T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BESSEL FONKSİYONLARI İÇİN JORDAN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rabia ATIŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BESSEL FONKSİYONLARI İÇİN JORDAN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Rabia ATIŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Rabia ATIŞ' ın Prof. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bessel fonksiyonları için Jordan eşitsizliği" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek ..oy birliği..... ile kabul edilmiştir.

23/08/2019

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan	**:Prof. Dr. İsa YILDIRIM**	....
Üye	**:Prof. Dr. Erhan DENİZ**	....
Üye	**:Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2019 gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

R. atış

Rabia ATIŞ

23.08.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Bessel Fonksiyonları için Jordan tipli Eşitsizlikler

Rabia ATIŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Bunun için öncelikle klasik trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliği tarihi seyir içinde incelendi ve bu bağlamda Jordan eşitsizliğinin iyileştirmeleri ve genelleştirmeleri anlatıldı. Daha sonra birinci çeşit Bessel fonksiyonları ve genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizliklerin iyileştirmeleri ve genelleştirmeleri ile birlikte yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler Bessel fonksiyon, Modifiye Bessel fonksiyon, Küresel Bessel fonksiyon, Modifiye küresel Bessel fonksiyon, Jordan tipli eşitsizlikler

2019, 68 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Jordan type Inequality for Bessel Functions

Rabia ATIŞ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, Jordan-type inequalities for Bessel functions are studied. For this purpose, Jordan inequality for classical trigonometric and hyperbolic functions are examined in historical course, and in this context, improvements and generalizations of Jordan inequality are described. Later, the first kind of Bessel functions and generalized Bessel functions for Jordan-type inequalities with improvements and generalizations are included in the studies.

Key Words: Bessel function, Modified Bessel function, Spherical Bessel function Modified Spherical Bessel function, Jordan type inequality.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmasında Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizlikler ele alınmıştır. Bu bağlamda öncelikle trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliği ile ilgili yapılan çalışmalar tarihi seyir içinde verilmiştir. Daha sonra birinci çeşit Bessel ve genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizlikler ile ilgili yapılan çalışmalar sunulmuştur.

Tez çalışmamda büyük emeği geçen yoğun zamanı içerisinden bana vakit ayırarak derin bilgilerinden istifade etmeme olanak tanıyan danışmanım Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ’e ve çalışma sırasında benden desteğini esirgemeyen abim saydığım Ayhan İNCEKARA’ya en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Rabia ATIŞ

KARS-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$ Reel sayılar

$\mathbb{C}$ Kompleks sayılar

J_p p. mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyon

I_p p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyon

j_p p. mertebeden birinci çeşit Küresel Bessel fonksiyonu

i_p p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Küresel Bessel Fonksiyonu

w_p p. mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyon

u_p p. mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyon

$\mathcal{J}_p$ p. mertebeden normalize edilmiş Bessel fonksiyon

$\mathcal{I}_p$ p. mertebeden normalize edilmiş Modifiye Bessel fonksiyon

$\Gamma(z)$ Euler gama fonksiyonu

$j_{p,n}$ Bessel fonksiyonunun (J_p) n. inci pozitif sıfırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bessel fonksiyonları kavramı 1732 yılında D. Bernoulli tarafından ilk kez çalışılmış olmasına rağmen, Bessel fonksiyonu adını uzay bilimci olan F. W. Bessel'den (1784-1846) alır.

Bernoulli fiziksel bir problem olan sarkaç probleminin bir çözümü olarak sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonunu, 1764 yılında Euler bir mebranın titreşim analizinde tamsayı mertebeli Bessel fonksiyonunu kullanmıştır.

Bessel, 1817 yılına kadar genellikle Bessel fonksiyonlarını uzay bilimleri üzerinde çalışmış, öyle ki Bessel yerçekimi altında üç tip hareketlinin davranışını inceleyen çalışmasına Bessel fonksiyonunu dâhil etmiştir. 1824 yılında bir gezegenin hareketini Bessel fonksiyonunun belirttiği serinin katsayıları ile ilişkisini vermiş ve güneşin hareketini ayrıca bu katsayılar yardımıyla belirlemiştir.

Rayleigh, 1878 yılında Bessel fonksiyonlarının Laplace'in özel bir durumu olduğunu ispatlamasıyla bu konu daha da genişlemiştir.

Bessel ve hipergeometrik fonksiyonlar olasılık, istatistik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde çok sık kullanılmaktadır. Ayrıca diğer uygulama alanları olarak Bessel fonksiyon teorisi son zamanlarda daha çok elektrik, hidrodinamik, radyo fiziği, haberleşme teorisi, atom ve nükleer fizik gibi birçok problemin çözümünde yer almaktadır.

Klasik anlamda Bessel ve Modifiye Bessel fonksiyonları sinüs, kosinüs, hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonlarının genelleştirilmiş hali olarak gösterilebilir. Grafikleri de kabaca sinüs ve cosiniüs grafiklerine benzer fakat genel olarak periyodik değildir. Trigonometrik fonksiyonları içeren birçok eşitsizlik ve özdeşlik, Bessel fonksiyonlarına genişletilebilmektedir. Bu tarz eşitsizlikler son zamanlarda mühendislik biliminde, bilişim ve iletişim teorilerinde çok sık kullanılmaktadır.

Analizin önemli kullanımlarından biri olan eşitsizlikler oldukça fazla kullanım alanına sahiptir. Bu eşitsizliklerden birisi de Jordan eşitsizliğidir.

Literatürlerde bilinen Jordan eşitsizliği

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

şeklindedir. Jordan eşitsizliği gibi klasik eşitsizliklerin incelenmesi sayısız matematikçinin dikkatini çekmiştir. Matematikçiler Jordan eşitsizliği için iyileştirme yaparken $\sup\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ve $\inf\left(\frac{\sin x}{x}\right)$'i bulmaya veya eşitsizliğin geçerli olduğu x lerin aralığını genişleterek iyileştirme yapmıştır. Jordan eşitsizliğinin ve geliştirilmiş hallerinin trigonometri ve analitik hesaplamalar gibi birçok matematiksel alanda uygulamaları vardır.

Jordan tipli eşitsizlikler Bessel fonksiyonları için alt ve üst sınır bulma problemleri için önemli yere sahiptir.

Jordan eşitsizliği ile ilgili çalışmaları kronolojik olarak sıralarsak; 1986 yılında Abel ve Caccia, 1993 yılında Qi ve Guo, 1995 yılında Deng bu konudaki ilk çalışmaları yapmışlardır. Qi ve Hao'nun 1998 yılında yaptığı çalışmada verilen eşitsizlik ise bu bağlamda elde edilen en önemli eşitsizliklerden biridir. Bu eşitsizliğin sağ tarafını Debnath ve Hao 2003 yılında tamamen farklı bir metod kullanarak kanıtladı. Yine 2005 yılında Sandor'un çalışması mevcuttur.

2006 yılında Zhang tarafından L'Hospital'ın monotonluk formu kullanılarak Jordan eşitsizliğinin sınırları iyileştirilmiştir. Aynı yıl Zhu yine L-Hospital'ın monotonluk formunu kullanarak Qi ve Hao tarafından iyileştirilen eşitsizliği $-\pi/2 \leq x \leq r \leq \pi/2$ için genelleştirmiştir. Özban 2006 yılında, Debnath ve Hao'nun alt sınırını iyileştirmiştir.

Bunlar gibi Jordan eşitsizliğinin iyileştirmeleri ve genelleştirmeleri ile ilgili 2006 yılında Jiang ve Yun'un, 2007 yılında Qi ve arkadaşlarının, 2008 yılında Niu ve arkadaşlarının yaptığı ve yine 2008 yılında; Wu'nun tek başına yaptığı, Srivastava ile yaptığı ve bunlardan bağımsız Debnath ile yaptığı, 2009 yılında Agarwal ve arkadaşlarının, 2010 yılında Klen'in, 2011 yılında Zhu'nun, 2012 yılında Lv ve arkadaşlarının, 2014 yılında Zhen ve Yang'ın, 2015 yılında Debnath ve arkadaşlarının ve yine 2015 yılında Nishizawa'nın 2016 yılında Bhayo ve Sandor'un , 2017 yılında Bercu'nun ve 2018 yılında Nenezic ve Zhu'nun yaptığı çalışmalar mevcuttur.

Ayrıca son yıllarda Hiperbolik fonksiyonlar için de Jordan eşitsizliği ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar 2009 yılında Zhu'nun, 2010 yılında Neuman ve Sandor'un ve bu çalışmadan bağımsız yine 2010 yılında Klen ve arkadaşlarının, 2012 yılında Lv ve arkadaşlarının, 2013 yılında Yang'ın ve son olarak 2015 yılında Yang ve Chu'nun yaptıkları çalışmalardır.

Yukarıda verilen çalışmalar Jordan eşitsizliği üzerinde önceden yapılan iyileştirmeler ve genelleştirmelerdir.

Daha önceden belirtildiği gibi Bessel fonksiyonları klasik trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların genelleştirmesi olduğundan Jordan eşitsizliğini Bessel fonksiyonları için vermek birçok problemi beraberinde çözecektir. J_p fonksiyonu p. mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu, I_p fonksiyonu da p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu olmak üzere özel olarak $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\frac{\sin x}{x}$ ve $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\frac{\sinh x}{x}$ dır. Böylece Jordan eşitsizliğini Bessel fonksiyonları için vererek özel hallerinde birçok farklı trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilir.

Bu tez çalışmasında Jordan eşitsizliğinin iyileştirmelerini ve genelleştirmelerini yıllara göre incelendi, daha sonra Bessel fonksiyonları için Jordan eşitsizliği üzerinden çalışmalar verildi.

1.2 Kuramsal Temeller

1.2.1 Gama ve Beta Fonksiyonu

Tanım 1.2.1.1 (Gama Fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.2.1.1}$$

fonksiyonuna Euler gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinmektedir (Şahin, 2011).

$\mathrm{Re}\, z > 0$ için (1.2.1.1) fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.2.1.2}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı $P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ ve $Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa $P(z)$ fonksiyonu $\mathrm{Re}(z) > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$ fonksiyonu $\mathrm{Re}(z) > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesinin kuvvet serisi

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^k \tag{1.2.1.3}$$

elde edilir.

Burada

$$\int_0^1 \left|t^{z-1}\right| dt \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k!} t^k\right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^t t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da (1.2.1.3) integralinin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (1.2.1.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$\begin{aligned} P(z) = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \end{aligned} \tag{1.2.1.4}$$

bulunur. Bu durumda (1.2.1.4) serisinin $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktasında basit kutba sahip ve $\operatorname{Re} z > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (1.2.1.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktalarında basit kutba sahip olan meromorf bir fonksiyon olur.

Ayrıca $\Gamma(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemdeki tanımları değişik versiyonlarla ifade edilebilir. Bunlar,

- $$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, \text{-}1, \text{-}2, \ldots$$

- $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad \gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ - } In\ n \right)$$

- $$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \left[\lim_{n\to\infty} z e^{[1+(1/2)+(1/3)+\ldots+(1/n)]z - zIn\ \mathrm{n}} \right] \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z+k}{k} \right) e^{-z/k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[z e^{-zIn\ \mathrm{n}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n^z n!} \end{aligned}$$

- $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \quad z \neq 0, \text{-}1, \text{-}2, \ldots$$

şeklindedir. Ayrıca bu son eşitlik Gauss formülü olarak anılır. $z \neq 0,-1,-2,...,$ değerleri için Gauss formülünden

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1}\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}\right) = z\Gamma(z)$$

elde edilir.

Gama fonksiyonu ile ilgili

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0,1,2,...$
- $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

özellikler yazılabilir. Özel olarak

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

dir (Şahin, 2011).

Tanım 1.2.1.2 (Beta Fonksiyonu) **:** z ve w kompleks değişkenler olmak üzere

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \;\; \mathrm{Re}(z) > 0, \;\; \mathrm{Re}(w) > 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasında

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

bağıntısı vardır (Şahin, 2011).

Tanım 1.2.1.3. (Pochammer sembolü): Γ gama fonksiyonunu göstermek üzere $n\in\mathbb{N}_0$, $a\in\mathbb{C}$ ve $a\neq 0,-1,-2,...$ olması durumunda

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\begin{cases}1, & n=0;\ a\in\mathbb{C}-\{0\}\\ a(a+1)...(a+n-1), & n\in\mathbb{N};\ a\in\mathbb{C}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise $(a)_n=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$ formülü geçerlidir (Şahin, 2011).

Pochammer sembolü için $(a)_{n+1}=(a+n)(a)_n$ eşitsizliği her zaman sağlanır.

Özel olarak $n=0$ alınırsa $(a)_0=1$ şeklinde tanımlanır.

1.2.2 Bessel Fonksiyonları

Tanım 1.2.2.1 (Bessel Diferansiyel Denklemi): $p\in\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere;

$$z^2w''(z)+zw'(z)+\left(z^2-p^2\right)w(z)=0 \tag{1.2.2.1}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemine Bessel diferansiyel denklemi denir.

(1.2.2.1) diferansiyel denkleminin bir özel çözümü Frobenüs metodu kullanılarak

$$J_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \qquad (z\in\mathbb{C}) \qquad (1.2.2.2)$$

şeklinde olur. Burada J_p fonksiyonuna $p.$ mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu adı verilir (Watson, 1944).

Her $z\in\mathbb{C}$ için $p.$ mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonunun integral gösterimi de,

$$J_p(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t-pt)\,dt-\frac{\sin(\pi p)}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-x\sinh(t)-\nu t}dt \qquad (1.2.2.3)$$

veya

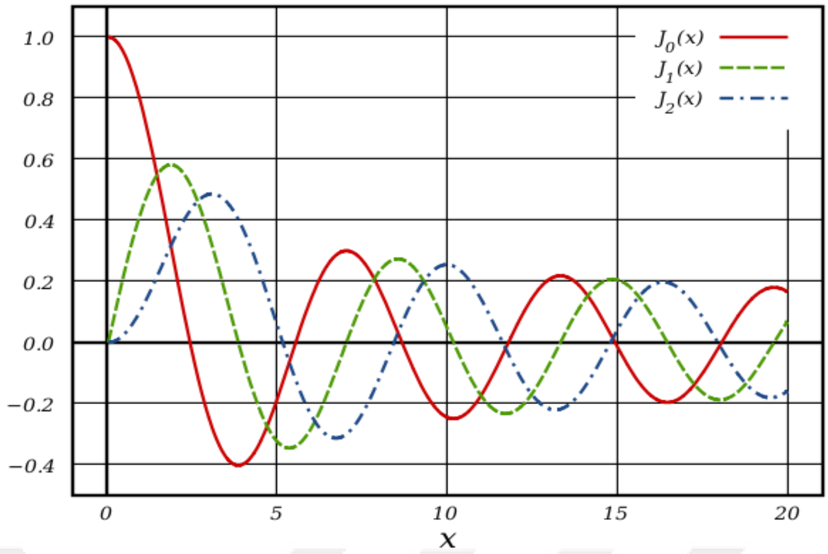
$$J_p(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(xt)dt$$

şeklindedir (Watson, 1944).

