T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL GRUPLARDAKİ LEHMER DİZİLERİ

Abdulkadir KALEMCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

HAZİRAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL GRUPLARDAKİ LEHMER DİZİLERİ

Abdulkadir KALEMCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ömür DEVECİ

HAZİRAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Abdulkadir KALEMCİ'nin Prof. Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Bazı Özel Gruplardaki Lehmer Dizileri" isimli bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği....... ile kabul edilmiştir.

26/06/2019

AdıveSoyadı		**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye	: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Sait TAŞ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ....../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallarçerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygunolarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynakgösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Abdulkadir KALEMCİ

Tarih

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

BAZI ÖZEL GRUPLARDA LEHMER DİZİLERİ

Abdulkadir KALEMCİ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

Bu tez çalışmasında bazı özel gruplardaki Lehmer dizileri incelendi.

Çalışmanın 1. bölümünde, genel anlamda indirgemeli diziler, Lehmer dizileri ve üzerinde çalışılacak gruplarla ilgili detaylı bir şekilde bilgi verilmiştir. Ayrıca 1. ve 2. bölümde çalışmamıza yön vermesi bakımından iyi bilinen bazı indirgemeli dizilerin gerek devirli gerekse iki üreteçli gruplardaki karşılıkları ve periyot uzunlukları ele alınmıştır.

Çalışmanın 3. bölümünde $m \geq 3$ için Q_{2^m} genelleştirilmiş Quaternion, $n \geq 3$ için D_{2n} dihedral ve $m \geq 4$ için SD_{2^m} semidihedral gruplarının Lehmer orbitlerinin periyodlarının uzunlukları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lehmer dizisi, Lehmer orbiti, Esas Lehmer orbiti, Dihedral grup, Semidihedral grup, Quaternion grup

2019, 60 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

LEHMER SEQUENCES İN SOME SPECİAL GROUPS

Abdulkadir KALEMCİ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömür DEVECİ

In this thesis, the Lehmer sequences in some special groups were examined.

At the 1nd section of the study, in general detailed information has been given associated with recurrence sequences, Lehmer sequences and groups studying on. Also at the 1nd and 2rd section, in terms of directing our work, well-known some recurrence sequences both in cyclic groups and in groups which have two generators and the lengths of the period these sequences were obtained.

At the 3th section of the study, the lengths of the periods of the Lehmer orbits in the Q_{2^m} generalized quaternion group for $m \geq 3$, the D_{2n} dihedral group for $n \geq 3$ and the SD_{2^m} semidihedral group for $m \geq 4$ have been calculated.

Key Words: Lehmer sequence, Lehmer orbit, Basic Lehmer orbit, Dihedral group, Semidihedral group, Quaternion group

2019, 60 Pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır.

Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömür DEVECİ'ye şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Kars **Abdulkadir KALEMCİ**

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

e	:	Grubun birim elemanı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
G	:	Grup
$\lvert G \rvert$	:	Grubun mertebesi
$G=\langle A\rangle$	:	A dan üretilen grup
G/H	:	G nin H ye göre bölüm grubu
$H \le G$	:	H , G nin alt grubu
$H \Delta G$	:	H , G nin normal alt grubu
$\langle H,+,.\rangle$	:	Halka
$AutG$	:	G grubunun bütün otomorfizmlerinin kümesi
A'	:	A matrisinin transpozu
D_{2n}	:	Dihedral grup
SD_{2^m}	:	Semidihedral grup
Q_{2^m}	:	Genelleşitirilmiş Quaternion grup
$G_{1,t}$	:	Fox grup
$\{f_n\}$	:	Fibonacci dizisi
$\left\{f_n^{(k)}\right\}$	:	k -basamak Fibonacci dizisi
$\{U_n\}_0^{\infty}$	:	Lehmer dizisi
$\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\}$	:	α modülüne göre Lehmer dizisi
$U_{x,y}^{M,L}(G)=\{x_i\}$	:	Lehmer orbiti
$\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)$	:	Esas Lehmer orbiti
$LenU_{x,y}^{M,L}(G)$	:	Lehmer orbitinin periyod uzunluğu
$Len\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)$	:	Esas Lehmer orbitinin periyod uzunluğu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İndirgemeli diziler ve bu dizilerle alakalı kavramlar modern bilimin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Bu anlamda indirgemeli diziler disiplinler arası ilişki noktasında son derece öneme sahiptir. [1, 5, 17, 27, 31, 37] deki bilimsel çıktılar, indirgemeli diziler konu alınarak farklı bilimsel disiplinlerde yapılan güncel çalışmalara örnek olarak verilebilir.

İndirgemeli diziler cebirsel yapılara ilk olarak Wall [40] daki çalışması ile taşınmıştır. Wall, bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini (2-basamak Fibonacci dizisi) incelemiştir. Wilcox, [41] deki çalışmasıyla teoriyi abelyen gruplara genişletmiştir. Gruplarda indirgemeli diziler üzerine oluşturulan konsept, daha sonra yapılan çalışmalarla çeşitli indirgemeli dizilerin farklı grup ailelerinde incelenmesi şeklinde genişletilmiştir [2, 8, 13, 14, 25, 28, 32].

Deveci ve Karaduman, [15] deki çalışmalarında indirgemeli diziler ailesinden olan Lehmer dizilerini gruplara taşımış ve bu dizileri grup elemanları yardımıyla yeniden tanımlamışlardır. Bu çalışmada ilk olarak α modülüne göre Lehmer dizilerinin periyodları elde edilmiştir. İndirgemeli bir dizinin α modülüne göre periyodu Lehmer dizisinin α. mertebeden devirli bir gruptaki periyoduna karşılık gelmektedir. Daha sonra grup elemanları ve otomorfizm kavramı yardımıyla Lehmer orbiti ve esas Lehmer orbiti tanımlanmış ve bu kavramlar üzerinde durulmuştur.

Bu çalışmada, grup elemanları yardımıyla tanımlanan bu dizilerin kullanışlı olup olmadıklarının test edilmesi amacıyla $m \geq 3$ için Q_{2^m} genelleştirilmiş Quaternion, $n \geq 3$ için D_{2n} dihedral ve $m \geq 4$ için SD_{2^m} semidihedral gruplarının Lehmer orbitlerinin periyodlarının uzunlukları hesaplanmıştır.

1.2. Cebirsel Yapılar

<u>*Tanım1.2.1:*</u> G bir küme olsun. O halde;

$$*: G\times G \rightarrow G, \qquad (x,y)=x*y$$

fonksiyonuna G de bir ikili işlem denir. Bu takdirde $(G,*)$ ikili işlemine cebirsel yapı denir.

<u>*Örnek 1.2.1:*</u> $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$a*b=a+b+ab$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemdir [38].

<u>*Tanım 1.2.2:*</u> G boştan farklı bir küme ve $*$, bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

G_1) $\forall a,b\in G$ için $a*b\in G$ (Kapalılık şartı)

G_2) $\forall a,b,c\in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ (Birleşme özelliği)

G_3) $\forall a\in G$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde bir $e\in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

G_4) G kümesindeki her bir a için e, G nin birim elemanı olmak üzere

$$a*a'=a'*a=e$$

olacak şekilde $a'\in G$ vardır (Ters elemanın varlığı) [38].

<u>*Örnek 1.2.2:*</u> $\mathbb{Z}$ tam sayılar, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\mathbb{C}$ komleks sayılar kümeleri toplama işlemine göre birer grupturlar.

<u>*Tanım 1.2.3:*</u> $(G,*)$ bir grup olsun. $\forall a,b\in G$ için $a*b=b*a$ oluyorsa G ye değişmeli (abelyan) grup denir.

<u>*Tanım 1.2.4:*</u> Eğer Tanım 2.1.2 deki yalnızca G_1 ve G_2 şartları sağlanırsa o zaman $(G,*)$ cebirsel yapısına yarı grup denir.

Teorem 1.2.1: $(G,*)$ bir grup olsun. Buna göre

(i) G nin birimi tektir.

(ii) G nin her elemanının tersi tektir.

(iii) $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

(iv) G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a \in G$ için

$a * b = a * c$ ise $b = c$ (soldan kısaltma kuralı)

$b * a = c * a$ ise $b = c$ (sağdan kısaltma kuralı)

(v) $a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G deki işlemleri tektir.

(vi) $a \in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ dır [38].

Tanım 1.2.5: $(G,*)$ bir grup olsun. $a \in G$ elemanlarının kuvvetleri $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için;

$$a^n = a * a * \cdots * a \ (n \text{ tane çarpan})$$

$$a^0 = e \ (e, (G,*) \text{ nin birim elemanı})$$

$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$$

şeklinde tanımlanır [38].

Teorem 1.2.2: $(G,*)$ bir grup, $a \in G$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere a nın kuvvetleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir [38]:

$i.\ a^m * a^n = a^{m+n} = a^n * a^m$

$ii. \left(a^m\right)^n = a^{mn} = \left(a^n\right)^m$

$iii.\ a^{-m} = \left(a^m\right)^{-1}$

$iv.\ e^m = e$.

Tanım 1.2.6: G bir grup olsun. G grubunun eleman sayısına bu grubunun mertebesi denir. $|G|$ veya $\circ(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.7: $|G|$ sonlu ise G ye sonlu grup; sonsuz ise sonsuz grup adı verilir. G sonlu bir grup ve $|G| = n$ ise G ye n. mertebeden bir grup denir.

Örnek 1.2.4: Kompleks sayılar üzerindeki 2×2 kare matrilerin

$$M_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$$

kümesini düşünelim. Bu küme matrislerin

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{bmatrix}$$

toplamına göre bir değişmeli grup teşkil eder [4].

Tanım 1.2.8: G bir grup ve H, $\varnothing\neq H\subseteq G$ olacak şekilde bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir. $H\leq G$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.5: $2\mathbb{Z}$ kümesi, adi toplama işlemine göre tam sayılar grubunun bir alt grubudur.

Tanım 1.2.9: $(G,*)$ bir grup ve e, $(G,*)$ grubunun birim elemanı olmak üzere $(\{e\},*)$ ve $(G,*)$ nın kendisi $(G,*)$ grubunun alt grupları olup bu alt gruplara $(G,*)$ grubunun aşikar alt grupları denir [38].

Tanım 1.2.10: Bir grubun kendisinden ve biriminden farklı bütün alt gruplarına özalt grubu denir.

Tanım 1.2.11: G bir grup ve $\varnothing\neq A\subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren tüm alt gruplarının ailesinin ara kesitini $\langle A\rangle$ ile gösterelim. Bu takdirde $\langle A\rangle$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından gerilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.12: G bir grup ve $N\leq G$ olmak üzere eğer her $g\in G$ için $gN=Ng$ oluyorsa N ye G nin bir normal alt grubu denir ve $N\lhd G$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.6: G grubu değişmeliyken her alt grubun normal olacağı açıktır.

Tanım 1.2.13: $N \lhd G$ olmak üzere G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. O halde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G:N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G nin bölüm grubu denir.

