştir [71].

Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceğini göstermiştir [44]. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q-matrisi denir [44].

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$.

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eşitliğine 'Binet formülü' denir.

Bu formül n nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir. $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.4.2: $\{F_n^{(k)}\}$, k-basamak Fibonacci dizisi, $n \geq 0$ ve

$F_0 = F_1 = ... = F_{k-2} = 0,\ F_{k-1} = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + ... + F_n^{(k)} \tag{2.31}$$

şeklindedir.

k-basamak Fibonacci dizisi bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + ... + c_{k-1} a_{n+k-1} \tag{2.32}$$

dizisinin özel bir halidir. Burada $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ reel sabitlerdir.

$$A_k=[a_{ij}]_{k\times k}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\c_0&c_1&c_2&\cdots&c_{k-2}&c_{k-1}\end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (2.32) deki lineer indirgemeli diziler için

$$A_k^n\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\\vdots\\a_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n\\a_{n+1}\\\vdots\\\vdots\\a_{n+k-1}\end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir. Buradan

$$\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\c_0&c_1&c_2&\cdots&c_{k-2}&c_{k-1}\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_n^{(k)}\\F_{n+1}^{(k)}\\F_{n+2}^{(k)}\\\vdots\\F_{n+k-2}^{(k)}\\F_{n+k-1}^{(k)}\end{bmatrix}$$

eşitliği kolayca görülebilir [50].

2.5 Pell Dizileri

<u>*Tanım 2.5.1:*</u> $\{P_n\}$ Pell dizisi, $n\geq 0$ ve $P_0=0,\ P_1=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$$

şeklinde tanımlanır. O halde Pell dizisi

$$0,1,2,5,12,29,70,169,...$$

şeklindedir [42].

Pell sayıları aşağıdaki matris tarafından üretilmiştir[11]:

$$M=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{Z}$ için,

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell sayılarının bir k dizisi,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1-i \text{ ise} \\ 1 & n \neq 1-i \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleriyle, $n > 0$ ve $1-k \leq n \leq 0$ için

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + ... + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlanmıştır [55].

Burada P_n^i, i-inci dizinin n-inci terimidir. $i = k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş k-Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k = 2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir ve $i = k$ için, P_n^k ya genelleştirilmiş k-Pell sayıları denir.

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisi;

$$R = \left[r_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Aynı zamanda

$$E_n = \left[e_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1+k}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R.E_n$$

şeklinde eşitlik elde edilmiştir. Burada R, $k \times k$ tipindeki matris, genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisi olarak adlandırılmıştır [55].

Lemma 2.5.1: R ve E_n sırasıyla (2.29) ve (2.30) daki gibi olsunlar. Bu durumda tüm $n \geq 0$ tam sayıları için,

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

eşitliği yazılabilir [55].

Genelleştirilmiş Pell dizilerini matematiksel tümevarımla da ispatlanabilen, $\alpha > 0$ sabit katsayıları için,

$$M^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(M^{(\alpha)}\right)^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)} \\ P_n^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_{n-1}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisiyle de oluşturulabileceği gösterilmiştir [25].

$P_n^{(\alpha)\cdot k}$, k -basamak genelleştirilmiş Pell dizisi,

$\alpha > 0$ sabit katsayılar, $n \geq 0$ ve $1 \leq j \leq k-1$ için $\beta_j = \begin{pmatrix} \alpha + j \\ j+1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde

$$P_0^{(\alpha)\cdot k} = 0, \ldots, P_{k-2}^{(\alpha)\cdot k} = 0, P_{k-1}^{(\alpha)\cdot k} = 1$$

başlangıç elemanları ile

$$P_{n+k}^{(\alpha)\cdot k} = (\alpha+1) P_{n+k-1}^{(\alpha)\cdot k} + \beta_1 P_{n+k-1}^{(\alpha)\cdot k} + \ldots + \beta_{k-1} P_n^{(\alpha)\cdot k}$$

şeklinde tanımlanmıştır [25].

Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha)\cdot 2}\right\} = \left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ eşitliğine dikkat edilmelidir.

k -basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için,

$$\begin{bmatrix} P_{n+k}^{(\alpha)\cdot k} \\ P_{n+k-1}^{(\alpha)\cdot k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)\cdot k} \\ \vdots \\ P_{n+1}^{(\alpha)\cdot k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+k-1}^{(\alpha)\cdot k} \\ P_{n+k-2}^{(\alpha)\cdot k} \\ P_{n+k-3}^{(\alpha)\cdot k} \\ \vdots \\ P_n^{(\alpha)\cdot k} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine, k-basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir[25].

2.6 Jacobsthal Dizileri

Tanım 2.6.1: $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi, $n\geq 0$ ve $J_0=0,\ J_1=1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$J_{n+2}=J_{n+1}+2J_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Jacobsthal dizisi

$$0,1,1,3,5,11,21,43,...$$

şeklindedir.

Jacobsthal sayıları

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ F^n=\begin{bmatrix}J_{n-1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matris tarafından üretilebileceği gösterilmiştir [59].

Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri,

$$J_n^i=\begin{cases}1 & i+n=1 \text{ ise}, \qquad 1-k\leq n\leq 0,\\ 0 & \text{diğer durumlarda},\end{cases}$$

başlangıç koşullarıyla $n>0$ ve $1\leq i\leq k$ için

$$J_n^i=J_{n-1}^i+2J_{n-2}^i+J_{n-3}^i+...+J_{n-k}^i,$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada J_n^i, dizinin n-inci terimidir. $k=2$ ve $i=1$ için genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir [89].

Genelleştirilmiş Jacobsthal sayıları için aşağıdaki gibi bir denklem elde edilmiştir;

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^{i} \\ J_{n}^{i} \\ J_{n-1}^{i} \\ \vdots \\ J_{n-k+2}^{i} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} J_{n}^{i} \\ J_{n-1}^{i} \\ J_{n-2}^{i} \\ \vdots \\ J_{n-k+1}^{i} \end{bmatrix}$$

burada C, $k \times k$ tipindeki matris;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmıştır [59].

Genelleştirilmiş k-mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri için,

$$B_n = \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$B_n = C^n$$

şeklinde denklem elde edilmiştir [59].

2.7 Padovan Dizileri

<u>*Tanım 2.7.1:*</u> $\{P(n)\}$ Padovan dizisi $n \geq 3$ ve $P(0) = P(1) = P(2) = 1$ olmak üzere

$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

şeklindedir. Yani Padovan dizisi

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \ldots$$

şeklindedir.

Padovan sayıları

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Q^n = \begin{bmatrix} P(n-5) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-4) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-1) & P(n-2) \end{bmatrix}$$

elde edilmiştir [63].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Fibonacci-Circulant Dizileri

$f(x)$ polinomu için C_3 circulant matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

C_3 matrisi kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci-circulant dizisi

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \text{ ve } x_3 = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 3$ için

$$x_n = \begin{cases} -x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}, & n \equiv 1 \bmod 3, \\ x_{n-2} - x_{n-3} - x_{n-4} & n \equiv 2 \bmod 3, \\ -x_{n-3} - x_{n-4} + x_{n-5}, & n \equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

şeklindeki bağıntı ile tanımlanır [24].

$n \geq 0$ için tümevarım yöntemi kullanılarak

$$2x_{3n+3} - x_{3n+5} = (-1)^n$$

$$x_{3n+1} + x_{3n+2} + x_{3n+3} = (-1)^n$$

ve

$$2x_{3n+2} - x_{3n+4} = (-1)^n$$

yazılabilir [24].

$n \geq 0$ için

$$(C_3)^n = \begin{bmatrix} x_{3n+3} & x_{3n+2} & x_{3n+1} \\ x_{3n+1} & x_{3n+3} & x_{3n+2} \\ x_{3n+2} & x_{3n+1} & x_{3n+3} \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanabilir olduğunu göstermek kolaydır. $\det C_3 = -4$ olduğundan genelleştirilmiş Fibonacci-circulant dizisi için Simpson formülü

$$(x_{3n+3})^2 + (x_{3n+2})^2 + (x_{3n+1})^2 - 3x_{3n+3}x_{3n+2}x_{3n+1} = (-4)^n$$

şeklinde yazılır [24].

(3.1.1) bağıntısı kullanılarak birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant dizileri sırasıyla;

$$x_1^1 = x_2^1 = 0, \text{ ve } x_3^1 = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 4$ için

$$x_n^1 = -x_{n-1}^1 + x_{n-2}^1 - x_{n-3}^1 \tag{3.1.3}$$

ve

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = 0, \text{ ve } x_5^2 = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 6$ için

$$x_n^2 = -x_{n-3}^2 - x_{n-4}^2 + x_{n-5}^2 \tag{3.1.4}$$

şeklindeki bağıntı ile tanımlanır [24].

Birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [24]:

$$g^{(1)}(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x + 1}$$

ve

$$g^{(2)}(x) = \frac{x^4}{-x^5 + x^4 + x^3 + 1}.$$

(3.1.3) ve (3.1.4) bağıntıları yardımıyla Companion matrisleri

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, burada $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrisleri birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant matrisleri olarak adlandırılır [24].

$n \geq 1$ için n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant matrislerinin n-inci kuvvetleri

$$\left(M^{(1)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+3}^1 & x_{n+2}^1 - x_{n+1}^1 & -x_{n+2}^1 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+1}^1 - x_n^1 & -x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+2}^1 + x_{n+1}^1 & -x_n^1 \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

ve

$$\left(M^{(2)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+5}^1 & x_{n+6}^1 & x_{n+7}^1 & x_{n+3}^1 - x_{n+4}^1 & x_{n+4}^1 \\ x_{n+4}^1 & x_{n+5}^1 & x_{n+6}^1 & x_{n+2}^1 - x_{n+3}^1 & x_{n+3}^1 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+4}^1 & x_{n+5}^1 & x_{n+1}^1 - x_{n+2}^1 & x_{n+2}^1 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+3}^1 & x_{n+4}^1 & x_n^1 - x_{n+1}^1 & x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+2}^1 & x_{n+3}^1 & x_{n+4}^1 + x_{n+1}^1 & x_n^1 \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\det\left(M^{(1)}\right)^n = (-1)^n$ ve $\det\left(M^{(2)}\right)^n = 1$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [24].

$M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu açıktır. $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrislerinin özdeğerlerinin kümesi sırasıyla $\left\{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}\right\}$ ve $\left\{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)}\right\}$ olsun.

$k = 1, 2$ için $(k+2)\times(k+2)$ tipli $V^{(k)}$ Vandermonde matrisinin

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(\lambda_1^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\lambda_2^{(k)}\right)^{k+1} & \cdots & \left(\lambda_{k+1}^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\lambda_{k+2}^{(k)}\right)^{k+1} \\ \left(\lambda_1^{(k)}\right)^{k} & \left(\lambda_2^{(k)}\right)^{k} & \cdots & \left(\lambda_{k+1}^{(k)}\right)^{k} & \left(\lambda_{k+2}^{(k)}\right)^{k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{(k)} & \lambda_2^{(k)} & \cdots & \lambda_{k+1}^{(k)} & \lambda_{k+2}^{(k)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini göz önüne alalım. $W^k(i)$ matrisi;

$$W_k^i = \begin{bmatrix} \left(\lambda_1^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ \left(\lambda_2^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ \vdots \\ \left(\lambda_{k+2}^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_j^{(k,i)}$ matrisi $V^{(k)}$ matrisinin j-inci sütununun W_k^i sütun matrisi ile değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Bu durumda, birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant matrislerinin Binet formülü için aşağıdaki teorem verilebilir:

<u>*Teorem 3.1.1:*</u> x_n^k, $k=1,2$ için k -inci tür dizinin n -inci terimi olsun. O halde

$$m_{ij}^{(k,n)}=\frac{\det V_j^{(k,i)}}{\det V^{(k)}}$$

dır. Burada $\left(M^{(k)}\right)^n=\left[p_{ij}^{(k,n)}\right]$ şeklinde ifade edilir [24].

3.1.1 C_3, $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ Matrisleri Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi

b_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisi için, B nin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi sonucu $B(\bmod m)$ olarak ifade edilir. Yani $B(\bmod m)=\left(b_{ij}(\bmod m)\right)$ dir. $\langle B\rangle_m=\left\{B^{\alpha}(\bmod m)\middle|\alpha\geq 0\right\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}(\det B,m)=1$ ise o zaman $\langle B\rangle_m$ bir devirli gruptur. $\langle B\rangle_m$ grubunun mertebesi $\left|\langle B\rangle_m\right|$ ile gösterilir. $\det C_3=-4$ olduğundan kolaylıkla görülür ki her pozitif m tam sayı için $\langle C_3\rangle_m$ devirli bir gruptur ve $\text{obeb}(4,m)=1$ dir. Benzer şekilde her pozitif m tam sayı için $\left\langle M^{(1)}\right\rangle_m$ ve $\left\langle M^{(2)}\right\rangle_m$ devirli bir gruptur. Şimdi C_3, $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrisleri ile üretilen devirli grupları göz önüne alalım.

<u>*Teorem 3.1.1.1:*</u> p bir asal sayı ve G matrisi de C_3, $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrislerinden herhangi biri olsun. Eğer u, $\left|\langle G\rangle_p\right|=\left|\langle G\rangle_{p^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v\geq u$ için $\left|\langle G\rangle_{p^v}\right|=p^{v-u}\cdot\left|\langle G\rangle_p\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle her $v\geq 2$ için $\left|\langle G\rangle_p\right|\neq\left|\langle G\rangle_{p^2}\right|$ ise, o zaman $\left|\langle G\rangle_{p^v}\right|=p^{v-1}\cdot\left|\langle G\rangle_p\right|$ dir [24].

Teorem 3.1.1.2: G matrisi C_3, $M^{(1)}$ ve $M^{(2)}$ matrislerinden herhangi biri ve $k \geq 1$ olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Burada p_i ler farklı asal sayılardır. O zaman $\left|\langle G\rangle_m\right| = okek\left[\langle G\rangle_{p_1^{e_1}}, \langle G\rangle_{p_2^{e_2}}, \ldots, \langle G\rangle_{p_k^{e_k}}\right]$ dır [24].

$\{x_n(m)\}$ genelleştirilmiş Fibonacci-circulant dizisi ve $\{x_n^k(m)\}$ birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant dizileri m modülüne göre sırasıyla indirgenirse, tekrar eden,

$$\{x_n(m)\} = \{x_1(m), x_2(m), x_3(m), \ldots, x_j(m), \ldots\}$$

ve

$$\{x_n^k(m)\} = \{x_1^k(m), x_2^k(m), x_3^k(m), \ldots, x_j^k(m), \ldots\}$$

dizileri elde edilir ve burada $k = 1,2$ için $x_j(m) = x_j(\bmod m)$ ve $x_j^k(m) = x_j^k(\bmod m)$ dir. Ayrıca (3.1.1), (3.1.3) ve (3.1.4) tanımlarında olduğu gibi benzer indirgemeli bağıntılar mevcuttur.

Teorem 3.1.1.3: $\{x_n^1(m)\}$ ve $\{x_n^2(m)\}$ dizileri her m pozitif tam sayısı için basit periyodik bir dizidir. Benzer şekilde $\{x_n(m)\}$ dizisi, $obeb(4, m) = 1$ ise basit periyodik bir dizidir [24].

$\{x_n(m)\}$, $\{x_n^1(m)\}$ ve $\{x_n^2(m)\}$ dizilerinin periyotları sırasıyla $l_C(m)$, $l_1(m)$ ve $l_2(m)$ ile ifade edilsin. O halde (3.1.2), (3.1.5) ve (3.1.6) ifadeleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.1.1:

i. $p \neq 2$ bir asal sayı ise, o zaman $l_C(p) = 3 \cdot \left|\langle C_3\rangle_p\right|$ dir.

ii. Her p asal sayısı için $l_1(p) = \left|\left\langle M^{(1)}\right\rangle_p\right|$ ve $l_2(p) = \left|\left\langle M^{(2)}\right\rangle_p\right|$ dir [23].

Sonuç 3.1.1.2: p bir asal sayı ve $\alpha \in \mathbb{N}$ olsun. O halde $A_1(p^\alpha)$ ve $A_2(p^\alpha)$ devirli grupları sırasıyla $\left\langle M^{(1)}\right\rangle_{p^\alpha}$ ve $\left\langle M^{(2)}\right\rangle_{p^\alpha}$ devirli gruplarına izomorftur [24].

3.1.2 Gruplarda Birinci ve İkinci Tür Fibonacci-Circulant Dizileri

<u>*Tanım 3.1.2.1:*</u> $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X$, j-geren çifti için birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbitleri sırasıyla;

$$\begin{cases} a_1^1 = (x)^{-1}, a_2^1 = x_2, a_3^1 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^1 = (x)^{-1}, a_2^1 = (x_1)^{-1}, a_3^1 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+3}^1 = (a_n^1)^{-1}(a_{n+1}^1)(a_{n+2}^1)^{-1}$$

ve

$$\begin{cases} a_1^2 = x_1, a_2^2 = x_2, a_3^2 = x_3, a_4^2 = x_4, a_5^2 = x_5, & j = 5 \text{ ise}, \\ a_1^2 = x_1, a_2^2 = x_1, a_3^2 = x_2, a_4^2 = x_3, a_5^2 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ a_1^2 = (x_1)^2, a_2^2 = x_1, a_3^2 = x_2, a_4^2 = x_3, a_5^2 = x_4, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^2 = (x_1)^3, a_2^2 = (x_1)^2, a_3^2 = x_1, a_4^2 = x_1, a_5^2 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+3}^2 = (a_{n-2}^2)(a_{n-1}^2)^{-1}(a_n^2)^{-1}$$

olarak tanımlanır [24].

$(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X$, j-geren çifti için birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbitleri sırasıyla $F^1_{(x_1, x_2, \ldots, x_j)}(G)$ ve $F^2_{(x_1, x_2, \ldots, x_j)}(G)$ şeklinde ifade edilsin.

<u>*Teorem 3.1.2.1:*</u> Sonlu bir grubun birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbiti basit periyodiktir.

$LF^1(G; x_1, x_2, \ldots, x_j)$ ve $LF^2(G; x_1, x_2, \ldots, x_j)$ ile sırasıyla $F^1_{(x_1, x_2, \ldots, x_j)}(G)$ ve $F^2_{(x_1, x_2, \ldots, x_j)}(G)$ orbitlerinin periyot uzunlukları ifade edilsin [24].

<u>*Teorem 3.1.2.2:*</u> x, y, z üreteçleri ile verilen $(2,3,3)$ Polyhedral grubunu ele alalım. O zaman birinci tür $F^1_{(x,y,z)}((2,3,3))$ Fibonacci-circulant orbitinin periyot uzunluğu 78 dir [24].

Teorem 3.1.2.3: $n \geq 3$ için x, y, z üreteçleri ile verilen $(n,2,2)$ Polyhedral grubunu ele alalım. O zaman ikinci tür $F^2_{(x,y,z)}(n(n,2,2))$ Fibonacci-circulant orbitinin periyot uzunluğu 14 tür [24].

3.2 *k*-basamak Pell-Circulant Dizileri

$f(x)$ polinomu için circulant matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_{k+1} = \left[c_{ij}\right]_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{cases} 1, & (i = k+1,\ j = 1) \text{ ve } (1 \leq i \leq k \text{ için } i+1 = j) \text{ ise,} \\ -2, & (i = k,\ j = 1),\ (i = k+1,\ j = 2) \text{ ve } (1 \leq i \leq k-1 \text{ için } i+2 = j) \text{ ise,} \\ -1, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Örneğin, C_3 ve C_5 matrisleri;

$$C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } C_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [23].