Her $z\in\mathbb{C}$ için $p.$ mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonunu temsil etmenin bir yolu da onu sonsuz çarpım biçiminde yazmaktır. Dolayısıyla birinci çeşit Bessel fonksiyonunu sonsuz çarpım gösterimi $j_{\nu,n}$, $J_p(x)$ fonksiyonunun $n.$ pozitif sıfırını göstermek üzere

$$J_p(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\prod_{n\geq1}\left(1-\frac{x^2}{j_{\nu,n}^2}\right)$$

şeklindedir.



Şekil 1.2.2.1: Bessel Fonksiyonunun ($p = 0,1,2$ için) Grafiği

Tanım 1.2.2.2 (Modifiye Bessel Diferansiyel Denklemi): $p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere;

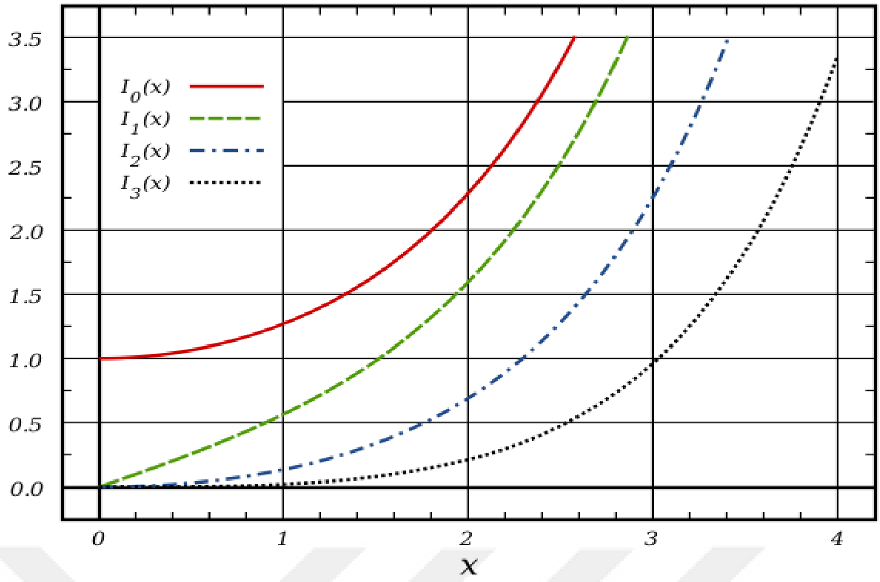
$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + p^2)w(z) = 0 \qquad (z \in \mathbb{C}) \qquad (1.2.2.4)$$

denklemine Modifiye Bessel diferansiyel denklemi denir.

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$I_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$$

biçiminde olup $I_p(z)$ fonksiyonuna p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu denir (Watson, 1944).



Şekil 1.2.2.2: Modifiye Bessel Fonksiyonunun ($p = 0,1,2,3$ için) Grafiği

Tanım 1.2.2.3 (Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi): $p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

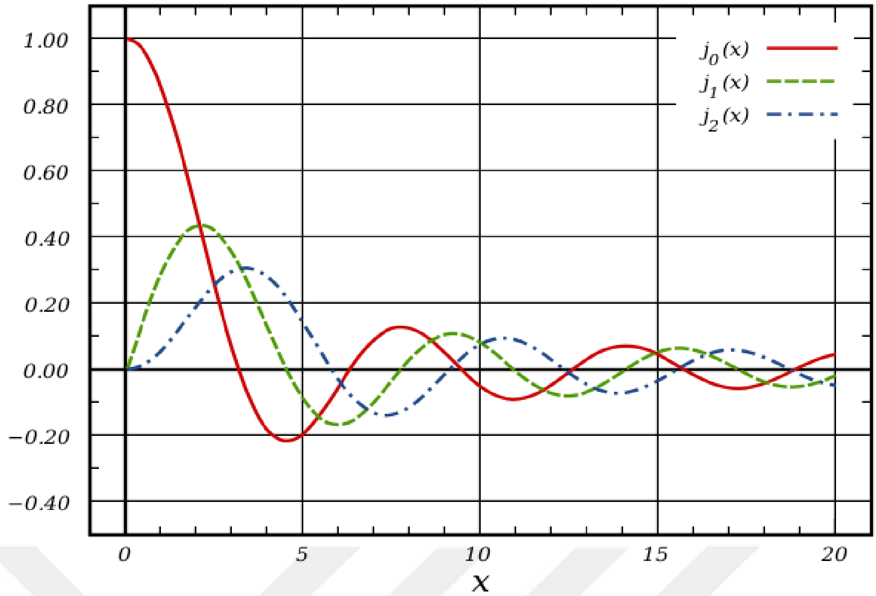
$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + \left[z^2 - p(p+1) \right] w(z) = 0 \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.2.5}$$

denklemine Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$j_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+p}$$

biçiminde olup $j_p(z)$ fonksiyonuna p. mertebeden birinci çeşit Küresel Bessel fonksiyonu adı verilir (Abramowitz ve Stegun, 1965).



Şekil 1.2.2.3: Küresel Bessel Fonksiyonunun ($p = 0,1,2$ için) Grafiği

Tanım 1.2.2.4 (Modifiye Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi): $p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - \left[z^2 + p(p+1)\right] w(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.2.6}$$

denklemine Modifiye Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$i_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$$

biçimindedir. Burada $i_p(z)$ fonksiyonuna p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu adı verilir (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Tanım 1.2.2.5 (Genelleştirilmiş Bessel Diferansiyel Denklemi): $b,c,p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere;

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left[cz^2 - p^2 + (1-b)\,p\right] w(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.2.7}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemine, genelleştirilmiş Bessel diferansiyel denklemi denir.

Bu denklemin özel çözümü

$$w_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(p+n+\frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{1.2.2.8}$$

şeklindedir. Burada $w_p(z)$ fonksiyonuna p. mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu adı verilir (Watson, 1944).

Burada b ve c ye çeşitli değerler vererek p. mertebeden birinci çeşit tüm Bessel fonksiyonlarını elde edebiliriz.

w_p serisinde, $b=1$ ve $c=1$ yerine yazılırsa w_p, p. mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu olan J_p fonksiyonuna dönüşür.

w_p serisinde $b=1$ ve $c=-1$ yerine yazılırsa w_p, p. mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu olan I_p fonksiyonuna dönüşür.

Benzer olarak w_p serisinde $b=2$ ve $c=1$ yerine yazılırsa w_p, $\frac{2j_p}{\sqrt{\pi}}$ ye dönüşür.

Son olarak w_p serisinde $b=2$ ve $c=-1$ yerine yazılırsa w_p, $\frac{2i_p}{\sqrt{\pi}}$ ye dönüşür.

$p.$ mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu,

$$w_p(z)=\left[2^p\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1} z^p \sum_{n\geq 0}\frac{(-c/4)^n\,\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(n+p+\frac{b+1}{2}\right)} z^{2n}$$

şeklinde yazılacak olursa, $n\geq 0$ için,

$$b_n=\frac{(-c/4)^n\,\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(n+p+\frac{b+1}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$u_p(z)=\sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

fonksiyonu ele alınırsa $\forall z\in\mathbb{C}$ için

$$w_p(z)=\left[2^p\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1} z^p u_p\left(z^2\right)$$

elde edilir. $a\neq 0,-1,-2...$ ve $(a_n)=\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ Euler Gamma cinsinden Pochhammer (Appell) ifadesi kullanılırsa,

$$u_p(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{1.2.2.9}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $b,\ p,\ c$ birer kompleks sayı olup $\kappa\neq 0,-1,-2...$ için $\kappa=p+\dfrac{(b+1)}{2}$ şeklindedir. Elde edilen $u_p(z)$ serisine genelleştirilmiş ve normalize edilmiş $p.$ mertebeden Bessel fonksiyonu adı verilir (Baricz, 2008c).

Ayrıca $u_p(z)$ fonksiyonu

$$4z^2u''(z)+4\kappa zu'(z)+czu(z)=0 \qquad (z\in\mathbb{C})$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Ayrıca $\lambda_p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ve $\lambda_p(z)=u_p(z^2)$ olarak tanımlanan λ_p fonksiyonunda; $b=1$, $c=1$ ve $b=1$, $c=-1$ alınırsa sırasıyla aşağıdaki $\mathcal{J}_p$ ve $\mathcal{I}_p$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_p(z)&=2^p\Gamma(p+1)z^{-p}J_p(z)\\ \mathcal{I}_p(z)&=2^p\Gamma(p+1)z^{-p}I_p(z)\end{aligned} \tag{1.2.2.10}$$

elde edilir.

Bessel fonksiyonlarında parametrelerin bazı özel değerleri için

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \qquad \mathcal{J}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{1/2}(z)=\frac{\sin z}{z}$$

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \qquad \mathcal{J}_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{-1/2}(z)=\cos z$$

$$I_{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh z \qquad \mathcal{I}_{-1/2}=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}I_{-1/2}(z)=\cosh z$$

$$I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh z \qquad \mathcal{I}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}I_{1/2}(z)=\frac{\sinh z}{z}$$

fonksiyonları yazılır.

Diğer taraftan $\kappa\neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere $b,\ p,\ c\in\mathbb{C}$ ve $z\in\mathbb{C}$ için p. mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için

1. $zw_{p-1}(z)+czw_{p+1}(z)=(2p+b-1)w_p(z)$
2. $zw'_p(z)+(p+b-1)w_p(z)=zw_{p-1}(z)$

3. $zw'_p(z) + czw_{p+1}(z) = pw_p(z)$

4. $\left[z^{-p}w_p(z)\right]' = -cz^{-p}w_{p+1}(z)$ olup ayrıca $z=0$ iken yandaki bağıntının her iki tarafı limit değerleriyle yer değiştirir

rekürans bağıntıları doğrudur (Baricz, 2008a)

NOT: Yukarıdaki rekürans bağıntılarında $b=c=1$ alınırsa klasik p. mertebeden Bessel fonksiyonlar için rekürans bağıntıları elde edilir.

1.2.3 Bernoulli Sayıları

Tanım 1.2.3.1(Bernoulli Sayıları): Herhangi bir m doğal sayısı için,

$$T_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \text{ dır.}$$

Eşitlikte geçen B_k sayılarına Bernoulli sayıları denir. $|x| < 2\pi$ için $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$ eşitliğinden değerleri hesaplanabilir (Gradshteyn ve Ryzhik, 2000).

Birkaç örnek vermek gerekirse:

k	0	1	2	3	4	5	6
B_k	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Klasik Jordan Eşitsizliği

Temel analitik Jordan eşitsizliğini netleştirmek için birçok matematikçi çalışmalar yapmıştır. Bu eşitsizlik Trigonometrik fonksiyonların sınırlarını bulmada önemli yere sahiptir. Bu eşitsizliğinin sınırlarını iyileştirmede en çok L'Hospital'ın monotonluk formu kullanılmıştır.

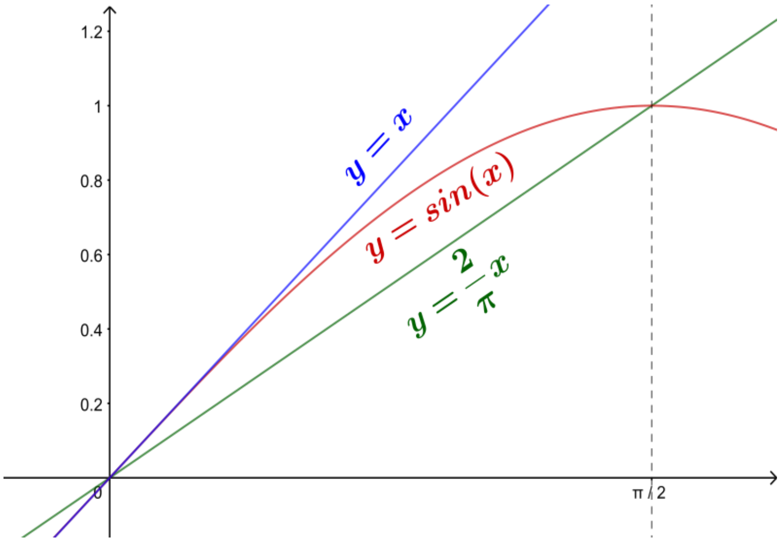
Adını Fransız matematikçi Camille Jordan'dan (1838-1922) alan Jordan eşitsizliği literatürde,

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \tag{2.1.1}$$

olarak belirtilir. $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sec^2 \theta \ge 1$ eşitsizliğinin, 0 'dan θ 'ya integrali alınıp,

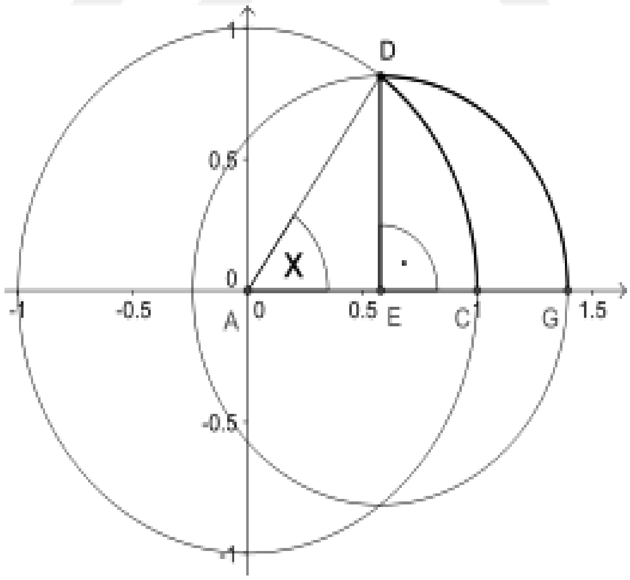
$$\frac{\sin\theta}{\theta} \ge \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

sonucu kullanılmış, ayrıca $\theta > 0$ için $\sin\theta \le \theta$ olduğu gerçeği göz önüne alınarak Jordan eşitsizliği elde edilmiştir (Mitrinovic, 1970).



Şekil 2.1.1: Jordan Eşitsizliğinin Grafiği $\left(\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Şekil 1'de, klasik Jordan eşitsizliğinin her tarafı x ile çarpılıp, grafik üzerinde Jordan eşitsizliği için sınırlar gösterilmiştir.



Şekil 2.1.2: Jordan Eşitsizliğinin Geometrik Yorumu

Şekil 2.1.2'den de görüldüğü üzere, Jordan eşitsizliği iç içe geçmiş iki çember üzerinden uzunluklar arasındaki bağıntılardan faydalanılarak da gösterilebilir. Öyle ki, Şekil 2.1.2'den $DE = AD \times \sin x,\quad DC = AD \times x$ ve $DG = \dfrac{2\pi \times DE}{4} = \dfrac{\pi \times AD \times \sin x}{2}$ eşitlikleri $DE \le DC \le DG$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa $\sin x \le x \le \dfrac{\pi}{2}\sin x \Rightarrow \dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ elde edilir.