Tanım 1.2.14: G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. $H < G$ ve $H < K \leq G$ den $K = G$ elde edilirse H alt grubuna, G nin bir maksimal alt grubu denir.
$E = \{e\}$ olmak üzere $E < H$ ve $E \leq K < H$ dan $K = G$ elde edilirse H alt grubuna minimal alt grup denir.

Tanım 1.2.15: $(G,*)$ ve $(G',*')$ iki grup ve $\phi : G \to G'$ bir dönüşüm olsun. $\forall a,b \in G$ için

$$\phi(a*b) = \phi(a) *' \phi(b)$$

eşitliği sağlanıyorsa ϕ dönüşümüne G grubundan G' grubuna bir homomofizm denir. Eğer ϕ homomorfizmi birebir ise ϕ dönüşümüne bir monomorfizm; örten ise ϕ ye epimorfizm denilir. Özel olarak ϕ homomorfizmi G grubundan kendisine ise ϕ dönüşümüne bir endomorfizm denir.

Tanım 1.2.16: $(G,*)$ ve $(G',*')$ iki grup olsun. O halde

$$\phi : G \to G'$$

dönüşümü işlemi koruyorsa ve birebir ve örtense ϕ dönüşümüne G grubundan G' grubuna bir izomorfizm denir. Bu durumda G ve G' gruplarına izomorf gruplar denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir.

Özel olarak $G = G'$ olması durumunda ϕ dönüşümüne bir otomorfizm denir [10].

Tanım 1.2.17: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere her $x \in G$ için $I_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan

$$I_a : G \to G$$

Otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $AutG$ ile gösterilir [38].

<u>Tanım 1.2.18:</u> G bir grup olmak üzere $H=\{a^n : n\in Z\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından gerilen devirli alt grubu denir ve $\langle a\rangle$ ile gösterilir.

Yani,

$$a=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}=H \text{ dir.}$$

Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir:

G, bir grup olmak üzere G de $G=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elamanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böylece bir a elamanına G nin gereni denir ve $G=\langle a\rangle$ şeklinde gösterilir [38].

<u>Tanım 1.2.19:</u> G bir grup ve $a\in G$ olsun. a nın gerdiği $\langle a\rangle$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $\circ(a)$ ile gösterilir [11].

<u>Teorem 1.2.3:</u> Her devirli grup değişmelidir [38].

<u>Teorem 1.2.4:</u> Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir [38].

<u>Teorem 1.2.5:</u> G bir grup, $a\in G$ ve a nın mertebesi n yani $\circ(a)=n$ olsun. Buna göre [38];

(i) Eğer a nın mertebesi sonsuz ise o takdirde a nın bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.

(ii) Eğer a nın mertebesi sonlu ise yani $a^n=e$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı n ise o takdirde a nın geren devirli grubun yani $\langle a\rangle$ nın mertebesi de n dir.

Diğer bir deyişle,

$$\langle a\rangle=\{e,a,a^2,\ldots,a^{n-1}\}$$

dir.

(iii) a nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^k = a^l$ olması için gerek ve yeter şart $k \equiv l \pmod{n}$ olmasıdır.

(iv) $\circ(a) = n$ sonlu olmak üzere $a^k = e$ olması için gerek ve yeter şart $n|k$ olmasıdır.

<u>*Sonuç 1.2.1:*</u> $G = \langle a \rangle$ bir sonlu devir grubu ve $\circ(G) = k < \infty$ olsun. $H \neq \{e\}$ ve $a^n \in H$ olacak şekilde $n > 0$ pozitif tam sayılarının en küçüğü m olmak üzere $H = \langle a^m \rangle$ olduğu kabul edilsin. O halde,

$$m|k \text{ ve } \circ(H) = \frac{k}{m}$$

dir [38].

<u>*Uyarı 1.2.1:*</u> $G = \langle a \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grubu ise o takdirde a^m nin bütün kuvvetleri farklı olacağından $H = \langle a^m \rangle$ devir grubu da sonsuz olur [38].

<u>*Teorem 1.2.6:*</u> $G = \langle a \rangle$ ve $\circ(G) = n$ olan bir devirli grup olsun. O takdirde G nin a^k tarafından üretilmesi için yani $G = \langle a^k \rangle$ olması için gerek ve yeter şart k ile n nin aralarında relatif asal yani $(k,n) = 1$ olmasıdır [38].

<u>*İspat:*</u> $\Rightarrow$ Olmayana ergi yöntemi ile ispatı yapalım. Bir an için $(k,n) = d > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman buradan $d|k$ ve $d|n$ ya da sırası ile $k = dt$ ve $n = dr$ yazılır. Bu durumda,

$$\left(a^k\right)^r = \left(a^{dt}\right)^r = \left(a^{dr}\right)^t = \left(a^n\right)^t = e$$

öyle ki

$$\circ\left(a^k\right) \leq r < n$$

dir. Bu ise a^k nın G nin bir üreteci olmadığını gösterir. Çünkü

$$G = \langle a^k \rangle$$

olsaydı o zaman $G=\langle a\rangle$ olduğundan $o(a)=n$ dolayısı ile $o(a^k)=n$ olmalıydı. Bu bir çelişkidir. Dolayısı ile eğer $G=\langle a^k\rangle$ ise o zaman $(k,n)=1$ olmalıdır.

$\Leftarrow (k,n)=1$ olsun. Buna göre $G=\langle a^k\rangle$ olduğu gösterilmelidir.

$$G\subseteq\langle a^k\rangle$$

olduğu açıktır. Çünkü $a^k\in G$ ve G bir grup olduğundan kapalılık özelliğinden dolayı a^k nın kuvvetleri G ye aittir. Şimdi ters kapsama gösterilir ise,

$$(k,n)=1\Rightarrow ku+nv=1$$

olacak şekilde u,v tam sayıları vardır. O halde

$$a=a^{ku+nv}=a^{ku}a^{nv}$$

yazılır. Diğer taraftan $G=\langle a^k\rangle$ ve $\circ(G)=n$ olduğundan $\circ(a)=n$ dir. Böylece

$$a^{nv}=(a^n)^v=e^v=e$$

olup buradan $a=a^{ku}$ eşitliği elde edilir. Buna göre $a^m\in G$ ise o takdirde

$$a^m=(a^{ku})^m=(a^k)^{um}\in\langle a^k\rangle$$

yazılır.

Bu da,

$$G\subseteq\langle a^k\rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece $G=\langle a^k\rangle$ eşitliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 1.2.2: Bir k tam sayısının $(\mathbb{Z}_n,+)$ grubunun bir gereni olması için gerek ve yeter şart $(k,n)=1$ olmasıdır [38].

Bir H kümesi ile bu küme üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ ikili işlemlerinden oluşan cebirsel yapı $(H,+,\cdot)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.20: $(H,+,\cdot)$ cebirsel yapısı verilmiş olsun. Eğer H kümesindeki her x,y,z elemanları için

$$x(y+z)=(xy)+(xz)$$

ise $(H,+,\cdot)$ yapısının sol dağılma özelliği vardır denir. Her $x,y,z\in H$ için

$$(x+y)z=(xz)+(yz)$$

ise $(H,+,\cdot)$ yapısının sağ dağılma özelliği vardır denir [26].

<u>*Tanım 1.2.21:*</u> G bir grup ve $S\subseteq G$ olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir [22].

<u>*Tanım 1.2.22:*</u> X bir küme; $F(X)$, X üzerinde serbest grup ve $R\subseteq F(X)$ olsun. $G=\langle X:R\rangle$ ye G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r\in R$ için $r=e$ olacak şekildeki denklemlerin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir, r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X:R\rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir [22].

<u>*Tanım 1.2.23:*</u> $G=\langle X:R\rangle$ ve $H=\langle Y:S\rangle$ olmak üzere $G\times H$ direkt çarpımı, $[X,Y]=\{[x,y]:x\in X, y\in Y\}$

$$G\times H=\langle X,Y:R,S,[R,S]\rangle$$

şeklinde tanımlanır [22].

<u>*Tanım 1.2.24:*</u> G, j-gerenli bir grup ve

$$X=\left\{(x_1,x_{2,}\ldots,x_j)\in\underbrace{G\times G\times\ldots\times G}_{j}\,\middle|\,\langle\{x_1,x_2\ldots,x_j\}\rangle=G\right\}$$

eşitliği verilsin. O halde $(x_1,x_2\ldots,x_j)$ ye G nin bir geren j-lisi denir.

<u>*Tanım 1.2.25:*</u> $m\geq 3$ için Q_{2^m} genelleştirilmiş Quaternion grubu,

$$Q_{2^m}=\left\langle x,y:x^{2^{m-1}}=e, y^2=x^{2^{m-2}}, y^{-1}xy=x^{-1}\right\rangle$$

şeklinde takdim edilir.

Tanım 1.2.26: $n \geq 3$ için $2n$ mertebeli D_{2n} Dihedral grubu,

$$D_{2n} = \left\langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2 = e \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.27: $m \geq 4$ için 2^m mertebeli SD_{2^m} semidihedral grubu,

$$SD_{2^m} = \left\langle x, y : x^{2^{m-1}} = y^2 = e,\ y^{-1}xy = x^{-1+2^{m-2}} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.28: $G_{1,t}$ Fox grubu:

$$\left\langle x, y :\ xy = y^t x,\ yx = x^t y \right\rangle$$

şeklinde takdim edilir. Bu grup $|t-1|^3$ mertebeli bir metacyclic grup olup, gerenlerin mertebesi $(t-1)^2$ dir [7].

Tanım 1.2.39: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

$R_1)$ $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.

$R_2)$ R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a,b \in R$ için $ab \in R$ dir.

$R_3)$ R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a,b,c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.

$R_4)$ Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab + ac$$

ve

$$(b+c)a = ba + ca$$

dır [38].

Örnek 1.2.7: F kümesi $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bütün fonksiyonların kümesi olsun. Yani

$$F = \{ f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

olsun. Fonksiyonların bilinen toplamına göre yani $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in F$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

işlemine göre $(\mathrm{F}, +)$ değişmeli bir gruptur. Eğer çarpma işlemi de

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanırsa o takdirde $(F, +, \cdot)$ cebirsel yapısının bir halka olduğu kolayca görülebilir [38].

Tanım 1.2.30: Birimli bir H halkasında $1_H \neq 0_H$ ve H nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise H ye bir aykırı cisim denir [26].

Tanım 1.2.31: Eğer H değişmeli aykırı cisim ise H ye bir cisim denir [26].

Örnek 1.2.8: $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları birer cisim olmasına karşılık $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tam sayılar halkası bir cisim değildir. Gerçekten sözgelimi $2 \in \mathbb{Z}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}$ olup $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir cisim olamaz [38].

1.3. Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 1.3.1: R birimli ve değişmeli bir halka olsun, R nin elemanlarının $a_1, a_2, ..., a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n \tag{1.3.1}$$

şeklindeki homojen olmayan lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan diziye homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, ..., c_k \in R$ olacak şekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz [17].

