T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

20. YÜZYILIN BİR MATEMATİK PROBLEMİ: BİEBERBACH VARSAYIMI

Yüksel TOKKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

20. YÜZYILIN BİR MATEMATİK PROBLEMİ: BİEBERBACH VARSAYIMI

Yüksel TOKKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yüksel TOKKAN'ın Prof. Dr.Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "**20. Yüzyılın Bir Matematik Problemi: Bieberbach Varsayımı**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Oy birliği ile kabul edilmiştir.

22/08/2019

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan	**:Prof. Dr. İsa YILDIRIM**	....
Üye	**:Prof. Dr. Erhan DENİZ**	....
Üye	**:Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü YönetimKurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . /. . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

EnstitüMüdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yüksel TOKKAN

22.08.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

20. Yüzyılın Bir Matematik Problemi: Bieberbach Varsayımı

Yüksel TOKKAN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, yüzyılın önemli bir matematik problemi olarak anılan ve adına Bieberbach varsayımı denilen aslında basit bir problem olarak görünen fakat çözümü oldukça zor olan analitik ve ünivalent olan bir fonksiyonun açık birim diskteki katsayıları kompleks olan kuvvet serisinin genel katsayısının kesin üst sınırını bulma üzerine yapılan tüm çalışmaların bir tarihsel serüveni verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Katsayı sınırı, Subordinasyon, Löewner diferensiyel denklemi, Hipergeometrik fonksiyon.

2019, 92 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

A math problem of the twentieth century, Bieberbach Estimate

Yüksel TOKKAN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis study, it is known as the math problem of the century so called Bieberbach estimate such that finding its solution is very hard while the solution is an analitic and univalent function. So in the study, literature information for the sharp upper bound estimate of complex coefficents for the power series when these analytic and univalent fuctions are expanded info is given.

Key Words: Analytic function, Univalent function, Coefficient Bound, Subordinasyon, Löewner differential equation, Hypergeometric function.

2019, 92 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasında 20. Yüzyılın Bir Matematik Problemi: Bieberbach Varsayımı probleminin çözümü ele alınmıştır. Bu çalışmada büyük emeği geçen, bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ' e en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bugüne gelmemde en büyük destekçilerim olan ve her zaman yanımda bulunan sevgili aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksel TOKKAN
Kars-2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\Re ef(z)$	$f(z)$ fonksiyonun reel kısmı
$\Im mf(z)$	$f(z)$ fonksiyonun sanal kısmı
D	Açık birim disk
A	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
S	Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı
S^*	Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı
C	Konveks fonksiyonların sınıfı
F_n	n.dereceden Faber polinomu
$P_n^k(x)$	$k.$ mertebeden ve $n.$ dereceden Ferrer yardımcı Legendre fonksiyonu
$Aut(D)$	D Birim diskinin dışı

TABLOLAR DİZİNİ

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli dallarından biri hiç kuşkusuz ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Bu teorideki en önemli problem de açık birim diskte kuvvet serisi ile verilen analitik ve ünivalent olan bir fonksiyonun katsayılarının kesin üst sınırını belirlemek olmuştur. Unutulmamalıdır ki, katsayı problemini en önemli kılan sebep katsayının fonksiyonun geometrisi üzerindeki rolüdür. Bu probleme ilk adımı 1916 yılında Alman matematikçi Ludwig Bieberbach atmıştır. O çalışmasında açık birim diskte katsayıları kompleks olan analitik ve ünivalent

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n + ...$$

şeklindeki fonksiyonlar için $|a_2| \leq 2$ olduğunu ispatlamış ve 2 sınırının kesin olduğunu belirtmiştir. Aynı çalışmada Bieberbach böyle fonksiyonlar için $|a_n| \leq n \ \ (n = 2, 3, \cdots)$ varsayımını (tahminini, konjectür) açık problem olarak ortaya atmıştır. Matematik dünyasında onun tahmini yaklaşık 70 yıl içinde dünyanın en iyi araştırması olarak gösterilir. Matematik dünyasının önde gelen matematikçileri bu tahminin ispatının yapılıp yapılamayacağının çok zor olduğu hatta böyle bir tahminin yanlış olduğunu düşünmekteydiler. Birçok araştırmacı matematik kariyerlerini bu tahmini çözmeyi denerken oluşturmuş hatta meşhur olmuştur. Bu tahmin geometrik fonksiyonlar teorisinde birçok gelişmeye de öncelik etmiştir. Öyle ki bu tahmini ispatlamaya çalışırken matematiğe birçok yeni metotlar ve tahminle alakalı birçok yeni problemler kazandırılmıştır.

Tahmin uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1984 yılına kadar bu tahmin sadece a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 katsayıları için ispatlanmıştır.

Öyle ki;

ADI	YILI	$\lvert a_n \rvert \le C_n = \sup \lvert a_n \rvert$
Bieberbach	1916	$\lvert a_2 \rvert \le 2$
Löwner	1923	$\lvert a_3 \rvert \le 3$
Garabedian ve Schiffer	1955	$\lvert a_4 \rvert \le 4$
Pederson ve Schiffer	1972	$\lvert a_5 \rvert \le 5$
Pederson ve Ozawa	1968	$\lvert a_6 \rvert \le 6$

Tablo 1.

tahminleri doğrulanmıştır. Diğer taraftan yukardaki matematikçilerden farklı olarak bir çok matematikçi de tüm $n = 2, 3, \cdots$ değerleri için $\sup \lvert a_n \rvert$ yi bulmak için çokça çaba harcamıştır. Yaklaşık 70 yıllık serüvende $\sup \lvert a_n \rvert$ için aşağıda verilen tablodaki sonuçlar elde edilmiştir.

ADI	YILI	$\lvert a_n \rvert \le C_n = \sup \lvert a_n \rvert$
Littlewood	1923	$\lvert a_n \rvert < en \approx 2.7183n$
Landau	1929	$\lvert a_n \rvert < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)en \approx 2.2244n$
Goluzin	1946	$\lvert a_n \rvert < \frac{3}{4}en \approx 2.0388n$
Bazilevich	1947	$\lvert a_n \rvert < \frac{9}{4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + 0,2649\right)n \approx 1.9240n$
Milin	1949	$\lvert a_n \rvert < \frac{1}{2}en + 1.80 \approx 1.3592n + 1.80$
Bazilevich	1949	$\lvert a_n \rvert < \frac{1}{2}en + 1.51 \approx 1.3592n + 1.51$
Milin	1964	$\lvert a_n \rvert < \frac{\left(e^{1.6}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1.6}n \approx 1.2427n$
FitzGerald	1971	$\lvert a_n \rvert < \sqrt{\frac{7}{6}}n \approx 1.0802n$
Horowitz	1976	$\lvert a_n \rvert < \left(\frac{209}{140}\right)^{\frac{1}{6}} n \approx 1.0691n$
Horowitz	1978	$\lvert a_n \rvert < \left(\frac{1.659.164.137}{681.080.400}\right)^{\frac{1}{14}} n \approx 1.0657n$

Tablo 2.

Nihayet 1984 yılında L. De Branges [1] tarafından tüm $n = 2, 3, \cdots$ değerleri için $|a_n| \leq n$ ispatlanmıştır. Sonuç olarak yaklaşık 70 yıldır yüzlerce matematikçiyi zorlayan Bieberbach Tahmini 1984 yılında Louis De Branges tarafından çözülmüştür. De Branges problemi çözdüğünde 52 yaşında ve Purdue Üniversitesinde çalışmaktaydı.

Aslında Bieberbach tahminin doğruluğu 1936 yılında Robertson tarafından öne sürülen bir tahmine dayanıyor. Bu tahmin bazı özel değerler için ispatlansa da genel doğruluğu ispatlanamamıştır. Daha sonraki yıllarda görüldü ki; Robertson tahmininin doğruluğu da 1971 yılında Rus matematikçi Milin tarafından bir açık problem olarak ortaya atılan bir eşitsizliğin doğruluğuna dayanıyordu. Yani asıl problem Milin eşitsizliğini (tahminini) ispatlamaktı. De Branges, Milin tahminine dolayısıyla Bieberbach tahmini üzerine 7 yıl boyunca çalışmış, nihayetinde 1984 yılının Mayıs ayında ise başarılı olmuştur. O aslında 1971 de Milin tarafından ortaya atılan tahminden daha güçlüsünü ispatladı. Branges yaptığı bu çalışmayı 385 sayfalık bir yazı haline getirmiş ve yazıyı hem Amerikan hemde Sovyetler matematik topluluğuna sunmuştur. Amerikan matematik topluluğundaki matematikçiler sayfa sayısından dolayı yazıyı okumaya pek istekli değildi. Ama Sovyetler matematik topluluğu aynı şeyi düşünmüyordu tam tersine kendisini Rusya'ya davet ettiler. Rus matematikçi Milin ve onun Leningrad'daki meslektaşları Branges'i davet ederek çalışmasını matematikçiler karşısında sunmasını istediler. Louis De Branges çalışmasını Sovyetlerin önde gelen bu matematikçileri karşısında sunarak büyük bir beğeni toplamıştır. Aynı tarihte ispat Amerika matematikçileri tarafından kabul edilmişti. Amerikan matematikçiler bu yazıyı kısaltmasını ve bir makale haline getirmesini istediler. Branges'in yaptığı bu çalışma matematik dünyasının en prestijli dergisi olan Acta Mathamatica dergisinde [2] basılmıştır. Daha sonra Ekim 1985'de FitzGerald ve Pommerenke [3] De Branges teoreminin daha kısa ispatını veren bir bilgi notu yayınladı.

Branges'in ispatından sonra ispatın önemini farklı bakış açılarından daha anlaşılır hale getirmek için birçok makale yazılmıştı. Örneğin 1986 yılında Koornwinder [4] bu ispatın grup teorileri ile ilgili yanlarını araştırdı. O ispatın daha az hesaplamalı ve anlaşılır olmasını istedi. 1991-1992 yıllarında Nikolskii ve Vasyunin [5,6] (3.5) denklemlerinin fonksiyonel analiz açıklamasını verdi. De Branges [7] , Helton ve Weening [8] sistemsel olarak ispatı geliştirdi. Rovneyak [9] ispatın 1989 yılında Krein uzay operatör teorisi ile bazı bağlantılarını yapmıştır. Branges'in ispatından sonra Branges'in orijinal ispatını adım adım basitleştirmek için birkaç makale yayınlamıştır. Fakat hepsinde ortak olarak kullanılan hedef Milin tahmini olmuştur.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Kuramsal temeller bölümünde tez için gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem bölümünde Bieberbach tahmininin ispatı için gerekli olan bilgiler ve kullanılacak olan yöntem ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Üçüncü bölüm yani araştırma bulgularında Bieberbach tahmininin Branges ve Weinstein tarafından yapılan ispatılarına yer verilmiştir.

1.2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bağlamda ilk önce normlu uzay kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 1.2.1 (Normlu Uzay): X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere $\|.\|: X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ile tanımlanan fonksiyon her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde *norm* denir. Oluşan $(X, \|.\|)$ sıralı ikilisine ise *normlu uzay* denir.

Örneğin; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir normdur.

1.2.1. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlar için önemli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1 (Diferensiyellenebilme): $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ olsun. $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olması durumunda

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında *diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir)* denir. Burada limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir. $f'(z_0)$ ifadesi $z = z_0$ noktasındaki f fonksiyonunun türevidir [10].

Tanım 1.2.1.2 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir z_0 noktasında ve z_0 noktasının uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir [10].

Tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara *tam fonksiyon* denir. Örneğin; $f(z) = 2z$, $f(z) = e^z$ ve $f(z) = \sin z$ fonksiyonları tam fonksiyonlardır.

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *singüler (tekil) noktası* denir.

$z = z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu, z_0 merkezli bir kuvvet serisine açılamaz. Fakat $z = z_0$ çıkarılmış singüler nokta civarında $f(z)$ yi $(z - z_0)$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini içinde bulunduran Laurent serisi olarak seri gösterimi aşağıdaki gibi yapılabilir.

z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ve $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n$$

serisine $f(z)$ *fonksiyonunun* z_0 *merkezli Laurent serisi* denir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}$ serisi Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n$ serisi ise Laurent serisinin analitik kısmıdır. z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olduğunda bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisi göz önüne alınsın. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terimi varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun *kutup noktası* denir. Serinin esas kısmında paydadaki $(z-z_0)$ ın en büyük kuvveti 1 ise z_0 noktası f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır.

Analitik fonksiyonların önemini belirten teoremlerden biri Cauchy-Türev formülüdür.