2.2 Trigonometrik Fonksiyonlar İçin Jordan Eşitsizliği

Klasik Jordan eşitsizliğinin gerek genelleştirmeleri gerekse iyileştirmeleri yarım yüzyılı aşkın bir zamandır birçok matematikçinin ilgi odağı olmuş ve bu problemler üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır.

1986 yılında Abel ve Caccia $\forall x \in [0, \pi/2]$ için

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) \tag{2.2.1}$$

eşitsizliğini elde etmiştir (Abel ve Caccia, 1986).

Görüldüğü gibi alt sınırların karşılaştırıldığı zaman yapılan bu ilk çalışma klasik Jordan eşitsizliğinin iyileştirilmişidir.

1993 yılında Qi ve Guo'nun çalışmasında $[0, \pi/2]$ aralığındaki

$$\sin x - \frac{2}{\pi}x - \alpha x\left(\pi^2 - 4x^2\right)$$
$$\sin x - \frac{2}{\pi}x - \beta x^2\left(\pi - 2x\right)$$
$$\sin x - \frac{2}{\pi}x - \theta x\left(\pi - 2x\right)$$

yardımcı fonksiyonları göz önüne alınarak

$$\frac{\sin x}{x} \le \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^3} x\left(\pi - 2x\right)$$
$$\frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^2}\left(\pi - 2x\right) \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}\left(\pi - 2x\right)$$

eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Burada $\left(\pi - 2\right)/\pi^3$, $4/\pi^3$, $\left(\pi - 2\right)/\pi^2$ ve $2/\pi^2$ alınabilecek en iyi sabitlerdir (Qi ve Guo, 1993).

1995'te Deng, (Qi ve Guo, 1993) ve (Qi ve Guo, 1994) referanslı çalışmalardaki metodu kullanarak $\forall x \in \left[0, \pi/2\right]$ için

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^4} x\left(\pi^2 - 4x^2\right)$$
$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^4} x^2\left(\pi - 2x\right)$$
$$\frac{2}{3\pi^4}\left(\pi^3 - 8x^3\right) \le \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} \le \frac{\pi - 2}{\pi^4}\left(\pi^3 - 8x^3\right)$$

eşitsizliklerini elde etmiştir (Deng, 1995).

(2.2.1) ve (2.2.2) eşitsizlikleri birleştirilip

$$\frac{3}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} x^2 \le \frac{\sin x}{x} \le 1 - \frac{4\left(\pi - 2\right)}{\pi^3} x^2 \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği elde edilebilir.

Qi 1996 yılında (2.2.3) eşitsizliğinin integralini alarak

$$\frac{4}{3} < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi + 1}{3} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliğini elde etmiştir (Qi, 1996).

Yine Qi 1998 yılında $\sin x$ fonksiyonunun periyodik ve simetrik fonksiyon olmasından faydalanarak ayrıca (2.2.3) eşitsizliğini kullanarak $[\pi/2, \pi]$ aralığı için

$$\frac{4}{\pi^3}x^2 - \frac{12}{\pi^2}x + \frac{9}{\pi} - \frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{4(\pi-2)}{\pi^3}x^2 - \frac{12(\pi-2)}{\pi^2}x + \frac{11\pi-24}{\pi} + \frac{8-3\pi}{x}$$

ve

$$\frac{7}{6} - \ln 2 < \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{13\pi-32}{6} + (8-3\pi)\ln 2 \tag{2.2.5}$$

eşitsizliklerini elde etmiştir.

1999 yılında Qi, Cui ve Xu'nun yaptıkları çalışmada ünlü Tchebysheff integral eşitsizliğini (Mitrinovic, 1970) kullanarak $\sin x/x$ ile ilgili (2.2.4) ve (2.2.5) eşitsizliklerine benzer eşitsizlikler ve integraller elde edilmiştir. Örnek olarak

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{\sin t}{t}\right) \ge 4\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) + \cos t \quad \left(t \in [0, \pi]\right)$$
$$\int_0^t \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx < 2\tan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{2}{3}\tan^3\left(\frac{t}{2}\right) \quad \left(t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

eşitsizlikleri verilebilir.

2008 yılında Cheng ve Deng (Qi ve Guo, 1993), (Qi, 1996) ve (Yu, Qi ve Guo, 1995) referanslarındaki metodu kullanarak

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi}\cos x \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$
$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{4-\pi}{\left(\sqrt{2}-1\right)\pi} + \frac{4\left(\pi-2\sqrt{2}\right)}{\pi\left(2-2\sqrt{2}\right)}\cos x \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$$

tek taraflı eşitsizliklerini elde etmiştir (Cheng ve Deng, 2008).

Aşağıdaki lemmalar Jordan eşitsizliği ile ilgili teoremlerin ispatında kullanılmıştır.

<u>Lemma 2.2.1:</u> $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ ve $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli (α, β) aralığında türevlenebilir olsun. $\forall x \in (\alpha, \beta)$ için $g'(x) \neq 0$ olmak üzere eğer $f'(x)/g'(x)$ fonksiyonu (α, β) açık aralığında artan (veya azalan) ise, bu durumda (α, β) aralığında

$$F(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}$$

ve

$$G(x) = \frac{f(x) - f(\beta)}{g(x) - g(\beta)}$$

fonksiyonları da artan (veya azalan) dır (Anderson, Vamanamurthy ve Vuorinen, 1993).

<u>Lemma 2.2.2:</u> $x > 0$, $\upsilon_0(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ve $\upsilon_k(x) = \dfrac{\upsilon'_{k-1}(x)}{x^r}$ $k \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ koşulları altında

$$a_i^k = \begin{cases} a_i^{k-1} + \left[i + (k-1)(t-1)\right] a_{t-1}^{k-1}, & 0 < i \leq k \\ 1, & i = 0 \\ 0, & i > k \end{cases}$$

olmak üzere

$$\upsilon_k(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_{i-1}^k \sin\left(x + (i+k-1)\pi/2\right)}{x^{kr+i}}$$

şeklinde yazılır (Qi, Niu ve Cao, 2007).

Lemma 2.2.3: $x>0$ ve $k\in\mathbb{N}$ için

$$\nu_1(x)=\sum_{i=1}^{k+1} a_{i-1}^k x^{k-i+1}\sin\left(x+\frac{k+i-1}{2}\pi\right) \text{ ve } \nu_{j+1}(x)=\frac{1}{x}\nu_j{}'(x) \quad j\in\mathbb{N}$$

dır. Burada $j\in\mathbb{N}$, $b_i^1=a_i^k$, $b_0^j=1$ ve $b_i^j=b_i^{j-1}-(k-i-j+3)b_{i-1}^{j-1}$ $(0<i\le k-j+1,\ j>1)$

koşulları altında

$$\nu_j(x)=\sum_{i=0}^{k-j+1} b_i^j x^{k-i-j+1}\sin\left(x+\frac{k+i+j-i}{2}\pi\right)$$

dir (Qi, Niu ve Cao, 2007).

Lemma 2.2.4: $0<x\le\pi$ aralığı için

$$6\sin x-2x-4x\cos x-x^2\sin x>0$$
$$x\cos x<\sin x<\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x\cos x$$

eşitsizlikleri doğrudur (Wu, 2008).

Qi ve Hao'nun 1998 yılındaki çalışmasında analizin klasik yöntemlerinden faydalanarak elde ettiği yukarıda verilen ve Jordan eşitsizliğinin iyileştirmesi olan (2.2.3) eşitsizliğinin doğruluğu aşağıdaki teoremin ispatıyla verilmiştir.

Teorem 2.2.1: Her $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ için

$$\frac{2}{\pi}+\frac{\pi-2}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)\ge\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)$$

eşitsizliği doğrudur (Qi ve Hao, 1998).

İspat: Teoremin ispatı için $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha > 0$ ve $f(0) = f(\pi/2) = 0$ koşulları altında

$$f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi} - \alpha x\left(\pi^2 - 4x^2\right)$$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

Bu fonksiyonların türevlerini alınıp sınır değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} - \alpha\left(\pi^2 - 12x^2\right), \left(f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} - \alpha\pi^2,\ f'(\pi/2) = 2\alpha\pi^2 - \frac{2}{\pi}\right) \\
&f''(x) = 24\alpha x - \sin x, \left(f''(0) = 0,\ f''(\pi/2) = 12\alpha\pi - 1\right) \\
&f'''(x) = 24\alpha - \cos x, \left(f'''(0) = 24\alpha - 1,\ f'''(\pi/2) = 24\alpha > 0\right)
\end{aligned}$$

sonuçlarını elde edilir.

Buradan, $f'''(x)$ fonksiyonun $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan olduğu görülür. Diğer taraftan $f(x)$ fonksiyonunun işareti iki durumda incelenir.

1. Durum: Eğer $f'''(0) \geq 0$ yani $\alpha \geq \frac{1}{24}$ ise bu durumda $f'''(x) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $f''(x)$ artandır. Buda $f''(x) \geq 0$ yani $f(x)$ konkav fonksiyon olması demektir. Böylece $\alpha \geq \frac{1}{24}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) \leq 0$ dır.

2. Durum: Eğer $f'''(0) < 0$ ise $f''(x)$ tek bir minimum değere sahiptir. Dolayısıyla

2.1. Durum: Eğer $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$ yani $0 < \alpha \leq \frac{1}{12\pi}$ ise bu durumda $f''(x) \leq 0$ olur. Böylece $f(x)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında konvekstir. Bu da $0 < \alpha \leq \frac{1}{12\pi}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) \geq 0$ olması demektir.

2.2. Durum: Eğer $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ise bu durumda $f''(x)$ fonksiyonu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında tek köke sahiptir ve $f'(x)$ aynı aralıkta sadece bir minimum değere sahiptir. Dolayısıyla, 2.2.1. Durum: Eğer $f'(0) \le 0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ise bu durumda $\alpha \ge \frac{\pi-2}{\pi^3}$ ve $f(x)$ tek bir maksimum değere sahiptir. Böylece $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) \le 0$ dır.

2.2.2. Durum: Eğer $\frac{1}{\pi^3} \ge \alpha > \frac{1}{12\pi}$ ise bu durumda $f'(0) > 0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \le 0$ ve $f(x)$ tek maksimuma sahiptir. Böylece $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $f(x) \ge 0$ dır.

2.2.3. Durum: Eğer $f'(x) > 0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ise bu durumda $f(x),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında aynı işaretini korumaz.

Yukarıdaki tüm bu bilgilerden

$$\frac{\sin x}{x} \le \frac{2}{\pi} - \alpha\left(\pi^2 - 4x^2\right), \quad \alpha \ge \frac{\pi-2}{\pi^3},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi} - \alpha\left(\pi^2 - 4x^2\right), \quad \alpha \le \frac{1}{\pi^3},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradaki $\frac{\pi-2}{\pi^3}$ ve $\frac{1}{\pi^3}$ en iyi sabitlerdir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

(2.2.3) eşitsizliği klasik Jordan eşitsizliği ile karşılaştırılırsa alt sınırın daha büyük üst sınırın daha küçük olduğu görülür. Ayrıca (2.2.3) eşitsizliği $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için doğru olduğundan bu anlamda klasik Jordan eşitsizliğin genelleştirilmiş versiyonudur.

2003 yılında Debnath ve Hao (Debnath ve Hao, 2003), (2.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafını Hao ve Qi nin yukarıdaki ispatına benzer bir yolla ispatlamıştır.

Sandor 2005 yılında $[0, \pi/2]$ aralığında $\sin x/x$ fonksiyonunun konkav olduğunu ispatlamış (Sandor, 2005) ve bundan yola çıkarak 2007 yılında Jordan eşitsizliğini

$$\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}(\pi-2x)\geq\frac{\sin x}{x}\geq\frac{2}{\pi}+\frac{\pi-2}{\pi^2}(\pi-2x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \tag{2.2.6}$$

şeklinde iyileştirmiştir.

(2.2.6) eşitsizliğini Zhang 2006 (Zhang, Wang ve Chu, 2006) yılında L'Hospital kuralının monotonluk formunu yani Lemma 2.2.1' i kullanarak ispatladı.

Qi ve Hao'nun (2.2.3) eşitsizliği ve Sandor'un (2.2.6) eşitsizlikleri $[0,\pi/2]$ aralığında karşılaştırılamaz.

Aslında Neuman 2004 yılında $|x|<\pi/2$ için (2.2.3) ve (2.2.6) eşitsizliklerindeki sınırlardan daha iyi sınırları olan

$$\frac{2}{9}\left[2+\frac{5}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right]\geq\frac{\sin x}{x}\geq\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \tag{2.2.7}$$

eşitsizliğini ispatlamıştır.

Eğer $[-x_5,x_5]$ alınırsa $\cos\left(x/\sqrt{3}\right)\geq 2/\pi$ olur. Burada $x_5\cong 1.525398501...$, $\cos\left(x/\sqrt{3}\right)\geq 2/\pi$ denkleminin bir köküdür. $x\in[-\pi/2,-x_5]$ veya $x\in[x_5,\pi/2]$ için eşitsizliğin tersi doğrudur.

Bu anlamda Sandor, Neuman'nın bu çalışmasından haberdar olmadığını makalesinde referans yapmayarak da göstermiştir. Çünkü Neuman'ın sonucu Sandor'un sonucunun iyileştirilmişidir. Bu karşılaştırma aşağıda ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

- ✓ (2.2.7) eşitsizliğinin sağ tarafı, $x\in[-x_1,x_1]$ için (2.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafından daha iyidir. Burada $x_1\cong 1.204850991...$, $[0,\pi/2]$ aralığında $\cos\left(x/\sqrt{3}\right)=3/\pi-4x^2/\pi^3$ denkleminin bir köküdür. Bu durum $x\in[-\pi/2,-x_1]$ veya $x\in[x_1,\pi/2]$ için de doğrudur.