Tanım 1.3.2: $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ şeklindeki k. dereceden polinoma, (1.3.1) denkleminde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli lineer indirgemeli diziler, binary ve ternory lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla tam sayı, rasyonel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

c_k, R nin terslenebilir bir elemanı ise (1.3.1) de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots,$ şeklinde devam eder [17].

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a_n\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir dizinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a_n\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 1.3.3: R değişmeli ve birimli bir halka olsun, R nin elemanlarının $a_1, a_2, \ldots, a_k$ başlangıç elemanlarıyla $n \geq 1$ için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n + c_{k+1}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye, homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n \qquad (1.3.2)$$

şeklindeki $(n+1)$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir.

(1.3.2) bağıntısı için

$$F(x)=\left(x^k-c_1x^{k-1},\ldots,c_{k-1}x-c_k\right)(x-1)$$

şeklindeki karakteristik polinom elde edilir [17].

Tanım 1.3.4: $a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}$ başlangıç değerleri ve $c_0,c_1,\ldots,c_{k-1}$ ler sabitler olmak üzere,

$$a_{n+k}=c_0a_n+c_1a_{n+1}+\cdots+c_{k-1}a_{n+k-1}$$

şeklindeki k-basamak lineer indirgeme bağıntısıyla tanımlanan dizi için, dizinin elemanları;

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem yardımıyla elde edilmiştir [23].

Tanım 1.3.5: Dizi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodik dizi denir. Tekrar eden alt dizideki eleman sayısına ise dizinin periyodu denir.

Tanım 1.3.6: Bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyodlu basit periyodik dizidir.

1.4. Fibonacci Dizisi

Tanım 1.4.1: $\{f_n\}$ Fibonacci dizisi, $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 0$ için

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

şeklinde tanımlanır. Yani Fibonacci dizisi,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$$

şeklindedir.

Fibonacci dizileri

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir matris tarafından üretilebileceği gösterilmiştir [36].

Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretebileceğini gösterilmiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q-matrisi denir [21].

Şimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$

Bu eşitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eşitliğine Binet formülü denir. Bu formül n nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal genişlemesini verir. $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

<u>*Tanım 1.4.2:*</u> $\{f_n^{(k)}\}$ k-basamak Fibonacci dizisi, $f_1 = f_2 = \cdots = f_{k-1} = 0,\ f_k = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $n \geq 1$ için

$$f_{n+k}^{(k)} = f_{n+k-1}^{(k)} + f_{n+k-2}^{(k)} + \cdots + f_n^{(k)} \qquad (1.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

k-basamak Fibonacci dizisi bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1} \qquad (1.4.2)$$

dizisinin özel bir halidir. Böylece Tanım 1.3.4 yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1}^{(k)} \\ f_{n+2}^{(k)} \\ f_{n+3}^{(k)} \\ \vdots \\ f_{n+k-1}^{(k)} \\ f_{n+k}^{(k)} \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir.

1.5. Lehmer Dizisi

<u>*Tanım 1.5.1:*</u> L ve M tam sayıları $LM \neq 0$ ve $K = L - 4M \neq 0$ koşullarını sağlayan tam sayılar olmak üzere $U = U(L, M) = \{U_n\}_0^\infty$ Lehmer dizisi $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ başlangıç değerleriyle

$$U_n = \begin{cases} LU_{n-1} - MU_{n-2}, & n \text{ tek}, \\ U_{n-1} - MU_{n-2}, & n \text{ çift}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [15].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. m Modülüne Göre İndirgemeli Diziler

2.1.1. m Modülüne Göre k -Basamak Fibonacci Dizileri

$\left\{f_n^{(k)}\right\}$ k -basamak Fibonacci dizisi için $f_i^{(k,m)} \equiv f_i^{(k)} \pmod m$ olmak üzere bu dizi m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,n)} \dots \right)$$

dizisi elde edilir.

O zaman $\left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)} \right) \equiv (0,0,\dots,1)$ olup bu dizinin indirgeme bağıntısı ile (1.4.1) de tanımlı dizideki indirgeme bağıntısı aynıdır [30].

Teorem 2.1.1.1: $f(k,m)$ basit periyodik bir dizidir [30].

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid 0 \le a_i \le m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ sonludur, yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \ge 0$ için $v \ge u$ sayısı vardır. Tanımdan

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

elde edilir. Yani,

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

bağıntısına ulaşılır. Buradan kolaylıkla,

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)}) = f_{v-u+2}^{(k,m)} \text{ ve } f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece $f(k,m)$ periyodik dizidir.

$h_k(m)$, $f(k,m)$ nin en küçük periyodunu gösterir. $f(k,m)$ nin periyodu veya m modulüne göre k -basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı olarak adlandırılır [30].

Örnek2.1.1.1: $s(4,3)=(0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\ldots)$ olsun. O zaman $h_4(3)=26$ olur [30].

p_i ler asal sayılar e_i ler pozitif tam sayılar olmak üzere, $m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}\ (t\geq 1)$ ise $h_k(m)$, $h_k\left(p_i^{e_i}\right)$ lerin en küçük ortak katıdır [30].

G aşağıda görüldüğü gibi $k\times k$ tipli kare matris olmak üzere

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

b_{ij} lerin tam sayı olduğu bir $A=(b_{ij})$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi $A\bmod(m)$ ile ifade edilir. Yani $A(\bmod m)=\left(b_{ij}(\bmod m)\right)$ dir. $\langle G\rangle_m=\{G^i(\bmod m)\,|\,i\geq 0\}$ olsun. Açık olarak, T matrisin transpozu olmak üzere,

$$G^i(0,0,...,1)^T(\bmod m)=(f_{i+1}^{k,m},f_{i+2}^{k,m},\ldots,f_{i+k}^{k,m}),$$

dir. O zaman $h_k(m)$ nin en küçük pozitif tam sayısının h olduğu elde edilir, öyle ki,

$$G^h(0,0,...,1)^T(\bmod m)=(0,0,\ldots,1)$$

dir. Şimdi $a_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1k})=(0,1,0,\ldots,0)$ k-boyutlu bir vektör olsun. $a_n=(a_{n1},a_{n2},\ldots,a_{nk})$ vektörü $n>0$ için

$$a_{n1}=a_{(n-1)k} \text{ ve } a_{ni}=a_{(n-1)k}+a_{(n-1)(i-1)}\ (i>1) \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$$G_n'=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nk} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & . & . & . & a_{(n+1)k} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{(n+k-1)1} & a_{(n+k-1)2} & . & . & . & a_{(n+k-1)k} \end{bmatrix}$$

olsun [30]. Buradan aşağıdaki lemma verilir.

Lemma 2.1.1.1 $G_n = G'_n$ dir[30].

$g_k(p^\alpha)$, $\langle G \rangle_{p^\alpha}$ grubunun mertebesini göstersin. Aşağıdaki teorem $h_k(p^\alpha)$ ve $g_k(p^\alpha)$ arasındaki ilişkiyi verir [30].

Teorem 2.1.1.2: $h_k(p^\alpha) = g_k(p^\alpha)$ dir [30].

İspat: $g_k(p^\alpha)$ nin $h_k(p^\alpha)$ ile bölündüğü açıktır. O zaman $h_k(p^\alpha)$ nin $g_k(p^\alpha)$ ile bölünebilir olduğunu kanıtlamamız yeterlidir. $h_k(p^\alpha) = n$ olsun. O zaman n aşağıdaki eşitliği sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır:

$$G^n \left(0,0,\ldots,1\right)^T \left(\bmod p\right) = \left(0,0,\ldots,1\right). \tag{2.1.2}$$

Buradan ve Lemma 2.1.1.1 den, $0 \le j \le k-1$ için

$$a_{(n+j)k} \equiv 0(\bmod p^\alpha)\ ,\ 0 \le j < k-1 \text{ ve } a_{(n+k-1)} \equiv 1(\bmod p^\alpha),$$

olur. Buradan ve (2.1.1) den, tüm $j = 0,1,\ldots,k-1$ için

$$a_{(n+j-1)i} = a_{(n+j)(i+1)} - a_{(n+j-1)k} \equiv a_{(n+j)(i+1)}(\bmod p^\alpha),$$

olur. Böylece

$$a_{n1} \equiv a_{(n+1)2} \equiv \cdots \equiv a_{(n+k-1)} \equiv 1(\bmod p^\alpha)$$

elde edilir. $j+1 < i < k$ olduğunda,

$$a_{(n+j)i} = a_{(n+j+1)(i+1)} \equiv \cdots \equiv a_{(n+k-i+j)k} \equiv 0(\bmod p^\alpha)$$

elde edilir ve $j \ge i$ olduğunda (2.1.1) den dolayı $a_{(n+j-i+1)1} = a_{(n+j-i)k}$ olur. Bundan dolayı,

$$a_{(n+j)i} \equiv a_{(n+j-1)(i-11)} \equiv \cdots \equiv a_{(n+j-i+1)1} \equiv a_{(n+j-i)k} \equiv 0(\bmod p^\alpha)$$

olur. Buradan $G^n \equiv I(\bmod p^\alpha)$ elde edilir ki bu da n nin $g_k(p^\alpha)$ tarafından bölünebileceğini gösterir. Böylelikle $h_k(p^\alpha) = g_k(p^\alpha)$ olduğunu görülür.

Teorem 2.1.1.3: t, $g_k(p) = g_k(p^t)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olsun. O halde her $\alpha \ge t$ için $g_k(p^\alpha) = p^{\alpha-t} g_k(p)$ olur. Özellikle $g_k(p) \ne g_k(p^2)$ ise her $\alpha > 1$ için, $g_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} g_k(p)$ olur [30].

İspat: Tanım gereği her pozitif r tam sayısı için $G^{g_k(p^{r+1})} \equiv I(\bmod p^{r+1})$ dir. Bundan dolayı $G^{g_k(p^{r+1})} \equiv I(\bmod p^{r})$ olur. Bu ise $g_k(p^r)$ nın $g_k(p^{r+1})$ yi böldüğü anlamına gelir. Diğer taraftan $G^{g_k(p^r)} = I + (b_{ij}^{(r)} p^r)$ yazılarak $g_k(p^{r+1})$, $g_k(p^r)$ ile bölünebilirliğini sağlayan:

$$G^{g_k(p^r)p} = (I + (b_{ij}^{(r)} p^r)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (b_{ij}^{(r)} p^r)^i \equiv I(\bmod p^{r+1}) \qquad (2.1.3)$$

denklemi elde edilir. Bundan dolayı $g_k(p^{r+1}) = g_k(p^r)$ veya $g_k(p^{r+1}) = g_k(p^r)p$ olduğunu gösterir ki burada ikinci durum, ancak ve ancak p ye bölünmeyen bir $b_{ij}^{(r)}$ nin varlığı ile mümkündür. $g_k(p^t) \neq g_k(p^{t+1})$ olduğunda p ile bölünmeyen bir $b_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Buradan $g_k(p^{t+1}) \neq g_k(p^{t+2})$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Varsayım 2.1.1.1: $p > k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) \big| \left(p^k - p^i\right)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ aralığında bir i sayısı vardır [30].