<u>Teorem 1.2.1.3</u> (Cauchy-Türev Formülü): $f(z)$ fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

eşitliği gerçeklenir [11].

Cauchy-Türev formülünden çıkarılabilecek en önemli sonuç: “ $f(z)$ bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler o bölgede analitiktir” dır. Bu durumda $f(z)$ analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Tanım 1.2.1.4 (Meromorf Fonksiyon): Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde *meromorf fonksiyon* denir [10].

Örneğin; $f(z)=e^z/z$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir meromorf fonksiyondur.

Teorem 1.2.1.5 (Maksimum Prensibi): $f(z)$, $E\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini E bölgesinin sınırında alır [11].

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz Lemmasıdır.
Bu tez boyunca orijin merkezli açık birim disk $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ ile gösterilecektir.

Lemma 1.2.1.6 (Schwarz Lemması): $f(z)$ fonksiyonu D birim diskinde analitik bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Eğer D birim diskinde $|f(z)|\le 1$ oluyor ise bu durumda $|f'(0)|\le 1$ ve $|f(z)|\le|z|$ dir. Eşitlik ancak ve ancak ($\theta\in\mathbb{R}$ için) $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için sağlanır [11].

Tanım 1.2.1.7 (Ünivalent Fonksiyon): $f(z)$, $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir analitik fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in B$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) $f(z)$ fonksiyona B bölgesinde *ünivalent (veya schlicht) fonksiyon* denir [12].

Eğer $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna *yerel ünivalent fonksiyon* denir.

Teorem 1.2.1.8: Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeter şart $f'(z_0)\neq 0$ olmasıdır [12].

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı, $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani $f(z)$ analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = z^2$ fonksiyonu $E = \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent fonksiyon değildir.

Tanım 1.2.1.9 (Konform Dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 *noktasında konformdur* denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde *konformdur* denir [10].

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 1.2.1.10: $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu konformdur [12].

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon aynı zamanda konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri de Möbiüs dönüşümüdür. Bu dönüşüm, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

şeklindedir Bu dönüşüm, genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, $z-$ düzlemindeki $D \subset \mathbb{C} (D \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$ düzlemindeki D_1 bölgesi üzerine resmeden f konform fonksiyonunun varlığından söz etmiştir.

Teorem 1.2.1.11 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemde tüm $\mathsf{D} \subset \mathbb{C}(\mathsf{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak D birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathsf{D}$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan D yi D birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [12].

1.2.2. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak düşünüldüğünde, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı $f(z)$ analitik fonksiyonu yerine D de tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılmaktadır. $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, \quad z\in D$$

biçimindeki fonksiyona *normalize edilmiş analitik fonksiyon* denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını A ile gösterilir ve

$$A=\left\{ f:\forall z\in D \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.2.2.1 (S sınıfı): D birim diskinde ünivalent olan $f\in A$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa S *sınıfı* denir ve kısaca

$$S=\{ f\in A:\forall z\in D \text{ için } f-\text{ünivalent}\}$$

biçiminde gösterilir [12-14].

Örneğin; $w=f(z)=\dfrac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\ldots\in S$ fonksiyonu D birim diskini $\{w=u+iv:\Re e\, w>-1/2\}$ kümesine resmeder.

Teorem 1.2.2.2: $f \in S$ olsun. Bu durumda:

i. Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + ...$ ise $g \in S$ dir.

ii. Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \quad (z \in D)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir

iii. Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n \quad (z \in D)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir.

iv. Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in D$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right)}{(1 - |z_0|^2) f'(z)} \quad (z \in D)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir

v. Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(D)$ de ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in S$ dir.

vi. Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(D)$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad (z \in D)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir.

vii. n kök dönüşümü: Eğer $n = 2,3,4,...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2{}^2) z^{2n+1} + ... \quad (z \in D)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir [12].

S sınıfıyla yakından ilişkisi olan başka bir sınıfta birim diskin dışında tanımlı fonksiyonların oluşturduğu sınıftır. Bu sınıfı Σ ile gösterelim. Σ sınıfına ait fonksiyonlar,

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots$$

şeklinde olup, $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ birim diskin dışında analitik ve birebir olan fonksiyonlardan oluşur. Yani kısaca;

$$\Sigma = \left\{ f \,:\, f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},\ \Delta \text{ kümesinde analitik ve ünivalent} \right\}$$

dır. Eğer $f \in S$ ise,

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} \in \Sigma$$

yazılır. Bu durumda

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + a_3 \frac{1}{z^3} + \cdots$$

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)\frac{1}{z} + \cdots \in \Sigma$$

olur.

Teorem 1.2.2.3 (Alan Teoremi): Eğer $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \in \Sigma$ ise, bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^n \leq 1$$

dir [12-14].

İspat: $r > 1$ için C_r ile $|z| = r$ çemberinin $g(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsünü gösterelim. E kümesi de Δ kümesinin $g(z)$ altındaki görüntü kümesi olsun. $g \in \Sigma$ olup yani g ünivalent olduğundan, C_r, $E \subset E_r$ olacak şekilde bir basit kapalı eğri olur.

Green teoreminden E_r'nin alanı

$$A_r = \frac{1}{2i}\int\limits_{C_r} \overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=r} \overline{g(z)}g'(z)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}r^{-n}e^{in\theta}\right\}\left\{1 - \sum_{v=0}^{\infty} vb_v r^{-v-1}e^{-(v+1)\theta}\right\}dre^{i\theta}$$

$$= \pi\left\{r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right\}$$

olup, $r \to 1$ iken

$$M(E) = \pi\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right\}$$

bulunur. Burada $M(E)$, E'nin dış ölçümüdür. $M(E) \geq 0$ olduğundan

$$M(E) = \pi\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right\} \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

<u>Teorem 1.2.2.4</u> (Bieberbach Teoremi 1916): $f \in S$ ise bu durumda $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

için sağlanır [12-14].

<u>İspat:</u> $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \left(\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{3}a_2^2\right)z^5 + \cdots$$

fonksiyonunun S sınıfından olduğu Teorem 1.2.2.2 nin vii şıkkından biliniyor. Diğer taraftan

$$f \in S \Rightarrow \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} \in \Sigma$$

olduğunundan $g \in S$ için

$$g \in S \Rightarrow \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} \in \Sigma$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\phi(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = z + c_1\frac{1}{z} + c_3\frac{1}{z^3} + c_5\frac{1}{z^5} + \cdots$$

olup $\phi \in \Sigma$'dir. Ayrıca alan teoreminden $\phi \in \Sigma$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$$

yazılır. Burada çift terimler sıfır olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 = |c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 3|c_3|^2 + 4|c_4|^2 + 5|c_5|^2 + \cdots$$

$$= |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \cdots \leq 1$$

elde edilir. Buradan $|c_1|^2 = \frac{1}{4}|a_2|^2 \leq 1$ yazılır. Dolayısıyla $|a_2| \leq 2$ bulunur. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu için yazılır. Yani, $|a_2| = 2$ olması ancak ve ancak $f(z)$'nin Koebe fonksiyonu olmasıyla gerçekleşir. Çünkü,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

olduğundan ve $a_2 = 2$ olduğundan eşitlik sağlanır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Tanım 1.2.2.5: Bir eşitsizliğin eşitlik halini sağlayan fonksiyona *ekstramal fonksiyon* denir. Koebe fonksiyonu S sınıfı için bir ekstramal fonksiyondur [12-14].

Bieberbach teoreminin en önemli sonuçlardan birisi Koebe'nin meşhur çeyrek teoremidir. Bu teorem aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.2.2.6 (Koebe Çeyrek Teoremi): S sınıfına ait her fonksiyonun değer kümesi

$$\left\{w : |w| < \frac{1}{4}\right\}$$

diskini içerir [12-14].

İspat: $f \in S$ olduğundan çıkarılmış değer dönüşümünden $w \in \mathbb{C}$ noktasının çıkarılması ile

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} \in S$$

yazılır. $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = \frac{zw + a_2wz^2 + a_3wz^3 + \cdots}{(w - z) - a_2z^2 - a_3z^3 - \cdots}$$

elde edilir. Buradan

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right)z^2 + \ldots \in S$$

yazılır. Bieberbach Teoreminden

$$\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leq 2$$

dir. Bu eşitsizlikten,

$$\left| \left| \frac{1}{w} \right| - |a_2| \right| \leq \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| \leq 2$$

ve dolayısıyla

$$\left| \frac{1}{w} \right| - |a_2| \leq 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{w} \right| \leq 2 + |a_2| \Rightarrow \frac{1}{|w|} \leq 2 + 2 \Rightarrow \frac{1}{|w|} \leq 4 \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{4}$$

bulunur. Bu ise her w çıkarılmış değerinin yarıçapı $\frac{1}{4}$ olan diskin dışında olduğunu gösterir. Bununla teoremin ispatı tamamdır.

Bieberbach Teoreminin en önemli sonuçlarından birisinin Koebe çeyrek teoremi olduğunu gördük. Diğer bir önemli sonucu da, $|f'(z)|$ ve $|f(z)|$ için kesin alt ve üst sınırlarını belirlemektir. Bununla ilgili teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.2.7 (Distortion Teoremi): Her $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1)$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ile sağlanır [12-14].

Teorem 1.2.2.8 (Growth Teoremi): Her $f \in S$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1)$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin Koebe fonksiyonu olmasıdır [12-14].

Yukarıdaki teoremlerden görüldüğü üzere 1984 yılına kadar S sınıfına ait birçok problem çözülmüşken çözülemeyen tek bir problem kalmışdı. O da

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in S$$

fonksiyonu için;

''Bieberbach Varsayımı (Bieberbach 1916): $f\in S \Rightarrow |a_n|\leq n$ dir. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu için sağlanır.''

problemidir.

1.2.3. Ünivalent Fonksiyonların Temel Sınıfları

Bu bölümde S sınıfının önemli bazı alt sınıfları tanımlanacaktır.

Tanım 1.2.3.1 (P Sınıfı): D birim diskinde $f(0)=1, \Re e\, f(z)>0$ koşullarını sağlayan $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *Caratheodory sınıfı* veya P *sınıfı* denir [12].

Örneğin; $f(z)=(1+z)/(1-z)$ $\left(z\in D\right)$ fonksiyonu P sınıfına ait olup bu fonksiyon D birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden konform bir dönüşümdür. P sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 1.2.3.2 (Ω Sınıfı): D birim diskinde $f(0)=0$ ve $\left|f(z)\right|<1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *Schwarz fonksiyonlarının sınıfı* denir ve Ω ile gösterilir [12].

Ayrıca P sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda gösterilen bir ilişki vardır:

$$p(z) \in \mathrm{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)}, \quad f(z) \in \Omega .$$

<u>Tanım 1.2.3.3</u> (S^* sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 *noktasına göre yıldızıl küme* denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye *orijine göre yıldızıl küme* veya kısaca *yıldızıl küme* denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, D birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. $f(z)$ fonksiyonu D birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna kısaca *yıldızıl fonksiyon* denir. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir [12-14].

<u>Teorem 1.2.3.4:</u> $f \in S$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathrm{P}$$

dir [12-14].

Kısaca yıldızıl fonksiyonlar için

$$S^* = \left\{ f \in S : \forall z \in D \text{ için } \Re\mathrm{e}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

yazılabilir.

Teorem 1.2.3.4 ün kısa bir ispatına değinelim. Ω ailesi D birim diskinin $f(z)$ ünivalent yıldızıl analitik fonksiyonu altında görüntüsü olsun. Bu durumda herhangi t için $0 < t < 1$, $t\, f(z) \in \Omega$ olur. $t\, f(z) = f\left[w(z)\right]$ olacak şekilde $\left|w(z)\right| \le 1$ ile D birim diski üzerinde analitik olan bir $w(z)$ fonksiyonu vardır. Açıktır ki $w(0) = 0$ dır. Schwarz lemmasından $\left|w(z)\right| \le |z|$ elde edilir. $0 < p < 1$ olsun ve $g(z) = f(pz)$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu durumda

$$tg(z)=tf(pz)=f\left[w(pz)\right]=f\left[p\frac{w(pz)}{p}\right]$$

bulunur. Kolaylıkla $w_1(z)=\dfrac{w(pz)}{p}$ fonksiyonunun $|w_1(z)|\le|z|$ şartını sağladığı görülür. Böylece $tg(z)=g\left[w_1(z)\right],\ |w_1(z)|\le|z|,\ 0<t<1$ olur. $g(z)$ yıldızıl bir dönüşümdür. Yani $f(z)$ fonksiyonu $|z|<p$ yi yıldızıl bir bölgeye resmeder. $|z|=p$ yi yıldızıl bir eğriye resmeden $f(z)$ fonksiyonu yıldızıl bir bölgenin sınırıdır. $z=pe^{i\theta}$, $|z|=p$ dairesi ile aynı yönde haraket ettiğinde $f(z)=Re^{i\phi}$ yalnızca tek yönde haraket edebilir. Başka bir deyişle orjinden geçen bir ışın, birden fazla nokta olması durumunda bu fonksiyonu kesecektir. Bu durum analitik olarak aşağıdaki şekilde yazabilir:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(z)\}=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ge 0.$$

Tersine, eğer yukarıdaki koşullar sağlanırsa eğri yıldızıl bir eğridir. Fakat $\log f(z)=\log R+i\phi$ fonksiyonu için yukarıdaki koşul aşağıdaki eşitsizliğe eşittir.

$$\Im m\left\{\frac{\partial\log f(z)}{\partial\theta}\right\}\ge 0.$$

Dolayısıyla p için,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=pe^{i\theta}\frac{d}{dz}=iz\frac{d}{dz}$$

elde edilir.