- ✓ (2.2.7) eşitsizliğinin sağ tarafı, $x \in [0, x_2]$ için (2.2.7) eşitsizliğinin sağ tarafından daha iyidir. Burada $x_2 \cong 1.475028163...$, $[0, \pi/2]$ aralığında $\cos\left(x/\sqrt{3}\right) = 1 - 2(\pi - 2)x/\pi^2$ denkleminin bir köküdür. Ayrıca $x \in [x_2, -\pi/2]$ için de doğrudur.
- ✓ (2.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafı, $x \in [\pi(\pi-3)/2, \pi/2]$ için (2.2.6) eşitsizliğinin sağ tarafından daha iyidir. Bunun yanı sıra $x \in [0, \pi(\pi-3)/2]$ için tersi doğrudur. Burada $\pi(\pi-3)/2 \cong 0.2224132208...$ dır.
- ✓ (2.2.7) eşitsizliğinin sol tarafı, $x \in [-x_3, x_3]$ için (2.2.3) eşitsizliğinin sol tarafından daha iyidir. Burada $x_3 \cong 1.563220278...$, $[0, \pi/2]$ aralığında $2/9\left[2 + 5/2\cos\left(\sqrt{3/5}x\right)\right] = 1 - 4(\pi - 2)x^2/\pi^3$ denkleminin bir köküdür. Bunun yanı sıra $x \in [-\pi/2, -x_3]$ veya $x \in [x_3, \pi/2]$ aralıkları için tersi doğrudur
- ✓ (2.2.7) eşitsizliğinin sol tarafı, $x \in [0, x_4]$ için (2.2.6) eşitsizliğinin sol tarafından daha iyidir. Burada $x_4 \cong 1.497945837...$, $[0, \pi/2]$ aralığında $2/9\left[2 + 5/2\cos\left(\sqrt{3/5}x\right)\right] = 4(\pi - x)/\pi^2$ denkleminin bir köküdür. Fakat $x \in [x_4, \pi/2]$ aralıkları için tersi doğrudur
- ✓ (2.2.3) eşitsizliğinin sol tarafı, $x \in [0, (\pi/2)(4-\pi)/(\pi-2)]$ için (2.2.6) eşitsizliğinin sol tarafından daha iyidir. Burada $(\pi/2)(4-\pi)/(\pi-2) \cong 1.181142066...$ dır. Ayrıca yukarıdaki duruma benzer olarak $x \in [(\pi/2)(4-\pi)/(\pi-2), \pi/2]$ için bu durumun tersi doğrudur.
- ✓ $x \in [-\pi/2/\pi/2]$ için $2/9\left[2 + 5/2\cos\left(\sqrt{3/5}x\right)\right] \le 1$ dir (Baricz, 2010).

Yine 2006 yılında Özban klasik analizden bilinen türev testlerinden faydalanarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır. Özban bulduğu eşitsizliği grafik yardımıyla Qi ve Hao'nun eşitsizliği ile kıyaslamıştır.

<u>Teorem 2.2.3</u> $x \in (0, \pi/2]$ aralığı için

$$o(x) := \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) + \frac{4(\pi - 3)}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \frac{\sin x}{x} \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik $x = \pi/2$ için sağlanır (Özban, 2006).

<u>İspat:</u> Teoremin ispatı için $x \in (0, \pi/2]$ koşulu altında

$$f(x) = 6\sin x - x^2 \sin x - 4x\cos x - 2x$$

fonksiyonu göz önüne alınır.

Bu fonksiyonun türevleri alınırsa

$$f'(x) = 2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x - 2$$

$$f''(x) = x^2 \sin x.$$

sonuçları elde edilir.

$x \in (0, \pi/2)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan $f'(x)$, $x \in (0, \pi/2]$ aralığında artandır. Böylece $f'(0) = 0$ olduğundan her $x \in (0, \pi/2]$ için $f'(x) > 0$ dır. Bu nedenle $f(x)$ kesin artandır. Dolayısıyla $f(0) = 0$ olduğundan her $x \in (0, \pi/2]$ için $f(x) > 0$ dır. Bu yüzden

$$6\sin x - x^2\sin x - 4x\cos x - 2x > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

olur. Şimdi $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ için

$$g(x) = \frac{(\sin x)\pi^3 + 16x^3 - 4\pi x^3 + 4x^2\pi^2 - x\pi^3 - 12\pi x^2}{x^2\pi^3}$$

fonksiyonu göz önüne alınır. Bu fonksiyonun türevleri alınırsa

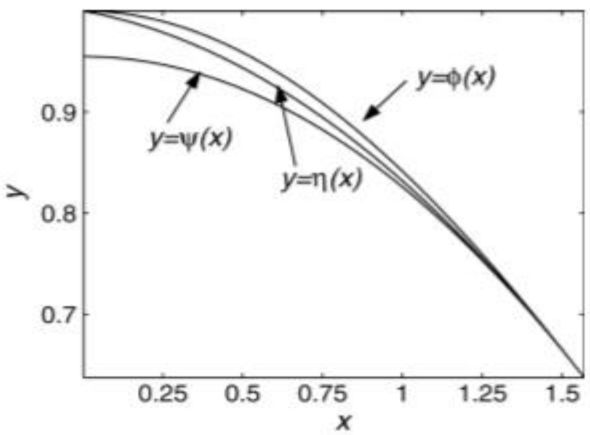
$$g'(x)=\frac{x(\cos x)\pi^3+16x^3-4\pi x^3+x\pi^3-2(\sin x)\pi^3}{x^3\pi^3}$$

$$g''(x)=\frac{-x^2\sin x-4x\cos x-2x+6\sin x}{x^4}$$

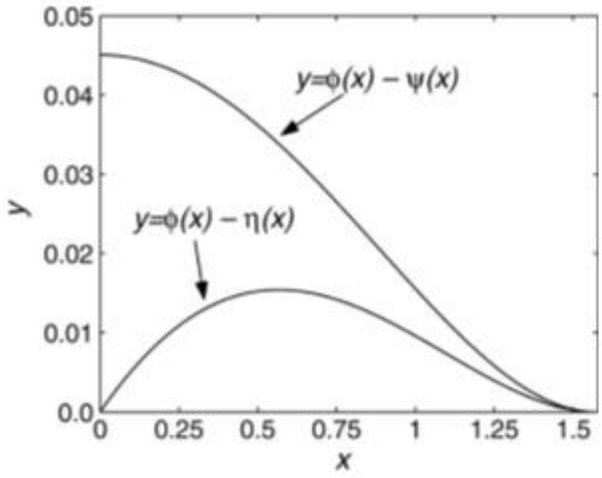
sonuçları elde edilir. Her $x\in(0,\pi/2]$ için $6\sin x-x^2\sin x-4x\cos x-2x>0$ olduğundan $g''(x)>0$ dır. Böylece $g'(x)$, $(0,\pi/2]$ aralığında artandır. $g'(\pi/2)=0$ olduğundan dolayı her $x\in(0,\pi/2]$ için $g'(x)<0$ dır. Böylece $g(x)$, $(0,\pi/2]$ aralığında kesin azalandır. Ayrıca $g(\pi/2)=0$ dır. Dolayısıyla her $x\in(0,\pi/2]$ için $g(x)\geq 0$ dır. Şimdi $g(x)$ fonksiyonu x ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}xg(x)&=\frac{1}{x}\frac{(\sin x)\pi^3+16x^3-4\pi x^3+4x^2\pi^2-x\pi^3-12\pi x^2}{\pi^3}\\&=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)-\frac{4(\pi-3)}{\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Yani sonuç olarak her $x\in(0,\pi/2]$ için $x>0$ ve $g(x)\geq 0$ olduğundan $\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)-\frac{4(\pi-3)}{\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\geq 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.



Şekil 2.2.1: $\psi(x)$ ve $\eta(x)$ in karşılıkları



Şekil 2.2.2: $\phi-\psi$ ve $\phi-\eta$ in grafiği

Özban Şekil 2.2.1 ve Şekil 2.2.2'yi aşağıdaki gibi yorumlamıştır.

$$\phi(x)=\frac{\sin x}{x},\ \psi(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)$$
$$\eta(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)+\frac{4(\pi-3)}{\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

olsun. Burada ψ ile Qi ve Hao'nun (2.2.3) deki eşitsizliğinin, η ile de Özban'ın (2.2.8) eşitsizliğinin alt sınırları olarak alınmıştır. Şekil 2.2.1'deki grafikte fonksiyonlar, Şekil 2.2.2'deki grafikte ise $\phi-\psi$ ve $\phi-\eta$ hata fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. Görüldüğü gibi Özban'ın hata fonksiyonu Qi ve Hao'nun hata fonksiyonundan daha küçüktür.

Jordan eşitsizliğinin genelleştirmelerinde ve iyileştirmelerinde seriler de kullanılmıştır. Aşağıda 2006 yılında Li'nin Jordan eşitsizliği ile ilgili çalışması buna örnektir.

Teorem 2.2.4: $x>0$ için

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{R_k(\pi/2)}{k!\pi^{2k}}\left(\pi^2-4x^2\right)^k \tag{2.2.9}$$

şeklindedir. Burada

$$R_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!(n-k)!}x^{2n}$$

dir. Ayrıca $x=\pi/2$ alınırsa $(-1)^k R_k(\pi/2)>0$ olur. $k\in\mathbb{N}$ için $R_1(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$ ve $R_{k+1}(x)=-kR_k(x)+\frac{x}{2}R_k'(x)$ eşitlikleri doğrudur (Li, 2006).

Yukarıdaki özdeşliğin sonucu olarak $0<x<\pi/2$ için $\frac{\sin x}{x}$ in alt sınırı

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x}\geq{}&\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)+\frac{12-\pi^2}{16\pi^5}\left(\pi^2-4x^2\right)^2\\&+\frac{10-\pi^2}{16\pi^7}\left(\pi^2-4x^2\right)^3+\frac{\pi^4-180\pi^2+1680}{3072\pi^9}\left(\pi^2-4x^2\right)^4\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

şeklindedir. (2.2.10) eşitsizliğinde sadece $x=\pi/2$ alınırsa eşitlik sağlanır.

Burada alınabilecek en iyi sabitler

$1/\pi^3$, $\left(12-\pi^2\right)/16\pi^5$,$\left(10-\pi^2\right)/16\pi^7$, ve $\left(\pi^4-180\pi^2+1680\right)/3072\pi^9$ şeklindedir.

$|x|<\pi$ için $\frac{x}{\sin x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}B_{2k}\frac{2^{2k}-2}{(2k)!}x^{2k}$ eşitliği kullanılarak $|x|<\pi$ için $\frac{x}{\sin x}\leq 1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6$ eşitsizliği elde edilmiştir. Burada B_{2k} Bernoulli sayısıdır.

2006 yılında Jiang ve Yun Lemma 2.2.1'i kullanarak Jordan eşitsizliğinin bir iyileştirmesini aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.4: $\forall x \in (0, \pi/2]$ için

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5}\left(\pi^4 - 16x^4\right) \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^5}\left(\pi^4 - 16x^4\right) \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği doğrudur. $x = \pi/2$ için eşitlik sağlanır (Jiang ve Yun, 2006).

Zhu, Lemma 2.2.1'i kullanarak Özban'ın (2.2.8) eşitsizliğini ve aşağıda verilen Jordan eşitsizliğinin iyileştirilmiş formları olan (2.2.12) ve (2.2.13) eşitsizliklerini elde etmiştir.

Teorem 2.2.5: $\forall x \in (0, \pi/2]$ için

$$\frac{12 - \pi^2}{16\pi^5}\left(\pi^2 - 4x^2\right)^2 \le \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) \le \frac{\pi - 3}{\pi^5}\left(\pi^2 - 4x^2\right)^2 \tag{2.2.12}$$

$$\frac{\sin x}{x} \le \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) + \frac{12 - \pi^2}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \tag{2.2.13}$$

eşitsizlikleri doğrudur (Zhu, 2006a).

Ayrıca Zhu aynı yıl başka bir çalışmasında Lemma 2.2.1'i kullanarak Jordan eşitsizliğini $-\pi/2 \le x \le r \le \pi/2$ aralığında genelleştirerek

$$\frac{\sin r}{r} + \frac{r - \sin r}{r^3}\left(r^2 - x^2\right) \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{\sin r}{r} + \frac{\sin r - r\cos r}{2r^3}\left(r^2 - x^2\right) \tag{2.2.14}$$

eşitsizliğini elde etmiştir (Zhu, 2006b).

Yine Wu ve Debnath 2006 yılında farklı fonksiyonlar için Lemma 2.2.1'i kullanarak Jordan eşitsizliğinin genel bir formunu elde etmiştir.

<u>Teorem 2.2.6</u>: $0 < x \leq \theta$ ve $\theta \in (0, \pi]$ koşulları altında

$$\max\left\{\frac{3}{2}\varphi_1(\theta)\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2, \frac{3}{8}\varphi_{2(\theta)}\left(1-\frac{x^2}{\theta^2}\right)^2\right\}$$
$$\leq \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin\theta}{\theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta} - \cos\theta\right)\left(1-\frac{x^2}{\theta^2}\right) \tag{2.2.15}$$
$$\leq \min\left\{\frac{3}{2}\varphi_2(\theta)\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2, \frac{3}{8}\varphi_2(\theta)\left(1-\frac{x^2}{\theta^2}\right)^2\right\}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\varphi_1(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{\theta} \text{ ve } \varphi_2(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta} - \frac{1}{3}\theta\sin\theta - \cos\theta$$

dır (Wu ve Debnath, 2006).

(2.2.15) eşitsizliğinde $x = \theta$ olduğunda eşitlik sağlanır. Bu eşitsizlikte katsayılar $(1 - x/\theta)^2$ ve $(1 - x^2/\theta^2)^2$ dir. $\theta = \pi/2$ olması durumunda da (2.2.15) eşitsizliği (2.2.12) ve (2.2.13) eşitsizliklerine indirgenir. Teoremdeki eşitsizlik Jordan eşitsizliğinin genelleştirilmiş halidir. Diğer taraftan (2.2.15) eşitsizliğinde her tarafın integrali alınırsa

$$\max\left\{\frac{5\sin\theta - \theta\cos\theta + 2\theta}{6}, \frac{23\sin\theta - 8\theta\cos\theta - \theta^2\sin\theta}{15}\right\}$$
$$< \int_0^\theta \frac{\sin x}{x} < \min\left\{\frac{11\sin\theta - 5\theta\cos\theta - \theta^2\sin\theta}{6}, \frac{8\sin\theta - \theta\cos\theta + 8\theta}{15}\right\} \tag{2.2.16}$$

yazılır.

(2.2.16) eşitsizliğinde $\theta=\pi/2$ alınırsa

$$\frac{92-\pi^2}{60}<\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}<\frac{8+4\pi}{15} \qquad (2.2.17)$$

elde edilir. (2.2.17) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğinden daha iyi bir sonuçtur.

Qi, Niu ve Cao, 2007 yılında Lemma 2.2.1, Lemma 2.2.2 ve Lemma 2.2.3'ü kullanarak Jordan eşitsizliğinin genelleştirmesini elde etmiştir.

Teorem 2.2.7: $0<x\leq\theta<\pi,\ n\in\mathbb{N}$ ve $t\geq 2$ koşulları altında

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\theta^t-x^t\right)^k\leq\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin\theta}{\theta}\leq\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(\theta^t-x^t\right)^k \qquad (2.2.18)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\mu_k=\frac{(-1)^k}{k!t^k}\sum_{i=1}^{k+1}a_{i-1}^k\theta^{k-i-kt}\sin\left(\theta+\frac{k+i-1}{2}\pi\right),$$

$$\omega_k=\begin{cases}\dfrac{1-\sin\theta/\theta-\sum\limits_{i-1}^{n-1}\mu_i\theta^{ti}}{\theta^{tn}}, & k=n\\ \mu_k, & 1\leq k<n\end{cases},$$

$$a_i^k=\begin{cases}a_i^{k-1}+\left[i+(k-1)(t-1)\right]a_{t-1}^{k-1}, & 0<i\leq k\\ 1, & i=0\\ 0, & i>k\end{cases}$$

şeklindedir (Qi, Niu ve Cao, 2007). $x=\theta$ alınırsa eşitlik sağlanır.