2.1.2. α Modülüne Göre Lehmer Dizisi

Bu çalışmada U Lehmer dizisini $\left\{U^{M,L}\right\}$ notasyonu ile ifade edilecektir.

Tanım 2.1.2.1: Lehmer dizisi α modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\} = \left\{U_0^{M,L}(\alpha), U_1^{M,L}(\alpha), U_2^{M,L}(\alpha), \ldots, U_i^{M,L}(\alpha), \ldots\right\}$$

dizisi elde edilir. Burada $U_i^{M,L}(\alpha) = U_i^{M,L}(\bmod \alpha)$ dır [15].

Teorem 2.1.2.1: $M = \pm 1$ için $\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\}$ dizisi basit periyodiktir. M nin diğer durumlarında ise dizi periyodiktir [15].

İspat: Dizide α^2 tane sıralı ikili (çiftli) ortaya çıkacağından ve α^2 sonlu bir sayı olduğundan, bu sıralı ikililerden birisi dizide tekrar ederek karşımıza çıkacaktır. Bu tekrar $\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\}$ dizisinin periyodik olduğunu gösterir. Lehmer dizisinin tanımından

$$MU_{n-2} = \begin{cases} LU_{n-1} - U_n, & n \text{ tek}, \\ U_{n-1} - U_n, & n \text{ çift}, \end{cases}$$

bağıntısını yazarız. Böylece, eğer $U_{i+1}^{M,L}(\alpha) \equiv U_{j+1}^{M,L}(\alpha), U_i^{M,L}(\alpha) \equiv U_j^{M,L}(\alpha)$ ve $M = \pm 1$ ise $U_{i-j+1}^{M,L}(\alpha) \equiv U_1^{M,L}(\alpha)$ ve $U_{i-j}^{M,L}(\alpha) \equiv U_0^{M,L}(\alpha)$ olur. Bu da $\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\}$ dizisinin basit periyodik olmasını göstermektedir.

$\left\{U^{M,L}(\alpha)\right\}$ dizisinin en kısa periyodu $k^{M,L}(\alpha)$ olsun. $k^{M,L}(\alpha)$, α modülüne göre Lehmer dizisinin periyodu olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.2.1: $\left\{U^{1,5}(7)\right\} = \{0,1,1,4,3,4,1,1,0,6,6,3,4,3,6,6,0,1,1,4,\ldots\}$ dizisi için $k^{1,5}(7) = 16$ olur [15].

Teorem 2.1.2.2: p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $(t \geq 1)$ ise $k^{M,L}(m) = okek[k^{M,L}(p_i^{e_i})]$ olur. Burada $k^{M,L}(p_1^{e_1}), k^{M,L}(p_2^{e_2}), \ldots, k^{M,L}(p_i^{e_i})$ nin en küçük ortak katı $okek[k^{M,L}(p_i^{e_i})]$ ile gösterilir [15].

İspat: $\left\{U^{M,L}(p_i^{e_i})\right\}$ dizisinin periyodu $k^{M,L}(p_i^{e_i})$ olduğundan $\left\{U^{M,L}(p_i^{e_i})\right\}$ dizisi yalnızca $u.k^{M,L}(p_i^{e_i})$, $(u \in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Ayrıca $k^{M,L}(m)$, $\left\{U^{M,L}(m)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{U^{M,L}(p_i^{e_i})\right\}$ dizisi $k^{M,L}(m)$ terimde bir tekrar eder. Böylece her i değeri için $k^{M,L}(m)$ periyodu $u.k^{M,L}(p_i^{e_i})$ şeklinde olup bu sayı $\left\{U^{M,L}(m)\right\}$ dizisinin periyodunu vermektedir. Dolayısıyla $k^{M,L}(m) = ekok[k^{M,L}(p_i^{e_i})]$ elde edilmektedir.

Teorem 2.1.2.3: $M = \pm 1$ ve $k^{M,L}(p^2) \neq k^{M,L}(p)$ ise $k^{M,L}(p^2) = p.k^{M,L}(p)$ dir [15].

İspat: $M=\pm 1$ ve $k^{M,L}(p^2)\neq k^{M,L}(p)$ olsun. O halde $\{U^{M,L}\}$ dizisi,

$$U_0^{M,L}=0,\ U_1^{M,L}=1,\dots,$$

$$U_{k^{M,L}(p)}^{M,L}=\lambda_1.p,\ U_{k^{M,L}(p)+1}^{M,L}=\lambda_2.p+1,\dots,$$

$$U_{2k^{M,L}(p)}^{M,L}=\lambda_1.2p,\ U_{2k^{M,L}(p)+1}^{M,L}=\lambda_2.2p+1,\dots,$$

$$U_{pk^{M,L}(p)}^{M,L}=\lambda_1.p^2,\ U_{pk^{M,L}(p)+1}^{M,L}=\lambda_2.p^2+1,\dots,$$

şeklinde olup burada λ_1 ve λ_2 $\beta p \nmid obeb(\lambda_1,\lambda_2)$ olacak şekilde doğal sayılardır. $U_{p.k^{M,L}(p)}^{M,L}\equiv 0$ ve $U_{p.k^{M,L}(p)+1}^{M,L}\equiv 1$ olduğundan bu dizide devir p^2. elemanla başlar. Yani $U_{p.k^{M,L}(p)}^{M,L}\equiv U_0^{M,L}$ ve $U_{p.k^{M,L}(p)+1}^{M,L}\equiv U_1^{M,L}$ dir. Buradan $k^{M,L}(p^{t+1})\neq p.k^{M,L}(p)$ olduğu elde edilir [15].

Varsayım 2.1.2.1:

i) $p\neq 2, k^{M,L}(p^{t+1})\neq k^{M,L}(p^t)(t\geq 1)$ ve $M=\pm 1$ olsun. O halde $k^{M,L}(p^{t+1})=p.k^{M,L}(p^t)$ dir.

ii) $k^{M,L}(2^{t+1})\neq k^{M,L}(2^t)(t\geq 2)$ ve $M=\pm 1$ olsun. O halde $k^{M,L}(2^{t+1})=2.k^{M,L}(2^t)$ dir [15].

2.2. Gruplarda İndirgemeli Diziler

2.2.1. Sonlu Gruplarda Fibonacci Dizileri

Tanım 2.2.1.1: Sonlu gruplarda bir k-nacci dizisi, grubunun $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ elemanlarının dizisidir. Burada dizinin her elemanı, $x_0,\dots,x_{j-1}$ verilen başlangıç elemanları için,

$$x_n=\begin{cases} x_0x_1\dots x_{n-1}, & j\leq n<k, \\ x_{n-k}x_{n-k+1}\dots x_{n-1}, & n\geq k, \end{cases}$$

ile tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0,x_1,x_2,\dots,x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu germesi şarttır. Böylece bu ifade k-nacci dizisini grubun yapısını gösterir. $x_0,x_1,x_2,\dots,x_{j-1}$ ile üretilen sonlu bir G grubunun k-nacci dizisi $F_k(G; x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1})$ ile gösterilir. Buna göre tam sayılardaki $\bmod m$ ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2(Z_m; 0,1)$ şeklinde yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. G grubunun her elemanı dizide görünecek şekilde bir k-nacci dizisi varsa sonlu grup G bir k-nacci dizilenebilirdir [28].

Teorem 2.2.1.1: Sonlu gruplardaki bir k-nacci dizisi basit periyodiktir [28].

İspat: G, n mertebeli bir grup olsun. Bu durumda n^k tane G nin elemanların farklı k-tiplisi var olduğundan bu k-tiplilerin en az bir tanesi G nin bir k-nacci dizisinde iki kez görülür. Bu nedenle k-nacci dizisi periyodiktir. Dizi periyodik olduğundan $i > j$ ve

$$x_{i+1} = x_{j+1}, x_{i+2} = x_{j+2}, x_{i+3} = x_{j+3}, \ldots, x_{i+k} = x_{j+k}$$

olacak şekilde i ve j doğal sayıları mevcuttur. k-nacci dizisinin tanımından

$$x_i = x_{i+k}(x_{i+(k-1)})^{-1}(x_{i+(k-2)})^{-1} \ldots (x_{i+1})^{-1}$$

ve

$$x_i = x_{j+k}(x_{j+(k-1)})^{-1}(x_{j+(k-2)})^{-1} \ldots (x_{j+1})^{-1}$$

olduğu bilinmektedir. Bundan dolayı $x_i = x_j$ olur ve dizi

$$x_{i-1} = x_{j-1},\ x_{i-2} = x_{j-2}, \ldots,\ x_{i-j} = x_{j-j} = x_0$$

şeklinde devam eder. Bu nedenle dizi basit periyodiktir.

Teorem 2.2.1.2: $n \geq 3$ olmak üzere $\langle a, b : a^n = b^2 = e, ba = a^{-1}b \rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubununda, $P_k(D_n; a, b) = P_k(D_n; b, a) = 2k + 2$ dir [28].

İspat: $|a| = n$ ve $|b| = 2$ olsun. $k = 2$ için

$$a, b, ab, a^{-1}, a^2b, ab, a, b \ldots$$

ve

$$b, a, a^{-1}b, b, a^{-1}, ab, b, a \ldots$$

şeklindeki iki dizinin de periyotları 6 dır. $k \geq 3$ için dizinin ilk k tane elemanı

$$x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_2 = ab,\ x_3 = (ab)^2, \ldots,\ x_{k-1} = (ab)^{2^{k-3}}$$

şeklinde olur. Burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \le j \le k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere $a, b, ab, e, e, \ldots, e, e$ yazılır. Böylece

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = abab = e, \qquad x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = bab = a^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = aba^{-1} = a^2 b, \qquad x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = a^{-1}a^2 b = ab,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i+4}^{k+3} x_i = a^{-1}a^2 bab = e.$$

elde edilir. Burada $4 \le j \le k$ için $x_{k+j} = e$ dir. Ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = a^{-1}a^2 bab = e, \qquad x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = a^2 bab = a,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = aba = b, \qquad x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = ab,$$

dir. $x_{2k+2}, x_{2k+3,} x_{2k+4}$ elemanları a, b ve ab nin değerlerine bağlı olduğundan $(2k+2)$. eleman ile başa döner. Yani $x_0 = x_{2k+2}$ olur. Bu nedenle $P_k(D_n; a, b) = 2k+2$ olur.

Eğer $|b| = n$ ve $|a| = 2$ ise

$$b, a, ba, (ba)^2, (ba)^4, (ba)^8, \ldots, (ba)^{2^{k-3}}$$

dizisi elde edilir. Burada gerekli indirgemeler yapılırsa, $3 \le j \le k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere $b, a, ba, e, e, \ldots, e$ dizisine indirgenir ve ispat yukarıdakine benzer şekilde tamamlanır.

<u>*Teorem 2.2.1.3:*</u> G, gerenleri a ve b olan 2-gerenli bir grup ve birim elemanı $F_2(G; a, b)$ veya $F_2(G; b, a)$ Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G abelyan gruptur [28].