Genelleştirilmiş *k*-basamak Pell-circulant dizisi C_{k+1} matrisi kullanılarak:

$k = 2$ ise, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ ve $x_3 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 3$ için

$$x_n = \begin{cases} -2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}, & n \equiv 1 \bmod 3, \\ x_{n-2} - x_{n-3} - 2x_{n-4}, & n \equiv 2 \bmod 3, \\ x_{n-3} - 2x_{n-4} + x_{n-5}, & n \equiv 0 \bmod 3, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$k \geq 3$ ise, $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ ve $x_{k+1} = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > k+1$ için

$$x_n=\begin{cases} -x_{n-1}-x_{n-2}-\cdots-x_{n-k+2}-2x_{n-k+2}+x_{n-k}-x_{n-k-1}, & n\equiv 1 \bmod (k+1),\\ -x_{n-2}-x_{n-3}-\cdots-x_{n-k+2}-2x_{n-k+2}+x_{n-k}-x_{n-k-1}-x_{n-k-2}, & n\equiv 2 \bmod (k+1),\\ \vdots & \vdots\\ -x_{n-k+2}-2x_{n-k+1}+x_{n-k}-x_{n-k-1}-\cdots-x_{n-2k+2}, & n\equiv k-2 \bmod (k+1),\\ -2x_{n-k+1}+x_{n-k}-x_{n-k-1}-\cdots-x_{n-2k+2}, & n\equiv k-1 \bmod (k+1),\\ x_{n-k}-x_{n-k-1}-\cdots-x_{n-2k+1}-x_{n-2k}, & n\equiv k \bmod (k+1),\\ -x_{n-k-1}-x_{n-k-2}-\cdots-x_{n-2k+1}-x_{n-2k}-x_{n-2k-1}, & n\equiv 0 \bmod (k+1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Örneğin, genelleştirilmiş 5-basamak Pell-circulant dizisi:

$x_1=x_2=\cdots=x_5=0$ ve $x_6=1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n>6$ için

$$x_n=\begin{cases} -x_{n-1}-x_{n-2}-x_{n-3}-2x_{n-4}+x_{n-5}-x_{n-6}, & n\equiv 1 \bmod 6,\\ -x_{n-2}-x_{n-3}-2x_{n-4}+x_{n-5}-x_{n-6}-x_{n-7}, & n\equiv 2 \bmod 6,\\ -x_{n-3}-2x_{n-4}+x_{n-5}-x_{n-6}-x_{n-7}-x_{n-8}, & n\equiv 3 \bmod 6,\\ -2x_{n-4}+x_{n-5}-x_{n-6}-x_{n-7}-x_{n-8}-x_{n-9}, & n\equiv 4 \bmod 6,\\ x_{n-5}-x_{n-6}-x_{n-7}-x_{n-8}-x_{n-9}-2x_{n-10}, & n\equiv 5 \bmod 6,\\ -x_{n-6}-x_{n-7}-x_{n-8}-x_{n-9}-2x_{n-10}+x_{n-11}, & n\equiv 0 \bmod 6 \end{cases}$$

şeklindedir [23].

$n\geq 0$ için matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanabilir olduğundan $(C_{k+1})^n$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(C_{k+1})^n=\begin{bmatrix} x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k} & x_{n(k+1)+k-1} & \cdots & x_{n(k+1)+2} & x_{n(k+1)+1}\\ x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k} & \cdots & x_{n(k+1)+3} & x_{n(k+1)+2}\\ x_{n(k+1)+2} & x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} & \cdots & x_{n(k+1)+4} & x_{n(k+1)+3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ x_{n(k+1)+k-1} & x_{n(k+1)+k-2} & x_{n(k+1)+k-3} & \cdots & x_{n(k+1)+k+1} & x_{n(k+1)+k}\\ x_{n(k+1)+k} & x_{n(k+1)+k-1} & x_{n(k+1)+k-2} & \cdots & x_{n(k+1)+1} & x_{n(k+1)+k+1} \end{bmatrix}. \tag{3.2.1}$$

$(C_{k+1})^n$ matrisi mertebesi $k+1$ olan bir circulant matrisi ve $P(x)=x_{n(k+1)+k+1}+x_{n(k+1)+1}x+\cdots+x_{n(k+1)+k}x^k$ polinomu $(C_{k+1})^n$ matrisinin karakteristik polinomu olduğu kolaylıkla görülür [23].

k-basamak Pell-circulant dizisi

$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0$ ve $a_k=1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $k\geq 3$ ve $n\geq 0$ için

$$a_{n+k+1}=-2a_{n+k}-a_{n+k-1}-\cdots-a_{n+2}+a_{n+1} \tag{3.2.2}$$

şeklinde tanımlanır. $\{a_n\}$ *k*-basamak Pell-circulant dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x^{k-1}}{-x^k + x^{k-1} + \cdots + x^2 + 2x + 1}$$

şeklindedir [23].

(3.2.2) ifadesi kullanılarak, *k*-basamak Pell-circulant dizisi için Companion matris formundaki üreteç matrisleri;

$$M_k = \left[m_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, M_k matrisi *k*-basamak Pell-circulant matrisi olarak adlandırılır [23].

$$\begin{bmatrix} a_{n+k+1} \\ a_{n+k} \\ \vdots \\ a_{n+2} \end{bmatrix} = M_k \begin{bmatrix} a_{n+k} \\ a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $n \geq k-1$ için n üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak $(M_k)^n$ *k*-basamak Pell-circulant matrisinin n -inci kuvveti

$$(M_k)^n = \begin{bmatrix} a_{n+k} & a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots - a_{n+k-1} & a_{n+2} - a_{n+3} - \cdots - a_{n+k-1} & \cdots & a_{n+k-2} - a_{n+k-1} & a_{n+k-1} \\ a_{n+k-1} & a_n - a_{n+1} - \cdots - a_{n+k-2} & a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots - a_{n+k-2} & \cdots & a_{n+k-3} - a_{n+k-2} & a_{n+k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & a_{n-k+2} - a_{n-k+3} - \cdots - a_n & a_{n-k+3} - a_{n-k+4} - \cdots - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\det M_k = (-1)^{k+1}$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [23].

İndirgemeli bir dizi için Simpson formülü üreteç matrisinin determinantından elde edilebilir olduğu bilinmektedir. Örneğin, $n \geq 2$ için 3-basamak Pell-circulant sayılarının Simpson formula

$$(a_{n+1})^3 + (a_{n+2})^2 a_{n-1} + a_{n+3}(a_n)^2 - 2a_{n+2} \cdot a_{n+1} \cdot a_n - a_{n+3}a_{n+1}a_{n-1} = 1$$

şeklindedir [23].

3.2.1 C_{k+1} ve M_k Matrisleri Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi sonucu $A(\bmod m)$ olarak ifade edilir. Yani $A(\bmod m)=$ $\left(a_{ij}(\bmod m)\right)$ dir. $\langle A\rangle_m=\left\{A^i(\bmod m)\middle| i\geq 0\right\}$ olsun. Eğer $\operatorname{obeb}(\det A, m)=1$ ise o zaman $\langle A\rangle_m$ bir devirli gruptur. $\langle A\rangle_m$ grubunun mertebesi $\left|\langle A\rangle_m\right|$ ile gösterilir. $\det M_k=(-1)^{k+1}$ olduğundan dolayı her pozitif m tam sayı için $\langle M_k\rangle_m$ devirli bir gruptur. Benzer şekilde $\langle C_{k+1}\rangle_m$ kümesi $\operatorname{obeb}(\det C_{k+1}, m)=1$ ise devirli bir gruptur. Şimdi C_{k+1} ve M_k matrisleri ile üretilen devirli grupları göz önüne alalım.

<u>*Teorem 3.2.1.1:*</u> p bir asal sayı ve $\alpha\in N$ için $\langle G\rangle_{p^\alpha}$ devirli grubu ise $\langle C_{k+1}\rangle_{p^\alpha}$ ve $\langle M_k\rangle_{p^\alpha}$ devirli gruplarından herhangi biri olsun. Eğer u, $\left|\langle G\rangle_p\right|=\left|\langle G\rangle_{p^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise, bu takdirde $v\geq u$ için $\left|\langle G\rangle_{p^v}\right|=p^{v-u}\cdot\left|\langle G\rangle_p\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle, her $v\geq 2$ için $\left|\langle G\rangle_p\right|\neq\left|\langle G\rangle_{p^2}\right|$ ise, o halde $\left|\langle G\rangle_{p^v}\right|=p^{v-1}\cdot\left|\langle G\rangle_p\right|$ dir [23].

<u>*Teorem 3.2.1.2:*</u> m pozitif bir tam sayı ve $\langle G\rangle_m$ devirli grubu ise $\langle C_{k+1}\rangle_m$ ve $\langle M_k\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi biri ve $t\geq 1$ olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Burada p_i ler farklı asal sayılardır. O zaman $\left|\langle G\rangle_m\right|=okek\left[\langle G\rangle_{p_1^{e_1}},\langle G\rangle_{p_2^{e_2}},\ldots,\langle G\rangle_{p_k^{e_k}}\right]$ dır [23].

$\{x_n(m)\}$ genelleştirilmiş *k*-merteben Pell-circulant dizisi ve $\{a_n(m)\}$ *k*-basamak Pell-circulant dizisi m modülüne göre sırasıyla indirgenirse, tekrar eden,

$$\{x_n(m)\}=\{x_1(m),x_2(m),x_3(m),\ldots,x_j(m),\ldots\}$$

ve

$$\{a_n(m)\} = \{a_1(m), a_2(m), a_3(m), \ldots, a_j(m), \ldots\}$$

dizileri elde edilir ve $x_i(m) = x_i(\bmod m)$ ve $a_j(m) = a_j(\bmod m)$ dir. Ayrıca genelleştirilmiş *k*-merteben Pell-circulant ve *k*-basamak Pell-circulant dizilerinin tanımlarında olduğu gibi benzer indirgemeleri bağıntılara sahiptirler.

<u>*Teorem 3.2.1.3:*</u> $\{a_n(m)\}$ dizisi her m pozitif tam sayısı için basit periyodiktir. Benzer şekilde $\{x_n(m)\}$ dizisi $\text{obeb}(\det C_{k+1}, m) = 1$ ise basit periyodik bir dizidir [23].

$\{a_n(m)\}$ ve $\{x_n(m)\}$ dizilerinin periyodu sırasıyla $l_a^k(m)$ ve $l_x^k(m)$ ile ifade edilsin.

<u>*Sonuç 3.2.1.1:*</u> *i*. $\text{obeb}(\det C_{k+1}, p) = 1$ olacak şekilde p asal bir sayı olsun. O zaman $l_x^k(p) = (k+1) \cdot \left|\langle C_{k+1} \rangle_p\right|$ dir.

ii. Her p asal sayısı için $l_a^k(p) = \left|\langle M_k \rangle_p\right|$ dir.

O halde $A(p^\alpha)$ kümesi devirli bir gruptur [23].

<u>*Sonuç 3.2.1.2:*</u> p bir asal sayı ve $\alpha \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $A(p^\alpha)$ devirli grubu $\langle M_k \rangle_{p^\alpha}$ devirli grubuna izomorftur [23].

3.2.2 Gruplarda k-basamak Pell-Circulant Dizileri

<u>*Tanım 3.2.1.1:*</u> $G = \langle X \rangle$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$, j-gerenlisi için sonlu geren grubu olsun. O halde G grubundaki *k*-basamak Pell-circulant dizisi aşağıdaki tanımlanır:

$j = 2$ ise

$$b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = (x_1)^{-1}(x_2)^{-2}, \ldots, b_k = (b_1)^{-1} \cdots (b_{k-2})^{-1}(b_{k-1})^{-2}$$

ve $n \geq 1$ için

$$b_{k+n} = (b_n)(b_{n+1})^{-1} \cdots (b_{n+k-2})^{-1}(b_{n+k-1})^{-2},$$

$j = 3$ ise

$$b_1 = x_1, b_2 = x_2, \ldots, b_i = x_j$$

ve $n \geq 1$ için

$$b_{i+n} = \begin{cases} (b_1)^{-1}(b_2)^{-1}\cdots(b_{i+n-2})^{-1}(b_{i+n-1})^{-2}, & j+n \leq k \text{ ise,} \\ (b_{i+n-k})(b_{i+n-k+1})^{-1}\cdots(b_{i+n-2})^{-1}(b_{i+n-1})^{-2}, & j+n > k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [23].

$x_1, \ldots, x_j$ ile üretilen bir grubun *k*-basamak Pell-circulant dizisi $PC_k\left(G; x_1, \ldots, x_j\right)$ ile ifade edilsin.

<u>*Teorem 3.2.1.1:*</u> $G = \langle X \rangle$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ tarafından üretilen sonlu bir grup olsun. O halde G deki *k*-basamak Pell-circulant dizisi periyodiktir. Özellikle, $k \geq j$ ise G deki *k*-basamak Pell-circulant dizisi basit periyodiktir [23].

$PC_k\left(G; x_1, \ldots, x_j\right)$ dizisinin periyodu $LPC_k\left(G; x_1, \ldots, x_j\right)$ ile ifade edilsin.

<u>*Teorem 3.2.1.2:*</u> (x, y) geren çifti için Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion grubundaki *k*-basamak Pell-circulant dizilerinin periyotları:

i. $LPC_3\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 7$,

ii. $k \geq 4$ için $LPC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-2} \cdot l_a^k(2)$

şeklinde elde edilir [23].

<u>*Teorem 3.2.1.3:*</u> (y, x) geren çifti için Q_{2^n} genelleştirilmiş quaternion grubundaki *k*-basamak Pell-circulant dizilerinin periyotları:

i. $LPC_3\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-3} \cdot 7$,

ii. $k \geq 4$ için $LPC_k\left(Q_{2^n}; x, y\right) = 2^{n-2} \cdot l_a^k(2)$

şeklinde elde edilir [23].

3.3 Jacobsthal-Circulant Dizileri

$f(x)$ polinomu için C_3 circulant matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3-üncü, 4-üncü ve 5-inci mertebelerden indirgemeli bağıntılar yardımıyla genelleştirilmiş Jacobsthal-circulant dizisi

$J_1^c = J_2^c = 0$ ve $J_3^c = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 3$ için

$$J_n^C = \begin{cases} -J_{n-1}^C + J_{n-2}^C - 2J_{n-3}^C, & n \equiv 1 \bmod 3, \\ J_{n-2}^C - 2J_{n-3}^C - J_{n-4}^C, & n \equiv 2 \bmod 3, \\ -2J_{n-3}^C - J_{n-4}^C + J_{n-5}^C, & n \equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanır [26].

$n \geq 1$ için,

$$(C_3)^n = \begin{bmatrix} J_{3n+3}^C & J_{3n+2}^C & J_{3n+1}^C \\ J_{3n+1}^C & J_{3n+3}^C & J_{3n+2}^C \\ J_{3n+2}^C & J_{3n+1}^C & J_{3n+3}^C \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanabilir olduğu kolaylıkla görülür. Burada $\det C_3 = -14$ olduğu açıktır [26].

(3.3.1) eşitsizliği kullanılarak birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [26]:

$J_1^1 = J_2^1 = 0$ ve $J_3^1 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 3$ için

$$J_n^1 = -J_{n-1}^1 + J_{n-2}^1 - 2J_{n-3}^1, \tag{3.3.3}$$

$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = 0$ ve $J_4^2 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 4$ için

$$J_n^2 = J_{n-2}^2 - 2J_{n-3}^2 - J_{n-4}^2 \tag{3.3.4}$$

ve

$J_1^3 = \cdots = J_4^3 = 0$ ve $J_5^3 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 5$ için

$$J_n^3 = -2J_{n-3}^3 - J_{n-4}^3 + J_{n-5}^3. \tag{3.3.5}$$

Birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [26]:

$$g^{(1)}(x)=\frac{x^2}{2x^3-x^2+x+1},$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{x^3}{x^4-2x^3-x^2+1}$$

ve

$$g^{(3)}(x)=\frac{x^4}{-x^5+x^4+2x^3+1}.$$

(3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) ifadeleri kullanılarak, birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant dizileri için Companion matris formundaki üreteç matrisleri;

$$M_J^{(1)}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$M_J^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$M_J^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde olup, burada $M_J^{(1)}$, $M_J^{(2)}$ ve $M_J^{(3)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant matrisleri olarak adlandırılır [26].

n üzerinden tümevarım uygulanarak birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant matrislerinin n-inci kuvvetleri

$$\left(M_J^{(1)}\right)^n=\begin{bmatrix}J_{n+3}^1 & J_{n+4}^1+J_{n+3}^1 & -2J_{n+2}^1\\ J_{n+2}^1 & J_{n+3}^1+J_{n+2}^1 & -2J_{n+1}^1\\ J_{n+1}^1 & J_{n+2}^1+J_{n+1}^1 & -2J_{n}^1\end{bmatrix}, \tag{3.3.6}$$

$$\left(M_J^{(2)}\right)^n = \begin{bmatrix} J_{n+4}^2 & J_{n+5}^2 & J_{n+6}^2 - J_{n+4}^2 & -J_{n+3}^2 \\ J_{n+3}^2 & J_{n+4}^2 & J_{n+5}^2 - J_{n+3}^2 & -J_{n+2}^2 \\ J_{n+2}^2 & J_{n+3}^2 & J_{n+4}^2 - J_{n+2}^2 & -J_{n+1}^2 \\ J_{n+1}^2 & J_{n+2}^2 & J_{n+3}^2 - J_{n+1}^2 & -J_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.3.7}$$

ve

$$\left(M_J^{(3)}\right)^n = \begin{bmatrix} J_{n+5}^3 & J_{n+6}^3 & J_{n+7}^3 & J_{n+3}^3 - J_{n+4}^3 & -J_{n+4}^3 \\ J_{n+4}^3 & J_{n+5}^3 & J_{n+6}^3 & J_{n+2}^3 - J_{n+3}^3 & -J_{n+3}^3 \\ J_{n+3}^3 & J_{n+4}^3 & J_{n+5}^3 & J_{n+1}^3 - J_{n+2}^3 & -J_{n+2}^3 \\ J_{n+2}^3 & J_{n+3}^3 & J_{n+4}^3 & J_n^3 - J_{n+1}^3 & -J_{n+1}^3 \\ J_{n+1}^3 & J_{n+2}^3 & J_{n+3}^3 & J_{n-1}^3 - J_n^3 & -J_n^3 \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\det M_J^{(1)} = -2$ ve $\det M_J^{(2)} = \det M_J^{(3)} = 1$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [26].

İndirgemeli bir dizi için Simpson formülü üreteç matrisinin determinantından elde edilebilir olduğu bilinmektedir. Bu yüzden genelleştirilmiş Jacobsthal-circulant dizisi için Simpson formülü

$$\left(J_{3n+3}^C\right)^3 + \left(J_{3n+2}^C\right)^3 + \left(J_{3n+1}^C\right)^3 - 3J_{3n+3}^C \cdot J_{3n+2}^C \cdot J_{3n+1}^C = (-14)^n$$

şeklindedir [26].

Birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant dizilerinin karakteristik denklemlerinin çoklu köke sahip olmadığını görmek kolaydır. Yani, $M_J^{(1)}$, $M_J^{(2)}$ ve $M_J^{(3)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu açıktır. $M_J^{(1)}$, $M_J^{(2)}$ ve $M_J^{(3)}$ matrislerinin özdeğerlerinin kümesi sırasıyla $\left\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right\}$, $\left\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}\right\}$ ve $\left\{x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, x_4^{(3)}, x_5^{(3)}\right\}$ olsun. $k = 1, 2, 3$ için $(k+2)\times(k+2)$ tipli $V^{(k)}$ Vandermonde matrisinin

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(x_1^{(k)}\right)^{k+1} & \left(x_2^{(k)}\right)^{k+1} & \dots & \left(x_{k+1}^{(k)}\right)^{k+1} & \left(x_{k+2}^{(k)}\right)^{k+1} \\ \left(x_1^{(k)}\right)^{k} & \left(x_2^{(k)}\right)^{k} & \dots & \left(x_{k+1}^{(k)}\right)^{k} & \left(x_{k+2}^{(k)}\right)^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \dots & x_{k+1}^{(k)} & x_{k+2}^{(k)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini düşünelim. W_k^i matrisi;

$$W_k^i=\begin{bmatrix}\left(x_1^{(k)}\right)^{n+k+2-i}\\ \left(x_2^{(k)}\right)^{n+k+2-i}\\ \vdots\\ \left(x_{k+2}^{(k)}\right)^{n+k+2-i}\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_j^{(k,i)}$ matrisi, $V^{(k)}$ matrisinin j-inci sütununun W_k^i sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Teorem 3.3.1: J_n^k, $k=1,2,3$ için k-inci tür dizinin n-inci terimi olsun. O halde

$$m_{ij}^{(k,n)}=\frac{\det V_j^{(k,i)}}{\det V^{(k)}}$$

dır. Burada $\left(M_J^{(k)}\right)^n=\left[m_{ij}^{(k,n)}\right]$ şeklinde ifade edilir [26].