2008 yılında Niu ve arkadaşlarının yaptığı çalışmada ispat için kullanılacak yardımcı fonksiyonlar diğer çalışmalardakinden farklı seçilerek ve Lemma 2.2.1'i kullanılarak Jordan eşitsizliğinin genelleştirmesi ve iyileştirmesi verilmiştir. Bu çalışma aynı zamanda Zhu'nun Teorem 2.2.5'deki sonucunun hem genelleştirmesi hem de iyileştirmesidir.

Teorem 2.2.8: $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < x \leq \pi/2$ koşulları altında

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\pi^2 - 4x^2\right)^k \leq \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \left(\pi^2 - 4x^2\right)^k \qquad (2.2.19)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{(4\pi)^k k!} \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^i a_{i-1}^k \sin\left(\frac{k+i}{2}\pi\right)$$

$$\beta_k = \alpha_k \quad (1 \leq k < n), \quad \beta_n = \frac{1 - \frac{2}{\pi} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \pi^{2i}}{\pi^{2n}}$$

$$a_i^k = \begin{cases} (i+k-1) a_{i-1}^{k-1} + a_i^{k-1}, & (0 < i \leq k) \\ 1, & i = 0 \\ 0, & i > k \end{cases}$$

şeklindedir (Niu, Huo, Cao ve Qi, 2008). (2.2.19)'daki sabitler en iyi sabitlerdir. Eğer $x = \pi/2$ alınırsa eşitlik sağlanır.

(2.2.19) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa Zhu'nun (2.2.12) eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $n = 3$ alınırsa da

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\pi^3}, \ \alpha_2 = \beta_2 = \frac{12 - \pi^2}{16\pi^5}, \ \alpha_3 = \frac{10 - \pi^2}{16\pi^7} \text{ ve } \beta_3 = \frac{\pi^2 + 16\pi - 60}{16\pi^7}$$

olmak üzere

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{k=0}^{3}\alpha_k\left(\pi^2-4x^2\right)^k \le \frac{\sin x}{x} < \frac{2}{\pi}+\sum_{k=0}^{3}\beta_k\left(\pi^2-4x^2\right)^k$$

yazılır. Burada

$$\beta_1+\beta_3\left(\pi^2-4x^2\right) < \frac{\pi-3}{\pi^5}$$

olduğundan son eşitsizlik Zhu'nun (2.2.12) eşitsizliğinin iyileştirilmişi olur.

Aşağıdaki Teorem 2.2.9'da elde edilen eşitsizlik Jordan eşitsizliğinin genelleştirilmişidir. Bu teoremin ispatında Lemma 2.2.4 kullanılmıştır.

<u>Teorem 2.2.9:</u> $0 < x \le \theta \le \pi$ ve $\lambda \ge 2$ koşulları altında

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta\right)\left(1-\frac{x^\lambda}{\theta^\lambda}\right)+\left[1-\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta\right)\right]\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^\lambda \\
&\le \frac{\sin x}{x}-\frac{\sin\theta}{\theta} \\
&\le \left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(1-\frac{x^\lambda}{\theta^\lambda}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

eşitsizliği doğrudur (Wu, 2008).

2008 yılında Wu ve Srivastava'nın ortak çalışmasında ise Lemma 2.2.1'i kullanarak Özban'ın (2.2.8) ve Zhu'nun (2.2.13) eşitsizliğini aşağıdaki Teorem 2.2.21 ile hem genelleştirmiş hem de iyileştirmiştir.

Teorem 2.2.10: $0<x\le\theta\le\pi/2$ aralığı için $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere $n=4i+1$ veya $n=4i+2$ alındığında

$$\begin{aligned}\frac{(\theta-x)^n}{\theta^n}&\left[1-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(-1)^{\ell}\theta^{\ell-1}}{\ell!}\sin\left(\theta+\frac{\ell\pi}{2}\right)\right]\\&\le\frac{\sin x}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(-1)^{k+\ell}(x-\theta)^k}{\ell!\theta^{k-\ell+1}}\sin\left(\theta+\frac{\ell\pi}{2}\right)\\&\le\frac{(\theta-x)^n}{\theta^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^{\ell}\theta^{\ell}}{\ell!}\sin\left(\theta+\frac{\ell\pi}{2}\right)\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

eşitsizliği, $n=4i+3$ veya $n=4i+4$ alındığında ise (2.2.21) eşitsizliğinin tersi doğrudur (Wu ve Srivastava, 2008).

Teorem 2.2.10 dan bazı özel durumlar çıkarmak mümkündür öyle ki:

- (2.2.21) eşitsizliğinde $x=\theta$ alınırsa eşitlik sağlanır.
- $n=2$ alınırsa (2.2.15) eşitsizliği elde edilir.
- $n=2$ ve $\theta=\pi/2$ alınırsa (2.2.8) ve (2.2.13) eşitsizlikleri elde edilir.
- $n=5$ ve $\theta=\pi/2$ alınırsa bulunan sonuç (2.2.8) ve (2.2.13) sonuçlarından daha iyidir.

2008 yılında Wu ve Debnath Jordan eşitsizliği ile ilgili çalışmasında aşağıdaki eşitsizliği elde ederek, Jordan eşitsizliğinin genel bir formunu elde etmiştir. f, $[0,\theta]$ aralığında $f(0)=0$ koşulunu sağlayan $(n+1)$ kez diferansiyellenebilen reel değerli bir fonksiyon olsun.

1. Durum: n pozitif çift sayı olduğunda $f^{(n+1)}$, $[0,\theta]$ aralığında artan, n pozitif tek sayı olduğunda ise $f^{(n+1)}$, $[0,\theta]$ aralığında azalan oluyorsa $x\in[0,\theta]$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{\theta^n}\left[f'(0^+)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i-1}\theta^{i-1}}{i!}f^{(i)}(\theta)\right]\\
&\le \frac{f(x)}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i(\theta-x)^k}{\theta^{k-i+1}i!}f^{(i)}(\theta) \qquad (2.2.22)\\
&\le \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(\theta-x)^n}{\theta^{k-i+1}i!}f^{(i)}(\theta)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir

2. Durum: n pozitif çift sayı olduğunda $f^{(n+1)}$, $[0,\theta]$ aralığında azalan, n pozitif tek sayı olduğunda ise $f^{(n+1)}$, $[0,\theta]$ aralığında artan oluyorsa $x\in[0,\theta]$ için (2.2.22) eşitsizliğinin tersi geçerlidir
3. Durum: (2.2.22) eşitsizliğinde sadece $x=\theta$ alınırsa eşitlik sağlanır (Wu ve Debnath, 2006).

2008 yılında Wu, Srivastava ve Debnath, Lemma 2.2.1 ve $\left(0<x\le\pi^2\right)$ için $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun $(-1)^n f^{(n)}(x)\ge 0$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ sonucunu kullanmıştır. Bu sonuç kullanılarak Jordan eşitsizliğinin genelleştirilmişi elde edildi.

Teorem 2.2.11: $n\in\mathbb{N}$ $0<x\le\theta\le\pi$ ve $f(x)=\sin\sqrt{x}/\sqrt{x}$ koşulları altıda

$$
\begin{aligned}
\frac{f^n(\theta^2)}{n!}\left(x^2-\theta^2\right)^2 &\le \frac{\sin x}{x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k\left(\theta^2\right)}{k!}\left(x^2-\theta^2\right)^k\\
&\le \frac{1}{\theta^{2n}}\left[1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\theta^{2k}f^{(k)}\left(\theta^2\right)}{k!}\right]\left(\theta^2-x^2\right)^n \qquad (2.2.23)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği doğrudur Eşitsizlikte $x=\theta$ için eşitlik sağlanır. (Wu, Srivastava ve Debnath, 2008).

Agarwal ve arkadaşlarının (Agarwal, Kim ve Sen, 2009) ortak çalışında (2.2.8) ve (2.2.13) eşitsizlikleri iyileştirilip aşağıdaki Teorem 2.2.12 de verilen aşağıdaki eşitsizliği elde edilmiştir.

<u>Teorem 2.2.12:</u> $0 < x \le \pi/2$ aralığı için

$$1 + B_1 x - B_2 x^2 + B_3 x^3 \le \frac{\sin x}{x} \le 1 + C_1 x - C_2 x^2 + B_3 x^3 \tag{2.2.24}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada katsayılar

$$B_1 = \frac{4}{\pi^2}\left(66 - 43\pi + 7\pi^2\right), \quad B_2 = \frac{4}{\pi^3}\left(124 - 83\pi + 14\pi^2\right), \quad B_3 = \frac{16}{\pi^4}\left(\pi - 3\right)$$

$$C_1 = \frac{4}{\pi^2}\left(75 - 49\pi + 8\pi^2\right), \quad C_2 = \frac{4}{\pi^3}\left(142 - 95\pi + 16\pi^2\right)$$

şeklindedir (Agarwal, Kim ve Sen, 2009). Sadece $x = \pi/2$ alınırsa eşitlik sağlanır.

Aşağıdaki teoremde verilen eşitsizlik de Jordan eşitsizliğinin önemli iyileştirmelerinden biridir. Kendisinden sonra elde edilen Jordan eşitsizliğinin bazı iyileştirmelerine referans olmuştur.

<u>Teorem 2.2.13:</u> $\forall x \in \left(-\sqrt{27/5}, \sqrt{27/5}\right)$ için

$$\cos^2 \frac{x}{2} \le \frac{\sin x}{x} \le \cos^3 \frac{x}{3} \le \frac{2 + \cos x}{3} \tag{2.2.25}$$

eşitsizliği doğrudur (Klen, Visuri ve Vuorinen, 2010).

Aşağıda verilen eşitsizlik de yine Jordan eşitsizliğinin başka bir genelleştirilmiş halidir. Bu teoremin ispatında Lemma 2.2.1 ve $t \in (0,\pi]$ için $k(t) = \sin t - t\cos t > 0$ ve $d(t) = 2\sin t - 2t\cos t + t^2 \sin t > 0$ sonucu kullanılmıştır.

Teorem 2.2.14: $x \in (0,r]$, $0 < r \le \pi/2$ ve $p > 0$ koşulları altında

$$\left(\frac{\sin r}{r}\right)^p + \alpha\left(r^2 - x^2\right) \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \le \left(\frac{\sin r}{r}\right)^p + \beta\left(r^2 - x^2\right) \qquad (2.2.26)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

- $p \le 2/5$ alınırsa, $\alpha = \dfrac{1-\left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^p}{r^2}$, $\beta = \dfrac{p}{2}\left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^{p-1}\dfrac{\sin r - r\cos r}{r^3}$ en iyi sabitlerdir.
- $p \ge 1$ alınırsa, $\alpha = \dfrac{p}{2}\left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^{p-1}\dfrac{\sin r - r\cos r}{r^3}$, $\beta = \dfrac{1-\left(\dfrac{\sin r}{r}\right)^p}{r^2}$ en iyi sabitlerdir (Zhu, 2011).

Aşağıdaki eşitsizliğinin sınırları Klen'in (2.2.25) eşitsizliği referans alınarak elde edilmiştir. Ayrıca teoremin ispatında Lemma 2.2.1 kullanılmıştır.

Teorem 2.2.15: $x \in (0,\pi/2)$ ve $a = \left(\log(\pi/2)\right)/\log\sqrt{2} \cong 1.30299$ için

$$\cos^{\frac{4}{3}}\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{x} < \cos^{a}\frac{x}{2} \qquad (2.2.27)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada olabilecek en iyi sabitler a ve $4/3$ olur (Lv, Wang ve Chu, 2012).

2012 yılında Zhen ve Yang'ın çalışmasında yine Klen'in (2.2.25) eşitsizliği referans alınarak aşağıdaki iki eşitsizlik elde edildi.

Bunlardan ilki:

$x \in (0, \pi/2)$ için:

$$\left(\cos p_0 x\right)^{1/p_0} < \frac{\sin x}{x} < \left(\cos \frac{x}{3}\right)^3 \tag{2.2.28}$$

eşitsizliğidir. Burada sabit $p_0 \approx 0.34731 \approx 1/3$ şeklindedir.

İkinci eşitsizlik ise:

$x \in (0, c) \subseteq (0, \pi/2)$ aralığı için:

$$\beta_p(c)\left(\cos px\right)^{1/p} < \frac{\sin x}{x} < \left(\cos px\right)^{1/p} \tag{2.2.29}$$

eşitsizliğidir. Burada $p \in (0, 1/3]$ $\beta_p(c) = c^{-1}\left(\cos pc\right)^{-1/p} \sin c \approx 1$ şeklindedir. Eğer $p \in [1/2, 1)$ alınırsa eşitsizliğin tersi olur (Yang, 2012).

2015 yılında Debnath, Mortici ve Zhu'nun çalışmasında $x \in (0, \pi/2)$ aralığı için Jiang ve Yun'un (2.2.11) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizlik ile iyileştirilmiştir.

Birinci eşitsizlik:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 < \frac{\sin x}{x} \\ &< \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2 - 4x^2\right) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 + \frac{1}{120}x^4 \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

şeklindedir.

İkinci eşitsizlik ise:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2\pi^5}\left(\pi^4-16x^4\right)+\left(1-\frac{5}{2\pi}\right)-\frac{1}{6}x^2<\frac{\sin x}{x}\\&<\frac{2}{\pi}+\frac{\pi-2}{\pi^5}\left(\pi^4-16x^4\right)+\left(1-\frac{5}{2\pi}\right)-\frac{1}{6}x^2+\left(\frac{8}{\pi^5}+\frac{1}{120}\right)x^4\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

şeklindedir (Debnath, Mortici ve Zhu, 2015) .

Nishizawa (2.2.1) ve (2.2.2) eşitsizliklerini kullanarak 2015'te yaptığı çalışma ile aşağıdaki (2.2.32) ve (2.2.33) eşitsizliklerini elde etmiştir. Teorimin ispatında ise Lemma 2.2.1 kullanılmıştır.

<u>Teorem 2.2.16</u>: $0<x<\pi/2$ için

$$\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)\right)^{\theta}<\frac{\sin x}{x}<\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)\right)^{\vartheta} \tag{2.2.32}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada olabilecek en iyi sabitler $\theta=1$ ve $\vartheta=0$ şeklindedir (Nishizawa, 2015).