<u>*İspat:*</u> Genelliği bozmaksızın $F_2(G; a, b)$ dizisi için varsayalım ki bu Fibonacci dizisinin birim elemanı, e ve $n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)$. elemanı olsun. Bu dizinin n. elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylelikle

$$a, b, \ldots, s, e, \ldots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Yalnız s^{-1}, $(n-1)$. pozisyon için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer şekilde, s^{2} dizinin $(n-2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizisinin $(n-3)$. pozisyonunda olur. Benzer şekilde devam edersek dizi,

$$a,\ b,\ldots,\ s^{-8},\ s^{5},\ s^{-3},\ s^{2},\ s^{-1},\ s^{1},\ e,\ldots$$

şeklinde oluşur. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2}=-u_{i-1}+u_i$ bağıntısı kullanılarak s nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif işaretli tam sayılardan bir Fibonacci dizisi oluşturulur. Bu nedenle grubun Fibonacci dizisi aşağıdaki iki formdan birine sahiptir;

i. n tek ise dizi;

$$s^{u_n},\ s^{-u_{n-1}},\ s^{u_{n-2}},\ldots,\ s^{5},\ s^{-3},\ s^{-1},\ s^{1},\ e$$

şeklindedir. Bu durumda

$$s^{u_n}=a,\ s^{-u_{n-1}}=b\ (s^{u_{n-1}}=b^{-1})$$

ve $s^{u_{n-2}}=ab$ olur.

$$s^{u_{n-1}}s^{u_{n-2}}=s^{u_{n-1}+u_{n-2}}=s^{u_n}$$

olduğundan $b^{-1}ab=a$ veya $ab=ba$ olduğu söylenebilir. O halde bu grup abelyendir.

ii. n çift ise dizi;

$$s^{-u_n},\ s^{u_{n-1}},\ s^{-u_{n-2}},\ldots,\ s^{5},\ s^{-3},\ s^{2},\ s^{-1},\ s^{1},\ e$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$s^{-u_n}=a, s^{u_{n-1}}=b\ (s^{-u_{n-1}}=b^{-1})$$

ve $s^{-u_{n-2}}=ab$ olur.

$$s^{-u_{n-1}}s^{-u_{n-2}}=s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})}=s^{-u_n}$$

olduğundan $b^{-1}ab=a$ veya $ab=ba$ olduğunu söylenebilir. Böylelikle bu grup abelyendir.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Aşağıdaki abelyen grubu düşünelim:

$$A=\left\langle a,b : a^{9}=b^{2}=e \text{ ve } ba=ab\right\rangle$$

Bu grubun Fibonacci dizileri;

$$a,\ b,\ ab,\ a,\ a^{2}b,\ a^{3}b,\ a^{5},\ a^{8}b,\ a^{4}b,\ a^{3},\ a^{7}b,\ ab,\ a^{8},\ b,$$
$$a^{8}b,\ a^{8},\ a^{7}b,\ a^{6}b,\ a^{4},\ ab,\ a^{5}b,\ a^{6},\ a^{2}b,\ a^{8}b,\ a,\ b,\ ab,\ldots,$$

ve

$b,\ a,\ ab,\ a^2b,\ a^3,\ a^5b,\ a^8b,\ a^4,\ a^3b,\ a^7b,\ a,\ a^8b,\ b,\ a^8,$
$a^8b,\ a^{7b},\ a^6,\ a^4b,\ ab,\ a^5,\ a^6b,\ a^2b,\ a^8,\ ab,\ b,\ a,\ ab,\ldots$

şeklindedir. Dikkat edilirse e, a^2, a^7 elemanları her iki dizide de görülmez.

Sonuç 2.2.1.1: 2-nacci dizilenebilir devirli bir gruptur [28].

İspat: G, bir 2-nacci dizilenebilir grup olsun. O zaman G, 1-gerenli ya da 2-gerenli bir gruptur. G eğer 2-gerenliyse e, G nin 2-nacci dizisinde bulunduğundan Teorem 2.2.1.3 in ispatında olduğu gibi, G nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde bulunur. Bundan dolayı, G nin bütün elemanları tek bir s elemanının terimleri ile takdim edilir. Buradan G grubu 1-gerenli ya da devirlidir.

$k \geq 3$ için k-nacci dizilenebilir gruplar abelyen olması gerekmez. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı k-nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 2.2.1.4: G, 2-gerenli bir grup olsun. G nin birim elemanı bu grubun bir Fibonacci dizisinde görülürse, bu takdirde dizinin $x_i = e$ özelliğini sağlayan x_i elemanlarının indislerinin bir koleksiyonu aritmetik bir dizilişe sahip bir dizi bulundurur [28].

İspat: Teorem 2.2.1.3 den dolayı $G = \langle a, b \rangle$ abelyan gruptur. Bundan dolayı dizinin n. terimi $a^{u_{n-1}} b^{u_n}$ biçimindedir. Wall (1960) daki çalışmasıdan $u_n \equiv 0 (\operatorname{mod} m)$ olan terimlerin basit aritmetik dizilişte olan indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece, $a, a, a^2, \ldots, a^{u_n}$ ve $b, b, b^2, b^3, \ldots, b^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikiside indisleri aritmetik dizilişte olan pozisyonda e yi bulundurur. e nin ortaya çıkışının bu periyodu e nin $a, a, a^2, \ldots, a^{u_n}$ ve $b, b, b^2, b^3, \ldots, b^{u_n}$ deki periyodlarının en küçük ortak katı olur. Böylece, e nin $a, b, ab, ab^2, a^2b^3, \ldots$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliş bulunduran alt indisler olacaktır.

k-nacci dizilenebilir bir grubun bir homomorfik görüntüsü de k-nacci dizilenebilirdir. k-nacci dizilenebilir bir grubun, bir k-nacci dizilenebilir grup tarafından genişletilmesinin k-nacci dizilenebilir olması gerekmez. k-nacci dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının k-nacci dizilenebilir olması gerekmez. Bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A=\left\langle a,b : a^9 = b^2 = e \text{ ve } ba = ab \right\rangle$$

abelyen grubunu ele alalım, bu grup $\langle a\rangle$ ve $\langle b\rangle$ devirli gruplarının direkt çarpımıdır. $\langle a\rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2\left(\langle a\rangle ; e,a\right)=e,a,a,a^2,a^3,a^5,a^8,a^4,a^3,a^7,a,a^8,e,a^8,a^8,a^7,a^6,a^2,a^8,a,e,a,a,\ldots$$

ve $\langle b\rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2\left(\langle b\rangle ; e,b\right)=e,b,b,e,\ldots$$

şeklinde olup bu iki grup da 2-nacci dizilenebilir olmasına rağmen bu grupların direkt çarpımı 2-nacci dizilenebilir değildir [28].

2.2.2. Gruplarda Lehmer Dizileri

2.2.2.1. Gruplarda Geren Çiftlerinin Lehmer Uzunlukları ve Esas Lehmer Uzunlukları

G bir grup ve $x,y\in G$ olsun. G nin her elemanı $u_i\in\mathbb{Z},\ 1\le i\le m$ için

$$x^{u_1}y^{u_2}x^{u_3}y^{u_4}\ldots x^{u_{m-1}}y^{u_m} \tag{2.2.2.1}$$

şeklinde yazılabiliyorsa x ve y, G yi gerer denir ve G, 2-gerenli gruptur. (x,y), G nin geren çiftidir [15].

<u>*Tanım 2.2.2.1.1:*</u> $(x,y)\in G$ geren çifti ve $i\ge 1$ için $U_{x,y}^{M,L}(G)=\{x_i\}$ Lehmer orbiti,

$$x_0=x,\quad x_1=y,\quad x_{i+1}=\begin{cases}(x_{i-1})^{-M}(x_i)^L, & i \text{ çift},\\ (x_{i-1})^{-M}(x_i), & i \text{ tek},\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [15].

Teorem 2.2.2.1.1: $M=\pm 1$ için $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbiti basit periyodiktir. M nin diğer durumlarında ise dizi periyodiktir [15].

İspat: n, G nin mertebesi olsun. Bu durumda n^2 tane G nin elemanlarının farklı 2-tiplisi var olduğundan bu 2-tiplilerden en az biri G nin Lehmer orbitinde iki kez görünür. Böylece alt dizi bu 2-tipliyi takip eder. Bu da Lehmer orbitinin periyodik olduğunu gösterir. Lehmer orbiti periyodik olduğundan $u>v$ ve

$$x_{u+1}=x_{v+1}, \qquad x_{u+2}=x_{v+2}$$

olacak şekilde u ve v doğal sayıları vardır. Lehmer orbitinin tanımından;

$$(x_u)^{-M}=\begin{cases}(x_{u+2})(x_{u+1})^{-L}, & u \text{ tek}\\ (x_{u+2})(x_{u+1})^{-1}, & u \text{ çift,}\end{cases}$$

ve

$$(x_v)^{-M}=\begin{cases}(x_{v+2})(x_{v+1})^{-L}, & v \text{ tek,}\\ (x_{u+2})(x_{u+1})^{-1}, & v \text{ çift,}\end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. Böylece $M=\pm 1$ ise $x_u=x_v$ elde edilir ve aşağıdaki şekilde devam ederek

$$x_{u-v}=x_{v-v}=0, \qquad x_{u-v+1}=x_{v-v+1}=x_1$$

olduğu görülmektedir. Böylece $M=\pm 1$ ise $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbiti basit periyodiktir.

$LenU_{x,y}^{M,L}(G)$ notasyonu ile $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbitinin periyodunun uzunluğu gösterilsin.

Lemma 2.2.2.1.1: $M=\pm 1$ ve $(x,y)\in X$ geren çiftinin $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbitinin uzunluğu n_1 ise $0\le i\le n_1-1$ olacak şekilde herhangi bir her i için $(x_i,x_{i+1})\in X$ olur. Ayrıca $U_{x,y}^{M,L}(G)=U_{x_i,y_i}^{M,L}(G)$ dir [15].

İspat: $\left(x_i, x_{i+1}\right) \in X$ olduğunu göstermek için i üzerinden tümevarım yöntemi kullanalım. $i=0$ için doğru olduğu açıktır. $\left(x_k, x_{k+1}\right) \in X$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\left(x_{k+1}, x_{k+2}\right) \in X$ olduğu göstermeliyiz. Buna göre

$$\left(x_k\right)^{-M} = \begin{cases} \left(x_{k+2}\right)\left(x_{k+1}\right)^{-L}, & k \text{ tek}, \\ \left(x_{k+2}\right)\left(x_{k+1}\right)^{-1}, & k \text{ çift}, \end{cases}$$

olup, G nin her elemanı $x_k = x, x_{k+1} = y$ olacak şekilde (2.2.2.1) deki gibi ifade edildiğinden $\left(x_k\right)^{-M}$ ifadesi

$$\begin{cases} \left(x_{k+2}\right)\left(x_{k+1}\right)^{-L}, & k \text{ tek}, \\ \left(x_{k+2}\right)\left(x_{k+1}\right)^{-1}, & k \text{ çift}, \end{cases}$$

şeklinde yeniden yazılabileceğinden G nin her elemanının x_{k+1} ve x_{k+2} tarafından üretildiği görülmektedir.