3.3.1 C_3, $M_J^{(1)}$, $M_J^{(2)}$ ve $M_J^{(3)}$ Matrisleri Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi sonucu $A(\bmod m)$ olarak ifade edilir. Yani $A(\bmod m)=\left(a_{ij}(\bmod m)\right)$ dir. $\langle A\rangle_m=\left\{A^i(\bmod m)\middle| i\geq 0\right\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}(m,\det A)=1$ ise o zaman $\langle A\rangle_m$ bir devirli gruptur. Eğer $\text{obeb}(m,\det A)\neq 1$ ise o zaman $\langle A\rangle_m$ bir yarı gruptur. $\langle A\rangle_m$ grubunun mertebesi $\left|\langle A\rangle_m\right|$ ile gösterilir. $\det C_3=-14$ olduğundan $\langle C_3\rangle_m$ devirli bir gruptur ve $\text{obeb}(m,-14)=1$ dir. Benzer şekilde her pozitif m tam sayı için $\det M_J^{(2)}=\det M_J^{(3)}=1$ olduğundan dolayı $\left\langle M_J^{(2)}\right\rangle_m$ ve $\left\langle M_J^{(3)}\right\rangle_m$ devirli bir gruptur. Ayrıca m tek tam sayı ise $\left\langle M_J^{(1)}\right\rangle_m$ devirli bir gruptur. Şimdi C_3, $M_J^{(1)}$, $M_J^{(2)}$ ve $M_J^{(3)}$ matrisleri ile üretilen devirli grupların mertebelerini göz önüne alalım.

Teorem 3.3.1.1: λ bir asal sayı ve $n \in N$ için $\langle G \rangle_{\lambda^n}$ devirli grubu ise $\langle C_3 \rangle_{\lambda^n}$, $\left\langle M_J^{(1)} \right\rangle_{\lambda^n}$, $\left\langle M_J^{(2)} \right\rangle_{\lambda^n}$ ve $\left\langle M_J^{(3)} \right\rangle_{\lambda^n}$ devirli gruplarından herhangi biri olsun. Eğer u, $\left|\langle G \rangle_{\lambda}\right| = \left|\langle G \rangle_{\lambda^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$ için $\left|\langle G \rangle_{\lambda^v}\right| = \lambda^{v-u} \cdot \left|\langle G \rangle_{\lambda}\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle her $v \geq 2$ için $\left|\langle G \rangle_{\lambda}\right| \neq \left|\langle G \rangle_{\lambda^2}\right|$ ise, o zaman $\left|\langle G \rangle_{\lambda^v}\right| = \lambda^{v-1} \cdot \left|\langle G \rangle_{\lambda}\right|$ dir [26].

Teorem 3.3.1.2: m pozitif bir tam sayı ve $\langle G \rangle_m$ devirli grubu ise $\langle C_3 \rangle_m$, $\left\langle M_J^{(1)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_J^{(2)} \right\rangle_m$ ve $\left\langle M_J^{(3)} \right\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi biri olsun. Farz edelim ki $k \geq 1$ için $m = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Burada λ_i ler farklı asal sayılardır. O zaman $\left|\langle G \rangle_m\right| = okek\left[\langle G \rangle_{\lambda_1^{e_1}}, \langle G \rangle_{\lambda_2^{e_2}}, \ldots, \langle G \rangle_{\lambda_k^{e_k}}\right]$ dır [26].

$\{J_n(m)\}$ genelleştirilmiş Jacobsthal-circulant dizisi ve $\{J_n^k(m)\}$ birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant dizileri m modülüne göre sırasıyla indirgenirse, tekrar eden,

$$\{J_n(m)\} = \{J_1(m), J_2(m), J_3(m), \ldots, J_i(m), \ldots\}$$

ve

$$\{J_n^k(m)\} = \{J_1^k(m), J_2^k(m), J_3^k(m), \ldots, J_i^k(m), \ldots\}$$

dizileri elde edilir ve burada $k = 1, 2, 3$ için $J_i(m) = J_i(\operatorname{mod} m)$ ve $J_i^k(m) = J_i^k(\operatorname{mod} m)$ dir. Ayrıca (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) ifdelerinde olduğu gibi benzer indirgemeli bağıntılara sahiptirler.

Theorem 3.3.1.3: $\{J_n^C\}$, $\{J_n^1\}$, $\{J_n^2\}$ ve $\{J_n^3\}$ dizilerinin m modülüne göre durumları için:

i. $\{J_n^C(m)\}$ dizisi her m pozitif tam sayısı için periyodiktir.

ii. $\{J_n^2(m)\}$ ve $\{J_n^3(m)\}$ dizileri her m pozitif tam sayısı için basit periyodiktir.

iii. $\{J_n^1(m)\}$ dizisi her *m* pozitif tam sayısı için periyodiktir. Özellikle m tek tam sayı ise $\{J_n^1(m)\}$ dizisi basit periyodik olacaktır [26].

$\{J_n^C(m)\}$, $\{J_n^1(m)\}$, $\{J_n^2(m)\}$ ve $\{J_n^3(m)\}$ dizilerinin periyotları sırasıyla $l_J^C(m)$, $l_J^1(m)$, $l_J^2(m)$ ve $l_J^3(m)$ ile ifade edilsin.

<u>*Sonuç 3.3.1.1:*</u> λ asal bir sayı olsun. O zaman

i. $\lambda \neq 2,7$ ise $l_J^C(\lambda) = 3 \cdot \left|\langle C_3 \rangle_\lambda\right|$ dir.

ii. $\lambda \neq 2$ asal sayısı için $l_J^1(\lambda)$ periyodu $\left\langle M_J^{(1)} \right\rangle_\lambda$ devirli grubunun periyoduna eşitttir. Ayrıca her λ asal bir sayısı için $l_J^2(\lambda) = \left|\left\langle M_J^{(2)} \right\rangle_\lambda\right|$ ve $l_J^3(\lambda) = \left|\left\langle M_J^{(3)} \right\rangle_\lambda\right|$ dir [26].

3.3.2 Gruplarda Birinci, İkinci ve Üçüncü tür Jacobsthal-Circulant Dizileri

<u>*Tanım 3.3.2.1.1:*</u> $G = \langle X \rangle$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$, j-gerenlisi için sonlu geren grubu olsun. O halde birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant orbitleri sırasıyla aşağıdaki tanımlanır [26]:

$$\begin{cases} x_1^2 = (x_1)^{-1}, x_2^2 = x_2, x_3^2 = x_3, x_4^2 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ x_1^2 = (x_1)^2, x_2^2 = (x_1)^{-1}, x_3^2 = x_2, x_4^2 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ x_1^2 = (x_1)^{-5}, x_2^2 = (x_1)^2, x_3^2 = (x_1)^{-1}, x_4^2 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 5$ için

$$x_n^2 = \left(x_{n-4}^2\right)^{-1}\left(x_{n-3}^2\right)^{-2}\left(x_{n-2}^2\right),$$

$J_{(x_1,\ldots,x_j)}^2(G)$ ile $(x_1, x_2, \ldots, x_j)$, j-geren çifti için ikinci tür Jacobsthal-circulant orbitlerini gösterelim.

<u>*Teorem 3.3.2.1:*</u> Sonlu bir grubun ikinci tür Jacobsthal-circulant orbiti basit periyodiktir [26].

$LJ_{(x_1,\ldots,x_j)}^2(G)$ ile $J_{(x_1,\ldots,x_j)}^2(G)$ dizisinin periyot uzunluğu ifade edilsin.

Teorem 3.3.2.2: $n \geq 3$ için [26]:

$$LJ^2_{(x,y,z)}\left(\langle n,2,2\rangle\right)=\begin{cases}6n & n \text{ çift ise,}\\ 12n & n \text{ tek ise.}\end{cases}$$

3.4 Padovan-Circulant Dizileri

$f(x)$ polinomu için C_4 circulant matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_4=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

C_4 matrisi kullanılarak genelleştirilmiş Padovan-circulant dizisi:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ve $x_4 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n > 4$ için

$$x_n=\begin{cases} x_{n-2}-x_{n-3}-x_{n-4}, & n\equiv 1 \bmod 4,\\ -x_{n-2}+x_{n-4}-x_{n-5}, & n\equiv 2 \bmod 4,\\ -x_{n-3}-x_{n-4}+x_{n-6}, & n\equiv 3 \bmod 4,\\ x_{n-4}-x_{n-5}-x_{n-6}, & n\equiv 0 \bmod 4,\end{cases} \tag{3.4.1}$$

şeklinde tanımlanır [21].

$n \geq 1$ için, tümevarım yöntemi kullanılarak

$$x_{4n+1}-2x_{4n-1}-x_{4n}=(-1)^n$$

ve

$$x_{4n+2}+2x_{4n}+x_{4n-1}=1$$

yazılabilir [21].

$n \geq 0$ için

$$(C_4)^n=\begin{bmatrix}(-1)^n x_{4n+4} & x_{4n+3} & (-1)^n x_{4n+2} & x_{4n+1}\\ x_{4n+3} & x_{4n+4} & x_{4n+1} & x_{4n+2}\\ (-1)^n x_{4n+2} & x_{4n+1} & (-1)^n x_{4n+4} & x_{4n+3}\\ x_{4n+1} & x_{4n+2} & x_{4n+3} & x_{4n+4}\end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanabilir olduğu kolaylıkla görülür. Burada $\det C_4 = 5$ olduğu için genelleştirilmiş Padovan-circulant dizisi için Simpson fomülü

$$\left[(-1)^n (x_{4n+2})^2 + (-1)^{n+1} (x_{4n+4})^2\right]^2 + \left[(x_{4n+1})^2 - (x_{4n+3})^2\right]^2$$
$$+2(-1)^{n+1}\left[(x_{4n+2})^2 + (x_{4n+4})^2\right]\left[(x_{4n+1})^2 + (x_{4n+3})^2\right] +$$
$$8(-1)^n x_{4n+1}x_{4n+2}x_{4n+3}x_{4n+4} = (5)^n .$$

şeklinde yazılabilir [21].

(3.4.1) eşitsizliği kullanılarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [21]:

$x_1^1 = x_2^1 = x_3^1 = 0$ ve $x_4^1 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 5$ için

$$x_n^1 = x_{n-2}^1 - x_{n-3}^1 - x_{n-4}^1 , \tag{3.4.3}$$

$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = 0$ ve $x_5^2 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 6$ için

$$x_n^2 = -x_{n-2}^2 + x_{n-4}^2 - x_{n-5}^2 , \tag{3.4.4}$$

$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_4^3 = x_5^3 = 0$ ve $x_6^3 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 7$ için

$$x_n^3 = -x_{n-3}^3 - x_{n-4}^3 + x_{n-6}^3 \tag{3.4.5}$$

ve

$x_1^4 = x_2^4 = x_3^4 = x_4^4 = x_5^4 = 0$ ve $x_6^4 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 7$ için

$$x_n^4 = x_{n-4}^4 - x_{n-5}^4 - x_{n-6}^4 . \tag{3.4.6}$$

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [21]:

$$g^{(1)}(x) = \frac{x^3}{x^4 + x^3 - x^2 + 1},$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{x^4}{x^5 - x^4 + x^2 + 1},$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{x^5}{-x^6 + x^4 + x^3 + 1}$$

ve

$$g^{(4)}(x) = \frac{x^5}{x^6 + x^5 - x^4 + 1}.$$

(3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) ve (3.4.6) ifadeleri kullanılarak, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant dizileri için Companion matris formundaki üreteç matrisleri;

$$M_P^{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$M_P^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$M_P^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$M_P^{(4)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde olup, burada $M_P^{(1)}$, $M_P^{(2)}$, $M_P^{(3)}$ ve $M_P^{(4)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant matrisleri olarak adlandırılır [21].

n üzerinden tümevarım uygulanarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant matrislerinin n-inci kuvvetleri

$$\left(M_P^{(1)}\right)^n=\begin{bmatrix}x_{n+4}^1 & x_{n+5}^1 & -x_{n+3}^1-x_{n+2}^1 & -x_{n+3}^1\\ x_{n+3}^1 & x_{n+4}^1 & -x_{n+2}^1-x_{n+1}^1 & -x_{n+2}^1\\ x_{n+2}^1 & x_{n+3}^1 & -x_{n+1}^1-x_n^1 & -x_{n+1}^1\\ x_{n+1}^1 & x_{n+2}^1 & -x_n^1-x_{n-1}^1 & -x_n^1\end{bmatrix},\ n>1 \text{ için} \tag{3.4.7}$$

$$\left(M_P^{(2)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+5}^2 & x_{n+6}^2 & x_{n+3}^2 - x_{n+2}^2 & x_{n+4}^2 - x_{n+3}^2 & -x_{n+4}^2 \\ x_{n+4}^2 & x_{n+5}^2 & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & x_{n+3}^2 - x_{n+2}^2 & -x_{n+3}^2 \\ x_{n+3}^2 & x_{n+4}^2 & x_{n+1}^2 - x_n^2 & x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 & -x_{n+2}^2 \\ x_{n+2}^2 & x_{n+3}^2 & x_n^2 - x_{n-1}^2 & x_{n+1}^2 - x_n^2 & -x_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^2 & x_{n+2}^2 & x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 & x_n^2 - x_{n-1}^2 & -x_n^2 \end{bmatrix},\ n > 2 \text{ için} \qquad (3.4.8)$$

$$\left(M_P^{(3)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+6}^3 & x_{n+7}^3 & x_{n+8}^3 & x_{n+3}^3 - x_{n+5}^3 & x_{n+4}^3 & x_{n+5}^3 \\ x_{n+5}^3 & x_{n+6}^3 & x_{n+7}^3 & x_{n+2}^3 - x_{n+4}^3 & x_{n+3}^3 & x_{n+4}^3 \\ x_{n+4}^3 & x_{n+5}^3 & x_{n+6}^3 & x_{n+1}^3 - x_{n+3}^3 & x_{n+2}^3 & x_{n+3}^3 \\ x_{n+3}^3 & x_{n+4}^3 & x_{n+5}^3 & x_n^3 - x_{n+2}^3 & x_{n+1}^3 & x_{n+2}^3 \\ x_{n+2}^3 & x_{n+3}^3 & x_{n+4}^3 & x_{n-1}^3 - x_{n+1}^3 & x_n^3 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+1}^3 & x_{n+2}^3 & x_{n+3}^3 & x_{n-2}^3 - x_n^3 & x_{n-1}^3 & x_n^3 \end{bmatrix},\ n > 2 \text{ için} \qquad (3.4.9)$$

ve

$$\left(M_P^{(4)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+6}^4 & x_{n+7}^4 & x_{n+8}^4 & x_{n+9}^4 & -x_{n+5}^4 - x_{n+4}^4 & -x_{n+5}^4 \\ x_{n+5}^4 & x_{n+6}^4 & x_{n+7}^4 & x_{n+8}^4 & -x_{n+4}^4 - x_{n+3}^4 & -x_{n+4}^4 \\ x_{n+4}^4 & x_{n+5}^4 & x_{n+6}^4 & x_{n+7}^4 & -x_{n+3}^4 - x_{n+2}^4 & -x_{n+3}^4 \\ x_{n+3}^4 & x_{n+4}^4 & x_{n+5}^4 & x_{n+6}^4 & -x_{n+2}^4 - x_{n+1}^4 & -x_{n+2}^4 \\ x_{n+2}^4 & x_{n+3}^4 & x_{n+4}^4 & x_{n+5}^4 & -x_{n+1}^4 - x_n^4 & -x_{n+1}^4 \\ x_{n+1}^4 & x_{n+2}^4 & x_{n+3}^4 & x_{n+4}^4 & -x_n^4 - x_{n-1}^4 & -x_n^4 \end{bmatrix},\ n > 1 \text{ için}$$

(3.4.10)

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\det\left(M_P^{(1)}\right)^n = \det\left(M_P^{(4)}\right)^n = 1$ ve $\det\left(M_P^{(2)}\right)^n = \det\left(M_P^{(3)}\right)^n = (-1)^n$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [21].

$M_P^{(1)}$, $M_P^{(2)}$, $M_P^{(3)}$ ve $M_P^{(4)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu açıktır. $M_P^{(1)}$, $M_P^{(2)}$ ve $M_P^{(3)}$ matrislerinin özdeğerlerinin kümesi sırasıyla $\left\{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}\right\}$, $\left\{\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)}\right\}$ ve $\left\{\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_4^{(3)}, \alpha_5^{(3)}, \alpha_6^{(3)}\right\}$ olsun. $1 \le k \le 3$ için $(k+3)\times(k+3)$ tipli $V^{(k)}$ Vandermonde matrisinin

$$V^{(k)} = V^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k+2} & \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k+2} & \cdots & \left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k+2} & \left(\alpha_{k+3}^{(k)}\right)^{k+2} \\ \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k+1} & \cdots & \left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\alpha_{k+3}^{(k)}\right)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} & \cdots & \alpha_{k+2}^{(k)} & \alpha_{k+3}^{(k)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini düşünelim. W_k^i matrisi:

$$W_k^i = \begin{bmatrix} \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{n+k+3-i} \\ \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{n+k+3-i} \\ \vdots \\ \left(\alpha_{k+3}^{(k)}\right)^{n+k+3-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_j^{(k,i)}$ matrisi, $V^{(k)}$ matrisinin j-inci sütununun W_k^i sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

<u>*Teorem 3.4.1:*</u> x_n^k, $1 \le k \le 3$ için k-inci tür dizinin n-inci terimi olsun. O halde

$$m_{ij}^{(k,n)} = \frac{\det V_j^{(k,i)}}{\det V^{(k)}}$$

dır. Burada $\left(M_P^{(k)}\right)^n = \left[m_{ij}^{(k,n)}\right]$ şeklinde ifade edilir [21].

3.4.1 C_4, $M_P^{(1)}$, $M_P^{(2)}$, $M_P^{(3)}$ ve $M_P^{(4)}$ Matrisleri Yardımıyla Devirli Grupların Elde Edilmesi

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi sonucu $A(\bmod m)$ olarak ifade edilir. Yani $A(\bmod m) = \left(a_{ij}\left(\bmod m\right)\right)$ dir. $\langle A\rangle_m = \left\{A^n\left(\bmod m\right) \middle| n \ge 0\right\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}\left(\det A, m\right) = 1$ ise o zaman $\langle A\rangle_m$ bir devirli gruptur. $\langle A\rangle_m$ grubunun mertebesi $\left|\langle A\rangle_m\right|$ ile gösterilir. $\det C_4 = 5$ olduğundan kolaylıkla görülür ki her pozitif m tam sayı için $\langle C_4\rangle_m$ devirli bir gruptur ve $\text{obeb}(5,m)=1$ dir. Benzer şekilde her pozitif m tam sayı için $\left\langle M_P^{(1)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(2)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(3)} \right\rangle_m$ and $\left\langle M_P^{(4)} \right\rangle_m$ devirli bir gruptur. Şimdi C_4, $\left\langle M_P^{(1)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(2)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(3)} \right\rangle_m$ and $\left\langle M_P^{(4)} \right\rangle_m$ matrisleri ile üretilen devirli grupları göz önüne alalım.

<u>*Teorem 3.4.1.1:*</u> p bir asal sayı ve $\varepsilon \in N$ için $\langle G \rangle_{p^\varepsilon}$ devirli grubu ise $\langle C_4 \rangle_{p^\varepsilon}$, $\left\langle M_P^{(1)} \right\rangle_{p^\varepsilon}$, $\left\langle M_P^{(2)} \right\rangle_{p^\varepsilon}$, $\left\langle M_P^{(3)} \right\rangle_{p^\varepsilon}$ ve $\left\langle M_P^{(4)} \right\rangle_{p^\varepsilon}$ devirli gruplarından herhangi biri olsun. Eğer u, $\left|\langle G \rangle_p\right| = \left|\langle G \rangle_{p^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v \geq u$ için $\left|\langle G \rangle_{p^v}\right| = p^{v-u} \cdot \left|\langle G \rangle_p\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle her $v \geq 2$ için $\left|\langle G \rangle_p\right| \neq \left|\langle G \rangle_{p^2}\right|$ ise, o zaman $\left|\langle G \rangle_{p^v}\right| = p^{v-1} \cdot \left|\langle G \rangle_p\right|$ dir [21].