Böylece $\Im m\left\{iz\dfrac{d}{dz}\log f(z)\right\}=\Re e\left\{\dfrac{z\,f'(z)}{f(z)}\right\}\ge 0$ bulunur.

Örneğin; $z\in D$ olmak üzere $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}\in S^*$ dır. Burada verilen $k(z)$ fonksiyonuna *Koebe fonksiyonu* denir.

Tanım 1.2.3.5 (C Sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa (yani B, her noktasına göre yıldızıl ise) B ye *konveks küme* denir. Eğer bir f fonksiyonu, D birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [12-14].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.3.6: $f \in S$ olmak üzere

$$f \in \mathrm{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathrm{P}$$

dir [12-14].

Bu teoreme göre C sınıfı

$$\mathrm{C} = \left\{ f \in S : \forall z \in D \text{ için } \Re e\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 1.2.3.6 nın kısa bir ispatı şu şekilde verilebilir. Eğer f fonksiyonu D birim diskini konveks bir bölgeye resmediyorsa o halde f fonksiyonu herhangi $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r,\ r < 1\}$ birim diskini konveks bir bölgeye resmeder. Herhangi $|z_1| \le |z_2| \le r$ şartını sağlayan z_1 ve z_2 noktaları için $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ ve $w_0 = tw_1 + (1-t)w_2,\ 0 < t < 1$ olsun. f fonksiyonu $|z| < 1$ i konveks bir bölgeye resmettiği için $f(z_0) = w_0$ olacak şekilde $|z| < 1$ de bir z_0 noktası vardır. Şimdi $|z_0| < r$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $g(z) = tf(z_1 z / z_2) + (1-t) f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon D birim diski üzerinde analitik ve $g(0) = 0,\ g(z_2) = w_0$ şeklindedir. $h(z) = f^{-1}(g(z))$ fonksiyonu D üzerinde iyi tanımlı ve $h(0) = 0,\ |h(z)| \le 1$ dir. Schwarz Lemmasından $|h(z)| \le |z|$ olur. Yani, $|z_0| = |h(z_2)| \le |z_2| \le r$ bulunur. f fonksiyonu $|z| = r < 1$ yi konveks bir eğri üzerine resmeder. z, $|z| = r$ dairesi etrafında pozitif yönde haraket ettiği gibi, teğet çizgisinin eğrinin görüntüsüne olan eğimi azalmayandır. Bu durum analitik olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right\}\right) \geq 0$$

veya

$$\Im m\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right]\right\} \geq 0\,.$$

Yani,

$$\Re e\left\{1+\frac{z\,f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0\ ,\ \ |z| = r$$

bulunur.

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \mathrm{C}$ dir.

Teorem 1.2.3.7 (Alexander Teoremi): $f \in S$ ve $z \in D$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathrm{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır [12-14].

1952 yılında, W. Kaplan [12-14] yıldızıl fonksiyon kavramını konveksliğe yakın bir fonksiyona genellemiştir. D de bir $f(z)$ analitik fonksiyonu konveksliğe yakındır. Eğer herhangi $z \in D$ için bir $g(z)$ yıldızıl fonksiyonu varsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\Re e\left\{z\,\frac{f'(z)}{g(z)}\right\} > 0.$$

Bu eşitsizliğin Teorem 1.2.3.4 deki eşitsizliğin bir genelleştirmesi olduğu açıktır.

Alexander Teoreminden, eğer $h(z)$ bir konveks fonksiyon ise bu durumda $g(z) = zh'(z)$ bir yıldızıl fonksiyondur. $\Re e\left\{z\dfrac{f'(z)}{g(z)}\right\} > 0$ şartı bazı $h(z)$ konveks fonksiyonu için $\Re e\left\{\dfrac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0$ şartına eşittir.

Konveksliğe yakın fonksiyonun bir ünivalent fonksiyon olduğunu gösterelim. $h(z)$ konveks fonksiyonu D birim diskini bir H bölgesine resmetsin. $\phi(w) = f(h^{-1}(w))$ olsun. Bu durumda, $w \in H$ için

$$\Re e\,\phi'(w) = \Re e\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0$$

olur. Herhangi iki $w_1, w_2 \in H$ noktaları için,

$$\Re e\left(\frac{\phi(w_2) - \phi(w_1)}{w_2 - w_1}\right) = \int_0^1 \Re e\left\{\phi'\left(w_1 + t\left(w_2 - w_1\right)\right)\right\} dt > 0$$

bulunur. Dolayısıyla, $\phi(w)$ fonksiyonu H da ünivalenttir ve $f(z) = \phi(h(z))$, $|z| < 1$ de ünivalenttir. Böylece konvekse yakın bir fonksiyonun ünivalent olduğu görülür.

Tanım 1.2.3.8: $g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $|z| < 1$ de bir analitik fonksiyon ve $f \in S$ olsun. Eğer g nin görüntüsü f nin görüntüsünü içeriyor ise g ye f için subordinate'dir denir ve $g \prec f$ ile gösterilir. Başka bir deyişle eğer $g \prec f$ ise $g(z) = f(w(z))$ olacak şekilde bir $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ fonksiyonu vardır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Eğer $f(z)$, D üzerinde ünivalent bir fonksiyon ise $\forall z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ 'dır. Bunlara ek olarak $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ normalizasyon şartları eklenirse $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad |z| < 1 \tag{2.1}$$

Taylor açılımına sahiptir.

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots \tag{2.2}$$

Koebe fonksiyonu S 'de önemli bir rol oynar. Koebe fonksiyonu birim diski kompleks düzlemden negatif reel eksen üzerindeki $-1/4$ den sonsuza kadar olan kısmın çıkarıldığı bölgeye dönüştürür. Orjinden bakıldığında doğrudan tüm noktalara bir yol çizilebilir. θ reel olmak üzere $h(z) = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z) \in S$ Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü (rotasyonu) olarak adlandırılır.

Tezin amacı olan Bieberbach varsayımı (tahmini) aşağıda verilmiştir. Bieberbach 1916 yılında $|a_2| \leq 2$ yi ispatlamıştır [15].

Bieberbach Tahmini: (2.1) de herhangi $f \in S$ için, $|a_n| \leq n$ eşitsizliği her $n = 2,3,\ldots$ için sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(z)$ fonksiyonunun bir Koebe fonksiyonu veya Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır.

Katsayıların reel olması durumunda Bieberbah tahmini kolay bir şekilde ispatlanabiliyor. İspat için aşağıdaki lemma ya ihtiyaç duymaktayız.

Lemma 2.1 (Caratheodory): Eğer $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ fonksiyonu D birim diski üzerinde analitik ve pozitif reel kısma sahipse, bu durumda $n = 1,2,\ldots$ için $|c_n| \leq 2$, olur. Eşitlik $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ile sağlanır [12-14].

İspat: $\Re ef(z) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $|1+f(z)| \geq |1-f(z)|$ olmasıdır. $g(z) = \dfrac{f(z)-1}{f(z)+1} = \dfrac{c_1}{2}z + ...$ olsun. Bu durumda $|g(z)| \leq 1$ ve $g(0)=0$ dır. Schwarz Lemmasından $|g(z)| = \left|\dfrac{c_1}{2}z + ...\right| \leq |z|$ bulunur. Bu ise $|c_1| \leq 2$ olduğu anlamına gelir. n_k, $(k=1,...,n)$ birim diskin n. ayrık kökleri olsun. Bu durumda,

$$\Re e\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(n_k z^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \Re e\{1 + c_n z + ...\} \geq 0$$

olur. Bir önceki sonucu kullanarak $|c_n| \leq 2,\ n = 2,3,...$ olduğu elde edilir. $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ fonksiyonu bu eşitsizliğin her n için kesin olduğunu gösterir.

Teorem 2.2: Eğer $f \in S$ ve eğer tüm a_n katsayıları reel sayı ise, bu durumda her $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır [16].

İspat: I. Yol: $z = e^{i\theta}$ ve $r < 1$ için

$$\Im mf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta \tag{2.3}$$

dır. (2.3) eşitliği $\sin n\theta$ ile çarpılıp, 0 dan π ye kadar integrali alınırsa

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta})\sin n\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta\, d\theta = a_n r^n \tag{2.4}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)\theta| &= |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \\ &\leq |\sin n\theta| + |\sin\theta| \end{aligned}$$

olduğundan tümevarım metoduyla kolayca görülür ki;

$$|\sin n\theta| \le n|\sin\theta|$$

dır. Dolayısıyla (2.4) den,

$$|a_n r^n| \le \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \tag{2.5}$$

elde edilir. f ünivalent olduğundan $0 < r < 1$ ve $0 < r < \pi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta \\ &= 2iv(re^{i\theta}) \end{aligned}$$

yani,

$$v(re^{i\theta}) \neq 0$$

dır. $v(re^{i\theta}) \neq 0$, θ nın sürekli bir fonksiyonu olduğundan $0 < \theta < \pi$ aralığında işaret değiştirmez. Böylece,

$$\begin{aligned} r = |a_1 r| &= \left| \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta d\theta \right| \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

dır. Bu eşitsizlik, (2.5) de yerine yazılırsa

$$|a_n r^n| \le nr$$

bulunur. Sonuç olarak $r \to 1$ için istenilen sonuç elde edilir.

II. Yol: $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = re^{-i\varphi}$, $\varphi \neq 0$, $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{z_1^{\ n} - z_2^{\ n}}{z_1 - z_2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \neq 0$$

olur. Her a_n reel sayısı için

$$\Phi(r,\varphi)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n r^{n-1}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

ifadesi de reeldir ve $\varphi\neq 0$ dır. $\Phi(0,\varphi)=1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $0\leq r<1$ olduğunda $\Phi(r,\varphi)\geq 0$ ve $\varphi\neq 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}2\sin^2\varphi\,\Phi(r,\varphi)&=1+a_2 r\cos\varphi+\left(a_3r^2-1\right)\cos 2\varphi+\left(a_4r^2-a_2\right)r\cos 3\varphi\\&+\ldots+\left(c_nr^2-c_{n-2}\right)r^{n-3}\cos(n-1)\varphi+\ldots\geq 0\end{aligned}$$

eşitliğin sağlandığı kolayca görülür. $0<r<1$ olacak şekilde r için

$$F(z)=1+c_2rz+\left(a_3r^2-1\right)z^2+\left(a_4r^2-a_2\right)rz^3+\ldots+\left(c_nr^2-c_{n-2}\right)r^{n-3}z^{n-1}+\ldots$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu durumda $\Re e(F(z))\geq 0$ olur. Lemma 2.1 den

$$\left|a_2\right|\leq 2,\ \left|a_3r^2-1\right|\leq 2,\ \left|a_4r^2-a_2\right|r\leq 2,\ldots,\ \left|a_nr^2-a_{n-2}\right|r^{n-1}\leq 2,\ldots$$

elde edilir. $r\to 1$ olsun. Tümevarım yönteminden

$n=2$ için $\left|a_2\right|\leq 2$ olduğu açıktır.

$n=k-1$ için $\left|a_{k-1}\right|\leq k-1$ olsun.

$n=k+1$ için $\left|a_{k+1}\right|\leq k+1$ olduğunu ispatlayalım.