Sonuç olarak $U_{x,y}^{M,L}(G) = \{x_i\}$ ve $U_{r,s}^{M,L}(G) = \{b_i\}$ olur. Böylece tümevarım yöntemi kullanılarak $x_0 = b_j$, $x_1 = b_{j+1}$ ise $U_{x,y}^{M,L}(G) = U_{r,s}^{M,L}(G)$ olduğu görülür.

Burada $x_1 = b_{1+j}$, $i < t$ olsun. O halde $x_t = \left(x_{t-2}\right)^{-1}\left(x_{t-1}\right)^{2} = \left(b_{t-2+j}\right)^{-1}\left(b_{t-1+j}\right)^{2} = b_{j+t}$ dir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.2.1.2: $M = \pm 1$ ve G sonlu bir grup olmak üzere X, $(x, y) \in X$ için $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbitlerinin tarafından parçalanır [15].

Konsepti daha ayrıntılı ele almak adına G nin $AutG$ otomorfizm grubunun $(x, y) \in X$ ve $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbitinin üzerine etkisini incelemek gerekir. $AutG$, tüm $\theta = G \to G$ izomorfizmlerini içerdiğinden $\theta \in AutG$ ve $(x, y) \in X$ ise $(x\theta, y\theta) \in X$ olduğu açıktır.

$A \subseteq G$ alt kümesi ve $\theta \in AutG$ için A nın θ altındaki görüntüsü

$$A\theta = \{a\theta : a \in A\}$$

şeklindedir.

Lemma 2.2.2.1.2: $(x,y)\in X$ ve $\theta\in AutG$ olsun. Bu durumda $M=\pm1$ ise

$$U_{x,y}^{M,L}(G)\theta=U_{x\theta,y\theta}^{M,L}(G)$$

dir [15].

İspat: $U_{x,y}^{M,L}(G)=\{x_i\}$ olsun. $\{x_i\}\theta=\{x_i\theta\}$ ve

$$\left((x_{i-1})^{-M}(x_i)^L\right)\theta=(x_{i-1})^{-M}\theta(x_i)^L\theta \text{ ve } \left((x_{i-1})^{-M}(x_i)\right)\theta=(x_{i-1})^{-M}\theta(x_i)\theta$$

olduğundan sonuç açık olarak görülmektedir.

Eğer $M=\pm1$ ve $AutG$ nin n elemanı $U_{x,y}^{M,L}(G)$ orbitini kendi üzerine götürüyor ise $\theta\in AutG$ için $|AutG|\,|\,n$ tane farklı $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbiti mevcuttur.

Tanım 2.2.2.1.2: G grubunun elemanı $\{x_i\}$, m nin $\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)$ esas Lehmer orbiti olan $(x,y)\in X$ ikilisidir. Bu durumda $i\geq1$ için

$$x_0=x,\quad x_1=y,\quad x_{i+1}=\begin{cases}(x_{i-1})^{-M}(x_i)^L, & i \text{ çift},\\ (x_{i-1})^{-M}(x_i), & i \text{ tek.}\end{cases}$$

Burada $m\geq1$ en küçük tam sayısı ile

$$x_0=x_m\theta,\quad x_1=x_{m+1}\theta$$

$\theta\in AutG$ için G , x_m,x_{m+1} oluşur ve θ yı tanımlar [15].

$\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)$ esas Lehmer orbitinin periyot uzunluğu $Len\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)$ ile gösterilsin.

Teorem 2.2.2.1.3: G bir sonlu grup ve $(x,y)\in X$ olsun. $M=\pm1$ için $LenU_{x,y}^{M,L}(G)=n_1$ ve $Len\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)=m_1$ ise m_1, n_1 yi böler ve $AutG$ kümesinin, $U_{x,y}^{M,L}(G)$ Lehmer orbitini kendi üzerine götüren $m_1|n_1$ tane elemanı vardır [15].

İspat: $\theta\in AutG$ otomorfizmimin mertebesi λ olsun. Bu durumda,

$$U_{x,y}^{M,L}(G)=\overline{U_{x,y}^{M,L}}(G)\cup\overline{U_{x\theta,y\theta}^{M,L}}(G)\cup\overline{U_{x\theta^2,y\theta^2}^{M,L}}(G)\cup\ldots$$

ve

$$LenU_{x,y}^{M,L}(G) = Len\overline{U_{x\theta,y\theta}^{M,L}}(G)$$

olduğundan $n_1 = \lambda.m_1$ dir. Açıkça $1,\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{\lambda-1}$, $U_{x,y}^{M,L}(G)$ nin kendi içine bir eşlemesidir.

2.2.2.2. Fox Gruplarında Lehmer Uzunlukları ve Esas Lehmer Uzunlukları

<u>*Teorem 2.2.2.2.1:*</u> (i) $t=3$ olduğunda üç durum ortaya çıkar [15]:

(1) $M=1$ ve $L \neq 0$ tam sayıları için;

$$LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,3}) = \begin{cases} 4, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 3, & L \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 8, & L \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 6, & L \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

ve

$$\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,3}) = \begin{cases} 2, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 1, & L \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 2, & L \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 2, & L \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

(2) $M=-1$ ve $L>0$ tam sayıları için

$$LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,3}) = \begin{cases} 8, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 4, & L \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 3, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

ve

$$\overline{LenU_{x,y}^{-1,L}}(G_{1,3}) = \begin{cases} 2, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 2, & L \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 1, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

(3) $M=-1$ ve $L<0$ tam sayıları için

$$LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,3}) = \begin{cases} 8, & L \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 3, & L \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 4, & L \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 6, & L \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

ve

$$\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,3})=\begin{cases}2, & L\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\\ 1, & L\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\\ 2, & L\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),\\ 2, & L\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$$

(ii) Burada aşağıdaki iki durum ortaya çıkar;

(1) $k^{M,L}\left((t-1)^2\right)=k^{M,L}(t-1)$ ise $LenU_{x,y}^{M,L}(G_{1,t})=LenU_{x,y}^{M,L}(G_{1,t})=k^{M,L}(t-1)$ dir.

(2) $k^{M,L}\left((t-1)^2\right)\neq k^{M,L}(t-1)$ ise $LenU_{x,y}^{M,L}(G_{1,t})=k^{M,L}\left((t-1)^2\right)$ ve $LenU_{x,y}^{M,L}(G_{1,t})=k^{M,L}(t-1)$ dir [15].

<u>İspat:</u>

i) $t=3$ olduğunda

(1) $M=1$ ve $L\neq 0$ bir tam sayı olsun.

$L\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, yx, y^{-1}, x, y, \ldots$$

olup, $LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,3})=4$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,3})=2$ dir. Burada $x\theta=yx$ ve $y\theta=y^{-1}$ olduğundan θ , 2. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, yx, x, y, \ldots$$

olup, $LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,3})=3$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,3})=1$ dir. Burada $x\theta=yx$ ve $y\theta=x$ olduğundan, θ, 3. mertebeden dış otomorfizmdir.

$L\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, yx, y, x^{-1}, y, xy, y, x, y, \ldots$$

olup, $LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,3})=8$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,3})=2$ dir. Burada $x\theta=xy$ ve $y\theta=y$ olduğundan θ, 4. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, yx, x^{-1}, y^{-1}, xy, x, y, \ldots$$

olup, $LenU^{1,L}_{x,y}(G_{1,3})=6$ ve $\overline{LenU^{1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=2$ dir. Burada $x\theta=y^{-1}$ ve $y\theta=xy$ olduğundan θ, 3. metreden bir dış otomorfizmdir.

(2) $M=-1$ ve $L>0$ olan tam sayılar olsun.

$L\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, y, x^{-1}, y, yx, y, x, y, \ldots$$

olup, $LenU^{-1,L}_{x,y}(G_{1,3})=8$ ve $\overline{LenU^{-1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=2$ dir. Burada $x\theta=yx$ ve $y\theta=y$ olduğundan θ, 4. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, y^{-1}, x, y, \ldots$$

olup, $LenU^{-1,L}_{x,y}(G_{1,3})=4$ ve $\overline{LenU^{-1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=2$ dir. Burada $x\theta=xy$ ve $y\theta=y^{-1}$ olduğundan θ, 2. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ veya $L\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, x, y, \ldots$$

olup, $LenU^{-1,L}_{x,y}(G_{1,3})=3$ ve $\overline{LenU^{-1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=1$ dir. Burada $x\theta=xy$ ve $y\theta=x$ olduğundan θ, 3. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

(3) $M=-1$ ve $L<0$ olan tam sayılar olsun.

$L\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, y, x^{-1}, y, yx, y, x, y, \ldots$$

olup $x\theta=yx$ ve $y\theta=y$ olduğundan $LenU^{-1,L}_{x,y}(G_{1,3})=8$ ve $\overline{LenU^{-1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=2$ olarak elde edilir. Burada θ, 4. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, x, y, \ldots$$

olup $x\theta=xy$ ve $y\theta=x$ olduğundan $LenU^{-1,L}_{x,y}(G_{1,3})=3$ ve $\overline{LenU^{-1,L}_{x,y}}(G_{1,3})=1$ olarak elde edilir. Burada θ, 3. mertebeden bir dış otomorfizmdir.

$L\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, y^{-1}, x, y, \ldots$$

olup $x\theta = xy$ ve $y\theta = y^{-1}$ olduğundan $LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,3}) = 4$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,3})} = 2$ olarak elde edilir. Burada θ, 2. mertebedenbir dış otomorfizmdir.

$L \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ ise Lehmer orbiti;

$$x, y, xy, x^{-1}, y^{-1}, yx, x, y, \ldots$$

olup $x\theta = y^{-1}$ ve $y\theta = yx$ olduğundan $LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,3}) = 6$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,3})} = 2$ olarak elde edilir. Burada θ, 3. mertebedenbir dış otomorfizmdir.

(ii) (1) İspat, Teorem 2.2.2.2.1 deki [2] in ispatına benzer olduğundan atlanmıştır.

(2) Eğer $k^{M,L}\left((t-1)^2\right) \neq k^{M,L}(t-1)$ ise üç tane durum ortaya çıkar.

Durum 1: Eğer $M = 1$ ve $L > 0$ olan bir tam sayı ve $M = -1$ ve $L < 0$ olan bir tam sayı ise $U_{x,y}^{M,L}(G_{1,t})$ Lehmer orbiti $2 \leq a \leq t-2$ durumunda

$$x_0 = x, \quad x_1 = y, \ldots,$$

$$x_{k^{M,L}(t-1)} = x^{-t^2+3t-1}, \quad x_{k^{M,L}(t-1)+1} = y, \ldots,$$

$$x_{(t-a)k^{M,L}(t-1)} = x^{(-a+1)t+a}, \quad x_{(t-a)k^{M,L}(t-1)+1} = y, \ldots,$$

$$x_{(t-1)^{k^{M,L}}(t-1)} = x_{k^{M,L}\left((t-1)^2\right)} = x, \quad x_{(t-1)k^{M,L}(t-1)+1} = x_{k^{M,L}\left((t-1)^2\right)+1} = y, \ldots$$

şeklinde olup, $x\theta = x^{-t+2}$ ve $y\theta = y$ olduğundan $LenU_{x,y}^{M,L}(G_{1,t}) = k^{M,L}(t-1)$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{M,L}}(G_{1,t}) = k^{M,L}(t-1)$ olarak elde edilir. Burada θ, y^{t-2} ye konjuge (eşlenik) bir iç otomorfizmdir.