<u>*Teorem 3.4.1.2:*</u> $\langle G \rangle_m$ devirli grubu $\langle C_4 \rangle_m$, $\left\langle M_P^{(1)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(2)} \right\rangle_m$, $\left\langle M_P^{(3)} \right\rangle_m$ ve $\left\langle M_P^{(4)} \right\rangle_m$ devirli gruplarından herhangi biri ve $t \geq 1$ olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılmış olsun. Burada p_i ler farklı asal sayılardır. O zaman $\left|\langle G \rangle_m\right| = okek\left[\langle G \rangle_{p_1^{e_1}}, \langle G \rangle_{p_2^{e_2}}, \ldots, \langle G \rangle_{p_k^{e_k}}\right]$ dır [21].

$\{x_n(m)\}$ genelleştirilmiş Padovan-circulant dizisi ve $\{x_n^k(m)\}$ birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant dizileri m modülüne göre sırasıyla indirgenirse, tekrar eden,

$$\{x_n(m)\} = \{x_1(m), x_2(m), x_3(m), \ldots, x_j(m), \ldots\}$$

ve

$$\{x_n^k(m)\} = \{x_1^k(m), x_2^k(m), x_3^k(m), \ldots, x_j^k(m), \ldots\}$$

dizileri elde edilir ve burada $1 \leq k \leq 4$ için $x_j(m) = x_j(\text{mod}\, m)$ ve $x_j^k(m) = x_j^k(\text{mod}\, m)$ dir.

Teorem 3.4.1.3: $1 \le k \le 4$ için, $\{x_n^k(m)\}$ dizisi her m pozitif tam sayısı için basit periyodik bir dizidir. Benzer şekilde $\{x_n(m)\}$ dizisi $obeb(5,m)=1$ ise basit periyodik bir dizidir [21].

Sırasıyla $l_p(m)$ ve $1 \le k \le 4$ için $l_p^k(m)$ notasyonları ile $\{x_n(m)\}$ ve $\{x_n^k(m)\}$ dizilerinin periyodu ifade edilsin. O zaman (3.4.2), (3.4.7), (3.4.8), (3.4.9) ve (3.4.10) iafadeleri için de aşağıdaki sonuçları elde edilir.

Sonuç 3.4.1.1: p asal bir sayı olsun. O zaman

i. $p \ne 5$ ise $l_P(p) = 4 \cdot \left|\langle C_4 \rangle_p\right|$ dir.

ii. $1 \le k \le 4$ için $l_P^k(p) = \left|\langle M_P^k \rangle_p\right|$ dir [21].

Sonuç 3.4.1.2: p bir asal sayı ve $\varepsilon \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $A_1(p^\varepsilon)$, $A_2(p^\varepsilon)$, $A_3(p^\varepsilon)$ ve $A_4(p^\varepsilon)$ devirli grupları sırasıyla $\langle M_P^{(1)} \rangle_{p^\varepsilon}$, $\langle M_P^{(2)} \rangle_{p^\varepsilon}$, $\langle M_P^{(3)} \rangle_{p^\varepsilon}$ and $\langle M_P^{(4)} \rangle_{p^\varepsilon}$ devirli gruplarına izomorftur [21].

3.4.2 Gruplarda Birinci, İkinci, Üçüncü ve Dördüncü tür Padovan-Circulant Dizileri

Tanım 3.4.2.1: $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X$, j-gerenlisi için birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant orbitleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [21]:

$$\begin{cases} a_1^1 = (x_1)^{-1},\, a_2^1 = x_2,\, a_3^1 = x_3,\, a_4^1 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ a_1^1 = x_1,\, a_2^1 = (x_1)^{-1},\, a_3^1 = x_2,\, a_4^1 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^1 = (x_1)^{-2},\, a_2^1 = x_1,\, a_3^1 = (x_1)^{-1},\, a_4^1 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \ge 1$ için

$$a_{n+4}^1 = (a_n^1)^{-1} (a_{n+1}^1)^{-1} (a_{n+2}^1),$$

$$\begin{cases} a_1^2 = (x_1)^{-1}, a_2^2 = x_2, a_3^2 = x_3, a_4^2 = x_4, a_5^2 = x_5, & j = 5 \text{ ise}, \\ a_1^2 = (x_1)^{-1}, a_2^2 = (x_1)^{-1}, a_3^2 = x_2, a_4^2 = x_3, a_5^2 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ a_1^2 = (x_1)^{-1}, a_2^2 = (x_1)^{-1}, a_3^2 = (x_1)^{-1}, a_4^2 = x_2, a_5^2 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^2 = e, a_2^2 = (x_1)^{-1}, a_3^2 = (x_1)^{-1}, a_4^2 = (x_1)^{-1}, a_5^2 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+5}^2 = \left(a_n^2\right)^{-1}\left(a_{n+1}^2\right)\left(a_{n+3}^2\right)^{-1},$$

$$\begin{cases} a_1^3 = x_1, a_2^3 = x_2, a_3^3 = x_3, a_4^3 = x_4, a_5^3 = x_5, a_6^3 = x_6, & j = 6 \text{ ise}, \\ a_1^3 = e, a_2^3 = x_1, a_3^3 = x_2, a_4^3 = x_3, a_5^3 = x_4, a_6^3 = x_5, & j = 5 \text{ ise}, \\ a_1^3 = x_1, a_2^3 = e, a_3^3 = x_1, a_4^3 = x_2, a_5^3 = x_3, a_6^3 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ a_1^3 = x_1, a_2^3 = x_1, a_3^3 = e, a_4^3 = x_1, a_5^3 = x_2, a_6^3 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^3 = x_1, a_2^3 = x_1, a_3^3 = x_1, a_4^3 = e, a_5^3 = x_1, a_6^3 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+6}^3 = \left(a_n^3\right)\left(a_{n+2}^3\right)^{-1}\left(a_{n+3}^3\right)^{-1}$$

ve

$$\begin{cases} a_1^4 = (x_1)^{-1}, a_2^4 = x_2, a_3^4 = x_3, a_4^4 = x_4, a_5^4 = x_5, a_6^4 = x_6, & j = 6 \text{ ise}, \\ a_1^4 = x_1, a_2^4 = (x_1)^{-1}, a_3^4 = x_2, a_4^4 = x_3, a_5^4 = x_4, a_6^4 = x_5, & j = 5 \text{ ise}, \\ a_1^4 = (x_1)^{-2}, a_2^4 = x_1, a_3^4 = (x_1)^{-1}, a_4^4 = x_2, a_{55}^4 = x_3, a_6^4 = x_4, & j = 4 \text{ ise}, \\ a_1^4 = (x_1)^{3}, a_2^4 = (x_1)^{-2}, a_3^4 = x_1, a_4^4 = (x_1)^{-1}, a_5^4 = x_2, a_6^4 = x_3, & j = 3 \text{ ise}, \\ a_1^4 = (x_1)^{-5}, a_2^4 = (x_1)^{3}, a_3^4 = (x_1)^{-2}, a_4^4 = x_1, a_5^4 = (x_1)^{-1}, a_6^4 = x_2, & j = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+6}^4 = \left(a_n^4\right)^{-1}\left(a_{n+1}^4\right)^{-1}\left(a_{n+2}^4\right).$$

$P^1_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$, $P^2_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$, $P^3_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ve $P^4_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ile sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant orbitlerini gösterelim.

<u>*Teorem 3.4.2.1:*</u> Sonlu bir grubun birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant orbitleri basit periyodiktir [21].

$1 \leq k \leq 4$ için $LP^k_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ ile $P^k_{(x_1,\ldots,x_j)}(G)$ orbitlerinin periyot uzunluğu ifade edilsin.

Teorem 3.4.2.2: $Q_8 = \langle x, y : x^4 = e, y^2 = x^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ takdimiyle verilen Q_8 quaternion grubunu ele alalım. O zaman $LP^1_{(x,y)}(Q_8) = 14$, $LP^2_{(x,y)}(Q_8) = 30$, $LP^3_{(x,y)}(Q_8) = 62$ ve $LP^4_{(x,y)}(Q_8) = 62$ dir [21].

Teorem 3.4.2.3: $D_n = \langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$ takdimiyle verilen D_n Dihedral grubunu ele alalım. O zaman

$$LP^1_{(x,y)}(D_n) = \begin{cases} \dfrac{7n}{2}, & n \equiv 0 \bmod 4, \\ 7n, & n \equiv 2 \bmod 4, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

$$LP^2_{(x,y)}(D_n) = \begin{cases} \dfrac{15n}{2} \cdot \alpha, & n \equiv 0 \bmod 4, \\ 15n \cdot \alpha, & n \equiv 2 \bmod 4, \\ 30n \cdot \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$LP^3_{(x,y)}(D_n) = LP^4_{(x,y)}(D_n) = \begin{cases} \dfrac{31n}{2} \cdot \beta, & n \equiv 0 \bmod 4, \\ 31n \cdot \beta, & n \equiv 2 \bmod 4, \\ 62n \cdot \beta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Burada $\alpha, \beta \in N$ dir [21].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Fibonacci-circulant-Hurwitz Sayıları

$f^2(x)$ polinomu yardımıyla M^2 Hurwitz matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

M^2 matrisi kullanılarak ikinci tür Fibonacci-circulant-Hurwitz dizisi

$$a_1^2 = \cdots = a_4^2 = 0, \; a_5^2 = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq 5$ için

$$a_{n+1}^2 = -a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-4}^2$$

şeklindeki bağıntı ile tanımlanır [30].

İkinci tür Fibonacci-circulant-Hurwitz dizisinin genelleştirilmiş bir formu olan ve genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz dizisi olarak adlandırılan yeni bir diziyi düşünelim. Bu dizi

$$a_1^k = \cdots = a_{k-1}^k = 0, \; a_k^k = 1$$

başlangıç değerleri ile birlikte ve $n \geq k$ için

$$a_{n+1}^k = -a_n^k + a_{n-1}^k + \cdots + a_{n-k+3}^k + a_{n-k+1}^k \tag{4.1.1}$$

şeklindeki indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Burada $k \geq 4$ dir [30].

(4.1.1) bağıntısı kullanılarak

$$M_k = \left[m_{i,j} \right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.2}$$

matrisi yazılabilir. M_k matrisi, genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz matrisi olarak adlandırılır. Ayrıca $k \geq 4$ için $\det(M_k) = (-1)^{k+1}$ dir [30].

n üzerinden tümevarım uygulanarak,

$$\left(M_4\right)^n = \begin{bmatrix} a_{n+4}^4 & a_{n+3}^4 + a_{n+1}^4 & a_{n+2}^4 & a_{n+3}^4 \\ a_{n+3}^4 & a_{n+2}^4 + a_{n}^4 & a_{n+1}^4 & a_{n+2}^4 \\ a_{n+2}^4 & a_{n+1}^4 + a_{n-1}^4 & a_{n}^4 & a_{n+1}^4 \\ a_{n+1}^4 & a_{n}^4 + a_{n-2}^4 & a_{n-1}^4 & a_{n}^4 \end{bmatrix},$$

$$\left(M_5\right)^n = \begin{bmatrix} a_{n+5}^5 & a_{n+6}^5 + a_{n+5}^5 & a_{n+4}^5 + a_{n+2}^5 & a_{n+3}^5 & a_{n+4}^5 \\ a_{n+4}^5 & a_{n+5}^5 + a_{n+4}^5 & a_{n+3}^5 + a_{n+1}^5 & a_{n+2}^5 & a_{n+3}^5 \\ a_{n+3}^5 & a_{n+4}^5 + a_{n+3}^5 & a_{n+2}^5 + a_{n}^5 & a_{n+1}^5 & a_{n+2}^5 \\ a_{n+2}^5 & a_{n+3}^5 + a_{n+2}^5 & a_{n+1}^5 + a_{n-1}^5 & a_{n}^5 & a_{n+1}^5 \\ a_{n+1}^5 & a_{n+2}^5 + a_{n+1}^5 & a_{n}^5 + a_{n-2}^5 & a_{n-1}^5 & a_{n}^5 \end{bmatrix}$$

ve $k \geq 6$ için

$$\left(M_k\right)^n = \begin{bmatrix} a_{n+k}^k & a_{n+k+1}^k + a_{n+k}^k & & a_{n+k-1}^k + a_{n+k-3}^k & a_{n+k-2}^k & a_{n+k-1}^k \\ a_{n+k-1}^k & a_{n+k}^k + a_{n+k-1}^k & & a_{n+k-2}^k + a_{n+k-4}^k & a_{n+k-3}^k & a_{n+k-2}^k \\ a_{n+k-2}^k & a_{n+k-1}^k + a_{n+k-2}^k & & a_{n+k-3}^k + a_{n+k-5}^k & a_{n+k-4}^k & a_{n+k-3}^k \\ & & \left(M_k\right)^* & & & \\ a_{n+1}^k & a_{n+2}^k + a_{n+1}^k & & a_{n}^k + a_{n-2}^k & a_{n-1}^k & a_{n}^k \end{bmatrix}_{k\times k}$$

şeklindeki matrisler elde edilir. Burada

$$\left(M_k\right)^* = \begin{bmatrix} a_{n+k-1}^k + \cdots + a_{n+4}^k + a_{n+2}^k & a_{n+k-1}^k + \cdots + a_{n+5}^k + a_{n+3}^k & \cdots & a_{n+k-1}^k + \cdots + a_{n+k-2}^k + a_{n+k-4}^k \\ a_{n+k-2}^k + \cdots + a_{n+3}^k + a_{n+1}^k & a_{n+k-2}^k + \cdots + a_{n+4}^k + a_{n+2}^k & \cdots & a_{n+k-2}^k + \cdots + a_{n+k-3}^k + a_{n+k-5}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n}^k + \cdots + a_{n-k+4}^k + a_{n-k+2}^k & a_{n}^k + \cdots + a_{n-k+5}^k + a_{n-k+3}^k & \cdots & a_{n}^k + \cdots + a_{n-1}^k + a_{n-3}^k \end{bmatrix}_{k\times(k-5)}$$

dır [30].

Lemma 4.1.1: Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayılarının karakteristik denlemi $x^k + x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - 1 = 0$ olup $k \geq 4$ için çok katlı kökü yoktur [30].

İspat: $f(x) = x^k + x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - 1$ olsun. $f(1) \neq 0$ olduğu kolaylıkla görülür. $h(x) = (x-1) f(x)$ gözönüne alalım. $f(1) \neq 0$ olduğundan dolayı 1, $h(x)$ in bir kökü olmasına rağmen çok katlı kökü değildir. O halde $h(u) = 0$ ve $h'(u) = 0$ dir. Ayrıca Mathematica Wolfram 10.0 [88] programı kullanılarak $(1-k)u^4 + ku^3 + (k-7)u^2 + (4-2k)u + 2(k-1) = 0$ denklemin bir çözümünün olmadığı görülür. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $f(x)$ denkleminin çok katlı bir köke sahip olmadığını gösterir.

Eğer $x^k + x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x^2 - 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ise Lemma 4.1.1. ile bu köklerin birbirinden farklı olduğu kolaylıkla görülür.

$k \times k$ tipli V^k Vandermonde matrisinin

$$V^k = \begin{bmatrix} (x_1)^{k-1} & (x_2)^{k-1} & \cdots & (x_k)^{k-1} \\ (x_1)^{k-2} & (x_2)^{k-2} & \cdots & (x_k)^{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini düşünelim. $(p+2) \times 1$ tipli $W^k(i)$ matrisi;

$$W^k(i) = \begin{bmatrix} (x_1)^{n+k-i} \\ (x_2)^{n+k-i} \\ \vdots \\ (x_{p+2})^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V^k(i, j)$ matrisi V^k matrisinin j-inci sütununun $W^k(i)$ sütun matrisi ile değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Bu durumda, Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayıların Binet formülü için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1: $k \geq 4$ bir tam sayı ve $\alpha \geq 1$ için $(M_k)^{\alpha} = \left[m_{i,j}^{(\alpha)}\right]$ olsun. O halde

$$m_{i,j}^{(\alpha)} = \frac{\det V^k(i,j)}{V^k}$$

dır [30].

İspat: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ değerleri birbirinden farklı olduğu için M_k genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz matrisi köşegenleştirilebilirdir. O zaman $M_k V^k = V^k D_k$ eşitliği yazılabilir, burada $D_k = diag(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dır. V^k tersinir olduğu için

$$\left(V^k\right)^{-1} M_k V^k = D_k$$

eşitliği sağlanır. Bu ise M_k matrisinin D_k matrisine benzer olduğunu göstermektedir. O halde $\alpha \geq 1$ için $(M_k)^{\alpha} V^k = V^k (D_k)^{\alpha}$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} m_{i,1}^{(\alpha)}(x_1)^{k-1} + m_{i,2}^{(\alpha)}(x_1)^{k-2} + \cdots + m_{i,k}^{(\alpha)} = (x_1)^{\alpha+k-i} \\ m_{i,1}^{(\alpha)}(x_2)^{k-1} + m_{i,2}^{(\alpha)}(x_2)^{k-2} + \cdots + m_{i,k}^{(\alpha)} = (x_2)^{\alpha+k-i} \\ \qquad\qquad\vdots \\ m_{i,1}^{(\alpha)}(x_k)^{k-1} + m_{i,2}^{(\alpha)}(x_k)^{k-2} + \cdots + m_{i,k}^{(\alpha)} = (x_k)^{\alpha+k-i} \end{cases}$$

lineer denklem sitemi yazılabilir. Lineer denklem siteminin çözümünden ise, her $i, j = 1, 2, \ldots, k$ için

$$m_{i,j}^{(\alpha)} = \frac{\det V^k(i,j)}{V^k}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 4.1.1: Farz edelim ki a_n^k, n-inci Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayısı olsun. Bu durumda,

$$a_n^k = \frac{\det V^k(k,k)}{V^k} = \frac{\det V^k(k-1,k-1)}{V^k}$$

dır [30].

Teorem 4.1.2: $c_{i,j}^{(\alpha)}(c_1, c_2, \ldots, c_v)$, $C^{\alpha}(c_1, c_2, \ldots, c_v)$ matrisinin (i, j)-inci elemanı olmak üzere, $c_{i,j}^{(\alpha)}(c_1, c_2, \ldots, c_v)$ aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$c_{i,j}^{(\alpha)}\left(c_1,c_2,\ldots,c_v\right)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_k)}\frac{t_j+t_{j+1}+\cdots+t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\times\binom{t_1+t_2+\cdots+t_k}{t_1,t_2,\ldots,t_k}c_1^{t_1}\ldots c_k^{t_k} \tag{4.1.3}$$

olup burada toplam negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+kt_k=\alpha-i+j$ koşulunu sağlamaktadır ve $\binom{t_1+\cdots+t_k}{t_1,\ldots,t_k}=\frac{(t_1+\cdots+t_k)!}{t_1!\ldots t_k!}$ çok katlı bir katsayıdır. Eğer $\alpha=i-j$ ise (4.1.3) denklemindeki katsayılar 1 olarak tanımlanır[16].

<u>*Sonuç 4.1.2:*</u> $k\geq 4$ bir tam sayı ve a_n^k, n-inci Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayısı için

$$\begin{aligned}a_n^k&=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_k)}\frac{t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\times\binom{t_1+\cdots+t_k}{t_1,\ldots,t_k}\\&=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{p+2})}\frac{t_{k-1}+t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\times\binom{t_1+\cdots+t_k}{t_1,\ldots,t_k}\end{aligned}$$

olup, burada toplam negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+kt_k=n$ koşulunu sağlamaktadır [30].

<u>*İspat:*</u> Teorem 4.1.2 de, $i=j=k$ ve $i=j=k-1$ seçilirse, (4.1.3) eşitliğinden sonuç açık olarak görülmektedir.

<u>*Tanım 4.1.1:*</u> Eğer bir $u\times v$ tipli $A=\left[a_{i,j}\right]$ gerçel matrisinin n-inci sütunu (veya satırı) iki tane sıfırdan farklı eleman içeriyor ise bu matrise n-inci sütuna (veya satıra) göre indirgenebilir (contractible) matris denir.

$x_1,x_2,\ldots,x_u$ lar A matrisinin satır vektörleri olsun. A matrisi, $m_{\tau,n}\neq 0$, $m_{\sigma,n}\neq 0$ ve $\tau\neq\sigma$ olacak şekilde n-inci sütuna göre indirgenebilir ise $(u-1)\times(v-1)$ tipli $A_{\tau,\sigma:n}$ matrisi, A nin τ-inci satırının $m_{\tau,n}x_\sigma+m_{\sigma,n}x_\tau$ ile değiştirilip σ-inci satırının silinmesi sonucu elde edilebilir. n-inci sütun**,** τ-inci satır ve σ-inci satır ile bağıntılı indirgeme sütunu olarak adlandırılır.