Nishizawa aynı çalışmasında yine $0<x<\pi/2$ için

$$\frac{\sin x}{x}<\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^3}\left(\pi^2-4x^2\right)\right)^{\vartheta(x)} \tag{2.2.33}$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Burada $\vartheta(x)=\dfrac{4x^2}{\pi^2}$ şeklindedir (Nishizawa, 2015)

Bhayo ve Sandor’un 2016 yılında yaptığı çalışmada elde edilen aşağıdaki eşitsizliğin alt sınırı Özban’ın eşitsizliğindeki alt sınırın iyileştirilmişidir.

Teorem 2.2.17: $x \in (0, \pi/2)$ için:

$$o(x) \leq 1 + \frac{16(\pi-3)}{\pi^4} x^3 - \frac{4(3\pi-8)}{\pi^3} x^2 \leq \frac{\sin x}{x} \tag{2.2.34}$$

eşitsizliği doğrudur. $x = \pi/2$ için eşitlik sağlanır (Bhayo ve Sandor, 2016).

Aynı çalışmada bir diğer eşitsizlik ise $x \in (0, \pi)$ için

$$\frac{1+\cos x}{2-\alpha x^2} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1+\cos x}{2-\beta x^2} \tag{2.2.35}$$

şeklinde olup bu eşitsizlik Jordan eşitsizliğinin genelleştirilmiş halidir. Burada sabitler $\alpha = 1/6 \approx 0.166667$ ve $\beta = 2/\pi^2 \approx 0.202642$ dır.

Bercu 2017 yılında yaptığı çalışma ile aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir. Teoremdeki eşitsizlikler (Abel ve Caccia, 1986) ve (Klen, Visuri ve Vuorinen, 2010) çalışmalarında elde edilen eşitsizliklerin iyileştirilmişidir.

Teorem 2.2.18: $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için

$$\frac{-7x^2+60}{3x^2+60} < \frac{\sin x}{x} < \frac{11x^4-360x^2-2520}{60x^2+2520} \tag{2.2.36}$$

eşitsizliği doğrudur (Bercu, 2017).

Ayrıca Bercu yukarıdaki eşitsizliği elde ettiği çalışmasında

1. $\forall x \in (0,1.4163)$ için $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi^2 - 4x^2}{\pi^3} < \dfrac{-7x^2 + 60}{3x^2 + 60}$
2. $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ için $\dfrac{11x^4 - 360x^2 + 2520}{60x^2 + 2520} < 1 - \dfrac{x^2}{3\pi}$

eşitsizliklerini de elde etmiştir (Bercu, 2017).

2.3 Hiperbolik Fonksiyonlar İçin Jordan Eşitsizliği

Bu bölümde son yıllarda yapılan hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliği ile ilgili çalışmalar anlatılıp, $x/\sinh x$ in supremum ve infimum değerlerini bulmak için yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Aşağıda Zhu'nun bu konu hakkındaki çalışmasında yer alan Teorem verilmiştir.

Teorem 2.3.1: $x > 0$ $q \geq 3(1-p)$ $p \in (-\infty, 8/15] \cup (1, \infty)$ koşulları için

$$\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)^q > p + (1-p)\cosh(x) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği doğrudur (Zhu, 2010).

Neuman ve Sandor 2010 yılında $\sinh x/x$ in sınırlarını aşağıdaki eşitsizlik ile elde etmiştir.

Teorem 2.3.2: $\forall x > 0$ için

$$\cosh^{4/3}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\sinh(x)}{x} < \cosh^{3}(x) \qquad (2.3.2)$$

eşitsizliğini doğrudur (Neuman ve Sandor, 2010).

Klen ve arkadaşları 2010 yılında yaptığı çalışmada $\sin x/x$ ve $x/\sinh x$ fonksiyonlarının orijindeki limitini almış ve $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ ve $\lim_{x\to 0} x/\sinh x = 1$ sonucundan yola çıkarak aşağıdaki teoremdeki çift taraflı eşitsizliği elde etmiştir.

Teorem 2.3.3: $\forall x \in (0,1)$ için

$$\cosh^{1/4}(x) < \frac{\sinh(x)}{x} < \cosh^{1/2}(x) \qquad (2.3.3)$$

eşitsizliği doğrudur (Klen, Visuri ve Vuorinen, 2010).

Lv ve arkadaşları da Hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliğini aşağıdaki gibi iyileştirmiştir. Aşağıdaki teoremin ispatı için Lemma 2.2.1 kullanılmıştır.

Teorem 2.3.4: $\forall x \in (0,1)$ $\forall p \le 1/3$ ve $q \ge \left[\log\left(\sinh(1)\right)\right]/\left[\log\left(\cosh(1)\right)\right] = 0.3721...$ koşulları altında

$$\cosh^{p}(x) < \frac{\sinh(x)}{x} < \cosh^{q}(x) \qquad (2.3.4)$$

eşitsizliği doğrudur (Lv, Wang ve Chu, 2012).

Aşağıdaki teoremle yine hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliğinin iyileştirmesi verilmiştir.

Teorem 2.3.5: $\forall x > 0,\ \forall p \geq \sqrt{5}/5$ ve $q \leq 1/3$ koşulları altında

$$\left[\cos(px)\right]^{1/3p^2} < \frac{\sinh(x)}{x} < \left[\cos(qx)\right]^{1/3q^2} \tag{2.3.5}$$

eşitsizliği doğrudur (Yang, 2013).

Son olarak Yang ve Chu 2015 yılındaki çalışmalarında hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliğini aşağıdaki eşitsizlikle iyileştirmiştir.

Teorem 2.2.6: $p, q \in (0, \infty),\ \forall x > 0,\ \forall p \leq \sqrt{15}/5$ ve $\forall q \geq 1$ koşulları altında

$$\frac{1}{3p^2}\cosh(px) + 1 - \frac{1}{3p^2} < \frac{\sinh(x)}{x} < \frac{1}{3q^2}\cosh(qx) + 1 - \frac{1}{3q^2} \tag{2.3.6}$$

eşitsizliği doğrudur (Yang ve Chu, 2015).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Bessel Fonksiyonları İçin Jordan Eşitsizliği

Bu bölümde ise Bessel fonksiyonları için Jordan eşitsizliği ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu bağlamda 2004 yılında Neuman'ın, 2007 yılında Baricz'in yine aynı yıl başka bir çalışma olan Niu'nun, 2008 yılında Zhu'nun, 2009 yılında Baricz ve Wu'nun, 2010 yılında Niu ve arkadaşlarının, yine aynı yıl başka bir çalışma olan Baricz'in çalışmasına yer verilmiştir.

Bessel fonksiyonlarının, Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların genelleşmiş hali olduğundan yola çıkarak bu çalışmalardaki amacın daha genel sonuçlar elde etmek olduğu söylenebilir.

Bu çalışmalardaki teoremlerin ispatında ise genellikle Lemma 2.2.1 kullanılmıştır.

Bu bölümdeki ana sonuçlar verilmeden önce aşağıda bu bölümde sıkça kullanılan bazı kavram ve kısaltmalar tekrar verelim:

$$
\begin{aligned}
& b, p, c \in \mathbb{C} \text{ ve } \kappa \neq 0, -1, -2 \ldots \\
& \kappa = p + \frac{(b+1)}{2} \\
& u_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n} \frac{z^n}{n!} \\
& \lambda_p(z) = u_p(z^2) \\
& \mathcal{J}_p(z) = 2^p \Gamma(p+1) z^{-p} J_p(z) \\
& \mathcal{I}_p(z) = 2^p \Gamma(p+1) z^{-p} I_p(z).
\end{aligned}
$$

Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizlik ile ilgili ilk çalışma olan Neuman'ın 2004 yılındaki çalışmasının sonucu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.1: $\forall p \geq 1/2$ ve $|x| \leq \pi/2$ için

$$\frac{1}{3(p+1)}\left[2p+1+(p+2)\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2(p+2)}}x\right)\right] \geq \mathcal{J}_p(x) \geq \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2(p+1)}}\right) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği doğrudur (Neuman, 2004).

Teoremdeki eşitsizlikte $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için $p = 1/2$ alınırsa

$$\frac{2}{9}\left[2+\frac{5}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right] \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği elde edilir (Neuman, 2004).

Baricz 2007 yılında yaptığı çalışmada Lemma 2.2.1'i kullanarak yukarıda verilen bazı eşitsizliklerin genelleştirilmiş hallerini elde etmiştir.

Teorem 3.1.2: **a)** $\kappa \geq 1/2$, $c \in [0,1]$, $x \in [0, \pi/2]$ şartları için

$$\left[1-\lambda_p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\pi-2x}{\pi} \leq \lambda_p(x) - \lambda_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \left[\left(\frac{c\pi}{2\kappa}\right)\lambda_{p+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\pi-2x}{\pi} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

b) $\kappa > 0$, $c \in [0,1]$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ şartları için

$$\left[\left(\frac{c}{4\kappa}\right)\lambda_{p+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\pi^2-4x^2}{4} < \lambda_p(x) - \lambda_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \left[1-\lambda_p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\pi^2-4x^2}{\pi^2} \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği doğrudur (Baricz, 2007).

Sonuç 3.1.3: (3.1.3) de $b=c=1$ ve $p=-1/2$ alınırsa

$$1-\frac{2}{\pi}x \le \cos x \le 2\left(1-\frac{2}{\pi}x\right) \quad \left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) \tag{3.1.5}$$

elde edilir. (3.1.5)' ün sol tarafı bilinen Kober eşitsizliğidir (Kober, 1944).

(3.1.3) (sırasıyla (3.1.4)) genelleşmiş hallerinde $c=1,\ b=1$ ve $p=1/2$ değerleri yerine yazılırsa (2.2.6) (sırasıyla (2.2.3)) eşitsizliklerini elde ederiz.

Ayrıca (3.1.4) eşitsizliği (2.2.14) eşitsizliğinin genelleştirilmiş halidir. Görüldüğü gibi Zhu'nun çalışmasındaki sonuç aslında Bessel fonksiyonlarının tipik sonucudur (Zhu, 2006b).

Teorem 3.1.4: $\kappa>0,\ c\in[0,1]$ ve $-\pi/2\le x\le r\le \pi/2$ şartları sağlanırsa

$$\lambda_p(r)+\left[\left(\frac{c}{4\kappa}\right)\lambda_{p+1}(r)\right]\left(r^2-x^2\right)\le \lambda_p(x)\le \lambda_p(r)+\left[\frac{1-\lambda_p(r)}{r^2}\right]\left(r^2-x^2\right) \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği doğrudur. $\kappa>0$ ve $c\le 0$ alınırsa $-\infty<x\le r<\infty$ için (3.1.6) eşitsizliği sağlanır (Baricz, 2007).

Sonuç 3.1.5: (3.1.6) eşitsizliğinde $b=c=1$ ve $p=1/2$ yerine yazılırsa (2.2.14) eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $b=1,\ c=-1$ ve $p=1/2$ alınırsa (2.2.14)'ün hiperbolik karşılığı aşağıdaki eşitsizlikle elde edilir. Buna göre $-\infty<x\le r<\infty$ için

$$\frac{\sinh r}{r}+\frac{r-\sinh r}{r^3}\left(r^2-x^2\right)\ge \frac{\sinh x}{x}\ge \frac{\sinh r}{r}+\frac{\sinh r-r\cosh r}{2r^3}\left(r^2-x^2\right)$$

doğrudur.

Burada $\mathcal{J}_{3/2}(x)=3\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}\right)$ ve $\mathcal{I}_{3/2}=-3\left(\frac{\sinh x}{x^3}-\frac{\cosh x}{x^2}\right)$ fonksiyonları kullanılmıştır. Ayrıca (Wu ve Debnath, 2006) çalışmasından esinlenerek elde edilen Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.4 ün sonuçları (Baricz, 2008b) çalışmasında geliştirilmiştir.

Niu, Cao ve Qi'nin ortak çalışmasında Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizliklerle ilgili olan aşağıdaki Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.8 ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.6: $\kappa \geq 1/2$ ve $0 \leq c \leq 1$ alınırsa

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\left(\pi^2-4x^2\right)^i \leq \lambda_p(x) \leq \sum_{i=0}^{n}\eta_i\left(\pi^2-4x^2\right)^i \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ için doğru olur. Burada katsayılar $b\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\gamma_i=\left(\frac{c}{16}\right)^i\frac{\lambda_{i+p}(\pi/2)}{i!(\kappa)_i} \qquad 0\leq i\leq n$$

ve

$$\eta_i=\begin{cases}\gamma_i & 0\leq i\leq n-1\\ \dfrac{1-\sum_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell\pi^{2\ell}}{\pi^{2n}} & i=n\end{cases}$$

şeklindedir. Eğer $\kappa>0$ ve $c\leq 0$ alınırsa (3.1.7) eşitsizliği n nin tek sayı olduğu durumlar için geçerlidir n eğer çift sayı ise tersi geçerlidir (Niu, Cao ve Qi, 2010).

Sonuç 3.1.7: Teorem 3.1.6 da $p = 1/2$, $b = 1$ ve $c = -1$ alınırsa (3.1.7) eşitsizliği

$$\sum_{i=0}^{2m+1} \gamma_i \left(\pi^2 - 4x^2\right)^i \le \frac{\sinh x}{x} \le \sum_{i=0}^{2m+1} \eta_i \left(\pi^2 - 4x^2\right)^i, \quad m \in \mathbb{N}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{2m} \eta_i \left(\pi^2 - 4x^2\right)^i \le \frac{\sinh x}{x} \le \sum_{i=0}^{2m} \gamma_i \left(\pi^2 - 4x^2\right)^i, \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde olur (Niu, Cao ve Qi, 2010).

Teorem 3.1.8: Eğer $\kappa \ge \dfrac{1}{2}$ ve $0 \le c \le 1$ ise, bu durumda

$$\sum_{i=0}^{n} \sigma_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i \le \lambda_p\left(x\right) \le \sum_{i=0}^{n} \nu_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < x \le \theta \le \pi/2$ koşulları sağlandığında doğrudur. Burada en iyi katsayılar $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sigma_i = \left(\frac{c}{4}\right)^i \frac{\lambda_{i+p}(\theta)}{i!\left(\kappa\right)_i}, \quad 0 \le i \le n$$

ve

$$\nu_i = \begin{cases} \sigma_i, & 0 \le i \le n-1 \\ \dfrac{1 - \sum_{\ell=0}^{n-1} \sigma_\ell \theta^{2\ell}}{\theta^{2n}} & i = n \end{cases}$$

şeklindedir. Eğer $\kappa > 0$ ve $c \le 0$ alınırsa (3.1.8) eşitsizliği n tek sayıları için geçerlidir. $0 < x < \theta < \infty$ aralındaki n çift sayıları için tersi geçerlidir (Niu, Cao ve Qi, 2010).