Durum 2: $M = 1$ ve $L < 0$ olan tam sayılar olsun. $U_{x,y}^{1,L}(G_{1,t})$ Lehmer orbiti $2 \leq a \leq t-2$ durumunda

$$x_0 = x, \quad x_1 = y, \ldots,$$

$$x_{k^{1,L}(t-1)} = x^{(t)^{t-2}}, \quad x_{k^{1,L}(t-1)+1} = y, \ldots,$$

$$x_{(t-a)^{k^{1,L}}(t-1)} = x^{(t)^{a-1}}, \quad x_{(t-a)k^{1,L}(t-1)+1} = y, \ldots,$$

$$x_{(t-1)^{k^{1,L}}(t-1)} = x_{k^{1,L}\left((t-1)^2\right)} = x, \quad x_{(t-1)k^{1,L}(t-1)+1} = x_{k^{1,L}\left((t-1)^2\right)+1} = y, \ldots$$

şeklinde olup $x\theta = x^t$ ve $y\theta = y$ olduğndan $LenU_{x,y}^{1,L}(G_{1,t}) = k^{1,L}\left((t-1)^2\right)$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{1,L}}(G_{1,t}) = k^{1,L}\left(t-1\right)$ olarak elde edilir. Burada θ, y ye konjuge (eşlenik) bir iç otomorfizmdir.

Durum 3: $M = -1$ ve $L > 0$ olan tam sayılar olsun. $U_{x,y}^{-1,L}(G_{1,t})$ Lehmer orbiti $2 \le a \le t-2$ durumunda

$$x_0 = x, \quad x_1 = y, \ldots,$$

$$x_{k^{-1,L}(t-1)} = x^{(t)^{t-2}}, \quad x_{k^{-1,L}(t-1)+1} = y^{-t^2+3t-1}, \ldots,$$

$$x_{(t-a)^{k^{-1,L}}(t-1)} = x^{(t)^{a-1}}, \quad x_{(t-a)k^{-1,L}(t-1)+1} = y^{(-a+1)t+a}, \ldots,$$

$$x_{(t-1)^{k^{-1,L}}(t-1)} = x_{k^{-1,L}\left((t-1)^2\right)} = x, \quad x_{(t-1)k^{-1,L}(t-1)+1} = x_{k^{-1,L}\left((t-1)^2\right)+1} = y, \ldots$$

şeklinde olup $x\theta = x^t$ ve $y\theta = y^{-t+2}$ olduğundan $LenU_{x,y}^{-1,L}(G_{1,t}) = k^{-1,L}\left((t-1)^2\right)$ ve $\overline{LenU_{x,y}^{-1,L}}(G_{1,t}) = k^{-1,L}\left(t-1\right)$ olarak elde edilir. Burada θ, mertebesi $t-1$ bir dış otomorfizmdir.

3. BULGULAR

3.1. Q_{2^m} Genelleştirilmiş Quaternion Grubunun Lehmer Uzunlukaları

$L>1$ ve $M=\pm 1$ tamsayıları için Q_{2^m} Quaternion grubunun Lehmer uzunlukları aşağıdaki gibidir;

<u>*Teorem 3.1.1:*</u> $U^{1,L}{}_{x,y}(Q_{2^m})$ Lehmer orbitinin periyot uzunluğu aşağıdaki gibidir [16]:

$$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right)=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^m}{L+3}, & \text{eğer } L\equiv 1\left(\bmod 4\right),\\ 3\cdot 2^{m-1}, & \text{eğer } L\equiv 3\left(\bmod 4\right),\\ 8, & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

<u>*İspat:*</u> $L\equiv 1(\bmod 4)$ ise o zaman dizi;

$$x_0=x,\, x_1=y,\, x_2=x^{-1}y,\, x_3=x,\, x_4=yx^{2^{m-2}+2},\, x_5=yx^{2^{m-2}+3},$$
$$x_6=x,\, x_7=yx^{L+3}, x_{6i}=x,\, x_{6i+1}=yx^{i\cdot(L+3)},\ldots.$$

şeklinde olur. O halde $\lambda\in\mathbb{N}$ için $i\cdot\left(L+3\right)=2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğalsayısının belirlenmesi gerekir. Eğer $i=\dfrac{2^{m-1}}{L+3}$ olarak seçilirse $x_{6i}=x$, $x_{6i+1}=y$ elde edelir. Böylece $LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right)=6\cdot\dfrac{2^{m-1}}{L+3}=\dfrac{3\cdot 2^m}{L+3}$ sonucuna varılır.

$L\equiv 3\left(\bmod 4\right)$ ise o zaman dizi ;

$$x_0=x,\, x_1=y,\, x_2=x^{-1}y,\, x_3=x^{2^{m-2}+1},\, x_4=yx^2,\, x_5=yx^3,$$
$$x_6=x,\, x_7=yx^{L+2^{m-2}+3}, x_{6i}=x,\, x_{6i+1}=yx^{2i\cdot\left(2k+2^{m-3}+3\right)},\ldots,$$

$\left(k\in \mathrm{N}\right)$ şeklinde olur. O halde $\lambda\in\mathbb{N}$ için $2i=2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir. Eğer i yi $i=2^{m-2}$ olarak seçilirse, $x_{6i}=x$, $x_{6i+1}=y$ elde edilir. Böylece $L\equiv 3\left(\bmod 4\right)$ için $LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right)=6\cdot 2^{m-2}=3\cdot 2^{m-1}$ olur.

$L \equiv 0 \pmod 4$, olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = x^{-1}y,\ x_3 = y^{-1},\ x_4 = x^{2^{m-2}-1},\ x_5 = yx^{-L},$$
$$x_6 = yx^{-L+2^{m-2}-1},\ x_7 = x^{L+2^{m-2}}y,\ x_8 = x,\ x_9 = y, \dots .$$

şeklinde olup, dizi 8. elemandan sonra tekrar başladığından periyodu 8 olur.

$L \equiv 2 \pmod 4$ olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = x^{-1}y,\ x_3 = y,\ x_4 = x^{-1},\ x_5 = yx^{-L+2^{m-2}},$$
$$x_6 = yx^{-L+2^{m-2}-1},\ x_7 = x^{L-2^{m-2}}y,\ x_8 = x,\ x_9 = y, \dots .$$

şeklinde olup, dizi 8. elemandan sonra tekrar başladığından periyodu 8 olur.

<u>*Teorem 3.1.2:*</u> $U^{-1,L}{}_{x,y}(Q_{2^m})$ Lehmer orbitinin periyot uzunluğuaşağıdaki gibidir [16]:

$$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right) = \begin{cases} \dfrac{2^{m+1}}{L\left(2^{m-3}+1\right)}, & \text{eğer } L \equiv 0 \pmod 4, \\ \dfrac{3\cdot 2^m}{\left(L-1\right)}, & \text{eğer } L \equiv 1 \pmod 4, \\ 2^m, & \text{eğer } L \equiv 2 \pmod 4, \\ 3\cdot 2^{m-1}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

<u>*İspat:*</u> $L \equiv 0 \pmod 4$ olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = xy,\ x_3 = y,\ x_4 = x^{2^{m-2}+1},\ x_5 = yx^{L\left(2^{m-2}+1\right)},$$
$$x_6 = yx^{(L-1)\left(2^{m-2}+1\right)},\ x_7 = yx^{L\left(2^{m-2}+1\right)},\ x_8 = x,\ x_9 = yx^{L\left(2^{m-2}+2\right)}, \dots,$$
$$x_{8i,} = x,\ x_{8i+1} = yx^{i\cdot L\left(2^{m-2}+2\right)}, \dots$$

şeklinde olur. O halde $\lambda \in \mathbb{N}$ için $i \cdot L\left(2^{m-2}+2\right) = 2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir. Eğer $i = \dfrac{2^{m-2}}{L(2^{m-1}+1)}$ olarak seçilirse $x_{8i} = x$, $x_{8i+1} = y$ elde edilir. Böylece $L \equiv 0 \pmod 4$ için

$$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right) = 8\cdot\frac{2^{m-2}}{L(2^{m-3}+1)} = \frac{2^{m+1}}{L(2^{m-3}+1)}$$ olur.

$L \equiv 1 \pmod 4$ olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\, x_1 = y,\, x_2 = xy,\, x_3 = x^{2^{m-2}-1},\, x_4 = yx^{2^{m-2}-2},\, x_5 = xy,$$
$$x_6 = x,\, x_7 = yx^{L-1},\, x_{6i} = x,\, x_{6i+1} = yx^{i\cdot(L-1)},\, \ldots .$$

şeklinde olur. O halde $\lambda \in \mathbb{N}$ için $i\cdot(L-1) = 2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğalsayısının belirlenmesi gerekir. Eğer $i = \dfrac{2^{m-1}}{L-1}$ olarak seçilirse $x_{6i} = x$, $x_{6i+1} = y$ elde edilir. Böylece $LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right) = 6\cdot\dfrac{2^{m-1}}{L-1} = \dfrac{3\cdot 2^m}{L-1}$ sonucuna varılır.

$L \equiv 2 \pmod 4$ olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\, x_1 = y,\, x_2 = xy,\, x_3 = y^{-1},$$
$$x_4 = x,\, x_5 = yx^{L+2^{m-2}},\, x_{4i} = x,\, x_{4i+1} = yx^{2i\cdot\left(2^{m-3}+2k+1\right)},\, \ldots,$$

$k \in \mathbb{N}$ şeklinde olur. O halde $\lambda \in \mathbb{N}$ için $2i = 2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğalsayısının belirlenmesi gerekir. Eğer $i = 2^{m-2}$ olarak seçilirse $x_{6i} = x$, $x_{6i+1} = y$ elde edilir. Böylece $LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right) = 4\cdot 2^{m-2} = 2^m$ olur.

$L \equiv 3 \pmod 4$ olduğunda dizi;

$$x_0 = x,\, x_1 = y,\, x_2 = xy,\, x_3 = x^{-1},\, x_4 = x^2y,\, x_5 = x^{2^{m-2}+1}y,$$
$$x_6 = x,\, x_7 = yx^{L-2^{m-2}-1}, \ldots, x_{6i} = x,\, x_{6i+1} = yx^{2i\cdot\left(2k-2^{m-3}+1\right)}, \ldots,$$

$k \in \mathbb{N}$ şeklinde olur. O halde $\lambda \in \mathbb{N}$ için $2i = 2^{m-1}\cdot\lambda$ olacak şekilde en küçük i doğalsayısının belirlenmesi gerekir. Eğer $i = 2^{m-2}$ olarak seçilirse $x_{6i} = x$ $x_{6i+1} = y$ elde edilir. Böylece $LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(Q_{2^m}\right) = 6\cdot 2^{m-2} = 3.2^{m-1}$ sonucuna varılır.