Eğer A, u mertebeden $(u>1)$ bir gerçel matris ve B, A nın bir indirgemesi ise $per(A)=per(B)$ dir[13].

$u \geq k$ ve $u \times u$ tipli $N_u^k = \left[a_{i,j}^k \right]$ süper köşegen matrisi;

$$n_{i,j}^p = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = s \text{ ve } j = s \text{ için } 1 \leq s \leq u, \\ & \text{eğer } i = s \text{ ve } j = s+1 \text{ için } 1 \leq s \leq u-1, \\ & i = s \text{ ve } j = s+2 \text{ için } 1 \leq s \leq u-2, \\ & \vdots \\ 1 & i = s \text{ ve } j = s+k-3 \text{ için } 1 \leq s \leq u-k+3, \\ & i = s \text{ ve } j = s+k-1 \text{ için } 1 \leq s \leq u-k+1 \\ & \text{ve} \\ & i = s+1 \text{ ve } j = s \text{ için } 1 \leq s \leq u-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k \geq 4$ tür [30].

<u>*Teorem 4.1.3:*</u> a_n^k, n-inci genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayısı ve $u \geq k$ için

$$per\left(N_u^k\right) = a_{u+k}^k$$

eşitliği elde edilir [30].

<u>*İspat:*</u> Denklemin $u \geq k$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $u+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $\left(N_u^k\right)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(N_u^k\right)$ genişletilir ise,

$$per\left(N_{u+1}^k\right) = -per\left(N_u^k\right) + per\left(N_{u-1}^k\right) + \cdots + per\left(N_{u-k+3}^k\right) + per\left(N_{u-k+1}^k\right)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $per\left(N_{u+1}^k\right) = a_{u+k}^k$, $per\left(N_{u-1}^k\right) = a_{u+k-1}^k, \ldots, per\left(N_{u-k+3}^k\right) = a_{u+1}^k$, $per\left(N_{u-k+1}^k\right) = a_{u+1}^k$ genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayılarının indirgeme bağıntıları kullanılarak $per\left(N_u^k\right) = a_{u+k}^k$ elde edilir. Böylece u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$u > k$ ve $k \geq 4$ için $u \times u$ tipli $H_u^k = \left[h_{i,j}^k \right]$ ve $T_u^k = \left[t_{i,j}^k \right]$ matrisleri;

$$h_{i,j}^k = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = s \text{ ve } j = s \text{ için } 1 \le s \le u-k+1, \\ & \text{eğer } i = s \text{ ve } j = s+\rho \text{ için } 1 \le s \le u-k+2 \\ & \quad \text{ve } 1 \le \rho \le k-3, \\ 1 & i = s \text{ ve } j = s+k-1 \text{ için } 1 \le s \le u-k+1, \\ & \quad \text{ve} \\ & i = s+1 \text{ ve } j = s \text{ için } 1 \le s \le u-1, \\ 0 & \quad \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve

$$T_u^k = \begin{array}{c} \qquad\qquad (u-k)-\text{inci} \\ \qquad\qquad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & H_{u-1}^k & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanır [30].

<u>*Teorem 4.1.4:*</u> $u > k$ için

$$per\left(H_u^k\right) = a_u^k,$$

ve

$$per\left(T_u^k\right) = \sum_{\tau=1}^{u-1} a_\tau^k$$

dir [30].

<u>*İspat:*</u> Teoremin ilk kısmını göz önüne alalım. Denklemin $u > k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, denklemin $u+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer H_u^k matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(H_u^k\right)$ genişletilir ise,

$$\begin{aligned} per\left(H_u^k\right) &= -per\left(H_{u-1}^k\right) + per\left(H_{u-2}^k\right) + \cdots + per\left(H_{u-k+2}^k\right) + per\left(H_{u-k}^k\right) \\ &= -a_{u-1}^k + a_{u-2}^k + \cdots + a_{u-k+2}^k + a_{u-k}^k \\ &= a_u^k \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi kullanarak ispat tamamlanır.

Teoremin ikinci kısmı için, T_u^k matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $per\left(T_u^k\right)$ genişletilir ise,

$$per\left(T_u^k\right) = per\left(T_{u-1}^k\right) + per\left(H_u^p\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuçla ispat tümevarım yöntemiyle kolaylıkla görülür.

Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayılarının üreteç fonksiyonu, $k \geq 4$ olacak şekilde

$$g(x) = \frac{x^k}{1 - x - x^2 - \cdots x^{k-2} - x^k}$$

dır [30].

<u>*Teorem 3.1.5:*</u> Genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayılarının üstel (exponential) temsili aşağıdaki gibidir [30]:

$$g(x) = x^k \exp\left(\sum_{i=i}^{\infty} \frac{x^i}{i} \left(-1 + x + \cdots + x^{k-3} + x^{k-1}\right)^i \right).$$

<u>*İspat:*</u> $\ln g(x) = \ln x^k - \ln\left(1 - x - x^2 - \cdots - x^{k-2} - x^k\right)$

ve

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - x - x^2 - \cdots - x^{k-2} - x^k\right) = -\Big[& x\left(-1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-3} + x^{k-1}\right) \\ & + \frac{1}{2} x^2 \left(-1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-3} + x^{k-1}\right)^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{i} x^i \left(-1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-3} + x^{k-1}\right)^i + \cdots \Big] \end{aligned}$$

olduğundan

$$g(x) = x^k \exp\left(\sum_{i=i}^{\infty} \frac{x^i}{i} \left(-1 + x + \cdots + x^{k-3} + x^{k-1}\right)^i \right)$$

dır.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci-circulant-Hurwitz sayılarının toplamsal temsillerini düşünelim.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$ olmak üzere $(k+1) \times (k+1)$ tipli Z^k matrisinin toplamsal temsili aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & M_k & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

n üzerinden tümevarım yöntemi kullanarak

$$(Z_k)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n+k} & & & \\ S_{n+k-1} & & (M_k)^n & \\ \vdots & & & \\ S_n & & & \end{bmatrix}.$$

yazılır [30].

4.2 Padovan-circulant-Hurwitz Dizileri

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant dizilerinin karakteristik polinomları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f^{(1)}(x) = x^4 - x^2 + x + 1,$$

$$f^{(2)}(x) = x^5 + x^3 - x + 1,$$

$$f^{(3)}(x) = x^6 + x^3 + x^2 - 1$$

ve

$$f^{(4)}(x) = x^6 - x^2 + x + 1.$$

$f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ ve $f^{(4)}(x)$ polinomları için sırasıyla Hurwitz matrisleri

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$H^{(3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

ve

$$H^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır [2].

$n\geq 1$ için $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$ ve $H^{(4)}$ matrisleri kullanılarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [2]:

$a^1(1)=a^1(2)=a^1(3)=0$ ve $a^1(4)=1$ başlangıç değerleri için

$$a^1(n+4)=a^1(n+2)-a^1(n+1)+a^1(n), \tag{4.2.1}$$

$a^2(1)=a^2(2)=a^2(3)=a^2(4)=0$ ve $a^2(5)=1$ başlangıç değerleri için

$$a^2(n+5)=-a^2(n+2)+a^2(n+1)+a^2(n), \tag{4.2.2}$$

$a^3(1)=a^3(2)=a^3(3)=a^3(4)=a^3(5)=0$ ve $a^3(6)=1$ başlangıç değerleri için

$$a^3(n+6)=-a^3(n+3)+a^3(n+2)+a^3(n), \tag{4.2.3}$$

$a^4(1)=a^4(2)=a^4(3)=a^4(4)=a^4(5)=0$ ve $a^4(6)=1$ başlangıç değerleri için

$$a^4(n+6)=a^4(n+3)-a^4(n+2)+a^4(n). \tag{4.2.4}$$

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$g^{(1)}(x)=\frac{x^4}{1-x^2+x^3-x^4},$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{x^5}{1+x^3-x^4-x^5},$$

$$g^{(3)}(x)=\frac{x^6}{1+x^3-x^4-x^6}$$

ve

$$g^{(4)}(x)=\frac{x^6}{1-x^3+x^4-x^6}$$

şeklindedir [2].

(4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4) ifadeleri yardımıyla, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz diziler için Companion matris formundaki üreteç matrisleri sırasıyla;

$$PH^{(1)}=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$PH^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$PH^{(3)}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

ve

$$PH^{(4)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, burada $PH^{(1)}, PH^{(2)}, PH^{(3)}$ ve $PH^{(4)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisleri olarak adlandırılır [2].

$k=1,2,3,4$ için $a^k(\alpha)$ notasyonu a_α^k şeklinde ifade edilsin. $\alpha \geq 3$ için α üzerinden tümevarım uygulanarak $\left(PH^{(1)}\right)^\alpha$, $\left(PH^{(2)}\right)^\alpha$, $\left(PH^{(3)}\right)^\alpha$ ve $\left(PH^{(4)}\right)^\alpha$ matrisleri;

$$\left(PH^{(1)}\right)^\alpha=\begin{bmatrix} a_{\alpha+4}^1 & a_{\alpha+5}^1 & a_{\alpha+2}^1-a_{\alpha+3}^k & a_{\alpha+3}^1 \\ a_{\alpha+3}^1 & a_{\alpha+4}^1 & a_{\alpha+1}^1-a_{\alpha+2}^k & a_{\alpha+2}^1 \\ a_{\alpha+2}^1 & a_{\alpha+3}^1 & a_{\alpha}^1-a_{\alpha+1}^k & a_{\alpha+1}^1 \\ a_{\alpha+1}^1 & a_{\alpha+2}^1 & a_{\alpha-1}^1-a_{\alpha}^k & a_{\alpha}^1 \end{bmatrix},$$

$$\left(PH^{(2)}\right)^\alpha=\begin{bmatrix} a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+6}^2 & a_{\alpha+7}^2 & a_{\alpha+3}^2+a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+4}^2 \\ a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+6}^2 & a_{\alpha+2}^2+a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+3}^2 \\ a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha+5}^2 & a_{\alpha+1}^2+a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+2}^2 \\ a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha+4}^2 & a_{\alpha}^2+a_{\alpha+1}^2 & a_{\alpha+1}^2 \\ a_{\alpha+1}^2 & a_{\alpha+2}^2 & a_{\alpha+3}^2 & a_{\alpha-1}^2+a_{\alpha}^2 & a_{\alpha}^2 \end{bmatrix},$$

$$\left(PH^{(3)}\right)^\alpha=\begin{bmatrix} a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+7}^3 & a_{\alpha+8}^3 & a_{\alpha+3}^3+a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 \\ a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+7}^3 & a_{\alpha+2}^3+a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 \\ a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha+6}^3 & a_{\alpha+1}^3+a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 \\ a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha+5}^3 & a_{\alpha}^3+a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+1}^3 & a_{\alpha+2}^3 \\ a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha+4}^3 & a_{\alpha-1}^3+a_{\alpha+1}^3 & a_{\alpha}^3 & a_{\alpha+1}^3 \\ a_{\alpha+1}^3 & a_{\alpha+2}^3 & a_{\alpha+3}^3 & a_{\alpha-2}^3+a_{\alpha}^3 & a_{\alpha-1}^3 & a_{\alpha}^3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\left(PH^{(4)}\right)^\alpha=\begin{bmatrix} a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+7}^4 & a_{\alpha+8}^4 & a_{\alpha+3}^4-a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 \\ a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+7}^4 & a_{\alpha+2}^4-a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 \\ a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha+6}^4 & a_{\alpha+1}^4-a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 \\ a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha+5}^4 & a_{\alpha}^4-a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+1}^4 & a_{\alpha+2}^4 \\ a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha+4}^4 & a_{\alpha-1}^4-a_{\alpha+1}^4 & a_{\alpha}^4 & a_{\alpha+1}^4 \\ a_{\alpha+1}^4 & a_{\alpha+2}^4 & a_{\alpha+3}^4 & a_{\alpha-2}^4-a_{\alpha}^4 & a_{\alpha-1}^4 & a_{\alpha}^4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\det\left(PH^{(1)}\right)^{\alpha}=\det\left(PH^{(3)}\right)^{\alpha}=\det\left(PH^{(4)}\right)^{\alpha}=(-1)^{\alpha}$ ve $\det\left(PH^{(2)}\right)^{\alpha}=1$ olduğu açıktır [2].

$PH^{(1)}$, $PH^{(2)}$, $PH^{(3)}$ ve $PH^{(4)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu açıktır. $PH^{(1)}$, $PH^{(2)}$ ve $PH^{(3)}$ matrislerinin özdeğerlerinin kümesi sırasıyla $\left\{\varepsilon_1^{(1)},\varepsilon_2^{(1)},\varepsilon_3^{(1)},\varepsilon_4^{(1)}\right\}$, $\left\{\varepsilon_1^{(2)},\varepsilon_2^{(2)},\varepsilon_3^{(2)},\varepsilon_4^{(2)},\varepsilon_5^{(2)}\right\}$ ve $\left\{\varepsilon_1^{(3)},\varepsilon_2^{(3)},\varepsilon_3^{(3)},\varepsilon_4^{(3)},\varepsilon_5^{(3)},\varepsilon_6^{(3)}\right\}$ olsun.

$k=1,2,3$ için $(k+3)\times(k+3)$ tipli $V^{(k)}$ Vandermonde matrisinin

$$V^{(k)}=\begin{bmatrix} \left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{k+2} & \left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{k+2} & \cdots & \left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{k+2} \\ \left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{k+1} & \cdots & \left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{(k)} & \varepsilon_2^{(k)} & \cdots & \varepsilon_{k+3}^{(k)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini düşünelim. $W^k(i)$ matrisi;

$$W_i^{(k)}=\begin{bmatrix} \left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \\ \left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \\ \vdots \\ \left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_{i,j}^{(k)}$ matrisi $V^{(k)}$ matrisinin j-inci sütununun $W^k(i)$ sütun matrisi ile değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

Bu durumda, birinci, ikinci ve üçüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrislerinin Binet formülü için aşağıdaki teorem verilebilir:

<u>*Teorem 4.2.1:*</u> a_α^k, $k=1,2,3$ için k-inci tür dizinin α-inci terimi olsun. O halde

$$p_{i,j}^{(k,\alpha)}=\frac{\det V_{i,j}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

dır. Burada $\left(PH^{(k)}\right)^{\alpha}=\left[p_{i,j}^{(k,\alpha)}\right]$ şeklinde ifade edilir [2].

İspat: $PH^{(k)}$ matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için birinci, ikinci ve üçüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisleri köşegenleştirilebilirdir.

$$D^{(1)} = diag\left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}\right),$$

$$D^{(2)} = diag\left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}, \alpha_5^{(2)}\right)$$

ve

$$D^{(3)} = diag\left(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_4^{(3)}, \alpha_5^{(3)}, \alpha_6^{(3)}\right)$$

olduğundan $PH^{(k)}V^{(k)} = V^{(k)}D^{(k)}$ eşitliği yazılabilir. $V^{(k)}$ tersinir olduğu için

$$\left(V^{(k)}\right)^{-1} PH^{(k)}V^{(k)} = D^{(k)}$$

eşitliği sağlanır. Bu ise $PH^{(k)}$ matrisinin $D^{(k)}$ matrisine benzer olduğunu göstermektedir. O halde $\alpha \geq 1$ için $\left(PH^{(k)}\right)^{\alpha} V^{(k)} = V^{(k)}\left(D^{(k)}\right)^{\alpha}$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} p_{i,1}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{k+2} + p_{i,2}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{k+1} + \cdots + p_{i,k+3}^{(k,\alpha)} = \left(\varepsilon_1^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \\ p_{i,1}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{k+2} + p_{i,2}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{k+1} + \cdots + p_{i,k+3}^{(k,\alpha)} = \left(\varepsilon_2^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \\ \vdots \\ p_{i,1}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{k+2} + p_{i,2}^{(k,\alpha)}\left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{k+1} + \cdots + p_{i,k+3}^{(k,\alpha)} = \left(\varepsilon_{k+3}^{(k)}\right)^{\alpha+k+3-i} \end{cases}$$

lineer denklem sitemi yazılabilir. Lineer denklem siteminin çözümünden ise, her $i, j = 1, 2, \ldots, k+3$ için

$$p_{i,j}^{(k,\alpha)} = \frac{\det V_{i,j}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

olduğu görülmektedir. Eğer

$$V^{(4)} = \begin{bmatrix} \left(\varepsilon_1^{(4)}\right)^5 & \left(\varepsilon_2^{(4)}\right)^5 & \cdots & \left(\varepsilon_6^{(4)}\right)^5 \\ \left(\varepsilon_1^{(4)}\right)^4 & \left(\varepsilon_2^{(4)}\right)^5 & \cdots & \left(\varepsilon_6^{(4)}\right)^5 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{(4)} & \varepsilon_2^{(4)} & \cdots & \varepsilon_6^{(4)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } W_i^{(4)} = \begin{bmatrix} \left(\varepsilon_1^{(4)}\right)^{\alpha+6-i} \\ \left(\varepsilon_2^{(4)}\right)^{\alpha+6-i} \\ \vdots \\ \left(\varepsilon_6^{(4)}\right)^{\alpha+6-i} \end{bmatrix}$$

olarak seçilirse, her bir $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizisinin Binet formülü

$$p_{i,j}^{(4,\alpha)} = \frac{\det V_{i,j}^{(4)}}{\det V^{(4)}}$$

şeklinde elde edilir.

<u>*Sonuç 4.2.1:*</u> Farz edelim ki a_{α}^{k}, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz sayılarının α -inci sayıları olsun. Bu durumda;

$i.$ $k = 1,2$ için

$$a_{\alpha}^{k} = \frac{\det V_{k+3,k+3}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

ve

$ii.$ $k = 3,4$ için

$$a_{\alpha}^{k} = \frac{\det V_{5,5}^{(k)}}{\det V^{(k)}} = \frac{\det V_{6,6}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

dır [2].

$n \times n$ tipli $K^{(1)}(n) = \left[k_{i,j}^{(1)}\right], K^{(2)}(n) = \left[k_{i,j}^{(2)}\right], K^{(3)}(n) = \left[k_{i,j}^{(3)}\right]$ ve $K^{(4)}(n) = \left[k_{i,j}^{(4)}\right]$ süper köşegen matrisler;

$$k_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+2 \text{ için } 1 \le p \le n-2, \\ & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+1 \text{ için } 1 \le p \le n-1, \\ 1 & i = p \text{ ve } j = p+3 \text{ için } 1 \le p \le n-3, \\ & ve \\ & i = p+1 \text{ ve } j = p \text{ için } 1 \le p \le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \ n \ge 4 \text{ için,}$$

$$k_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+2 \text{ için } 1 \le p \le n-2, \\ & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+3 \text{ için } 1 \le p \le n-3, \\ 1 & i = p \text{ ve } j = p+4 \text{ için } 1 \le p \le n-4, \\ & ve \\ & i = p+1 \text{ ve } j = p \text{ için } 1 \le p \le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \ n \ge 5 \text{ için,}$$

$$k_{i,j}^{(3)} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+2 \text{ için } 1 \le p \le n-2, \\ & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+3 \text{ için } 1 \le p \le n-3, \\ 1 & i = p \text{ ve } j = p+5 \text{ için } 1 \le p \le n-5, \\ & ve \\ & i = p+1 \text{ ve } j = p \text{ için } 1 \le p \le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \ n \ge 6 \text{ için,}$$

ve

$$k_{i,j}^{(4)} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+3 \text{ için } 1 \le p \le n-3, \\ & \text{eğer } i = p \text{ ve } j = p+2 \text{ için } 1 \le p \le n-2, \\ 1 & i = p \text{ ve } j = p+5 \text{ için } 1 \le p \le n-5, \\ & ve \\ & i = p+1 \text{ ve } j = p \text{ için } 1 \le p \le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \ n \ge 6 \text{ için,}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 4.2.2: $i.$ $n \ge k+3$ ve $k = 1, 2, 3$ için

$$perK^{(k)}(n) = a^{(k)}(n+k+3)$$

ve

$ii.$ $n \ge 6$ ve $k = 4$ için

$$perK^{(4)}(n) = a^{(4)}(n+6)$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: $k = 1$ olsun. Denklemin $n \ge 4$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $n+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $K^{(1)}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perK^{(1)}(n)$ genişletilir ise,

$$perK^{(1)}(n+1) = perK^{(1)}(n-1) + perK^{(1)}(n-2) + perK^{(1)}(n-3)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $perK^{(1)}(n-1) = a^{(1)}(n+3)$, $perK^{(1)}(n-2) = a^{1}(n+2)$ ve $perK^{(1)}(n-3) = a^{1}(n+1)$ olduğundan, $perK^{(1)}(n+1) = a^{(1)}(n+5)$ kolaylıkla elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$k=2,3$ ve ii. için ispat benzerdir.