$\left|a_{k+1}-a_{k-1}\right|\leq 2$ ve ters üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\left|a_{k+1}\right|-\left|a_{k-1}\right|\leq\left|a_{k+1}-a_{k-1}\right|\leq 2\\&\Rightarrow\left|a_{k+1}\right|\leq\left|a_{k-1}\right|+2\leq k-1+2\leq k+1\end{aligned}$$

elde edilerek teorem ispatlanmış olur.

Şimdi asıl problem katsayıların kompleks olması durumunda tahminin doğruluğunu ispatlamaktır. Bununla ilgili ilk defa 1923 yılında Löwner [17] parametrik temsil yöntemini tanıtmış ve $|a_3| \leq 3$ doğruluğunu ispatlamıştır. Bu yöntem L. De Branges' in yaptığı Bieberbach tahmini ispatının temel taşıdır. Ayrıca ana yöntemlerden biri de hipergeometrik fonksiyonlar olmuştur. Bu yöntemin kullanılması ile önemli sonuçlar elde edilmiştir.

$|a_3| \leq 3$ ispatından sonra 1955 yılında Garabedian ve Schiffer [18] tarafından varyasyonel yöntem kullanılarak $|a_4| \leq 4$ ispatlanmasına kadar geçen 32 yılda az bir ilerleme kaydedilmiştir. Garabedian ve Schiffer tarafından yapılan ispat uzun ve karmaşıktı. Fakat 1960 yılında Charzynski ve Schiffer [19] Grunsky eşitsizliğini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğinin başka bir ispatını bulmuşlardır. Yöntemleri şaşırtıcı derecede basitti ve insanların dikkatini Grunsky eşitsizliğine çekti. Bu önemli eşitsizliği burada belirteceğiz.

Bunun için $g \in \Sigma$ olsun. Bu durumda,

$$\log \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n k z^{-k} \zeta^{-n} \tag{2.7}$$

her $|z| > 1$ ve $|\zeta| > 1$ için analitiktir. Ayrıca aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

<u>Grunsky Eşitsizliği</u>: Herhangi N pozitif tamsayı ve $\lambda_1, ..., \lambda_N$, kompleks sayıları için

$$\left| \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk} \lambda_n \lambda_k \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\lambda_n|^2 \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır [16].

(2.8) eşitsizliğine zayıf Grunsky eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik güçlü Grunsky eşitsizliği olan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk} \lambda_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\lambda_n|^2 \tag{2.9}$$

eşitsizliğine denktir. Ayrıca bu eşitsizlikler

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{nk}\lambda_n\mu_k\right|^2 \le \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}|\lambda_n|^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}|\mu_k|^2 \tag{2.10}$$

genelleştirilmiş zayıf Grunsky eşitsizliğine de denktir.

1968 yılında Pederson [20] ve bağımsız olarak 1969 yılında Ozawa [21] $|a_6| \le 6$ eşitsizliğini Grunsky eşitsizliğini kullanarak ispatlamışlardır. İspatın detaylarını atlıyoruz (ayrıca bkz Gong [22]).

Grunsky eşitsizliğinin birçok uygulaması vardır. Örneğin, (2.10) eşitsizliğinden

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i z_i^{-k}\sum_{j=1}^{N}\mu_i\zeta_i^{-n}\right|^2 \le \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{N}\lambda_i z_i^{-k}\right|^2\right\}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{N}\mu_i\zeta_i^{-n}\right|^2\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada, $\lambda_1,...,\lambda_N$, $\mu_1,...,\mu_N$, keyfi kompleks sayılar ve $z_1,...z_N$, $\zeta_1,...,\zeta_N$ de birim diskin dışında noktalardır. Bu eşitsizlik

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\mu_i\log\frac{g(z_i)-g(\zeta_i)}{z_i-\zeta i}\right|^2 \le \\ &\left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j\log\left(1-\frac{1}{z_i\bar{z}_j}\right)\right\}.\left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu_i\mu_j\log\left(1-\frac{1}{\zeta_i\bar{\zeta}_j}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitsizliğine denktir.

$|a_5| \le 5$ eşitsizliğinin ispatı oldukça zordur. İspat için Garabedian-Schiffer eşitsizliği ve Grunsky eşitsizliğinin genelleştirilmiş şeklini kullanmak gerekir. İspatın detaylarını atlıyoruz (bkz. [23]). Branges 1984 yılında Bieberbach tahminini tam olarak ispatlayana kadar yalnızca $n \le 6$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği ispatlanmıştır. Branges'in ispatından önce

Bieberbach tahmini S sınıfını içeren bazı özel fonksiyon sınıfları için doğrulanabiliyordu.

Bununla ilgili ilk teorem S^* sınıfı için verilmiştir.

<u>Teorem 2.3</u> (Nevanlinna teoremi): Eğer (2.1) ile $f \in S^*$ ise her $k = 2,3,...$ için $|a_k| \le k$ sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun bir Koebe fonksiyonu veya Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır [24].

Diğer taraftan Alexander toreminden $f \in C$ fonksiyonları için $|a_n| \le 1$ olduğu kolayca görülür.

Buradan, Bieberbach tahmininin $f \in S^*$ için doğru olduğu görülür.

Şüphesiz C ünivalent konveks analitik fonksiyonlar ailesi ve S^* ünivalent yıldızıl analitik fonksiyonlar ailesi, S ailesinin en önemli iki alt ailesidir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin önemli bir diğer sınıfı olan konvekse yakın fonksiyonların sınıfı için de katsayı eşitsizliği 1955 yılında Reade [25] tarafından aşağıda verilmiştir

<u>Sonuç 2.4</u>: Eğer (2.1) ile $f(z)$ fonskiyonu konvekse yakın bir fonksiyon ise her $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le n$ sağlanır [25].

İspat: $z\dfrac{f'(z)}{g(z)}=c_0+c_1z+...\ ve\ \ g(z)=b_1z+.....$ olsun. Bu durumda,

$$na_n=c_0b_n+\sum_{v=1}^{n-1}c_{n-v}b_v,\quad n=2,3...$$

olur. (1.1) ve Lemma 2.1 den $v\geq 1$ için $|c_v|\leq 2|c_0|$ elde edilir. Teorem 2.3 den $|b_v|\leq v|b_1|$ olur. $c_0b_1=1$ ilişkisini kullanılarak,

$$n|a_n|\leq n+2\sum_{v=1}^{n-1}v\ =\ n^2$$

elde edilir. Dolayısıyla $|a_n|\leq n$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bieberbach tahminini doğrulayan S nin diğer alt aileleri de vardır (bkz. [26-28]).

Konveks fonksiyonlar ailesi, yıldızıl fonksiyonlar ailesinde ve yıldızıl fonksiyonlar ailesi de konvekse yakın fonksiyonlar ailesinde bulunur. Bu fonksiyon ailelerinin detaylı incelemesi Goodman'ın [14] kitabında bulunur.

(2.1) deki katsayıların genel tahmini ile ilgili ilk sonuç 1925 yılında E. Littlewood [29] tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.5: $f\in S$ ve $n=2,3,...$ için $|a_n|<en$ eşitsizliği sağlanır [29].

Littlewood'un ispatı f modülünün

$$M_p\left(r,f\right)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\ ,\quad 0<p<\infty,\quad 0<r<1 \qquad (2.12)$$

ortalama tahminine dayanır.

Lemma 2.6: Herhangi $f \in S$ için,

$$M_1(r, f) \leq \frac{r}{1-r}, \quad 0<r<1 \tag{2.13}$$

dir [29].

İspat: $f \in S$ olsun. $z \in D$ için $\frac{f(z)}{z}$ analitiktir ve $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ olduğundan $g(z)=\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{2}}$, $g(0)=1$ ve sonuç olarak $h(z)$ fonksiyonu $h(z)=z(g(z^2))$ fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

$h(z_1)=h(z_2)$, $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ anlamına geldiği için $h(z)$ fonksiyonu ünivalenttir.

Gerçekten, $\forall z_1, z_2 \in D$ için

$$\begin{aligned}
& h(z_1)=h(z_2) \Rightarrow z_1 g(z_1^2)=z_2 g(z_2^2) \\
& \Rightarrow z_1\left(\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}=z_2\left(\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \Rightarrow f(z_1^2)=f(z_2^2) \quad (f \in S \text{ olduğundan}) \\
& \Rightarrow z_1^2=z_2^2 \Rightarrow z_1=z_2 \text{ veya } z_1=-z_2
\end{aligned}$$

yazılır. Eğer $z_1=-z_2$ olursa kabulümüzden $h(z_1)=h(z_2) \Rightarrow h(z_1)=h(-z_1)$ olur. Buda h fonksiyonunun tek olması ile çelişkilidir. Dolayısıyla $z_1=z_2$ olur. Yani h ünivalenttir. Diğer taraftan

$$h(z)=\sqrt{f(z^2)}=\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} z^{2n-1}=z+c_3 z^3+c_5 z^5+\ldots \quad (c_1=1) \tag{2.14}$$

olduğundan $h(z) \in S$ olur. $h(z)$ nin tanımı ve Teorem 1.2.2.8 den $|h(z)| \leq \frac{r}{1-r^2}$, $|z|=r<1$ elde edilir. h fonksiyonu $|z|<r$ diskini $|w|<r(1-r^2)^{-1}$ diskinde bulunan bir D_r bölgesine resmeder. $h(z) \in S$ olduğu için D_r deki bir A_r alanı

orjin merkezli $r(1-r^2)^{-1}$ yarıçaplı diskin alanı olan $\pi r^2(1-r^2)^{-2}$ den daha büyük değildir. Diğer taraftan,

$$A_r = \int_0^{2\pi}\int_0^r \left|h'\left(pe^{i\theta}\right)\right|^2 pdpd\theta = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n}$$

olduğundan S sınıfı için Alan teoreminden $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n-1} \le \dfrac{r}{(1-r^2)^2}$ eşitsizliği $0 \le r < 1$ için sağlanır. Bu eşitsizliğin 0 dan r ye integrali alınırsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \le \dfrac{r^2}{1-r^2}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|h(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \le \frac{r^2}{1-r^2}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte r^2 yerine r alınırsa (2.13) elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Littlewood Teoremi yukarıdaki Lemma 2.6 ın bir sonucudur. Öyle ki Taylor katsayısı

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} r^{-n} f(re^{i\theta}) d\theta \quad (z = re^{i\theta})$$

olduğu için $|a_n| r^n \le \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \Rightarrow |a_n| \le r^{-n} M_1(r, f)$ elde edilir. (2.13) den $|a_n| \le r^{-n+1}(1-r)^{-1}$ olur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında $r = 1-\dfrac{1}{n}$ olarak alınırsa eşitlik minimum değer alır. Böylece,

$$|a_n| \le n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en$$

olur. Littlewood Teoremi ispatlanmış olur.

$M_p(r,f), (0<p<\infty, 0<r<1)$ nin genel tahminleri 1927 yılında Prawitz tarafından elde edilmiştir. Prawitz aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

<u>Teorem 2.7</u> (Prawitz teoremi): Eğer $f(z)\in S$ ise $0<p<\infty$ olacak şekilde keyfi p sayısı için

$$M_p^p(r,f)\le p\int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(t,f)dt \qquad (2.15)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $0<r<1$, $M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}\{f(z)\}$ dır (bkz. [16]).

Bir düzgün Jordan eğrisi, parametrik temsili ikinci mertebeden türevleri sürekli olan bir Jordan eğrisidir.

<u>Lemma 2.8</u>: C_1 ve C_2 orjini içeren iki Jordan eğrisi olsun. Eğer C_1, C_2 nin içinde ise

$$\int_{C_1} r^p d\theta \le \int_{C_2} r^p d\theta, \quad (0<p<\infty)$$

olur. Burada (r,θ), z noktasının kutupsal koordinatlarıdır (bkz. [16]).

<u>İspat</u>: D, C_1 ve C_2 eğrileri arasında bir halka ve C ise bu halkanın sınırı olsun. $d\theta=\dfrac{\partial\theta}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\theta}{\partial y}dy$ olduğu için Green Teoreminden

$$\int_{C_1} r^p d\theta - \int_{C_2} r^p d\theta = \int_C r^p d\theta$$
$$= p\int\int_D r^{p-1}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}dxdy$$

olur. Dolayısıyla $\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial \theta}{\partial y}, \ \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{\partial \theta}{\partial x}$ Cauchy-Rieman denklemlerinden

$$\int_C r^p d\theta = p\int\int_D r^p \left\{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy \geq 0$$

elde edilir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

Şimdi Prawitz teoremini ispatlayalım.

Teorem 2.7 nin ispatı: $w = f(re^{i\theta}) = R\mathrm{e}^{i\phi}$ şeklinde ifade edelim. $\log f$ nin Cauchy-Rieman denklemlerinden birisi

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

şeklindedir.