3.2. D_{2n} Dihedral ve SD_{2^m} Semidihedral Gruplarının Lehmer Uzunlukları

$L > 1$ tamsayısı için D_{2n} Dihedral ve SD_{2^m} Semidihedral gruplarının Lehmer uzunlukları aşağıdaki gibidir;

Sonuç 3.2.1: $3 \le n \le 6$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunluğu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo-3.1: $M = -1$ ve $n = 3$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M = -1$ $n = 3$	$L = 2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 12$
	$L = 3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 18$
	$L = 4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 12$
	$L = 5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 18$
	$L = 6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 4$
	$L = 7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 6$
	$L = 8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 12$
	$L = 9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 18$

Tablo-3.2: $M = -1$ ve $n = 4$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M = -1$ $n = 4$	$L = 2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 8$
	$L = 3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 12$
	$L = 4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 4$
	$L = 5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 6$
	$L = 6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 8$
	$L = 7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 12$
	$L = 8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 4$
	$L = 9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n}) = 6$

Tablo-3.3: $M=-1$ ve $n=5$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=-1$ $n=5$	$L=2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=20$
	$L=3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=30$
	$L=4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=20$
	$L=5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=30$
	$L=6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=20$
	$L=7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=30$
	$L=8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=20$
	$L=9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=30$

Tablo-3.4: $M=-1$ ve $n=6$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=-1$ $n=6$	$L=2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=12$
	$L=3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=18$
	$L=4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=12$
	$L=5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=18$
	$L=6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=4$
	$L=7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=6$
	$L=8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=12$
	$L=9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=18$

Tablo-3.5: $M=1$ ve $n=3$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $n=3$	$L=2$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=6$
	$L=4$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=18$
	$L=6$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=18$
	$L=8$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=6$

Tablo-3.6: $M=1$ ve $n=4$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $n=4$	$L=2$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=12$
	$L=4$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=6$
	$L=6$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=4$
	$L=8$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}(D_{2n})=6$

Tablo-3.7: $M=1$ ve $n=5$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $n=5$	$L=2$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=30$
	$L=4$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=30$
	$L=6$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=6$
	$L=8$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=30$

Tablo-3.8: $M=1$ ve $n=6$ için D_{2n} Dihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $n=6$	$L=2$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=6$
	$L=4$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=18$
	$L=6$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=18$
	$L=8$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}_{x,y}\left(D_{2n}\right)=6$

Sonuç 3.2.2: $4 \leq m \leq 6$ için SD_{2^m} Semidihedral grubunun Lehmer uzunluğu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo-3.9: $M=-1$ ve $m=4$ için SD_{2^m} Semidihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=-1$ $m=4$	$L=2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=16$
	$L=3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=12$
	$L=6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=16$
	$L=7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=4$
	$L=9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=6$

Tablo-3.10: $M=-1$ ve $m=5$ için SD_{2^m} Semidihedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=-1$ $m=5$	$L=2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=32$
	$L=3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$
	$L=4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=16$
	$L=5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=32$
	$L=7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$
	$L=8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=12$

Tablo-3.11: $M=-1$ ve $m=6$ için SD_{2^m} Semidhedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=-1$ $m=6$	$L=2$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=64$
	$L=3$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=96$
	$L=4$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=32$
	$L=5$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$
	$L=6$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=64$
	$L=7$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=96$
	$L=8$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=16$
	$L=9$	$LenU^{-1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$

Tablo-3.12: $M=1$ ve $m=4$ için SD_{2^m} Semidhedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $m=4$	$L=2$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=4$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=6$
	$L=6$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=8$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=12$

Tablo-3.13: $M=1$ ve $m=5$ için SD_{2^m} Semidhedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $m=5$	$L=2$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$
	$L=4$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=12$
	$L=6$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$
	$L=8$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$

Tablo-3.14: $M=1$ ve $m=6$ için SD_{2^m} Semidhedral grubunun Lehmer uzunlukları

$M=1$ $m=6$	$L=2$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=3$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=96$
	$L=4$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=5$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=24$
	$L=6$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=7$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=96$
	$L=8$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=8$
	$L=9$	$LenU^{1,L}{}_{x,y}\left(SD_{2^m}\right)=48$

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, Lehmer dizileri üzerine geniş bir şekilde durulmuştur. $m \geq 3$ için Q_{2^m} genelleştirilmiş Quaterrnion, $n \geq 3$ için D_{2n} Dihedral ve $m \geq 4$ için SD_{2^m} Semidihedral gruplarının Lehmer orbitlerinin periyodlarının uzunlukları hesaplanmıştır.

5. KAYNAKLAR

[1] Adams, W. and Shanks, D. (1982). Strong Primality Tests that are not sufficient. Mathematics of Compt, 36(159), 255-300.

[2] Aydin, H. and Dikici, R. (1998). General Fibonacci sequences in finite groups. Fibonacci Quarterly, 36, 216-221.

[3] Aydin, H., and Smith, G. C. (1994). Finite p-Quotients of Some Cyclically Presented Groups. Journal of the London Mathematical Society, 49(1), 83-92.

[4] Bayraktar, M. (1998). Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. U.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Bursa, ISBN: 975-442-006-8.

[5] Becker, P. G. (1994). k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. J. Number Theory, 49(3), 269-286.

[6] Chang, D. K. (1986). Higher-order Fibonacci sequences modulo m. Fibonacci Quarterly, 24(2), 138-39.

[7] Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F. (2004). Fibonacci lengths for Certain Metacyclic Groups. Algebra Colloq, 11, No. 2, 215–229.

[8] Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F. (1990). Fibonacci Length of Generating Pairs in Groups. In Applications of Fibonacci Numbers (pp. 27-35). Springer, Dordrecht.

[9] Campbell, C. M.,& Campbell, P. P. (2009). The Fibonacci Lengths of Binary Polyhedral Groups and Related Groups. Congressus Numerantium, 194, 95-102.

[10] Cangül, İ. (2001). Soyut Cebir. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti, Bursa.

[11] Çallıalp, F. (2001). Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi, İstanbul.

[12] Deveci, Ö. and Karaduman, E. (2015). The Pell sequences in finite groups. Utilitas Mathematica, 96, 263-276.

[13] Deveci Ö. and Karaduman E. (2012). The generalized order-*k* Lucas sequences in Finite groups. J. Appl. Math., 464580-1-464580-15.

[14] Deveci, O. (2016). The Pell-circulant sequences and their applications. Maejo Internatıonal Journal of Scıence and Technology, 10(3), 284-293.

[15] Deveci, Ö. and Karaduman, E. (2016). Lehmer Sequence In Finite Groups. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 68(02), 175-182.

[16] Deveci, Ö., Kalemci, A. (2017). The Lehmer lengths of the Generalized Quaternion Group Q_{2^m} . In AIP Conference Proceedings 1833(1), 020002.

[17] Everest, G., Poorten, A.V.D., Shparlinski, I., Ward, T. (2003). Recurrence Sequences. American Mathematical Society.

[18] Feinberg, M. (1963). Fibonacci-tribonacci. The Fibonacci Quarterly, 1(1), 71-74.

[19] Fuller, A. T. (1976). The period of pseudo-random numbers generated by Lehmer's congruential method. The Computer Journal, 19(2), 173-177.

[20] Gultekin, I.,& Tasyurdu, Y. (2013). On Period of The Sequence of Fibonacci Polynomials Modulo m. Discrete Dynamics in Nature and Society.

[21] Honsberger, R. (1985). The matrix Q. Mathematical Gems III. Washington DC, Mathematical Association of America, 106-107.

[22] Johnson, D. L. (1990). Presentation of Groups. Cambridge University Press.

[23] Kalman, D. (1982). Generalized Fibonacci numbers by matrix methods. The Fibonacci Quarterly, 20(1), 73–76.

[24] Karaduman, E. (2004). An application of Fibonacci numbers in matrices. Applied Mathematics and Computation, 147(3), 903-908.

[25] Karaduman, E.,& Aydin, H. (2009). k-nacci Sequences in Some Special Groups of Finite Order. Mathematical and Computer Modelling, 50(1-2), 53-58.

[26] Karakaş, H. İ. (2010). Cebir Dersleri. Tüba Yayınları, Ankara.

[27] Kılıç, E. and Stakhov, A. P. (2009). On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices. Chaos, Solitons &Fractals, 40, 2210–2221.

[28] Knox, S.W. (1992). Fibonacci sequences in finite groups. The Fibonacci Quarterly, 30(2), 116-120.

[29] Lehmer, D. H. (1930). An extended theory of Lucas' functions. Annals of Mathematics, 419-448.

[30] Lü, K. and Wang, J. (2007). k-step Fibonacci Sequence Modulo m. Utilitas. Mathematica, 71, 169-178.

[31] Mandelbaum, D. (1972). Synchronization of Codes by means of Kautz's Fibonacci Encoding. IEEE Transactions on Information Theory, 18(2), 281-285.

[32] Özkan, E., Aydın, H., & Dikici, R. (2003). 3-stepFibonacci series modulo m. Applied Mathematics and Computation, 143(1), 165-172.

[33] Phong, B. M. (1991). On generalized Lehmer sequences. Acta Mathematica Hungarica, 57(3-4), 201-211.

[34] Rotkiewicz, A. (1994). On strong Lehmer pseudoprimes in the case of negative discriminant in arithmetic progressions. Acta Arithmetica, 68(2), 145-151.

[35] Shah, A. P. (1968). Fibonacci sequence modulo m. TheFibonacci Quarterly, *6*, 139-141.

[36] Silvester, J. R. (1979). Fibonacci properties by matrix methods. Mathematical Gozette, 63 188-191.

[37] Stein, W. (1993). Modelling The Evolution of Stelar Architecture in Vascular Plants. International Journal of Plant Sciences, 154(2), 229-263.

[38] Taşcı, D. (2010). Soyut Cebir. Alp Yayınevi, Ankara.

[39] Vinson, J. (1986). The Relations of the Period Modulo m to the Rank of Application of m in the Fibonacci Sequence. The Fibonacci Quarterly, 1, 37-45.

[40] Wall, D. D. (1960). Fibonacci series modulo m. The American Mathematical Monthly, 67(6), 525-532.

[41] Wilcox, H. J. (1986). Fibonacci sequences of period n in groups. The Fibonacci Quarterly, 24(4), 356-361.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Abdulkadir KALEMCİ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Trabzon/Of-30/08/1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: kadirkalemcii@gmail.com

EğitimDurumu (KurumveYıl)

Lise	: Araklı Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	: Karadeniz Teknik Üniversitesi/ Eğitim Fakültesi
YüksekLisans	: Kaftas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü

ÇalıştığıKurum/KurumlarveYıl : Kars Sarıkamış Spor lisesi 2014-2017
: Kars Şehit Binbaşı Bedir Karabıyık Anadolu Lisesi 2017-…

Yayınları: Deveci, Ö., Kalemci, A. (2017). The Lehmer lengths of the generalized Quaternion group Q_{2^m}. AIP Conference Proceedings 1833(1), 020002.