$n\times n$ tipli $L^{(1)}(n)=\left[l_{i,j}^{(1)}\right], L^{(2)}(n)=\left[l_{i,j}^{(2)}\right], L^{(3)}(n)=\left[l_{i,j}^{(3)}\right]$ ve $L^{(4)}(n)=\left[l_{i,j}^{(4)}\right]$ matrisler, sırasıyla;

$$l_{i,j}^{(1)}=\begin{cases} -1 & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+2 \text{ için } 1\le p\le n-2, \\ & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+1 \text{ için } 1\le p\le n-2, \\ 1 & i=p \text{ ve } j=p+3 \text{ için } 1\le p\le n-3, \\ & ve \\ & i=p+1 \text{ ve } j=p \text{ için } 1\le p\le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \; n\ge 4 \text{ için,}$$

$$l_{i,j}^{(2)}=\begin{cases} -1 & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+2 \text{ için } 1\le p\le n-4, \\ & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+3 \text{ için } 1\le p\le n-4, \\ 1 & i=p \text{ ve } j=p+4 \text{ için } 1\le p\le n-4, \\ & ve \\ & i=p+1 \text{ ve } j=p \text{ için } 1\le p\le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \; n\ge 5 \text{ için,}$$

$$l_{i,j}^{(3)}=\begin{cases} -1 & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+2 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+3 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ 1 & i=p \text{ ve } j=p+5 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ & ve \\ & i=p+1 \text{ ve } j=p \text{ için } 1\le p\le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \; n\ge 6 \text{ için,}$$

ve

$$l_{i,j}^{(4)}=\begin{cases} -1 & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+3 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ & \text{eğer } i=p \text{ ve } j=p+2 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ 1 & i=p \text{ ve } j=p+5 \text{ için } 1\le p\le n-5, \\ & ve \\ & i=p+1 \text{ ve } j=p \text{ için } 1\le p\le n-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad , \; n\ge 6 \text{ için,}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Farz edelim ki $k=1,2,3$ için $n\times n$ tipli $M^{(k)}(n)=\left[m_{i,j}^{(k)}\right]$ ve $M^{(4)}(n)=\left[m_{i,j}^{(4)}\right]$ matrisi, sırasıyla;

$$M^{(k)}(n)=\begin{array}{c} (n-k-3)-\text{inci} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & L^{(k)}(n-1) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}\end{array}, \quad n>k+3 \text{ için},$$

ve

$$M^{(4)}(n)=\begin{array}{c} (n-6)-\text{inci} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & L^{(4)}(n-1) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}\end{array}, \quad n>6 \text{ için},$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 4.2.3: $a^{(k)}(n)$, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizilerinin α -inci terimi olsun. O halde

$i.$ $n \geq k+3$ için

$$perL^{(k)}(n)=a^{(k)}(n)$$

ve

$ii.$ $n>k+3$ için

$$perM^{(k)}(n)=\sum_{\tau-i=1}^{m-1} a^{(k)}(i)$$

dir [2].

İspat: $i.$ $L^{(2)}(n)$ matrisini göz önüne alalım ve denklemin $n \geq 5$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $n+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $L^{(2)}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perL^{(2)}(n)$ genişletilir ise,

$$perL^{(2)}(n+1) = -perL^{(2)}(n-2) + perL^{(2)}(n-3) + perL^{(2)}(n-4)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $perL^{(2)}(n-2) = a^{(2)}(n-2)$, $perL^{(2)}(n-3) = a^{(2)}(n-3)$ ve $perL^{(2)}(n-4) = a^{(2)}(n-4)$ olduğundan, $perL^{(2)}(n+1) = a^{(2)}(n+1)$ kolaylıkla elde edilir.

$L^{(1)}(n)$, $L^{(3)}(n)$ ve $L^{(4)}(n)$ matrisleri için de ispat benzerdir.

ii. $k = 1,2,3,4$ için $M^{(k)}(n)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perM^{(k)}(n)$ genişletilir ise,

$$perM^{(k)}(n) = perM^{(k)}(n-1) + perL^{(k)}(n-1)$$

eşitliği elde edilir. n üzerinden tümevarım yöntemi ile birlikte Teorem 4.2.2 ün sonuçları ve Teorem 4.2.3 ün i-inci kısmı dikkate alınarak sonuç kolaylıkla görülür.

$n > k+3$ için $n \times n$ tipli R matrisi;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Dolayısıyla $n > k+3$ için $perK^{(k)}(n) = \det\left(K^{(k)}(n) \circ R\right)$, $perL^{(k)}(n) = \det\left(L^{(k)}(n) \circ R\right)$ ve $perM^{(k)}(n) = \det\left(M^{(k)}(n) \circ R\right)$ eşitlikleri elde edilir [2].

<u>*Sonuç 4.2.2:*</u> *i.* $n > k+3$ ve $k = 1,2,3$ olmak üzere

$$\det\left(K^{(k)}(n) \circ R\right) = a^{(k)}(n+k+3),$$

ve

$n > 6$ ve $k = 4$ olmak üzere

$$\det\left(K^{(4)}(n) \circ R\right) = a^{(4)}(n+6)$$

dır.

ii. i. $n > k+3$ ve $k = 1,2,3,4$ olmak üzere

$$\det\left(L^{(k)}(n)\circ R\right)=a^{(k)}(n)$$

ve

$$\det\left(M^{(k)}(n)\circ R\right)=\sum_{i=1}^{m-1}a^{(k)}(i)$$

dır [2].

<u>*Sonuç 4.2.3:*</u> $a^{(k)}(\alpha)$, α-inci birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz sayısı olsun. O halde

i. $k=1,2$ için

$$a^{(k)}(\alpha)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_{k+3})}\frac{t_{k+3}}{t_1+t_2+\cdots+t_{k+3}}\times\binom{t_1+\cdots+t_{k+3}}{t_1,\ldots,t_{k+3}}(-1)^{t_3}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(k+3)t_{k+3}=\alpha$ koşulunu sağlamaktadır.

ii. $k=3,4$ için

$$\begin{aligned}a^{(k)}(\alpha)&=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_6)}\frac{t_6}{t_1+t_2+\cdots+t_6}\times\binom{t_1+\cdots+t_6}{t_1,\ldots,t_6}(-1)^{t_k}\\&=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_6)}\frac{t_5+t_6}{t_1+t_2+\cdots+t_6}\times\binom{t_1+\cdots+t_6}{t_1,\ldots,t_6}(-1)^{t_k}\end{aligned}$$

olup burada toplam, negatif olmayan tam sayılar üzerinde $t_1+2t_2+\cdots+(6)t_6=\alpha$ koşulunu sağlamaktadır [2].

<u>*İspat:*</u> *i.* $k=1$ için düşünelim. Teorem 4.1.2 de $i=j=4$, $c_1=0$, $c_2=1$, $c_3=-1$ ve $c_4=1$ olarak seçilir ise, ispat $\left(PH^{(1)}\right)^{\alpha}$ dan açık olarak görülmektedir.

$k=2$ ve *ii.* için ispat benzerdir.

Şimdi birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz sayılarının toplamsal temsillerini düşünelim.

$i\geq 1$ ve $k=1,2,3$ için $S_\alpha=\sum_{i=1}^{\alpha}a^{(k)}(i)$ olmak üzere $(k+3)\times(k+3)$ tipli $\left(T^{(k)}\right)^{\alpha}$ matrislerinin toplamsal temsili aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & PH^{(k)} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

n üzerinden tümevarım yöntemi kullanarak

$$\left(T^{(k)}\right)^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_{\alpha+k+2} & & & & & \\ S_{\alpha+k+1} & & & & & \\ \vdots & & & \left(PH^{(k)}\right)^{\alpha} & & \\ S_{\alpha+1} & & & & & \\ S_{\alpha} & & & & & \end{bmatrix}.$$

yazılır [2].

4.3 Padovan-circulant-Hurwitz Sayılarının m Modülüne Göre Periyotları

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nın her elemanının $mod\alpha$ ya göre indirgenmesi sonucu $A(mod\alpha)$ olarak ifade edilir. Yani $A(mod\alpha)=\left(a_{ij}(mod\alpha)\right)$ dir. $\langle A\rangle_{\alpha}=\left\{A^{i}(mod\alpha) \mid i\geq 0\right\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}(\alpha, \det A)=1$ ise o zaman $\langle A\rangle_{\alpha}$ bir devirli gruptur. Devirli grubun mertebesi $\langle A\rangle_{\alpha}$ olmak üzere $\left|\langle A\rangle_{\alpha}\right|$ ile gösterilir. $\det PH^{(1)}=\det PH^{(3)}=\det PH^{(4)}=-1$ ve $\det PH^{(2)}=1$ için kolayca görülür ki her pozitif m tam sayı için $\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{m}$, $\left\langle PH^{(2)}\right\rangle_{m}$, $\left\langle PH^{(3)}\right\rangle_{m}$ ve $\left\langle PH^{(4)}\right\rangle_{m}$ devirli gruplardır.

<u>*Teorem 4.3.1:*</u> r bir asal sayı ve $k=1,2,3,4$ için $\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^m}$ devirli gruplar olsun. Eğer u, $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|=\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise her $v\geq u$

için $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right| = r^{v-u}\cdot\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|$ dir. Özellikle $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right| \neq \left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^2}\right|$ ise $v\geq 2$ için $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right| = r^{v-2}\cdot\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|$ dir [3].

<u>*İspat:*</u> $k=1$ için $\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{r^m}$ devirli grubunu düşünelim. Farzedelim ki t pozitif bir tam sayı ve $\left|\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{r^m}\right|$, $h\left(r^m\right)$ olsun. Eğer $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)} = I\left(\bmod r^{t+1}\right)$ ise $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)} = I\left(\bmod r^{t}\right)$ dir. Burada I , $(k+1)\times(k+1)$ tipinde birim matristir. Böylece $h\left(r^t\right)$ nin $h\left(r^{t+1}\right)$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t}\right)} = I+\left(\mathrm{m}_{ij}^{(t)}\,r^t\right)$ eşitliği yazılarak, binom açılımından

$$\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t}\right)\cdot r} = \left(I+\left(m_{ij}^{(t)}r^t\right)\right)^r = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(m_{ij}^{(t)}r^t\right)^i \equiv I\left(\bmod r^{t+1}\right)$$

elde edilir ki, bu da $h\left(r^{t+1}\right)$ nin $h\left(r^{t}\right)\cdot r$ tarafından bölünebilir olduğu gösterir. Böylece $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)$ yada $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)\cdot r$ dir. Ancak $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)\cdot r$ eşitliğin sağlanması r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(t)}$ tam sayısının var olması ile mümkündür. u , $h(r)=h\left(r^u\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olduğundan $h\left(r^u\right)\neq h\left(r^{u+1}\right)$ eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlik, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ tam sayısının mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $h\left(r^{u+1}\right)\neq h\left(r^{u+2}\right)$ sonucu elde edilir ve u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$\left\{a_\alpha^k\right\}$ Padovan-circulant-Hurwitz tipli dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{a_\alpha^k(m)\right\} = \left\{a_\alpha^1(m), a_\alpha^2(m), \ldots, a_\alpha^i(m), \ldots\right\}$$

dizisi elde edilir ve burada $a_\alpha^k(m) = a_\alpha^k(\bmod m)$ dir.

<u>*Teorem 4.3.2:*</u> $k=1,2,3,4$ için $\left\{a_\alpha^k(m)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir [3].

İspat: $T=\{(t_1,t_2,\ldots,t_k)\,|\,0\le t_i\le m-1\}$ olsun. Bu durumda $|Q|=m^k$ dır. Q_m nin elemanlarının m^k tane farklı k-tiplisi mevcut olduğundan, bu k-tiplilerden en az bir tanesi $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k-lileri takip eden alt dizi tekrarlanır; böylece dizi periyodiktir. $i>j$ olmak üzere

$$a_\alpha^{i+1}(m)\equiv a_\alpha^{j+1}(m),a_\alpha^{i+2}(m)\equiv a_\alpha^{j+2}(m),\ldots,a_\alpha^{i+k}(m)\equiv a_\alpha^{j+k}(m)$$

ise $i\equiv j\,(\bmod k)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Padovan-circulant-Hurwitz dizisi tanımından

$$a_\alpha^{i}(m)\equiv a_\alpha^{j}(m),a_\alpha^{i-1}(m)\equiv a_\alpha^{j-1}(m),\ldots,a_\alpha^{i-j+1}(m)\equiv a_\alpha^{1}(m)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$S^k(m)$ notasyonu ile $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodu gösterilmiş olsun.

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrislerinden her m pozitif tam sayıları ve $k=1,2,3,4$ için $S^k(m)=\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_m\right|$ elde edilir.

Teorem 4.3.3: p_i ler farklı asal sayıları olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{u}(p_i)^{r_i}$, $(u\ge 1)$ olsun. O zaman $S^k(m)=okek\left[S^k\left((p_1)^{r_1}\right),S^k\left((p_2)^{r_2}\right),\ldots,S^k\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ dır [3].

İspat: $\left\{a^k_{(p_i)^{r_i}}(m)\right\}$ dizisinin periyodu $S^k\left((p_i)^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda\cdot S^k\left((p_i)^{r_i}\right)$, $(\lambda\in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $S^k(m)$, $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{a^k_{(p_i)^{r_i}}(m)\right\}$ dizisi $S^k(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $S^k(m)$ periyodu $\lambda\cdot S^k(m)$ şeklinde olup bu sayı $\{a_\alpha^k(m)\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla

$$S^k(m)=okek\left[S^k\left((p_1)^{r_1}\right),S^k\left((p_2)^{r_2}\right),\ldots,S^k\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir.

4.4 Semidihedral Grubundaki Fibonacci-Circulant Uzunlukları

$\left(x,y\right)$ geren çifti için birinci ve ikinci tür Fibonacci-circulant orbitleri $n \geq 1$ için sırasıyla aşağıdaki gibidir [41]:

$$a_1^1 = x^{-1},\ a_2^1 = x^{-1},\ a_3^1 = y\,,\ a^1{}_{n+3} = \left(a^1{}_n\right)^{-1}\left(a^1{}_{n+1}\right)\left(a^1{}_{n+2}\right)^{-1}$$

ve

$$a_1^2 = x^3,\ a_2^2 = x^2,\ a_3^2 = x,\ a_4^2 = x,\ a_5^2 = y\,,\ a^2{}_{n+3} = \left(a^2{}_{n-2}\right)\left(a^2{}_{n-1}\right)^{-1}\left(a^2{}_n\right)^{-1}.$$

<u>*Teorem 4.4.1:*</u> $m \geq 4$ ve x, y üreteçleri ile birlikte SD_{2^m} semidihedral grubunu düşünelim. O zaman birinci tür Fibonacci-circulant orbitinin periyot uzunluğu 2^m dir [41].

<u>*İspat:*</u> Doğrudan hesaplama yöntemi kullanılarak teorem ispatlanır. $F^1_{(x,y)}\left(SD_{2^m}\right)$ birinci tür Fibonacci-circulant orbiti

$$\begin{aligned}
&a^1{}_1 = x^{-1},\ a^1{}_2 = x^{-1},\ a^1{}_3 = y,\ a^1{}_4 = y,\\
&a^1{}_5 = x,\ a^1{}_6 = x^{-1},\ a^1{}_7 = yx^2, a^1{}_8 = x^{-4}y,\\
&a^1{}_9 = x^3,\ a^1{}_{10} = x^{-1},\ a^1{}_{11} = yx^8,\ldots,\\
&a^1{}_{17} = x^7,\ a^1{}_{18} = x^{-1},\ a^1{}_{19} = y,\ldots
\end{aligned}$$

şeklindedir. SD_{2^m} grup taktimi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&a^1{}_1 = x^{-1},\ a^1{}_2 = x^{-1},\ a^1{}_3 = y,\ldots,\\
&a^1{}_{8i+1} = x^{4i-1},\ a^1{}_{8i+2} = x^{-1},\ a^1{}_{8i+3} = yx^{8i},\ldots.
\end{aligned}$$

şeklindeki dizi elde edilir. Böylece $i \in \mathbb{N}$ için $4i = 2^{m-1}k$ olacak şekilde en küçük $i \in \mathbb{N}$ sayısına ihtiyaç vardır. Eğer $i = 2^{m-3}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
&a^1{}_{8\cdot 2^{m-3}+1} = x^{4\cdot 2^{m-3}-1} = x^{2^{m-1}-1} = x^{-1},\\
&a^1{}_{8\cdot 2^{m-3}+2} = x^{-1}
\end{aligned}$$

ve

$$a^1{}_{8\cdot 2^{m-3}+1} = yx^{8\cdot 2^{m-3}} = yx^{2^m} = y$$

şeklinde elde edilir.

$8 \cdot 2^{m-3} = 2^m$ ve $a^1_{2^m+1}, a^1_{2^m+2}, a^1_{2^m+3}$ tekrar eden elementler olduğundan, x^{-1}, x^{-1} ve y başlangıç değerlerine bağlı olarak dizi 2^m-inci elemandan sonra tekrar devreder. Bu yüzden $LF^1\left(SD_{2^m}; x, y\right) = 2^m$ dir.

<u>*Örnek 4.4.1:*</u> $F^1_{(x,y)}\left(SD_{2^5}\right)$ grup taktimi ile verilen dizi

$$\begin{aligned}&x^{-1}, x^{-1}, y, y, x, x^{-1}, yx^2, x^{-4}y, x^3, x^{-1}, yx^8, x^4y,\\&x^5, x^{-1}, yx^2, x^8y, x^7, x^{-1}, y, x^8y, x^{-7}, x^{-1}, yx^2, x^4y,\\&x^{-5}, x^{-1}, yx^8, yx^4, x^{-3}, x^{-1}, yx^2, y, x^{-1}, x^{-1}, y, \ldots.\end{aligned}$$

şeklinde olduğu açıktır. O zaman $LF^1\left(SD_{2^5}; x, y\right) = 32 = 2^5$ dir [41].

<u>*Teorem 4.4.2:*</u> Her $m \geq 4$ pozitif tam sayısı için $LF^2\left(SD_{2^m}; x, y\right) = 7 \cdot 2^{m-1}$ dir [41].

<u>*İspat:*</u>

$$\begin{aligned}&a^2{}_1 = x^3, a^2{}_2 = x^2, a^2{}_3 = x, a^2{}_4 = x, a^2{}_5 = ya^2{}_6 = e, a^2{}_7 = e,\\&a^2{}_8 = y, a^2{}_9 = xy, a^2{}_{10} = y, a^2{}_{11} = y, a^2{}_{12} = x^{-1}, a^2_{13} = x^{-1}y, a^2_{14} = xy,\\&a^2_{15} = x, a^2_{16} = x^{2^{m-2}}, a^2_{17} = x^{2^{m-2}-3}, a^2_{18} = x^{2^{m-1}-3}, a^2_{19} = x^2y, a^2_{20} = x^4, a^2_{21} = x^6,\\&a^2_{22} = yx^{2+2^{m-3}}, a^2_{23} = x^3y, a^2_{24} = x^{-4}y, a^2_{25} = x^{2^{m-2}}y, a^2_{26} = x^{5.2^{m-1}-13.2^{m-2}+5}, a^2_{27} = x^{-5+5.2^{m-2}}, a^2_{28} = yx^{6-2^{m-2}-7},\\&a^2_{29} = x^7, a^2_{30} = x^{-6}, a^2_{31} = x^{-7}, a^2_{32} = x^{-3}, a^2_{33} = yx^8\end{aligned}$$

dizisi elde edilir. SD_{2^m} grup taktimi kullanılarak

$$\begin{aligned}&a^2{}_1 = x^3, a^2{}_2 = x^2, a^2{}_3 = x, a^2{}_4 = x, a^2{}_5 = y, \ldots,\\&a^2{}_{28i+1} = x^{3+4i}, a^2{}_{28i+2} = x^{2+8i}, a^2{}_{28i+3} = x^{1-8i},\\&a^2{}_{28i+4} = x^{1-4i}, a^2{}_{28i+5} = yx^{8i}, a^2{}_{28i+6} = x^{4i}, a^2{}_{28i+7} = x^{4i}\end{aligned}$$

şeklindeki dizi elde edilir. . Böylece $i \in \mathbb{N}$ için $4i = 2^{m-1}k$ olacak şekilde en küçük $i \in \mathbb{N}$ sayısına ihtiyaç vardır. Eğer $i = 2^{m-3}$ olarak seçilirse

$$a^2_{28\cdot 2^{m-3}+1}=x^{3+4\cdot 2^{m-3}}=x^{3+2^{m-1}}$$
$$a^2_{28\cdot 2^{m-3}+2}=x^{2+8\cdot 2^{m-3}}=x^{2+2^{m}}$$
$$a^2_{28\cdot 2^{m-3}+3}=x^{-3-4\cdot 2^{m-3}}=x^{-3-2^{m-1}}$$
$$a^2_{28\cdot 2^{m-3}+4}=x^{1-4\cdot 2^{m-3}}=x^{1-2^{m-1}}$$
$$a^2_{28\cdot 2^{m-3}+5}=yx^{8\cdot 2^{m-3}}=yx^{2^{m}}$$

şeklinde elde edilir. $28\cdot 2^{m-3}=7\cdot 2^{m-1}$ ve $a^2_{7.2^{m-1}+1}$, $a^2_{7.2^{m-1}+2}, a^2_{7.2^{m-1}+3}$, $a^2_{7.2^{m-1}+4}$, $a^2_{7.2^{m-1}+5}$ tekrar eden elementler olduğundan, x^3, x^2, x, x ve y başlangıç değerlerine bağlı olarak dizi $7\cdot 2^{m-1}$-inci elementten sonra tekrar devreder. Bu yüzden $LF^2\left(SD_{2^m};x,y\right)=7.2^{m-1}$ dir.