Eğer C_r , f fonksiyonu altında $|z| = r$ nin görüntüsü ise

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{d}{dr} M_p^p(r, f) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} R^p d\theta = \frac{p}{r}\int_0^{2\pi} R^p \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{p}{r}\int_{C_r} R^p d\phi. \end{aligned}$$

olur. Herhangi $\varepsilon > 0$ için, Γ_r : $|w| = R = M_\infty(r, f) + \varepsilon$ çemberi C_r eğrisini içerir. Lemma 2.8 den

$$\int_{C_r} R^p d\phi \leq \int_{\Gamma_r} R^p d\phi = 2\pi\left[M_\infty(r, f) + \varepsilon\right]^p$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0^+$ alınırsa,

$$\frac{d}{dr} M_p^p(r, f) \leq \frac{p}{r} M_\infty^p(r, f)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının integrali Prawitz Teoremini verir.

Eğer Prawitz teoreminde $p=1$ alınırsa Lemma 2.6 elde edilir. Uzun bir süre, fonksiyon modülünün ortalama tahmini, katsayı tahminlerinin elde edilmesinde ana yöntemdi.

Örneğin fonksiyon modülünün ortalama tahminini kullanarak, S sınıfı için 1929 da Landau [30] $|a_n|<(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi})en$ olduğunu, 1946 yılında Goluzin [31] $|a_n|<\frac{3}{4}en$ olduğunu ve 1947 yılında Bazilevich [32] $|a_n|<\frac{9}{4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+0.2649\right)n$ olduğunu ispatlamışlardır.

1951 yılında Bazilevich [33] ve Milin (bkz. [34]) birbirinden bağımsız olarak sırasıyla $|a_n|<\frac{1}{2}en+1.51$ ve $|a_n|<\frac{1}{2}en+1.8$ sonuçlarını ispatlamışlardır.

Analitik univalent fonksiyonların modülünün ortalamasının kesin tahmini, 1974 yılında Baernstein [35] tarafından elde edildi. Baernstein'in tekniği diğer alanlar için de oldukça önemlidir. Baernstein ayrıca herhangi $f\in S$ için

$$M_p(r,f)\le M_p(r,K),\quad (0<p<\infty) \tag{2.16}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada K, Koebe fonksiyonudur.

Bu sonucu $|a_n|<\frac{e}{2}n$ tahmini izler. Baernstein'ın bu sonucu o ana kadar bulunanlardan daha kötüdür. Aslında, Baernstein, eğer $\Phi(x)$, $-\infty<x<\infty$ da azalmayan konveks bir fonksiyon ise herhangi $f\in S,\ 0<r<1$ için

$$\int_0^{2\pi}\Phi\left(\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta\le\int_0^{2\pi}\Phi\left(\log\left|K\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlamıştır. Burada K, Koebe fonksiyonudur. Dahası eğer Φ kesinlikle konveks ise bazı r için eşitlik sağlanır ancak ve ancak f fonksiyonu K nın bir dönmesidir. Önceki eşitsizlikte $\Phi(x)=e^{px}$ olarak alınırsa (2.16) elde edilir.

Baernstein'ın ispatı Baernstein yıldız fonksiyonuna dayanır.

$M_p(r, f')$ tahmini, bir $f \in S$ fonksiyonunun türev modülünün ortalama tahmini hala açıktır. $p < \frac{1}{3}$ için $M_p(r, f') \leq M_p(r, K')$ sağlanmadığı biliniyor. $p > \frac{1}{3}$ için sağlandığı tahmin ediliyor. Modül ortalamasının tahmininden başka bir yöntem kullanarak $\frac{e}{2}$ sabitinin ilk iyileştirilmesi, Milin'e dayanır. 1965 yılında Milin [36] herhangi $f \in S$ için

$$|a_n| < 1.243n, \quad n = 2, 3, ...$$

ispatında yeni bir yönteme de öncülük etmiştir.

Teorem 2.9 (Milin Teoremi): $f(z) \in S$ olsun. O halde

$$|a_n| < 1.243n \quad n = 2, 3, ...$$

dır [36].

Milin'in bu rekoru, 1972 yılında FitzGerald [37] tarafından geliştirilene kadar korundu. FitzGerald, aşağıdaki tahmini elde etmek için Goluzin eşitsizliğini ve aşağıdaki Lemmayı kullanmıştır.

Teorem 2.10 (FitzGerald eşitsizliği): $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ olsun. $\mu \leq v$ için $\beta_n(\mu, v)$ fonksiyonu

$$\beta_n(\mu, v) = \begin{cases} \mu - |n - v|, & |n - v| < \mu \\ 0, & |n - v| \geq \mu \end{cases}$$

ve $\beta_n(v, \mu) = \beta_n(\mu, v)$ şeklinde verilsin. Eğer

$$a_{\mu\nu}(f)=\sum_{k=1}^{\mu+\nu-1}\beta_k(\mu,\nu)|a_k|^2-|a_\mu|^2|a_\nu|^2$$

şeklinde ise bu durumda

$$(a_{\mu\nu})_{2\le\mu,\nu\le n}\ge 0$$

matris eşitsizliği sağlanır [37].

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki lemmadaki eşitsizlik kolayca görülür.

Lemma 2.11: Eğer $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in S$ ise, bu durumda

$$|a_n|^4\le\sum_{k=1}^{n}k|a_k|^2+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2n-k)|a_k|^2,\quad n=2,3,... \tag{2.17}$$

eşitsizliği doğrudur [37].

Teorem 2.12: Eğer $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in S$ ise, bu durumda

$$|a_n|<\sqrt{\frac{7}{6}}n<1.081n,\ n=2,3,...$$

dir [37].

İspat: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ olduğundan ve (2.17) in sağ tarafında $|a_k|$ nın yerine k yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2n-k)k^2=\frac{7}{6}n^4-\frac{1}{6}n^2$$

yazılır.

Şimdi $c=\sup_n \sup_{f\in S}\dfrac{|a_n|}{n}$ olsun. Yani c her $f\in S$ ve her n için, $|a_n|\le cn$ olacak şekilde en küçük sabit olsun. Teorem 2.5 (Littlewood Teoremi) den $1\le c\le e$ dir. Herhangi $\varepsilon>0$ için $|a_n|\ge(c-\varepsilon)n$ olacak şekilde bir $f\in S$ ve bir n tamsayısı vardır. Böylece (2.17) den

$$(c-\varepsilon)^4 n^4<|a_n|^4\le c^2\left(\frac{7}{6}n^4-\frac{1}{6}n^2\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $(c-\varepsilon)^4<\frac{7}{6}c^2-\frac{1}{6}n^{-2}$ olur ve $\varepsilon\to 0$ için $c<\sqrt{\frac{7}{6}}$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.12' in ispatında sadece Lemma 2.11 kullanıldı. Aslında Lemma 2.11, Teorem 2.10 daki $(a_{\mu\nu})_{2\le\mu,\nu\le n}\ge 0$ eşitsizliğinin basit bir sonucudur. Bu bakış açısına göre Teorem 2.12 deki sınır iyileştirilebilir. Horowitz [38,39] bu tür bir gelişme sağlamıştır. Horowitz $(a_{\mu\nu})_{2\le\mu,\nu\le 2n}\ge 0$ eşitsizliğinden ve $\lambda=(\lambda_2,...\lambda_{2n})$ alarak yola çıkmıştır. Burada $\lambda_\mu=n-|n-\mu|,\ \mu=1,2,...2n$ şeklindedir. $\lambda(a_{\mu\nu})\lambda'\ge 0$ eşitsizliği

$$\left|\sum_{\mu=1}^{2n}\lambda_\mu|a_\mu|^2\right|^2\le\sum_{\mu=1}^{2n}|\lambda_\mu|^2\left\{\sum_{k=1}^{\mu}k|a_k|^2+\sum_{k=\mu+1}^{2\mu}(2\mu-k)|a_k|^2\right\}+2\sum_{1\le\mu_1<\mu_2\le 2n}\lambda_{\mu_1}\lambda_{\mu_2}$$
$$\times\left\{=\sum_{k\mu_2-\mu_1}^{\mu_2}(\mu_1-\mu_2+k)|a_k|^2+\sum_{k=\mu_2+1}^{\mu_1+\mu_2}(\mu_1+\mu_2-k)|a_k|^2\right\}$$

şekilde yazılabilir.

Bu eşitsizliğin sol tarafı (2.17) eşitsizliğinin sağ tarafının karesine eşittir. Böylece

$$|a_n|^8\le\sum_{\mu=1}^{2n}\lambda_\mu{}^2\left\{\sum_{k=1}^{\mu}k|a_k|^2+\sum_{k=\mu+1}^{2\mu}(2\mu-k)|a_k|^2\right\}$$
$$+2\sum_{\ell=2}^{2n}\sum_{m=1}^{\ell-1}\lambda_\ell\lambda_m\left\{\sum_{k=\ell-m}^{\ell}(m-\ell+k)|a_k|^2\right\}+\sum_{k=\ell+1}^{\ell+m}(m-\ell+k)|a_k|^2 \tag{2.18}$$

yazılır. $c = \sup_n \sup_{f \in S} \dfrac{a_n}{n}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $|a_n| > n(c-\varepsilon)$ olacak şekilde $f(z) \in S$ ve n vardır. Teorem 2.12 in ispatındakine benzer olarak,

$$n^8(c-\varepsilon)^8 \le c^2\left[\sum_{\mu=1}^{2n}\lambda_k{}^2\left\{\sum_{k=1}^{\mu}k^3+\sum_{k=\mu+1}^{2\mu}(2\mu-k)k^2\right\}\right.$$
$$\left.+2\sum_{\ell=2}^{2n}\sum_{m=1}^{\ell-1}\lambda_\ell\lambda_k\left\{\sum_{k=\ell-m}^{\ell}(m-\ell+k)k^2+\sum_{k=\ell+1}^{\ell+m}(m+\ell-k)k^2\right\}\right]$$

yazılır. $\ell = 1,2,...,7$ için $\sum_{k=1}^{N} k^\ell$ toplam formülü kullanılarak ve uzun bir hesaplama ile yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının

$$c^2\left[\frac{1}{1260}(1881n^8 - 602n^6 + 49n^4 - 68n^2)\right] < c^2\frac{1881}{1260}n^8$$

eşitsizliğine eşit olduğu görülür.

ε keyfi olduğundan $\varepsilon \to 0$ alınırsa $c^6 \le \dfrac{209}{140}$ yani $c \le \left(\dfrac{209}{140}\right)^{\frac{1}{6}} < 1.06091$ elde edilir.

Böylece eğer $f \in S$ ise $|a_n| \le \left(\dfrac{209}{140}\right)^{\frac{1}{6}} n < 1,0691n,\ n = 2,3,...$ olduğu sonucu elde edilir.

Bu sonuç 1976 da Horowitz [38] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca 1978 yılında Horowitz [39] FitzGerald eşitsizliğini tekrar tekrar kullanarak $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le \left(\dfrac{1659164137}{681080400}\right)^{\frac{1}{14}} n < 1,0657n$ eşitsizliğini elde etmiştir.

Horowitz in elde ettiği sonuçlardan da görüldüğü üzere Bieberbach tahmini bu yöntemle ispatlanamaz. $|a_n| < 1.0657n$ sonucu Bieberbach Tahmini'nin Branges'in ispatın kadar bulunan en iyi sonuçtur. FitzGerald, yönteminin Bieberbach Tahmininin nihai bir kanıtına yol açamayacağına dikkat çekti.

Aşağıdaki tablo yukarıda belirtilen sonuçları özetlemektedir:

ADI	YILI	$\left\|a_n\right\| \le C_n = \sup\left\|a_n\right\|$
Littlewood	1923	$\left\|a_n\right\| < en \approx 2.7183n$
Landau	1929	$\left\|a_n\right\| < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)en \approx 2.2244n$
Goluzin	1946	$\left\|a_n\right\| < \frac{3}{4}en \approx 2.0388n$
Bazilevich	1947	$\left\|a_n\right\| < \frac{9}{4}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + 0,2649\right)n \approx 1.9240n$
Milin	1949	$\left\|a_n\right\| < \frac{1}{2}en + 1.80 \approx 1.3592n + 1.80$
Bazilevich	1949	$\left\|a_n\right\| < \frac{1}{2}en + 1.51 \approx 1.3592n + 1.51$
Milin	1964	$\left\|a_n\right\| < \frac{\left(e^{1.6}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1.6}n \approx 1.2427n$
FitzGerald	1971	$\left\|a_n\right\| < \sqrt{\frac{7}{6}}n \approx 1.0802n$
Horowitz	1976	$\left\|a_n\right\| < \left(\frac{209}{140}\right)^{\frac{1}{6}} n \approx 1.0691n$
Horowitz	1978	$\left\|a_n\right\| < \left(\frac{1.659.164.137}{681.080.400}\right)^{\frac{1}{14}} n \approx 1.0657n$

Tablo 2.