Sonuç 3.1.9: Eğer Teorem 3.1.8 de $p = 1/2,\ b = 1$ ve $c = -1$ alınırsa (3.1.8) eşitsizliği

$$\sum_{i=0}^{2m+1} \sigma_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i \le \frac{\sinh x}{x} \le \sum_{i=0}^{2m+1} \nu_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i, \quad m \in \mathbb{N}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{2m} \nu_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i \le \frac{\sinh x}{x} \le \sum_{i=0}^{2m} \sigma_i \left(\theta^2 - x^2\right)^i, \quad m \in \mathbb{N}$$

eşitliklerine dönüşür (Niu, Cao ve Qi, 2010).

Sonuç 3.1.10: Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa (3.1.8) eşitsizliği (3.1.7) eşitsizliğine dönüşür. Bunun anlamı Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.6 nın genişletilmişidir (Niu, Cao ve Qi, 2010).

Aşağıdaki teoremler Bessel fonksiyonları için kesinleşmiş Jordan eşitsizliğiyle ilgilidir.

Teorem 3.1.11 $p > -1$ ve $j_{p,1}$, J_p birinci çeşit Bessel fonksiyonunun ilk pozitif kökü olmak üzere $0 < x \le r < j_{p+1,1}$ için

$$S_{p,n}(x) + \alpha_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \le \mathcal{J}_p(x) \le S_{p,n}(x) + \beta_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \qquad (3.1.9)$$

kesinleşmiş Jordan eşitsizliği doğrudur. Burada

$$S_{p,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{p,k}(r)\left(r^2 - x^2\right)^k$$

şeklindedir. $S_{p,n}$ deki $n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,1,...,n+1\}$ ve $a_{p,k}(r)$ katsayıları

$$a_{p,k}(r)=\frac{\mathcal{J}_{p+k}(r)}{4^k k!(p+1)_k} \tag{3.1.10}$$

dır. Daha açık haliyle $k\in\{1,2,...,n\}$ için

$$a_{p,k+1}(r)=\frac{p+k}{(k+1)r^2}a_{p,k}(r)-\frac{1}{4k(k+1)r^2}a_{p,k-1}(r)\quad k\in\{1,2,...,n\} \tag{3.1.11}$$

şekildedir. Ayrıca $\alpha_p(r)=a_{p,n+1}(r)$ ve $\beta_p(r)=\dfrac{1-\sum_{k=0}^{n}a_{p,k}(r)r^{2k}}{r^{2(n+1)}}$ en iyi sabitlerdir. Bunlara ek olarak $\zeta\in(x,r)$ e bağlı olarak

$$\mathcal{J}_p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{p,k}(r)\left(r^2-x^2\right)^k+\frac{\mathcal{J}_{p+n+1}(\zeta)}{4^{n+1}(n+1)!(p+1)_{n+1}}\left(r^2-x^2\right)^{n+1} \tag{3.1.12}$$

eşitliği doğrudur. Burada $\mathcal{J}_p$ fonksiyonunun kuvvet serisi

$$\mathcal{J}_p(x)=\sum_{n\geq 0}a_{p,n}(r)\left(r^2-x^2\right)^n \tag{3.1.13}$$

şeklindedir (Baricz ve Wu, 2009).

<u>Sonuç 3.1.12:</u> (3.1.9) eşitsizliğinde $p=1/2$ alınırsa $\mathcal{J}_{1/2}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $p=-1/2$ alınırsa $\mathcal{J}_{-1/2}=\cos x$ fonksiyonları için eşitsizlikler elde edilir.

<u>Sonuç 3.1.13:</u> (3.1.9) eşitsizliğinde $p=1/2$ alınırsa

$$\mathcal{J}_{1/2}(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \mathcal{J}_{3/2}(x)=3\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}\right)$$

fonksiyonları için eşitsizlikler elde edilir. Örneğin $0<x\leq r\leq j_{3/2,1}$ için

$$S_{1/2,n}(x)+\alpha_{1/2}(r)\left(r^2-x^2\right)^{n+1}\leq\frac{\sin x}{x}\leq S_{1/2,n}(x)+\beta_{1/2}(r)\left(r^2-x^2\right)^{n+1} \qquad (3.1.14)$$

kesinleşmiş Jordan eşitsizliği doğrudur. Burada katsayılar $n\in\mathbb{N},\ k\in\{1,2,...,n\}$ $a_{1/2,k}(r)$

$$a_{1/2,0}(r)=\frac{\sin r}{r},\quad a_{1/2,1}(r)=\frac{\sin r-r\cos r}{2r^3}$$

$$a_{1/2,k+1}(r)=\frac{2k+1}{2\left(k+1\right)r^2}a_{1/2,k}(r)-\frac{1}{4k\left(k+1\right)r^2}a_{1/2,k-1}(r)$$

şeklindedir. $j_{3/2,1}=4,493409457,\ \tan x=x$ denklemin birinci pozitif köküdür. Ayrıca

$$\alpha_{1/2}(r)=a_{1/2,n+1}(r)\text{ ve }\beta_{1/2}(r)=\frac{1-\sum_{k=0}^{n}a_{1/2}(r)r^{2k}}{r^{2(n+1)}}$$

eşitliklerinden

$$S_{1/2,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{1/2,k}(r)\left(r^2-x^2\right)^k$$

eşitliği yazılır.

Bu sonuçtaki yaklaşım Zhu'nun, (Zhu, 2008) çalışmasındaki Teorem 6 ve (Zhu, 2009) çalışmasındaki Teorem 1'den elde edilmiştir ancak bu yaklaşım Zhu'nun çalışmasından daha basittir. (3.1.14) eşitsizliği (Zhu, 2009) çalışmasında $0<x\leq r\leq\ j_{1/2,1}=\pi$ durumu için ispat edilmişken (Zhu, 2008) deki çalışmada $0<x\leq r\leq\ j_{-1/2,1}=\pi/2$ durumunda ispatlanmıştır. Böylece verilen (3.1.9) sonucu sadece (3.1.14)'e genişlemekle kalmaz, aynı zamanda geçerlilik aralığını da geliştirir.

Sonuç 3.1.14: (3.1.14) de $r=\pi/2$ seçilirse elde edilen kesinleşmiş Jordan eşitsizliği

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\left(\pi^2-4x^2\right)^k+b_{n+1}\left(\pi^2-4x^2\right)^{n+1}\le\frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{\sin x}{x}\le\sum_{k=0}^{n} b_k\left(\pi^2-4x^2\right)^k+\frac{1-\sum_{k=0}^{n} b_k\pi^{2k}}{\pi^{2(n+1)}}\left(\pi^2-4x^2\right)^{n+1}$$

şeklindedir. Burada $n\in\mathbb{N},\ k\in\{1,2,...,n\}$ ve katsayılar b_k olmak üzere b_k lar açık olarak

$$b_0=\frac{2}{\pi},\ b_1=\frac{1}{\pi^3},\ b_{k+1}=\frac{2k+1}{2(k+1)\pi^2}b_k-\frac{1}{16k(k+1)\pi^2}b_{k-1}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1.15: (3.1.12) ve (3.1.13) için $p=1/2$ ve $0<x\le r\le j_{3/2,1}$ alınırsa

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{k=0}^{n} a_{1/2,k}(r)\left(r^2-x^2\right)^k+\frac{\mathscr{J}_{n+3/2}(\zeta)}{4^{n+1}(n+1)!(3/2)_{n+1}}\left(r^2-x^2\right)^{n+1}$$

eşitliği doğrudur. Sinüs fonksiyonları için

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{k\ge 0} a_{1/2,k}(r)\left(r^2-x^2\right)^k$$

şeklinde kuvvet serisine genişletilmiştir.

Burada katsayılar $a_{1/2,k}(r)$ açık şekilde

$$a_{1/2,0}(r)=\frac{\sin r}{r},\quad a_{1/2,1}(r)=\frac{\sin r-r\cos r}{2r^3}$$

$$a_{1/2,k+1}(r)=\frac{2k+1}{2(k+1)r^2}a_{1/2,k}(r)-\frac{1}{4k(k+1)r^2}a_{1/2,k-1}(r)\quad k\in\{1,2,...\}$$

şeklindedir.

Bunlara ek olarak $\beta_{1/2}(r)$ in kök olduğu durumda katsayılar $a_{1/2,k}(r)$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} a_{1/2,k}(r) r^{2k} = 1$$

şeklindedir.

Yukarıdaki Sonuçlar 3.1.13-3.1.15 Zhu'nun (Zhu, 2008) çalışmasındaki Teorem 8 ve Teorem 9'un sonucuna eş değerdir.

Yukarıda verilen Sinüs fonksiyonunda $r = \pi/2$ alınırsa

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k \ge 0} b_k \left(\pi^2 - 4x^2\right)^k$$

eşitliği elde edilir. Burada katsayılar $k \in \{1, 2, ...\}$ için

$$b_0 = \frac{2}{\pi},\ b_1 = \frac{1}{\pi^3},\ b_{k+1} = \frac{2k+1}{2(k+1)\pi^2} b_k - \frac{1}{16k(k+1)\pi^2} b_{k-1}$$

şeklindedir (Zhu, 2008).

<u>Sonuç 3.1.16:</u> (3.1.12) ve (3.1.13) de $r = j_{p,1}$ alınırsa $0 < x \le j_{p,1}$ birinci çeşit Bessel fonksiyonları için

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{j_{p,1}}\right)^p \frac{J_{p+k}(j_{p,1})}{2^k k!\, j_{p,1}^k} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^k + \left(\frac{x}{\zeta}\right)^p \frac{J_{p+n+1}(\zeta)}{2^{n+1}(n+1)!\,\zeta^{n+1}} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^{n+1} \quad (3.1.15)$$

eşitliği doğrudur. Burada $\zeta \in \left(x, j_{p,1}\right)$ dır. Dolayısıyla yeni seri

$$J_p(x) = \sum_{n \ge 1} \left(\frac{x}{j_{p,1}}\right)^p \frac{J_{p+n}(j_{p,1})}{2^n n!\, j_{p,1}^n} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^n \quad (3.1.16)$$

şeklindedir. Yeni seride $j_{p,1}$, J_p nin birinci köküdür.

Teorem 3.1.17: $p > -1$ ve $0 < x \le r$ koşulları altında

$$P_{p,n}(x) + \varepsilon_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \le \mathcal{I}_p(x) \le P_{p,n}(x) + \delta_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \tag{3.1.17}$$

kesinleşmiş Jordan eşitsizliği doğrudur. Burada $c_{p,k}(r)$ lar n çift doğal sayısı için

$$c_{p,k}(r) = \frac{(-1)^k \mathcal{I}_{p+k}(r)}{4^k k!(p+1)_k} \tag{3.1.18}$$

şeklindedir. Daha açık bir şekilde $k \in \{0,1,...,n+1\}$ için

$$c_{p,0}(r) = \mathcal{I}_p(r),$$
$$c_{p,1}(r) = -\frac{1}{4(p+1)}\mathcal{I}_{p+1}(r)$$

$$c_{p,k+1}(r) = \frac{p+k}{(k+1)r^2}c_{p,k}(r) + \frac{1}{4k(k+1)r^2}c_{p,k-1}(r) \tag{3.1.19}$$

olmak üzere

$$P_{p,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{p,k}(k)\left(r^2 - x^2\right)^k$$

şeklindedir. Eşitsizlik (3.1.17)'de n tek doğal sayı olduğunda tersine çevrilir ve her iki durumda da sabitler

$$\varepsilon_p(r) = c_{p,n+1}(r) \text{ ve } \delta_p(r) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{n} c_{p,k}(r) r^{2k}}{r^{2(n+1)}}$$

şeklindedir. Buna ek olarak $\zeta \in (x,r)$ ye bağlı olarak

$$\mathcal{I}_p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{p,k}(k)\left(r^2 - x^2\right)^k + \frac{(-1)^{m+1}\mathcal{I}_{p+m+1}(\zeta)}{4^{m+1}(m+1)!(p+1)_{m+1}}\left(r^2 - x^2\right)^{m+1} \tag{3.1.20}$$

veya

$$\mathcal{I}_p(x) = \sum_{m\geq 0} c_{p,m}(r)\left(r^2 - x^2\right)^m \tag{3.1.21}$$

kuvvet serileri elde edilir (Baricz ve Wu, 2009).

<u>Sonuç 3.1.18:</u> (3.1.17) eşitsizliğinde $p = 1/2$ alınırsa

$$\mathcal{I}_{1/2}(x) = \frac{\sinh x}{x} \quad \text{ve} \quad \mathcal{I}_{3/2}(x) = -3\left(\frac{\sinh x}{x^3} - \frac{\cosh x}{x^2}\right)$$

fonksiyonları için $0 < x \leq r$ olması durumunda

$$P_{1/2,n}(x) + \varepsilon_{1/2}(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \leq \frac{\sinh x}{x} \leq P_{1/2,n}(x) + \delta_{1/2}(r)\left(r^2 - x^2\right)^{n+1} \tag{3.1.22}$$

kesinleşmiş Jordan eşitsizliği doğrudur. Burada n çift doğal sayı, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ve katsayılar $c_{1/2,k}(r)$

$$c_{1/2,0}(r) = \frac{\sinh r}{r}, \quad c_{1/2,1}(r) = \frac{\sinh r - r\cosh r}{2r^3}$$
$$c_{1/2,k+1}(r) = \frac{2k+1}{2\left(k+1\right)r^2} c_{1/2,k}(r) + \frac{1}{4k\left(k+1\right)r^2} c_{1/2,k-1}(r)$$

olmak üzere

$$P_{1/2,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{1/2,k}(r)\left(r^2 - x^2\right)^k$$

şeklindedir.

Bunlara ek olarak katsayılar

$$\varepsilon_{1/2}(r) = c_{1/2,n+1}(r) \quad \text{ve} \quad \delta_{1/2}(r) = \frac{1-\sum_{k=0}^{n} c_{1/2,k}(r) r^{2k}}{r^{2(n+1)}}$$

dir. Ayrıca n tek sayı iken (3.1.22)'nin tersi doğrudur.

Sonuç 3.1.19: (3.1.20) ve (3.1.21)'de $r = j_{p,1}$ seçilip $0 < x \leq j_{p,1}$ için birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonları için

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{x}{j_{p,1}}\right)^p \frac{(-1)^k I_{p+k}(j_{p,1})}{2^k k! \, j_{p,1}^{\;k}} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^k + \left(\frac{x}{\zeta}\right)^p \frac{(-1)^{m+1} I_{p+m+1}(\zeta)}{2^{m+1}(m+1)! \, \zeta^{m+1}} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^{m+1}$$

eşitliği doğrudur. Burada $\zeta \in \left(x, j_{p,1}\right)$ için genişletilmiş yeni seri

$$I_p(x) = \sum_{m \geq 0} \left(\frac{x}{j_{p,1}}\right)^p \frac{(-1)^m I_{p+m}(j_{p,1})}{2^m m! \, j_{p,1}^m} \left(j_{p,1}^2 - x^2\right)^m \tag{3.1.23}$$

şeklindedir.