<u>*Örnek 4.4.2:*</u> $F^2_{(x,y)}\left(SD_{2^4}\right)$ grup taktimi ile verilen dizi

$$\begin{aligned}&x^3, x^2, x, x, y, e, e, y, xy, y, y, x^{-1}, x^{-1}y, xy,\\&x, x^4, x, x^5, x^2y, x^4, x^{-2}, yx^2, yx, x^4y, x^4y, x,\\&yx^5, yx, x^{-1}, x^2, x, x^5, y, x^4, x^4, x^4y, xy, y, x^4y,\\&x^{-1}, yx, x^5y, x^{-3}, x^4, x, x, x^2y, e, x^2, x^2y, yx, x^4y,\\&y, x, yx, yx^5, x^3, x^2, x, x, y\end{aligned}$$

olduğundan ikinci tür Fibonacci-circulant orbitinin periyot uzunluğu $LF^2\left(SD_{2^4};x,y\right)=56$ dır [41].

4.5 Jacobsthal-circulant-Hurwitz Dizileri

Birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobshal-circulant dizilerinin karakteristik polinomları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$f^{(1)}(x)=x^3+x^2-x+2,$$
$$f^{(2)}(x)=x^4-x^2+2x+1$$

ve

$$f^{(3)}(x)=x^5+2x^2+x-1.$$

$f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ ve $f^{(3)}(x)$ polinomları için sırasıyla Hurwitz matrisleri

$$J^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$J^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

ve

$$J^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır [31].

$J^{(1)}$, $J^{(2)}$ ve $J^{(3)}$ matrisleri kullanılarak birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [31]:

$x^{(1)}(1)=x^{(1)}(2)=0$ ve $x^{(1)}(3)=1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n>3$ için

$$x^{(1)}(n)=2x^{(1)}(n-1)-x^{(1)}(n-2)+x^{(1)}(n-3), \tag{4.5.1}$$

$x^{(2)}(1)=x^{(2)}(2)=x^{(2)}(3)=0$ ve $x^{(2)}(4)=1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n>4$ için

$$x^{(2)}(n)=x^{(2)}(n-2)+2x^{(2)}(n-3)-x^{(2)}(n-4) \tag{4.5.2}$$

ve

$x^{(3)}(1)=x^{(3)}(2)=x^{(3)}(3)=x^{(3)}(4)=0$ ve $x^{(3)}(5)=1$ başlangıç değerleri ile birlikte ve $n>5$ için

$$x^{(3)}(n)=-x^{(3)}(n-3)+x^{(3)}(n-4)+2x^{(3)}(n-5). \tag{4.5.3}$$

Birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$g^{(1)}(x)=\frac{x^3}{-x^3+x^2-2x+1},$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{x^4}{x^4-2x^3-x^2+1}$$

ve

$$g^{(3)}(x)=\frac{x^5}{-2x^5-x^4+x^3+1}$$

şeklindedir [31].

(4.5.1), (4.5.2) ve (4.5.3) ifadeleri yardımıyla, birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz diziler için Companion matris formundaki üreteç matrisleri sırasıyla;

$$JH^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$JH^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$JH^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde olup, burada $JH^{(1)}$, $JH^{(2)}$ ve $JH^{(3)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrisleri olarak adlandırılır [31].

$k=1,2,3$ için $x^{(k)}(n)$ notasyonu $x_n^{(k)}$ şeklinde ifade edilsin. $n\geq 2$ için n üzerinden tümevarım uygulanarak n üzerinden tümevarım uygulanarak birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrislerinin n-inci kuvvetleri

$$\left(JH^{(1)}\right)^n=\begin{bmatrix}x_{n+3}^{(1)} & x_{n+1}^{(1)}-x_{n+2}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)}\\ x_{n+2}^{(1)} & x_{n}^{(1)}-x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(1)}\\ x_{n+1}^{(1)} & x_{n-1}^{(1)}-x_{n}^{(1)} & x_{n}^{(1)}\end{bmatrix},$$

$$\left(JH^{(2)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+4}^{(2)} & x_{n+5}^{(2)} & -x_{n+2}^{(2)}+2x_{n+3}^{(2)} & -x_{n+3}^{(2)} \\ x_{n+3}^{(2)} & x_{n+4}^{(2)} & -x_{n+1}^{(2)}+2x_{n+2}^{(2)} & -x_{n+2}^{(2)} \\ x_{n+2}^{(2)} & x_{n+3}^{(2)} & -x_{n}^{(2)}+2x_{n+1}^{(2)} & -x_{n+1}^{(2)} \\ x_{n+1}^{(2)} & x_{n+2}^{(2)} & -x_{n-1}^{(2)}+2x_{n}^{(2)} & -x_{n}^{(2)} \end{bmatrix}$$

ve

$$\left(JH^{(3)}\right)^n = \begin{bmatrix} x_{n+5}^{(3)} & x_{n+6}^{(3)} & x_{n+7}^{(3)} & 2x_{n+3}^{(3)}+x_{n+4}^{(3)} & -2x_{n+4}^{(3)} \\ x_{n+4}^{(3)} & x_{n+5}^{(3)} & x_{n+6}^{(3)} & 2x_{n+2}^{(3)}+x_{n+3}^{(3)} & -2x_{n+3}^{(3)} \\ x_{n+3}^{(3)} & x_{n+4}^{(3)} & x_{n+5}^{(3)} & 2x_{n+1}^{(3)}+x_{n+2}^{(3)} & -2x_{n+2}^{(3)} \\ x_{n+2}^{(3)} & x_{n+3}^{(3)} & x_{n+4}^{(3)} & 2x_{n}^{(3)}+x_{n+1}^{(3)} & -2x_{n+1}^{(3)} \\ x_{n+1}^{(3)} & x_{n+2}^{(3)} & x_{n+3}^{(3)} & 2x_{n-1}^{(3)}+x_{n}^{(3)} & -2x_{n}^{(3)} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\det\left(JH^{(1)}\right)^n = \det\left(JH^{(2)}\right)^n = 1$ ve $\left(JH^{(3)}\right)^n = 2^n$ olduğu kolaylıkla görülmektedir [31].

$JH^{(1)}$, $JH^{(2)}$ ve $JH^{(3)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu açıktır. $JH^{(1)}$, $JH^{(2)}$ ve $JH^{(3)}$ matrislerinin özdeğerlerinin kümesi sırasıyla $\left\{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}\right\}$, $\left\{\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}\right\}$ ve $\left\{\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_4^{(3)}, \alpha_5^{(3)}\right\}$ olsun. $k=1,2,3$ için $(k+2)\times(k+2)$ tipli $V^{(k)}$ Vandermonde matrisinin

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k+1} & \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k+1} & \cdots & \left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k+1} \\ \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k} & \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k} & \cdots & \left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} & \cdots & \alpha_{k+2}^{(k)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinden ifade edildiğini düşünelim. $W_i^{(k)}$ matrisi;

$$W_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(\alpha_1^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ \left(\alpha_2^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ \vdots \\ \left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilsin ve $V_{i,j}^{(k)}$ matrisi, $V^{(k)}$ matrisinin j-inci sütununun $W_i^{(k)}$ sütun matrisiyle değiştirilmesi sonucu elde edilsin.

<u>*Teorem 4.5.1:*</u> $x_n^{(k)}$**,** $k=1,2,3$ için k-inci tür dizinin n-inci terimi olsun. O halde

$$p_{ij}^{(k,n)}=\frac{\det V_{i,j}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

dır. Burada $\left(JH^{(k)}\right)^n=\left[h_{ij}^{(k,n)}\right]$ şeklinde ifade edilir [31].

<u>*İspat:*</u> $JH^{(k)}$ matrislerinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğu için $JH^{(k)}$ matrisleri köşegenleştirilebilirdir. $D^{(1)}=diag\left(\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\alpha_3^{(1)}\right)$, $D^{(2)}=diag\left(\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\alpha_3^{(2)},\alpha_4^{(2)}\right)$ ve $D^{(3)}=diag\left(\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)},\alpha_4^{(3)},\alpha_5^{(3)}\right)$ olduğundan $JH^{(k)}V^{(k)}=V^{(k)}D^{(k)}$ eşitliği yazılabilir. $V^{(k)}$ matrisi tersinir olduğu için

$$\left(V^{(k)}\right)^{-1}JH^{(k)}V^{(k)}=D^{(k)}$$

eşitliği sağlanır. Bu ise $JH^{(k)}$ matrisinin $D^{(k)}$ matrisine benzer olduğunu göstermektedir. O halde $n\geq 1$ için $\left(JH^{(k)}\right)^n V^{(k)}=V^{(k)}\left(D^{(k)}\right)^n$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$\begin{cases} h_{i1}^{(k,n)}\left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k+1}+h_{i2}^{(k,n)}\left(\alpha_1^{(k)}\right)^{k}+\cdots+h_{ik+3}^{(k,n)}=\left(\alpha_1^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ h_{i1}^{(k,n)}\left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k+1}+h_{i2}^{(k,n)}\left(\alpha_2^{(k)}\right)^{k}+\cdots+h_{ik+3}^{(k,n)}=\left(\alpha_2^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \\ \qquad\vdots \\ h_{i1}^{(k,n)}\left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k+1}+h_{i2}^{(k,n)}\left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{k}+\cdots+h_{ik+3}^{(k,n)}=\left(\alpha_{k+2}^{(k)}\right)^{n+k+2-i} \end{cases}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Lineer denklem sisteminin çözümünden ise, her $i,j=1,2,\ldots,k+2$ için

$$p_{ij}^{(k,n)}=\frac{\det V_{i,j}^{(k)}}{\det V^{(k)}}$$

olduğu görülmektedir.

Sonuç 4.5.1: Farz edelim ki $x_n^{(k)}$, birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz sayıları olsun. Bu durumda,

$$x_n^{(1)} = \frac{\det V_{3,3}^{(1)}}{\det V^{(1)}},$$

$$x_n^{(2)} = -\frac{\det V_{4,4}^{(2)}}{\det V^{(2)}}$$

ve

$$x_n^{(3)} = -\frac{\det V_{5,5}^{(3)}}{2\det V^{(3)}}$$

dır [31].

$m\times m$ tipli $P^{(1)}(m)=\left[p_{i,j}^{(1)}\right]$, $P^{(2)}(m)=\left[p_{i,j}^{(2)}\right]$ ve $P^{(3)}(m)=\left[p_{i,j}^{(3)}\right]$ süper köşegen matrisleri, sırasıyla;

$$p_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1\le\tau\le m, \\ 1 & \begin{array}{c}\text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1\le\tau\le m-2 \\ \text{ve} \\ \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1\le\tau\le m-1,\end{array} \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+1 \text{ için } 1\le\tau\le m-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m\ge 3 \text{ için},$$

$$p_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1\le\tau\le m-2, \\ 1 & \begin{array}{c}\text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+1 \text{ için } 1\le\tau\le m-1 \\ \text{ve} \\ \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1\le\tau\le m-1,\end{array} \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+3 \text{ için } 1\le\tau\le m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m\ge 4 \text{ için}$$

ve

$$p_{i,j}^{(3)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+4 \text{ için } 1\le\tau\le m-4, \\ 1 & \begin{array}{c}\text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+3 \text{ için } 1\le\tau\le m-3 \\ \text{ve} \\ \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1\le\tau\le m-1,\end{array} \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1\le\tau\le m-2, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m\ge 5 \text{ için}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Teorem 4.5.2: $k=1,2,3$ ve $m \geq k+2$ için

$$perP^{(k)}(m) = x^{(k)}(m+k+2)$$

eşitliği elde edilir [31].

İspat: $k=1$ olsun. Denklemin $m \geq 3$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $m+1$ için sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $P^{(1)}(m)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perP^{(1)}(m)$ genişletilir ise,

$$perP^{(1)}(m+1) = 2\,perP^{(1)}(m) - perP^{(1)}(m-1) + perP^{(1)}(m-2)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $perP^{(1)}(m) = x^{(1)}(m+3)$, $perP^{(1)}(m-1) = x^{(1)}(m+2)$ ve $perP^{(1)}(m-2) = x^{(1)}(m+1)$ olduğundan, $perP^{(1)}(m+1) = x^{(1)}(m+4)$ kolaylıkla elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$k=2,3$ için ispat benzer şekildedir.

$m \times m$ tipli $Q^{(1)}(m) = \left[q_{i,j}^{(1)}\right]$, $Q^{(1)}(m) = \left[q_{i,j}^{(1)}\right]$ ve $Q^{(1)}(m) = \left[q_{i,j}^{(1)}\right]$ matrisleri, sırasıyla;

$$q_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-1, \\ & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-2 \\ 1 & \text{ve} \\ & \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-1, \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+1 \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-1, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m \geq 3 \text{ için,}$$

$$q_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-3, \\ & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+1 \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-2 \\ 1 & \text{ve} \\ & \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-1, \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+3 \text{ için } 1 \leq \tau \leq m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m \geq 4 \text{ için}$$

ve

$$q_{i,j}^{(3)} = \begin{cases} 2 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+4 \text{ için } 1\le\tau\le m-4, \\ & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+3 \text{ için } 1\le\tau\le m-4 \\ 1 & \text{ve} \\ & \text{eğer } i=\tau+1 \text{ ve } j=\tau \text{ için } 1\le\tau\le m-1, \\ -1 & \text{eğer } i=\tau \text{ ve } j=\tau+2 \text{ için } 1\le\tau\le m-3, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad m\ge 5 \text{ için}$$

şeklinde tanımlanır [31].

<u>*Teorem 4.5.3:*</u> *i.* $m\ge 3$ için

$$perQ^{(1)}(m) = x^{(1)}(m),$$

ii. $m\ge 4$ için

$$perQ^{(2)}(m) = -x^{(2)}(m)$$

ve

iii. $m\ge 5$ için

$$perQ^{(3)}(m) = 2x^{(3)}(m)$$

dır [31].

<u>*İspat:*</u> *ii.* $Q^{(2)}(m)$ matrisini göz önüne alarak denklemin $m\ge 4$ için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, denklemin $m+1$ için de sağlandığı gösterilmelidir. Eğer $Q^{(2)}(m)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perQ^{(2)}(m)$ genişletilir ise,

$$perQ^{(2)}(m+1) = perQ^{(2)}(m-1) + 2\,perQ^{(2)}(m-2) - perQ^{(2)}(m-3)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $perQ^{(2)}(m-1) = -x^{(2)}(m-1)$, $perQ^{(2)}(m-2) = -x^{(2)}(m-2)$ ve $perQ^{(2)}(m-3) = -x^{(2)}(m-3)$ olduğundan, $perQ^{(2)}(m+1) = -x^{(2)}(m+1)$ kolaylıkla elde edilir.

$Q^{(1)}(m)$ ve $Q^{(3)}(m)$ matrisleri için de ispat benzerdir.

Farz edelim ki $k=1,2,3$ için $m\times m$ tipli $R^{(k)}(m) = \left[r_{i,j}^{(k)}\right]$ matrisi,

$$R^{(k)}(m)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (m-k-2)\text{th} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & Q^{(k)}(m-1) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}\end{array}, \text{ for } m>k+2$$

şeklinde tanımlanır [31].

<u>*Teorem 4.5.4:*</u> *i.* $m>3$ için

$$perR^{(1)}(m)=\sum_{i=1}^{m-1}x^{(1)}(i),$$

ii. $m>4$ için

$$perR^{(2)}(m)=-\sum_{i=1}^{m-1}x^{(2)}(i)$$

ve

iii. $m>5$ için

$$perR^{(3)}(m)=2\sum_{i=1}^{m-1}x^{(3)}(i)$$

dır [31].

<u>*İspat:*</u> *i.* $R^{(1)}(m)$ matrisinin birinci satırına göre Laplace açılımı uygulanarak $perR^{(1)}(m)$ genişletilir ise,

$$perR^{(1)}(m)=perR^{(1)}(m-1)+perQ^{(1)}(m-1)$$

eşitliği elde edilir. m üzerinden tümevarım yöntemi ile birlikte Teorem 4.1.3'ün sonuçları ve Teorem 4.1.4 ün i-inci kısmı dikkate alınarak sonuç kolaylıkla görülür.

$m>k+2$ için $m\times m$ tipli T matrisi;

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Dolayısıyla $m > k+2$ için $perP^{(k)}(m) = \det\left(P^{(k)}(m) \circ T\right)$, $perQ^{(k)}(m) = \det\left(Q^{(k)}(m) \circ T\right)$ ve $perR^{(k)}(m) = \det\left(R^{(k)}(m) \circ T\right)$ eşitlikleri elde edilir [31].

<u>*Sonuç 4.5.2:*</u> *i.* $k = 1,2,3$ için

$$\det\left(P^{(k)}(m) \circ T\right) = x^{(k)}(m+k+2).$$

ii. $m > 3$ için $\det\left(Q^{(1)}(m) \circ T\right) = x^{(1)}(m)$,

$m > 4$ için $\det\left(Q^{(2)}(m) \circ T\right) = -x^{(2)}(m)$

ve

$m > 5$ için $\det\left(Q^{(3)}(m) \circ T\right) = 2x^{(3)}(m)$.

iii. $m > 3$ için $\det\left(R^{(1)}(m) \circ T\right) = \sum_{i=1}^{m-1} x^{(1)}(i)$,

$m > 4$ için $\det\left(R^{(2)}(m) \circ T\right) = -\sum_{i=1}^{m-1} x^{(2)}(i)$

ve

$m > 5$ için $\det\left(R^{(3)}(m) \circ T\right) = 2\sum_{i=1}^{m-1} x^{(3)}(i)$

dır [31].

Şimdi birinci, ikinci ve üçüncü tür Jacobsthal-circulant-Hurwitz sayılarının toplamsal temsillerini düşünelim.

$i \geq 1$ ve $k = 1,2,3$ için $S_n = \sum_{i=1}^{n} x^{(k)}(i)$ olmak üzere $(k+2)\times(k+2)$ tipli $\left(T^{(k)}\right)^n$ matrislerinin toplamsal temsili aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & JH^{(k)} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

n üzerinden tümevarım yöntemi kullanarak

$$\left(T^{(k)}\right)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_{n+k+1} & & & & & \\ S_{n+k} & & & & & \\ \vdots & & & \left(JH^{(k)}\right)^n & & \\ S_{n+1} & & & & & \\ S_n & & & & & \end{bmatrix}$$

yazılır [31].