2.1. Robertson ve Milin Tahmini

Robertson Tahmini, Bieberbach Tahmini ile yakından bağlantılı olan tek değişkenli ünivalent tek fonksiyonların katsayılarının tahminini içeren bir problemdir. Eğer $f \in S$ ise (2.14) ile tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu bir tek fonksiyondur. 1932 yılında Littlewood ve Paley [40] $|c_n| < 14$ olduğunu ispatlamıştır ve $|c_n| \leq 1$ tahmininde bulunmuştur. Eğer Littlewood-Paley Tahmini Schwartz eşitsizliği ile doğru olsaydı,

$$a_n = c_1 c_{2n-1} + c_3 c_{2n-3} + ... + c_{2n-1} c_1 \tag{2.19}$$

Bieberbach tahmini de doğru olurdu. Fakat 1933 yılında Fekete ve Szegö [41]

$$|c_5| \leq \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} = 1.013....$$

kesin sonucunu ispatlayarak Little-Paley tahminini çürütmüştür.

Dahası, 1943 yılında Schaeffer ve Spencer [42] $n \geq 5$ için $|c_n| > 1$ olacak şekilde reel katsayılı bir ünivalent tek fonksiyonun varlığı ispatlamışlardır. 1976 yılında Leeman [43] reel katsayılı ünivalent tek fonksiyonlar için c_7 modülünün sınırının, c_n modülünün iyi bir rasyonel sınırından ümit keserek $\frac{1090}{1083}$ olduğunu ispatlamışlardır. Littlewood-Paley tahmininden sonra 1933 yılında Chen [44] $|c_n| < e^2$ olduğunu, 1935 yılında Levin [45] $|c_n| < 2^{\frac{1}{4}}.e^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}} = 3.39...$ olduğunu ve 1951 yılında Gong [46] $|c_n| < 2^{-\frac{1}{6}}.e^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}} = 2.54...$ olduğunu ispatlamıştır. 1967 yılında Milin [47] $|c_n| < 1.17$ sonucunu elde etmiştir. Milin'in sonucu Milin metodu kullanılarak ispatlanmıştır. İspatı bu bölümde vereceğiz. Yine 1980 yılında Milin [48] $|c_n| < 1.14$ bularak daha iyi bir sonuç elde etmiştir. Günümüze kadar, bilindiği üzere $|c_n|$ in üst sınırının en iyi tahmini $|c_n| < 1.1305$ tir. Bu tahmin Ke [49] tarafından verilmiştir.

Littlewood tahminin doğru olmamasına rağmen Robertson 1936 yılında aşağıdaki tahmini yapmıştır.

Robertson Tahmini: S de herhangi $h(z)=z+c_3z^3+c_5z^5+...$ tek fonksiyonu için

$$1+|c_3|^2+...+|c_{2n-1}|^2 \le n,\quad n=2,3,... \tag{2.20}$$

eşitsizlik sağlanır (bkz. [16]).

$n=2$ için Robertson tahmini $|a_2|\le 2$ eşitsizliğine benzerdir. 1936 yılında Robertson, Löwner metodunu kullanarak $n=3$ için bu tahmini ispatlamıştır. 1970 yılında Friendland (bkz. [16]) Grunsky eşitsizliğini kullanarak $n=4$ için bu tahmini ispatlamıştır. Tahmin 1984 e kadar $n\ge 5$ için ispatlanmamıştır. Branges, Milin tahminini ispatlamıştır bu ise Robertson tahminini ve böylece Bieberbach Tahminini belirtir.
1955 yılında Hayman [50] aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.1.1 (Hayman Düzgünlük Teoremi): Herhangi $f\in S$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n}=\alpha\le 1 \tag{2.21}$$

doğrudur. Yukarıdaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun bir Koebe fonksiyonu veya Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır [50].

Bu teorem aşağıdaki lemmaya dayanır.

Lemma 2.1.2: Eğer $f\in S$ ve $M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ ise

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2 M_\infty(r,f)=\alpha\le 1$$

şeklindedir. Eğer f fonksiyonu Koebe fonksiyonu yada onun dönmelerinden biri değilse $r^{-1}(1-r^2)M_\infty(r,f)$, $(0,1)$ aralığında kesinlikle azalan ve $\alpha<1$ dir.

İspat : $z\in D$ alırsak herhangi $f\in S$ için $\dfrac{\zeta+z}{1+\zeta}\in Aut(D)$ olacak şekilde

$$F(\zeta)=\frac{f\left(\dfrac{\zeta+z}{1+z\zeta}\right)-f(z)}{\left(1-|z|^2\right)f'(z)}\in S$$

olur. Teorem 1.2.2.8 den,

$$\frac{|\zeta|}{\left(1+|\zeta|\right)^2}\leq\left|F(\zeta)\right|\leq\frac{|\zeta|}{\left(1-|\zeta|\right)^2}$$

elde edilir. $\zeta=-z$ olsun. Bu durumda

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2}\leq\left|\frac{f(z)}{\left(1-|z|^2\right)f'(z)}\right|\leq\frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2}$$

olur. Buradan,

$$\frac{1-r}{1+r}\leq\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leq\frac{1+r}{1-r}, \qquad |z|=r<1$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(z)$ fonksiyonunun bir Koebe fonksiyonu veya Koebe fonksiyonunun dönmelerinden biri olmasıdır. Bu nedenle

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|\leq\frac{1+r}{r(1-r)}$$

Önceki eşitsizliğin r_1 den r_2 ye $(0<r_1<r_2<1)$ integrali alınırsa,

$$\log\left|\frac{f(r_2e^{i\theta})}{f(r_1e^{i\theta})}\right|\leq\int_{r_1}^{r_2}\frac{1+r}{r(1-r)}dr=\log\frac{r_2(1-r_1)^2}{r_1(1-r_2)^2}$$

elde edilir. Böylece herhangi $\theta,\ 0<r_1<r_2<1$ için

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\left|f(r_2e^{i\theta})\right|<\frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f(r_1e^{i\theta})\right|$$

olur. $\left|f(r_2e^{i\theta})\right|=M_\infty(r_2,f)$ olarak alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{(1-r_2)^2}{r_2}M_\infty(r_2,f)&<\frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f(r_1e^{i\theta})\right|\\&\leq\frac{(1-r_1)^2}{r_1}M_\infty(r_1,f)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $r^{-1}(1-r^2)M_\infty(r,f)$ nin r nin azalan bir fonksiyonu olduğunu gösterir. Limit $\alpha \geq 0$ a yaklaşırken r, 1 e eğilim gösterir. Teorem 1.2.2.8' den $r^{-1}(1-r^2)M_\infty(r,f) \leq 1$ olur. Dolayısıyla $\alpha \leq 1$ dir. Eğer f fonksiyonu bir Koebe fonksiyonu veya onun dönmelerinden biri ise yukarıdaki eşitsizlik ve $\alpha = 1$ sağlanır. Diğer yandan azalma kesindir ve $\alpha < 1$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Limit α, f fonksiyonunun *Hayman indeksi* olarak adlandırılır.

<u>Lemma 2.1.3:</u> Eğer $f \in S$ fonksiyonunun Hayman indeksi pozitif yani $\alpha > 0$ ise, bu durumda

$$\lim_{r\to 1}(1-r^2)\left|f\left(re^{i\theta_0}\right)\right| = \alpha$$

olacak şekilde $e^{i\theta_0}$ vardır.

<u>İspat :</u> $\{r_n\}$ limiti 1 olan artan bir dizi olsun. $\left|f(r_n e^{i\theta_n})\right| = M_\infty(r_n, f),\ n = 1,2,...$ olacak şekilde $0 \leq \theta_n < 2\pi$ için θ_n alalım. Lemma 2.1.2 den $r < r_n$ için

$$\alpha \leq \frac{(1-r_n)^2}{r_n}\left|f(r_n e^{i\theta_n})\right| \leq \frac{(1-r)^2}{r}\left|f(re^{i\theta})\right|$$

elde edilir. θ_0 noktası θ_n nin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $r \to 1,\ r^{-1}(1-r)^2 M_\infty(r,f) \to \alpha$ olduğunda

$$\alpha \leq \frac{(1-r)^2}{r}\left|f(re^{i\theta_0})\right| \leq \frac{(1-r)^2}{r} M_\infty(r,f)$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2\left|f\left(re^{i\theta_0}\right)\right| = \alpha$$

olur. θ_0' ın tekliğini gösterelim. (2.11) de $N=1,\ \lambda_1 = \mu_1 = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2,\ z_1 = \zeta_2,\ |\zeta_1| = |\zeta_2| = p > 1$ olarak alınırsa

$$1 - p^{-2} \leq \left|\frac{g(\zeta_1) - g(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2}\right| \leq \frac{1}{1-p^{-2}}$$

bulunur. Dolayısyla $f(z)=\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}$, $\rho^{-1}=r$, $\frac{1}{\zeta_1}=z_1=re^{i\theta}$ ve $\frac{1}{\zeta_2}=z_2=re^{i\theta_0}$ için yukarıdaki eşitsizlik

$$\frac{1-r^2}{r}\left|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}\right|\leq\left|\frac{1}{f\left(re^{i\theta}\right)}-\frac{1}{f\left(re^{i\theta_0}\right)}\right|\leq\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta_0}\right)\right|}$$

şeklinde yazılr. Eğer $e^{i\theta}\neq e^{i\theta_0}$ ve $\alpha>0$ ise $\lim_{r\to1}(1-r^2)\left|f(re^{i\theta})\right|\neq0$ bir çelişki oluşturur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$e^{i\theta_0}$ yönü *Hayman yönü* olarak adlandırılır.

Hayman bu sonuçları kullanarak (2.21) i ispatlamıştır. (2.21) deki α, Lemma 2.1.2 de ki α ile aynıdır. Hayman düzgünlük teoremi için birçok ispat mevcuttur (bkz. [50-54]). Pommerenke [53] ispatında FitzGerald eşitsizliğini kullanarak sadece daha kısa bir ispatını vermiştir. İspatta yalnızca $f(z)$ Koebe fonksiyonu olmadıkça $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n}<1$ olur. En anlaşılabilir ispatlarından biri Aharonov [54] tarafından yapılmıştır.

Hayman düzgünlük teoreminden herhangi $f\in S$ fonksiyonu için eğer $n>N(f)$ ise $|a_n|\leq n$ olacak şekilde bir $N(f)$ vardır. $N(f)$, f ye bağlıdır. Ayrıca Bieberbach tahmininin yeterince büyük n için doğru olduğu sonucuna varamayız. Fakat aşağıdaki tahmin formülize edebilir.

<u>Asimptotik Bieberbach Tahmini</u>: Eğer $f\in S$ ve $A_n=\max_{f\in S}|a_n|$ ise, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}=1$$

olur (bkz. [16]).

Teorem 1.2.2.8 den herhangi $f \in S$ nin D de ki görüntüsü orjin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı bir diski içerir. Littlewood buradan yola çıkarak aşağıdaki tahmini yapmıştır.

Littlewood Tahmini: Eğer $f \in S$ ve $f \neq w$ ise, bu durumda

$$|a_n| \leq 4|w|n, \quad n = 2,3,...$$

olur (bkz. [16]).

$|w| \geq \frac{1}{4}$ için Bieberbach Tahmini, Littlewood Tahmini anlamına gelir. Ayrıca, 1957 yılında Nehari [55] asimptotik Bieberbach tahmininin Littlewood tahminini belirttiğini ispatlamıştır. Aslında Nehari aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

(2.1) ile $f \in S$ olsun. Eğer w herhangi $|z| < 1$ için $f(z)$ nin bir değeri değilse

$$|a_n| \leq 4|w|\lambda n, \quad n = 2,3,...$$

olmaktadır. Burada, $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n}$, $A_n = \max_{f \in S} |a_n|$ şeklindedir.

Diğer taraftan, 1982 yılında Hamilton [56], Littlewood tahmininin asimptotik Bieberbach tahminini belirttiğini ispatlamıştır. Bu nedenle bu iki tahmin birbirine denktir.