Baricz ve Wu, Niu'nun (Niu, 2007) çalışmasından yola çıkarak birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Teorem 3.1.11 ve 3.1.17'deki eşitsizlikleri hem genelleştirmiş hem de iyileştirmiştir. Baricz ve Wu'nun aşağıdaki teoremi daha önceki (Baricz, 2007) ve (Baricz, 2008b) çalışmalarındaki sonuçları önemli ölçüde iyileştirilir. Örneğin $b = c = 1$ alındığında Teorem 3.1.20, Teorem 3.1.11'e ve $b = 1,\ c = -1$ alınırsa Teorem 3.1.20, Teorem 3.1.17'e dönüşür.

Teorem 3.1.20: $\kappa > 0 \ \ c \in [0,1]$ ve $0 < x \le r \le j_{\kappa,1}$ şartları altında

$$G_{p,m}(x) + \varpi_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{m+1} \le \lambda_p(x) \le G_{p,m}(x) + \tau_p(r)\left(r^2 - x^2\right)^{m+1} \qquad (3.1.24)$$

kesinleşmiş Jordan eşitsizliği doğrudur. Burada

$$G_{p,m}(x) = \sum_{i=0}^{m} d_{p,i}(r)\left(r^2 - x^2\right)^i$$

şeklindedir. $G_{p,m}$ deki $m \in \mathbb{N}$, $d_{p,i}(r)$ katsayıları

$$d_{p,i}(r) = \left(\frac{c}{4}\right)^i \frac{\lambda_{p+i}(r)}{i!(\kappa)_i} \quad i \in \{0,1,...,m+1\}$$

veya daha açık şekilde $i \in \{1,2,...,n\}$ için

$$d_{p,0}(r) = \lambda_p(r),$$
$$d_{p,1}(r) = \frac{c}{4\kappa}\lambda_{p+1}(r),$$

$$d_{p,i+1}(r) = \frac{\kappa + i - 1}{(i+1)r^2} d_{p,i}(r) - \frac{c}{4i(i+1)r^2} d_{p,i-1}(r)$$

dir. Bununla birlikte eğer $c \le 0,\ 0 < x \le r$ ve m çift sayı alınırsa (3.1.24) Jordan eşitsizliği doğru olur. Eğer $c \le 0,\ 0 < x \le r$ ve m tek sayı alınırsa (3.1.24) Jordan eşitsizliğinin tersi doğrudur. Her bir durum için de sabitler

$$\varpi_p(r) = d_{p,m+1}(r) \ \text{ ve } \ \tau_p(r) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{m} d_{p+1}(r) r^{2k}}{r^{2(m+1)}}$$

şeklindedir.

Bunlara ek olarak $c \le 1 \ \ \zeta \in (x,r)$ için

$$\lambda_p(x)=\sum_{i=0}^{m} d_{p,i}(r)\left(r^2-x^2\right)^i+\frac{c^{m+1}\lambda_{p+m+1}(\zeta)}{4^{m+1}(m+1)!(\kappa)_{m+1}}\left(r^2-x^2\right)^{m+1}$$

eşitliği doğrudur. Dolayısıyla

$$\lambda_p(x)=\sum_{m\geq 0} d_{p,m}(r)\left(r^2-x^2\right)^m$$

olur (Baricz ve Wu, 2009).

<u>Sonuç 3.1.21:</u> Baricz (Baricz, 2008) çalışmasında, Niu'nun (Niu, 2007) sonuçlarını elde etmiştir. (Baricz 2007, Teorem 14) de (3.1.24) eşitsizliği $m=n-1$ için ispatlanmıştır. Bununla birlikte Teorem 3.1.6'da $c\in[0,1]$ olması durumunda $\kappa\geq 1/2$ ve $r\leq \pi/2$ koşulları vardı ancak Teorem 3.1.20'de bu şartlar biraz daha esnetilmiş $\kappa>0$ ve $r\leq j_{\kappa,1}$ olmuştur. Çünkü

$$1.570796327=\pi/2=j_{-1/2,1}<2.4048255577=j_{0,1}<j_{\kappa,1}$$

doğrudur. Yani $(0, j_{\kappa,1}]$ aralığı $(0,\pi/2]$ aralığından daha geniştir. (Niu, 2007) deki yaklaşım Zhu'nun (Zhu, 2008) ve (Zhu, 2009) çalışmalarındaki verilerden biraz farklı olduğundan eşitsizlik (3.1.14) ve eşitsizlik (3.1.24) arasındaki bağıntı $m=n-1$ formu için açık değildir. Bunun nedeni (Zhu, 2008) ve (Zhu, 2009)'deki katsayıların tekrarlanarak tanımlanması; (Niu, 2007)'de açıkça belirtilmesidir. Bununla birlikte Teorem 3.1.20'de $p=-1/2$ ve $b=c=1$ alınırsa (3.1.14) eşitsizliğinin (3.1.24)'ün özel hali olduğu görülebilir. Genelleştirilmiş birinci çeşit Bessel fonksiyonunda $b=2$ ve $c=1$ alınırsa $j_p(x)=\sqrt{\pi/(2x)}J_{p+1/2}(x)$ birinci çeşit küresel Bessel fonksiyonu elde edilir. Burada λ_p fonksiyonu

$$\mathcal{J}_{p+1/2}(x)=2^{p+1/2}\Gamma\left(p+3/2\right)x^{-(p+1/2)}J_{p+1/2}(x)$$

fonksiyonuna indirgenir.

Benzer şekilde $b=2$ ve $c=-1$ aldığında

$$i_p(x)=\sqrt{\pi/(2x)}I_{p+1/2}(x)$$

birinci çeşit Modifiye Küresel Bessel fonksiyonu elde edilir. λ_p fonksiyonu da

$$\mathcal{I}_{p+1/2}(x)=2^{p+1/2}\Gamma\left(p+3/2\right)x^{-(p+1/2)}I_{p+1/2}(x)$$

fonksiyonuna indirgenir.

Eğer Teorem 3.1.20'de $b=2$ ve $c=\pm 1$ alınırsa birinci çeşit küresel ve modifiye küresel Bessel fonksiyonları için Teorem 3.1.11 ve 3.1.17'ye karşılık gelen sonuçlar elde edilebilir (Baricz, 2010).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle klasik trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için Jordan eşitsizliği bütün hatlarıyla sunuldu. Bu sunum yapılırken Jordan eşitsizliğinin gerek genelleştirmeleri gerekse iyileştirmeleri tarihi seyir içinde verilmiştir. Daha sonra birinci çeşit Bessel fonksiyonları ve genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için Jordan tipli eşitsizliklerin iyileştirmeleri ve genelleştirmeleri ile birlikte yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Bu çalışmadan esinlenerek bazı araştırmacılar diğer özel fonksiyonlar (Struve, Lommel, Wright, Mittag-Leffler, v.s) için gerek Jordan gerekse diğer eşitsizlikler üzerinde yapılan çalışmaları bir tez çalışması olarak yapabilir.

KAYNAKÇA

Abel, U. and Caccia, D. (1986). A sharpening of Jordan’s inequality. The American Mathematical Monthly, 93(7), 568-569.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965). Handbook of mathematical function with formulas, graps and mathematical tables. New York Dover publications.

Agarwal, R. P., Kim, Y. H. and Sen, S. K. (2009). A new refined Jordan’s inequality and its application. Mathematical Inequalities and Applications, 12(2), 255–264.

Anderson, G. D., Vamanamurthy M. K. and Vuorinen M. K. (1993). Inequalities for quasicon formal mappings in space. Pacific J. Math., 160(1), 1-18.

Baricz, A. (2007). Some inequalities involving generalized Bessel functions. Math. Inequal. Appl., 10(4), 827–842.

Baricz, A. (2008a). Geometric properties of generalized Bessel functions. Pulb. Math. Debrecen, 73, 155-178.

Baricz, A. (2008b). Jordan-type inequalities for generalized Bessel functions. J. Inequal. Pure Appl. Math., 9(2), 39-6.

Baricz, A. (2008c). Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind. Expo. Math., 26(3), 279-293.

Baricz, A. (2010). Generalized Bessel Functions of the First Kind. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 206.

Baricz, A. and Wu, S. (2009). Sharp Jordan-type inequalities for Bessel functions. Publ. Math. Debrecen, 74, 107–126.

Bercu, G. (2017). The Natural Approach Of Trigonometric Inequlities. Pad´e Approximant. Journal of Mathematical Inequalities, 11(1), 181–191.

Bhayo, B. A. and Sandor, J. (2016). On Jordan’s and Kober’s inequality. Acta Et Commentatıones Universitatis Tartuensis De Mathematica, 20(2), 111-116.

Cheng, J. X. and Deng, J. E. (2008). Extension of Jordan inequality. China Science and Technology Information, Chinese 8, 13-36.

Debnath, L. and Hao, Z. (2003). New strengthened Jordan's inequality and its applications. Appl. Math. Lett., 16, 557-560.

Debnath, L., Mortici, C. and Zhu, L. (2015). Refinements of Jordan–Steckin and Becker–Stark Inequalities. Results in Math., 67, 207-215.

Deng, K. (1995). The noted Jordan's inequality and its extensions. Journal of Xiangtan Mining Institute, 10(4), 7(14), 60-63.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2000). Tables of Integrals, Series, and Products, 6th ed. San Diego, Ca Academic Press.

Jiang, W. D. and Yun, H. (2006). Sharpening of Jordan's inequality and its applications. J. Inequal. Pure Appl. Math., 7(3),102, 1-4.

Klen, R., Visuri, M. and Vuorinen, M. (2010). On Jordan type inequalities for hyperbolic functions, Journal of Inequalities and Applications, 362548,14.

Kober, H. (1944). Approximation by integral functions in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc., 56(22), 7–31.

Li, J. L. (2006). An identity related to Jordan's inequality. International Journal of Mathematics and Mathematical Sci., 76782, 6.

Lv, Y., Wang, G. and Chu, Y. (2012). A note on Jordan type inequalities for hyperbolic functions. Applied Mathematics Letters, 25(3), 505–508.

Mitrinovic, D. S. (1970). Analytic Inequalities. Berlin Springer–Verlag.

Neuman, E. (2004). Inequalities involving Bessel functions of the first kind. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(4), 94, 1–4.

Neuman, E. and Sandor, J. (2010). On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker, and Huygens inequalities. Mathematical Inequalities and Applications, 13(4), 715–723.

Nishizawa, Y. (2015). Sharpening of Jordan’s type and Shafer–Fink’s type inequalities with exponential approximations. General Education, Ube National College of Technology, Tokiwadai 2-14-1, Ube, Yamaguchi 755-8555, Japan.

Niu, D. W. (2007). Generalizations of Jordan’s Inequality and Applications. M.Sc. Thesis, Henan Polytechnic University.

Niu, D. W., Cao, J. and Qi, F. (2010). Generalizations of Jordan's inequality and concerned relations. U.P.B. Sci. Bull., Series A, 72(3), 1223-7027.

Niu, D. W., Huo, Z. H., Cao, J. and Qi, F. (2008). A general refinement of Jordan’s inequality and a refinement of L. Yang’s inequality. Integral Transforms and Special Functions, 19(3-4), 157–164.

Özban, A. (2006). A new refined form of Jordan’s inequality and its applications. Appl. Math. Lett., 19, 155–160.

Qi, F. (1996). Extensions and sharpenings of Jordan’s and Kober’s inequality. Journal of Mathematics for Technology, Chinese, 12(4), 98-102.

Qi, F. and Guo, B. N. (1993). On generalizations of Jordan’s inequality. Coal Higher Education, supplement Chinese, 32-33.

Qi, F. and Guo, B. N. (1994). The estimation of inferior bound for an ellipse integral. Journal of Mathematics for Technology, 10(1), 7(32), 87-90.

Qi, F. and Hao, Q. D. (1998). Refinements and sharpenings of Jordan’s and Kober’s inequality. Mathematics and Informatics Quarterly, 8(3), 116-120.

Qi, F., Niu, D. W. and Cao, J. (2007). A general generalization of Jordan’s inequality and a refinement of L. Yang’s inequality. RGMIA Research Report Collection, 10(3), supplement.

Sandor, J. (2005). On the concavity of sinx/x. Octogon Math. Mag., 13(1) 406-407.

Şahin, R. (2011). Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi.

Watson, G. N. (1944). A Treatise on the theory of Bessel function. Cambridge University.

Wu, S. H. (2008). Sharpness and generalization of Jordan's inequality and its application. Taiwanese Journal of Mathematics, 12(2), 325-336.

Wu, S. H. and Debnath, L. (2006). A new generalized and sharp version of Jordan's inequality and its applications to the improvement of the Yang Le inequality. Applied Mathematics Letters,19(12), 1378–1384.

Wu, S. H. and Srivastava, H. M. (2008). A further refinement of a Jordan type inequality and its application. Applied Mathematics and Computation. 197(2), 914–923.

Wu, S. H., Srivastava, H. M. and Debnath, L. (2008). Some refined families of Jordan-type inequalities and their applications. Integral Transforms and Special Functions, 19(3-4), 183–193.

Yang, Z. H. (2012). New Sharp Jordan Type Inequalities and Their Applications. arXiv: 1206.5502v1 [math.CA], 10p.

Yang, Z. H. (2013). New sharp bounds for logarithmic mean and identric mean. Journal of Inequalities and Applications, article 116.

Yang, Z. H. and Chu, Y. M. (2015). Jordan Type Inequalities for Hyperbolic Functions and Their Applications. Journal of Function Spaces, 370979, 4.

Yu, L. Q., Qi, F. and Guo, B. N. (1995). Estimates for upper and lower bounds of a complete elliptic integral. Mining, no. 1 Chinese, 35-38.

Zhang, X., Wang, G. and Chu, Y. (2006). Extensions and sharpenings of Jordan's and Kober's inequalities. J. Inequal. Pure Appl. Math., 7(2), Article 63(3) .

Zhu, L. (2006a). Sharpening Jordan's inequality and Yang Le inequality II. Applied Mathematics Letters, 19(9), 990-994.

Zhu, L. (2006b). Sharpening of Jordan's inequalities and its applications. Mathematical

Inequalities and Applications, 9(1), 103-106.

Zhu, L. (2008). A general form of Jordan's inequality and its applications. Math. Inequal. Appl., 11(4), 655–665.

Zhu, L. (2009). General forms of Jordan and Yang Le inequality. Appl. Math. Lett., 22(2), 236–241.

Zhu, L. (2010). Inequalities for hyperbolic functions and their applications. Journal of Inequalities and Applications. Article ID 130821,10.

Zhu, L. (2011). An extended Jordan's inequality in exponential type. Applied Mathematics Letters, 24,1870-1873.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Rabia ATIŞ

Doğum Yeri ve Tarihi : Kars/Kağızman 02.09.1993

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : rabiamat1993@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kağızman Anadolu Lisesi 2007-2011

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi (2011-2015)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi (2016-2019)

Çalıştığı Kurumlar : KARS-İntegral Özel Öğretim Kursu (2018-2019)

: KAĞIZMAN-Kağızman Final Özel Öğretim Kursu (2019-…)