4.6 Jacobsthal-circulant-Hurwitz Sayılarının m Modülüne Göre Periyotları

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nın her elemanının $mod\alpha$ ya göre indirgenmesi sonucu $A(mod\alpha)$ olarak ifade edilir. Yani $A(mod\alpha)=\left(a_{ij}(mod\alpha)\right)$ dir. $\langle A\rangle_\alpha=\left\{A^i(mod\alpha)\,|\,i\geq 0\right\}$ olsun. Eğer $\text{obeb}(\alpha,\det A)=1$ ise o zaman $\langle A\rangle_\alpha$ bir devirli gruptur. Devirli grubun mertebesi $\langle A\rangle_\alpha$ olmak üzere $\left|\langle A\rangle_\alpha\right|$ ile gösterilir. $\det JH^{(1)}=\det JH^{(2)}=1$ ve $\det JH^{(3)}=2$ için kolayca görülür ki her pozitif m tam sayı için $\left\langle JH^{(1)}\right\rangle_m$, $\left\langle JH^{(2)}\right\rangle_m$ ve $\left\langle JH^{(3)}\right\rangle_m$ devirli gruplardır.

<u>*Teorem 4.6.1:*</u> r bir asal sayı ve $k=1,2,3$ için $\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_{r^m}$ devirli gruplar olsun. Eğer u, $\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_r\right|=\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_{r^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise her $v\geq u$ için $\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right|=r^{v-u}\cdot\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_r\right|$ dir. Özellikle $\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_r\right|\neq\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_{r^2}\right|$ ise $v\geq 2$ için $\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right|=r^{v-2}\cdot\left|\left\langle JH^{(k)}\right\rangle_r\right|$ dir.

İspat: $k=2$ için $\left\langle JH^{(2)}\right\rangle_{r^m}$ devirli grubunu düşünelim. Farzedelim ki t pozitif bir tam sayı ve $\left|\left\langle JH^{(2)}\right\rangle_{r^m}\right|$, $h\left(r^m\right)$ olsun. Eğer $\left(JH^{(2)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)}=I\left(\operatorname{mod} r^{t+1}\right)$ ise $\left(JH^{(2)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)}=I\left(\operatorname{mod} r^{t}\right)$ dir. Burada I, $(k+1)\times(k+1)$ tipinde birim matristir. Böylece $h\left(r^t\right)$ nin $h\left(r^{t+1}\right)$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(JH^{(2)}\right)^{h\left(r^t\right)}=I+\left(\mathrm{m}_{ij}^{(t)}r^t\right)$ eşitliği yazılarak, Binom açılımından

$$\left(JH^{(2)}\right)^{h\left(r^t\right)\cdot r}=\left(I+\left(m_{ij}^{(t)}r^t\right)\right)^r=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(m_{ij}^{(t)}r^t\right)^i\equiv I\left(\operatorname{mod} r^{t+1}\right)$$

elde edilir ki, bu da $h\left(r^{t+1}\right)$ nin $h\left(r^t\right)\cdot r$ tarafından bölünebilir olduğu gösterir. Böylece $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^t\right)$ yada $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^t\right)\cdot r$ dir. Ancak $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^t\right)\cdot r$ eşitliğin sağlanması r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(t)}$ tam sayısının var olması ile mümkündür. u, $h(r)=h\left(r^u\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olduğundan $h\left(r^u\right)\neq h\left(r^{u+1}\right)$ eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlik, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ tam sayısının mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $h\left(r^{u+1}\right)\neq h\left(r^{u+2}\right)$ sonucu elde edilir ve u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$\left\{x_n^{(k)}\right\}$ Jacobsthal-circulant-Hurwitz tipli dizisi bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}=\left\{x_1^{(k)}(m),x_2^{(k)}(m),\ldots,x_i^{(k)}(m),\ldots\right\}$$

dizisi elde edilir ve burada $x_n^{(k)}(m)=x_n^{(k)}\left(\operatorname{mod} m\right)$ dir.

Teorem 4.6.2: $k=1,2,3$ için $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisi periyodik bir dizidir.

İspat: $T=\left\{\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right)\mid 0\le t_i\le m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $\left|B\right|=m^k$ dır. B_m nin elemanlarının m^k tane farklı k-tiplisi mevcut olduğundan, bu k-tiplilerden en az bir tanesi $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k -lileri takip eden alt dizi tekrarlanır; böylece dizi periyodiktir. $i > j$ olmak üzere

$$x_{i+1}^{(k)}(m) \equiv x_{j+1}^{(k)}(m), x_{i+2}^{(k)}(m) \equiv x_{j+2}^{(k)}(m), \ldots, x_{i+k}^{(k)}(m) \equiv x_{j+k}^{(k)}(m)$$

ise $i \equiv j(\operatorname{mod} k)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizisi tanımından

$$x_{i}^{(k)}(m) \equiv x_{j}^{(k)}(m), x_{i-1}^{(k)}(m) \equiv x_{j-1}^{(k)}(m), \ldots, x_{i-j+1}^{(k)}(m) \equiv x_{1}^{(k)}(m)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$S^k(m)$ notasyonu ile $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisinin periyodu gösterilmiş olsun.

<u>*Teorem 4.6.3:*</u> p_i ler farklı asal sayıları olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{u} (p_i)^{r_i}$, $(u \geq 1)$ olsun. O zaman $S^k(m) = okek\left[S^k\left((p_1)^{r_1}\right), S^k\left((p_2)^{r_2}\right), \ldots, S^k\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$ dır.

<u>*İspat:*</u> $\left\{x_{(p_i)^{r_i}}^{(k)}(m)\right\}$ dizisinin periyodu $S^k\left((p_i)^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda \cdot S^k\left((p_i)^{r_i}\right)$, $(\lambda \in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $S^k(m)$, $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{x_{(p_i)^{r_i}}^{(k)}(m)\right\}$ dizisi $S^k(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece, her i değeri için $S^k(m)$ periyodu $\lambda \cdot S^k(m)$ şeklinde olup bu sayı $\left\{x_n^{(k)}(m)\right\}$ dizisinin periyodu vermektedir. Dolayısıyla

$$S^k(m) = okek\left[S^k\left((p_1)^{r_1}\right), S^k\left((p_2)^{r_2}\right), \ldots, S^k\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

[21, 23, 24, 26, 29, 50, 53, 55, 74, 75, 84, 89] deki çalışmalarda, indirgemeli dizilerin çeşitli özellikleri ve bu dizilerin cebirsel yapılardaki karşılıklarının periyotları elde edilirken bu dizilerin bağıntıları yardımıyla elde edilen üreteç matrisler kullanılmıştır. Matrisler kullanılarak indirgemeli dizilerin tanımlanması ise, ilk olarak [4, 21, 23, 24, 26, 28, 29] çalışmalarında ortaya atılmış yeni bir yöntemdir.

Bu tez çalışmasında ise bu yeni yöntem daha da genişletilerek farklı yollardan elde edilen Fibonacci-circulant, Padovan-circulant ve Jacobsthal-circulant matrisleri kullanılarak Fibonacci-circulant-Hurwitz, Padovan-circulant-Hurwitz ve Jacobsthal-circulant-Hurwitz matrisleri tanımlanmıştır.

Fibonacci-circulant-Hurwitz, Padovan-circulant-Hurwitz ve Jacobsthal-circulant-Hurwitz dizilerinin üreteç matrisleri Companion matrisler formatında belirlenerek gerek üreteç matrislerin gerekse dizilerin yapısal özellikleri yardımıyla bu dizilerin, Binet formülleri, permanental, üstel ve toplamsal temsilleri, üreteç fonksiyonları ve sonlu toplamları gibi çeşitli özellikleri belirlenmiştir.

Yapılan bu çalışmalarda, kullanılan yöntemler ile üzerinde çalışılan matematiksel yapıların konsept kapsamında ilk defa birlikte ele alınmış olmalarından dolayı elde edilen sonuçlar son derece özgün değere sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, W. and Shanks, D., (1982), "Strong Primality Tests that are not sufficient", Mathematics of Compt., 36(159), 255-300.

[2] Adıgüzel , Z., Erdağ, Ö. and Deveci, Ö., "Padovan-circulant-Hurwitz Sequences", sunulmuştur.

[3] Adıgüzel , Z., Erdağ, Ö. ve Deveci, Ö., "Padovan-circulant-Hurwitz Sayılarının m Modülüne Göre Periyotları", sunulmuştur.

[4] Aküzüm, Y., Deveci, Ö. and Shannon, A. G., (2017), "On The Pell p-Circulant Sequences", Notes Number Theory Disc. Math., 23(2), 91-103.

[5] Aydın, H. and Dikici, R., (1998), "General Fibonacci sequences in finite groups", The Fibonacci Quart., 36(3), 216-221.

[6] Aydın, H. and Smith, G. C., (1994), "Finite *p*- quotients of some cyclically presented groups" J. Lond. Math. Soc., 49, 83–92.

[7] Ağargün, A. G. and Özdağ, H., (2008), "Lineer Cebir ve Çözümlü Problemleri", Birsen Yayınevi, İstanbul.

[8] Barnett, S., (1990), "Matrices: Methods and Applications", Clarendon Press, Oxford.

[9] Başar, F., (2012), "Lineer Cebir", Sürat Üniversite Yayınları.

[10] Becker, P. G., (1994), "k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional

Equations”, J. Number Theory, 49(3), 269-286.

[11] Bicknell, M., (1975), “A primer on the Pell sequences and Related sequence”, The Fibonacci Quart., 13(4), 345-350.

[12] Bozkurt, D. and Tam Tin-Yau, (2012), “Determinant and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas number”, Appl. Math. Comput., 219(2), 544–551.

[13] Brualdi, R. A. and Gibson, P. M., (1997), “Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: applications of permanent function”, J. Combin. Theory, 22, 194–230.

[14] Campbell, C. M. and Campbell, P. P., (2009), “The Fibonacci lengths of binary polyhedral groups and related groups”, Congr. Numer., 194:95–102.

[15] Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F., (1990). “Fibonacci length of generating pairs in groups in Applications of Fibonacci Numbers”, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, pp. 27-35.

[16] Chen, W. Y. C. and Louck, J. C., (1996), “The combinatorial power of the companion matrix”, Linear Algebra Appl., 232, 261–278.

[17] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., (1972), “Generators and relations for discrete groups”, 3rd edn. Springer, Berlin.

[18] Çallıalp, F., (2001), “Örneklerle Soyut Cebir”, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[19] Davis, P. R., (1979), “Circulant matrices”, John Wiley, New York.

[20] Deveci, Ö., “On The Fibonacci-Circulant p-Sequences”, Util. Math., in press.

[21] Deveci, Ö., “The Padovan-Circulant Sequences and Their Applications”, is submitted.

[22] Deveci, Ö., (2015), “The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups”, Util. Math., 98, 257–270.

[23] Deveci, Ö., (2016), “The Pell-Circulant Sequences and their Applications”, Maejo Int. J. Sci. Technol., 10(03), 284-293.

[24] Deveci, Ö., Karaduman, E. and Campbell, C. M., (2017), “The Fibonacci-Circulant Sequences and Their Applications”, Iran J. Technol. Trans. Sci., 41, 1033-1038.

[25] Deveci, Ö. and Karaduman, E., (2013), “Requrrence Sequence in Groups”, Lambert Academic Publishing, Germany.

[26] Deveci, Ö. and Karaduman, E., (2015), “The Jacobsthal-Circulant Sequences and Their Applications”, Romai J., v.11, no.2, 77–88.

[27] Deveci, Ö. and Karaduman, E., (2012), “The cyclic groups via the Pascal matrices and the generalized Pascal matrices”, Linear Algebra Appl. ; 437, 2538-2545.

[28] Deveci, Ö. and Aküzüm, Y., “The recurrence sequences via Hurwitz matrices”, Sci. Ann.“ Al. I. Cuza” . Univ. Iasi, in press.

[29] Deveci, Ö., Aküzüm, Y. and Karaduman, E., (2015), “ The Pell-Padovan p-Sequences and Its Applications”, Util. Math. ; 98, 327-347.

[30] Deveci, Ö., Adıgüzel, Z. and Doğan, T., “On the Generalized Fibonacci-Circulant-Hurwitz Numbers”, is submitted.

[31] Deveci, Ö., Adıgüzel, Z. and Aküzüm, Y., “The Jacobsthal-Circulant-Hurwitz Sequences”, is submitted.

[32] Dikici, R. and Smith, G. C., (1997), “Fibonacci sequences in finite nilpotent groups”, Turkish J. Math. 2, 133-142.

[33] Doostie, H. and Hashemi, M., (2006), “Fibonacci lengths involving the Wall number” k(n). J Appl. Math. Comput., 20, 171-180.

[34] Dummit, D.S. and Foote, R.M., (2004), “Abstract Algebra”, 3^{nd} editon John Wiley & Sons, Inc..

[35] Everest, G., Poorten, A.V. and Shparlinski, I., T.Word, (2003), “Recurrence Sequences”, American Math. Soc..

[36] Falcon, S. and Plaza, A., (2009), “k-Fibonacci Sequences Modulo m”, Chaos, Solitons & Fractals, 41, 497-504.

[37] Frenkel, A.S. and Klein, S.T., (1996), “Robutst Universal Complete Codes for Transmission and Compression”, Discrete Appl. Math., 64, 31-55.

[38] Frey, D. D. and Sellers, J. A., (2000), “Jacobsthal numbers and alternating sign matrices”, J. Integer Seq., 3, Article 00.2.3.

[39] Gil, J. B., Wiener, M. D. and Zara, C., “Complete Padovan Sequences in Finite Fields”, http://arxiv.org/pdf/math/0605348.pdf.

[40] Gogin, N. and Myllari, A. A., (2007), “The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices”, Programing and Computer Software, published in Programmirovanie, 33(2), 74-79.

[41] Gölbaşı, N., Adıgüzel, Z. and Deveci, Ö., “The Fibonacci-Circulant Lengths of

the Semidihedral Group", sunulmuştur.

[42] Horadam, A. F., (1971), "Pell İdenties", The Fibonacci Quart., 9(3), 245-252.

[43] Hongyan, P. and Jiang, Z., (2015), "VanderLaan circulant type matrices", Abstr. Appl. Anal., https://doi.org/10.1155/2015/329329.

[44] Honsberger, R., (1985), "The matrix Q, mathematical Gems III. Washington DC, Math. Assoc. Amer., 106-107.

[45] Hurwitz, A., (1895), "Ueber die Bedingungen unter welchen eine gleichung nur Wurzeln mit negative reellen teilen besitzt", Mathematische Annalen, 46, 273-284.

[46] Ingleton, A. W., (1956), "The rank of circulant matrices", J. Lond. Math. Soc., s1–31(4), 445–460.

[47] Johnson, D. L., (1980), "Topics in the theory of group presentations", London Math. Soc. Lecture Notes, Cambridge University Press.

[48] Johnson, D. L., (1990), "Presentation of Groups", Cambridge University Press.

[49] Johnson, D. L., (1997), "Presentations of groups", 2nd edition, London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press.

[50] Kalman, D., (1982), "Generalized Fibonacci numbers by matrix methods", The Fibonacci Quart., 20(1), 73–76.

[51] Karakaş, H. İ., "Cebir Dersleri", Tüba Yayınları, Ankara, 2010(ikinci baskı).

[52] Kılıç, E., (2008), "The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers", European J. Comb., 29, 701–711, 8.

[53] Kılıç, E., (2009), "The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas", combinatorial representations, sums, Chaos, Solitons Fractals, 40(4), 2047-2063.

[54] Kılıç, E. and Stakhov, A. P., (2009), "On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices", Chaos Solitons Fractals, 40, 2210–2221.

[55] Kılıç, E. and Taşcı, D., (2006), "The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers", Taiawanese J. Math., 10(6), 1661-1670.

[56] Kirchoof, B. K. and Rutishauser, R., (1990), "The Phyllotavy of Costus (Costaceae)", Bot Gazette, 151(1), 88-105.

[57] Knox, S.W., (1992), "Fibonacci sequences in finite groups", The Fibonacci

Quart.; 30(2), 116-120.

[58] Knuth, D. E. and Bendix., P. B., (1970), “Simple word problems in universal algebra”, In: Computational problems in abstract algebra, (edited by Leech L), Pergamon Press, Oxford, pp 263-297.

[59] Köken, F. and Bozkurt, D., (2008), “On the Jacobsthal numbers by matrix methods”, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3(13), 605-614.

[60] Lancaster, P. and Tismenesky, M., (1985), “The theory of matrices”, Academic.

[61] Lee, G. Y., (2000), “k-Lucas numbers and associated bipartite graphs”, Linear Algebra Appl., 320 (1), 51-61.

[62] Lidl, R. and Niederreiter, H., (1986), “Introduction to finite fields and their applications”, Cambridge U.P..

[63] Lien, J., (2005), “Padovan Sequence”, Pers. Comm., Mar. 11, http://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html.

[64] Lü, K. and Wang, J., (2007), “k-step Fibonacci sequence modulo m”, Util. Math.; 71, 169-178.

[65] Mandelbaum, D. M., (1972), “Synchronization of Codes by means of Kautz’s Fibonacci Encoding”, IEEE Transactions on Information Theory, 281-285.

[66] Muir, T., (1911), “The theory of determinants in historical order of development”, vol 4. Macmillan and Co, London.

[67] Özkan, E., (2014), “Truncated Lucas Sequences and its period”, Appl. Math. Comput., 232, 285-291.

[68] Özgür, N. Y., (2005), “On the sequences related to Fibonacci and Lucas numbers”, J. Korean Math. Soc., 42, 135-151.

[69] Pinch, R. E. G., (1991), “Recurrent Sequences Modulo Prime Powers”, In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester.

[70] Shannon, A. G., Horadam, A. F. and Anderson, P. G., (2006), “The auxiliary equation associated with plastic number”, Notes on Number Theory and Disc. Math., 12 (1), 1-12.

[71] Silvester, J. R., (1979), “Fibonacci properties by matrix methods”, Mathematical Gozette, 63, 188-191.

[72] Slone, N. J. A., Sequences A000045/M0692, A000073/M1074, A000078/M1108, A001591, A001622, A046698, A058265, A086088, and A118745 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[73] Spinadel, V. W., (2002), "The metallic means family and forbidden symmetries." Int. Math. J., 2, 279-88.

[74] Stakhov, A. P., (1999), “A generalization of the Fibonacci Q-matrix”, Rep. Natl. Acad. Sci. Ukraine, 9, 46–49.

[75] Stakhov, A. P. and Rozin, B., (2006), “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers”, Chaos Solitons Fractals, 27, 1162–1167.

[76] Stakhov , A. P., Massingue , V. and Sluchenkova , A. A., (1999), “Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography”, Osnova, Kharkov.

[77] Stein, W., (1993), “Modelling the evolution of stelar architecture in vascular plants”, Int. J. Plant Sci., 154, 229-263.

[78] Stephen, B., (1990), “Matrices methods and applications”, Oxford University Press, New York.

[79] Taş, S. and Karaduman, E., (2014), “The Padovan sequences in finite groups”, Chaing Mai. J. Sci., 41(2), 456–462.

[80] Taşcı, D., “Lineer Cebir”, Gazi Kitapevi, Ankara, 2005(üçüncü baskı).

[81] Taşcı, D., “Soyut Cebir”, Alp Yayınevi, Ankara, 2010(ikinci baskı).

[82] Taşcı, D. and Firengiz, M. C., (2010), “Incomplete Fibonacci and Lucas p-numbers”, Math. Comput. Modell., 52, 1763-1770.

[83] Taşçı, D. and Kılıç, E., (2004), “On the order-*k* generalized Lucas numbers”, Appl. Math. Comput., 155, 637-641.

[84] Tuğlu, N., Koçer, E. G. and Stakhov, A. P., (2004), “Bivariate Fibonacci like p-Polinomials”, Appl. Math. and Compt., 155, 637-641.

[85] S. Vajda, (1989), “Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications”, Courier Corporation, North Chelmsford.

[86] Wall, D. D., (1960), “Fibonacci series modulo m”, Amer Math. Monthly; 67, 525-532.

[87] Wilcox, H. J., (1986), “Fibonacci Sequences of Period n in Groups”, Fibonacci Quart., 24, 356-361.

[88] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 10.0: Champaign, Illinois, 2014.

[89] Yılmaz, F. and Bozkurt, D., (2009), “The generalized order- k Jacobsthal numbers, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4(34), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Zafer Adıgüzel
Doğum Yeri	: KARS
Doğum Tarihi	:20.12.1991
İletişim (e-posta)	: zafer-adiguzel36@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:Kars Alpaslan Lisesi
Lisans	: Kafkas Üniversitesi/ Fen-Edebiyat Fakültesi
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Estitüsü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	: Kars Çözüm Eğitim Kurumları 2016
	: Kars Final Eğitim Kurumları 2017
	: Samsun Kriminal Polis Laboratuvar Müdürlüğü

2018