Yukarıda da belirtildiği üzere Milin metodu bir çok teoremin ispatında ana unsurdur. Milin metodu aşağıdaki fikir üzerine kuruludur:

Grunsky eşitsizliğinden elde edilen bilgiler, tek değerli bir fonksiyonun katsayılarının logaritmaları ile ilgilidir. Fonksiyonun kendisi hakkında bilgi edinmek için Grunsky eşitsizliğini üssünü almak gereklidir.

Lebedev ve Milin'e bağlı olarak aşağıdaki üç eşitsizlik çok önemlidir. Bu eşitsizlikler bir fonksiyonun katsayıları ile üssünün katsayıları arasında ilişkileri verir. Bu eşitsizliklerde fonksiyonlar için ünivalentliğe gerek yoktur.

$\phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$ yakınsak bir kuvvet serisi olsun. Şimdi

$$e^{\phi(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k, \quad \beta_0=1 \tag{2.22}$$

ifadesini tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

<u>Lebedev-Milin Eşitsizlikleri:</u> Aşağıdaki eşitizlikler doğrudur:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_k|^2 \le \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}k|\alpha_k|^2\right\}, \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_k|^2 \le \exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}, \tag{2.24}$$

$$|\beta_k|^2 \le \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\} \tag{2.25}$$

(Lebedev ve Milin [34], Milin [47]).

$f\in S$ ve

$$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n, \quad |z|<1 \tag{2.26}$$

olsun. Eğer $f(z)$ Koebe fonksiyonu ise $\gamma_n=\dfrac{1}{n}$ dir.

1967 yılında Bazilevich [57,58] aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır.

Bazilevich Eşitsizliği: $f \in S,\ e^{i\theta_0}$ da f fonksiyonun Hayman yönü ve γ_n (2.26) ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\gamma_n - \frac{1}{n}e^{-in\theta_0}\right|^2 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha} \tag{2.27}$$

sağlanır. Burada $\alpha > 0$, f fonksiyonunun Hayman indeksidir.

Bu eşitsizlik fonksiyonun Koebe fonksiyonu olması durumunda α'nın 1 'e yakın olduğunu göstermektedir. Fakat $|\gamma_n| \leq \dfrac{1}{n}$ eşitsizliği genelde sağlanmayabilir. Bu eşitsizlik yıldızıl fonksiyonlar ailesi gibi bazı özel fonksiyonlar aileleri için sağlanır.

Bazilevich eşitsizliğinin uygulama alanlarından biri Hayman Düzgünlük Teoremininin (Teorem 2.1.1) ispatıdır. Bu teoremin ispatı Aharonov [54] tarafından verilmiştir. İspat yapılırken kullanılan temel araç Bazilevich eşitsizliği (2.27) dir.

Hayman Düzgünlük teoreminin ispatını vermeden önce ispatta kullanılacak bazı lemmaları verelim.

Lemma 2.1.4: $A_1, A_2, \ldots$ sayıları

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2 < \infty, \quad \Re e\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k\right) = O(1), \quad r \to 1^- \tag{2.28}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq r < 1$ ve $0 \leq \theta < 2\pi$ için

$$\left|\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k e^{ik\theta}\right)\right| < M\left|\frac{1-re^{i\theta}}{1-r}\right|^{\varepsilon}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Burada M sayısı r den θ dan bağımsızdır (bkz. [16]).

Lemma 2.1.5: $A_1, A_2, ...$ sayıları Lemma 2.1.4 deki gibi verilsin. Eğer

$$g(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right)$$

şeklinde ise, bu durumda $\forall \varepsilon, \eta > 0$ ve $z = re^{i\theta} \in D$ için

$$|g(z) - g(r)| \leq T \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^{\varepsilon} |e^{i\theta} - 1| \left(1 + \frac{\eta}{1-r}\right)$$

olacak şekilde z den bağımsız bir $T > 0$ sayısı vardır (bkz. [16]).

Lemma 2.1.6: $f(z) \in S$ ve

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^2 M_{\infty}(r, f) = \alpha > 0$$

olsun. Eğer f nin Hayman yönü pozitif reel eksen ise bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$|f(z)| < \frac{M}{|1-z|^{2-\varepsilon} (1-r)^{\varepsilon}}$$

olacak şekilde $z = re^{i\theta}$ den bağımsız bir $M > 0$ sayısı vardır (bkz. [16]).

Hayman düzgünlük teoreminin ispatı (bkz. [16]): $K(z)$ Koebe fonksiyonu ve $A_k = 2\left(\gamma_k - \frac{1}{k}\right)$ olsun, burada γ_k (2.26) ile tanımlı olmak üzere

$$f_n(z) = K(z) \frac{f(r_n)}{r_n} (1 - r_n)^2, \quad r_n = 1 - \frac{1}{n} \tag{2.29}$$

olsun. Böylece f_n 'nin Taylor açılımının *n*. dereceden katsayısı

$$a_n(f_n) = n\left[\frac{f(r_n)}{r_n} (1 - r_n)^2\right]$$

olur.

Hayman yönü pozitif reel eksen ve $\alpha > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n \to \infty$ için

$$\frac{a_n(f_n)}{n} \to \alpha$$

elde edilir. Şimdi $n \to \infty$ için

$$\frac{a_n(f_n - f)}{n} \to 0$$

olduğunu ispatlamak gerekir. Bunun için

$$h_n(z) = f(z) - f_n(z) = K(z)\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right) - \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k r_n^k\right)\right]$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Cauchy formülünden

$$a_n(h_n(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_n} \frac{h_n(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c_1} + \int_{c_2}\right)\frac{h_n(z)}{z^{n+1}}\,dz = I_1 + I_2$$

yazılır. Burada L pozitif bir sayı olmak üzere

$$c_1 = \left\{\theta:\ L(1-r_n) \le \theta \le \pi,\ |z| = r_n\right\}$$

$$c_2 = \left\{\theta:\ |\theta| < L(1-r_n)\right\}$$

şeklindedir . c_1 de $|h_n(z)| \le |f(z)| + |f_n(z)|$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için Lemma 2.1.6 kullanılırsa

$$|I_1| \le \frac{1}{2\pi}\int_{c_1} \frac{|h_n(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \le \frac{1}{2\pi}.\frac{2M}{(1-\frac{1}{n})^n}.\frac{1}{(1-r_n)^{\frac{1}{2}}}\int_{c_1}\frac{d\theta}{|1-z|^{\frac{3}{2}}} \le \frac{M_1.n}{L^{\frac{1}{2}}} \tag{2.30}$$

elde edilir. Burada M_1 bir sabittir. c_2 de $h_n(z) = K(r_n e^{i\theta})(g(r_n e^{i\theta}) - g(re^{i\theta}))$ ve Lemma 2.1.5 kullanılırsa

$$\left|h_n(r_n e^{i\theta})\right| \le T\,\frac{r_n}{(1-r_n)}\left|\frac{1-r_n e^{i\theta}}{1-r_n}\right|\left|e^{i\theta}-1\right|\left(1+\frac{\eta}{1-r_n}\right)$$

ve

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{c_2}\frac{|h_n(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| < T_1L^3(1+\eta n) \qquad (2.31)$$

elde edilir. Burada T_1 bir sabittir.

İlk olarak L yi $\frac{|I_1|}{n}$ keyfi küçük yapmak için yeteri kadar büyük seçelim. Bu (2.30) ile mümkündür. O halde $T_1\eta L^3$ ü bazı büyük n ler için $\frac{|I_2|}{n}$ i keyfi küçük yapmak için yeterince küçük olacak şekilde bir η seçelim. Bu (2.31) ile mümkündür.

Burada Hayman düzgünlük teoremini $\alpha > 0$ için ispatlanmış olur. $\alpha = 0$ olduğunda ise $\varepsilon > 0$ için $r_0 < 1$ ve $M_\infty(r, f) < \frac{\varepsilon^2 r}{(1-r)^2}$, $r_0^2 < r < 1$ olacak şekilde r_0 vardır. $r_0 < r < 1$ olduğu durumda $M_\infty(r,h) < \frac{\varepsilon r}{1-r^2}$ olur. Burada (2.14) ile $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ elde edilir. Böylece $r_0 < r < 1$ olduğunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 r^{2n} < \left(\frac{\varepsilon r}{1-r^2}\right)^2$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} M_1(r^2, f) &= \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n} = \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} 2n|c_n|^2 \rho^{2n-1} d\rho \\ &= \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{r} < \varepsilon^2 \int_0^r \frac{2\rho d\rho}{(1-\rho^2)^2} + O(1) = \frac{\varepsilon^2 r^2}{1-r^2} + O(1) \end{aligned}$$

olur. $r = 1 - \frac{1}{n}$ seçilirse büyük n değeri için

$$|a_n| < \frac{1}{r^{n-1}} M_1(r, f) < 2\varepsilon^2 en$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon \to 0$ için $\frac{|a_n|}{n} \to 0$ olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Milin, Grunsky eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki lemmayı ispatlamıştır.

Milin Lemması: Herhangi $f \in S$ için

$$\sum_{k=1}^{n} k\left|\gamma_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta \tag{2.32}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta < 0.312$ dir (bkz. [16]).

İspat: $f \in S$ ve γ_k aşağıdaki eşitlikteki katsayılar olsun

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad |z| < 1.$$

$F_n(w)$ n.dereceden Faber polinomu olmak üzere

$$\log \frac{z}{g(z)-w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F_n(w) z^{-n}$$

verilen eşitlikten $2\gamma_n = \frac{1}{n} F_n(0)$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$4\sum_{k=1}^{n} k\left|\gamma_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left|F_k(0)\right|^2$$

olur.

$g \in \Sigma$ ve $A_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} w_k$, $|w| < 1$ olmak üzere

$$F_n(g(\zeta)) = nA_n(\frac{1}{\zeta}) + \zeta^n, \quad n = 1, 2, ...$$

ve $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{k}\left|F_k(g(\zeta))\right|^2 \leq 2k\left|A_k(\frac{1}{\zeta})\right|^2 + \frac{2}{k}|\zeta|^{2n}$$

eşitsizliği elde edilir. Güçlü Grunsky eşitsizliğinde $\gamma_k = w^k$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n(w)|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|w|^{2n} = -\log(1-|w|^{2n})$$

elde edilir.Yukarıdaki eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(g(\zeta))|^2 &\le 2\sum_{k=1}^{n} k\left|A_k(\frac{1}{\zeta})\right|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|\zeta|^{2n} \\ &\le -2\log\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|\zeta|^{2k}\end{aligned}$$

bulunur. $|\zeta|>1$ için $g(\zeta) = \left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{-1}$ olarak alınırsa $g \in \Sigma$ olur. g fonksiyonu $|\zeta| = \rho(>1)$ eğrisini, orjini ihtiva eden bir C_p Jordan eğrisine resmeder. $\sum_{k=1}^{n} |F_k(w)|^2$ fonksiyonu C_p ile sınırlanan bir bölgede subharmonik fonksiyondur (Ahlfors, [59]). Bu durumda subharmonik fonksiyonların maksimum modül prensibinden,

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(0)|^2 &\le \max_{\omega\in C_\rho} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|F_k(\omega)|^2 \\ &\le -2\log(1-\rho^{-2}) + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^{2k}}{k}\end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her taraf 2 ye bölünürse

$$2\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\rho^{2k} - \log(1-\rho^{-2}), \quad \rho > 1 \tag{2.34}$$

elde edilir. $\rho^2 = e^t$, $t = \dfrac{2x}{2n+1}$, $t > 0$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}-\log(1-\rho^{-2}) = -\log(1-e^{-t}) &= \frac{t}{2} - \log(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) < \frac{t}{2} - \log t \\ &= \frac{x}{2n+1} - \log x + \log(n+\frac{1}{2}) \\ &< \frac{x}{2n+1} - \log x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma\end{aligned}$$

olur. Burada $\gamma = 0.577...$ Euler sabiti olmak üzere

$$\log(n+\frac{1}{2}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \tag{2.35}$$

eşitsizliği kullanıldı.

Diğer taraftan $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!} = e^t$ kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \rho^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (kt)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$$

yazılır. Böylece

$$m \sum_{k=1}^{n} k^{m-1} < \left(n + \frac{1}{2} \right)^m , \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.36}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \rho^{2k} &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + nt + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!m} t^m \left(n + \frac{1}{2} \right)^m \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{2nx}{2n+1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m!m} \end{aligned}$$

elde edilir. Tüm bu sonuçlar (2.34) de yerine yazılırsa

$$2 \sum_{k=1}^{n} k |\gamma_k|^2 \leq \int_0^x \frac{e^y - 1}{y} dy - \log x + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma \equiv G_n(x)$$

bulunur. G_n nin minimum değerini bulmak için G_n nin diferensiyeli alınarak $G_n'(x) = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ olur. G_n, $x = \log 2$ de minimum değerini alır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} k |\gamma_k|^2 \leq \frac{1}{2} G_n(\log 2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta$$

elde edilir. Burada

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\log 2} \frac{e^y - 1}{y} dy - \frac{1}{2} \log \log 2 - \frac{\gamma}{2} < 0.312$$

dir. Böylece Milin Lemması ispatlanmış olur.

(2.35) ve (2.36) nın ispatı aşağıdaki şekildedir. Öncelikle (2.35) in ispatını verelim:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

olsun. O halde $y_n - y_{n-1} = \psi(n)$ ve

$$\psi(x) = \frac{1}{x} - \log \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$$

olur.

$x \to +\infty$ için $\psi(1) < 0,\ \psi'(x) > 0$ ve $\psi(x) \to 0$ olduğu açıktır. Böylece $y_n < y_{n-1}$ bulunur ve y_n, azalandır. Dolayısıyla $y_n \to \gamma$ dır.

(2.36) eşitsizliğini tümevarım yöntemi ile ispatlayalım. $n = 1$ için (2.36) nın sağlandığı açıktır. Eğer (2.36), $n-1$ için sağlanıyor ise o halde

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} < \frac{1}{m}\left(n - \frac{1}{2}\right)^m + n^{m-1} < \frac{1}{m}\left(n + \frac{1}{2}\right)^m$$

olur ve $\left(n + \frac{1}{2}\right)^m - \left(n - \frac{1}{2}\right)^m > mn^{m-1}$ dir.

Milin Lemması, Milin Tahmini (2.39) bakımından oldukça önemlidir

Milin Lemmasını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik ispatlanır.

<u>Teorem 2.1.7:</u> $h(z)$ fonksiyonu (2.14) ile tanımlansın. Bu durumda,

$$|c_n| < e^{\frac{\delta}{2}} < 1.17, \quad n = 2, 3, \ldots$$

dır (bkz. [16]).

İspat: $f \in S$ ve $h(z)=\sqrt{f(z^2)}$ olmak üzere

$$\log\frac{h(z)}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\log\frac{f(z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}z^n=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n\right\},\qquad c_1=1 \tag{2.37}$$

elde edilir. (2.25) üçüncü Lebedev-Milin eşitsizliğinden,

$$|c_{2n+1}|^2\le\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}k|\gamma_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\} \tag{2.38}$$

olur. Buradan Milin lemmasından

$$|c_{2n+1}|\le e^{\frac{\delta}{2}}<e^{0.156}<1.17,\quad n=1,2,...$$

bulunur. Littlewood-Paley Tahmini doğru olmadığı için δ nın değeri 0 olmayabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki Milin tahmini bazı durumlarda $\delta=0$ olduğunu iddia etmektedir.

Milin Tahmini: Herhangi $f\in S$ için, γ_n (2.26) ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\le 0,\quad n=1,2,... \tag{2.39}$$

sağlanır [36].

(2.37) den ve ikinci Lebedev-Milin eşitsizliği (2.24) den

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2\le(n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}$$

olduğu görülür. Böylece eğer Milin Tahmini doğru ise

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{2k+1}|^2 \le n+1$$

olur. Yani Robertson tahmini doğrudur. Böylece Robertson Tahmini ispatlanmış olur. 1984 yılında De Branges, Milin tahminini dolayısıyla Robertson ve Bieberbach tahminlerini kanıtladı.

Bu bölümü sonuçlandırmak için birkaç ilgili tahminden bahsedelim.

1925 yılında Littlewood [29] aşağıdaki sonucu ispatlamıştır:

Eğer $g \prec f$ ise $0 < r < 1,\ 0 < p < \infty$ için

$$M_p(r, g) \le M_p(r, f) \tag{2.40}$$

olur. Burada $M_p(r, g)$, (2.12) ile tanımlıdır. Bu sonuçtan yola çıkarak 1939 ve 1943 yıllarında Rogosinski [60,61]

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \le \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2, \quad N = 1, 2, ...$$

eşitsizliğinin sağlandığını, $p \ne 2$ için

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^p \le \sum_{n=1}^{N} |a_n|^p$$

eşitsizliğinin de sağlanmadığını ispatlamıştır.

Ayrıca $g \prec f$ olması $|b_n| \le |a_n|$ olacağı anlamına gelmez. Basit bir ters örnek olarak $z^2 \prec z$ verilebilir. Rogosinski aşağıdaki tahminde bulunmuştur.

Rogosinski Tahmini: Eğer $g \prec f$ ve $f \in S$ ise $|b_n| \leq n$, $n = 1,2,...$ dir.

$f \prec f$, açık olarak doğru olduğu için Rogosinski Tahmini, Bieberbach Tahmini anlamına gelir. $n = 1$ için Rogosinski Tahmini Schwarz Lemması ile ispatlanabilir. $n = 2$ için ispat Littlewood [29] tarafından yapılmıştır. Rogosinski [26] eğer f fonksiyonu yıldızıl veya reel bir katsayıya sahip olması durumunda ve Robertson [62] ise konvekse yakın fonksiyonlar için tahminin doğru olduğunu ispatlamıştır.

Robertson tahmini, Rogosinski tahmini anlamına gelir. Bu durum aşağıda gösterilmiştir.

$h(z)$, (2.14) ile tanımlansın. $g \prec f$ için $g(z) = f(w(z))$ vardır.

$$\phi(z) = \frac{h(z)}{\sqrt{z}} = 1 + c_3 z + c_5 z^2 + ...$$

olsun. Bu durumda $(\phi(z))^2 = f(z)/z$ olur. Böylece

$$\mathrm{g}(z) = w(z)\left\{1 + c_3 w(z) + c_5 (w(z))^2 + ...\right\}^2$$

elde edilir. ϕ nın ilk n kısmi toplamı

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1} z^{k-1}$$

ile gösterilir. $w(0) = 0$ olduğundan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{w(z)\left[S_n(w(z))\right]^2}{z^{n+1}} dz$$

olur. $S_n(w(z)) \prec S_n(z)$ için (2.40) Littlewood teoreminden

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq r^{-n}\left[M_2(r, S_n(w(z)))\right]^2 \leq r^{-n}\left[M_2(r, S_n(z))\right]^2 \\ &= r^{-n} \sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2 r^{2k-2} \end{aligned}$$

elde edilir. $r \to 1$ alınırsa

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2$$

olur. Böylece Robertson tahminini aynı zamanda Rogosinski tahmini demek olduğu görülür. Sheil-Small tahmini Robertson ve Rogosinski tahmini arasında bir yerdedir.

$f(z) = \sum a_n z^n$, $g(z) = \sum b_n z^n$ iki kuvvet serisi olsun. Bu durumda $h(z) = \sum a_n b_n z^n$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının *Hadamard çarpımı* denir ve $h = f * g$ ile gösterilir.

<u>Sheil-Small Tahmini:</u> Herhangi $f \in S$ ve n. dereceden herhangi P polinomu için

$$\|P * f\|_\infty \leq n\|P\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\| \quad \|_\infty$ ile $|z| \leq 1$ de maksimum modül ifade edilir [63].

Eğer $P(z) = z^n$ olarak alınırsa Sheil-Small tahmini Bieberbach tahminine eşit olur. Bu durum Sheil-Small tahmini Roberson tahmini ve Rogosinski tahmini arasındadır şeklinde gösterilir (bkz. [63]).

Bu yedi tahmin arasındaki ilişki aşağıdaki şekildedir :

Milin Tahmini $\Rightarrow$ Robertson Tahmini $\Rightarrow$ Sheil-Small Tahmini $\Rightarrow$ Rogosinski Tahmini $\Rightarrow$ Bieberbach Tahmini $\Rightarrow$ Asimptotik Bieberbach Tahmini $\Rightarrow$ Littlewood Tahmini

De Branges, Milin tahminini ispatlamıştır. Böylece yukarıdaki tahminlerin tümü ispatlanmıştır. Branges'in ispatından önce tüm bu yedi tahmin açık birer problemdi.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Buraya kadar Bieberbach varsayımının kesin isptlanamadığını sadece daha iyi sonuçlar elde etmek için çaba harcandığını gördük. Bu bölümde tezin esas amacı olan Bieberbach tahminin doğruluğunun iki ispatına yer verilmiştir. Bunlardan en önemlisi hiç şüphesiz Branges'in ispatı diğeri Branges'in ispat tekniğinden esinlenerek ve sadece kullanılan fonksiyonu değiştirerek yapılan Wienstein'in ispatıdır.

Teorem 3.1 (De Branges Teoremi): Milin tahmini (2.39) doğrudur. Eşitlik ancak ve ancak $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonu ya da Koebe fonksiyonunun dönmelerinden biri olmasıyla sağlanır [1].

Bu teoremin ispatı ilk defa 1984 yılında Branges tarafından verilmiştir.

3.1 De Branges'in İspatı

İspatı vermeden önce ispatta kullanılacak bazı bilgileri verelim. Bu bilgiler Gong'un [16] kitabından alınmıştır.

Jacobi Polinomu: $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ için $\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$ Kronecker deltası olmak üzere

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx = \delta_{n,m} \tag{3.1}$$

ve

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{\alpha}$$

normalize şartını sağlayan *n*.dereceden $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomuna *Jacobi polinomları* denir.

Teorem 3.1.1: $n=1,2,\cdots$ için

$$\tau_{n,k}(t)=k\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v\frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(n-k-v)!}e^{-(v+k)t}$$

ve (3.2)

$$\tau_{n,n+1}(t)=0 \qquad (k=1,2,\cdots)$$

sistemine Branges in *özel fonksiyon sistemi* denir [1].

Lemma 3.1.2: Eğer $P_j^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomu ise

$$\tau'_{n,k}(t)=-ke^{-kt}\sum_{j=0}^{n-k}P_j^{(2k,0)}(1-2e^{-t}) \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 3.1.3: Eğer $0\le t\le\infty$ ve $k=1,2,...$ ise $k=1,2,...,n$ için

$$\tau'_{n,k}(t)\le 0 \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Teorem 3.1.4: De Branges in özel fonksiyon sistemi

$$\tau_{n,k}(t)-\tau_{n,k+1}(t)=-\frac{\tau'_{n,k}(t)}{k}-\frac{\tau'_{n,k+1}(t)}{k+1}, \quad k=1,2,...,n \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\tau_{n,k}(0)&=n-k+1, \quad k=1,2,...,n\\ \tau_{n,n+1}(t)&\equiv 0, \quad 0\le t<\infty\end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitlikleri sağlar [1].

Branges'in İspatı: İspat için yalnızca $f(z)\in S$ fonksiyonunu dikkate almamız gereklidir. $f(z)\in S$ fonksiyonu $|z|<1$ diskini kompleks düzlemde bir slit eğrisine resmeder. Slit eğrisi sonsuzluğa eğimli olan bir Jordan eğrisidir. Bilindiği üzere, böyle fonksiyonlar S de yoğundur. Böyle fonksiyonlar için bu teoremi ispatlamak gereklidir. Loewner zincirler teorisinden bilindiği üzere bu tür slit dönüşümler

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} \tag{3.7}$$

Loewner diferensiyel denklemini sağlar ve

$$f(z,t)=e^t z+...+a_n(t)z^n+..., \quad |z|<1, \ \ 0\le t<\infty$$

şeklinde açılıma sahiptir. Burada

$$f(z,0)=f(z)$$

ve $\kappa(t)$, $|\kappa(t)|=1$ olacak şekilde $0\le t<\infty$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $0\le t<\infty$ için,

$$\log\left(\frac{f(z,t)}{e^t z}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)z^k, \quad |z|<1 \tag{3.8}$$

olsun. O halde $c_k(0)=2\gamma_k$ dir. Burada γ_k, (2.26) ile tanımlanır. (3.8) eşitliğinin sırasıyla t ve z ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\frac{f_t(z,t)}{f(z,t)}-1=\sum_{k=1}^{\infty}c_k'(t)z^k \tag{3.9}$$

ve

$$\frac{f_z(z,t)}{f(z,t)}-\frac{1}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k(t)z^{k-1} \tag{3.10}$$

yazılır. (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemlerinden

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)z^k = \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(t)z^k\right)$$
$$=(1+2\kappa(t)z+2\kappa(t)^2 z^2+...)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(t)z^k\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte katsayılar karşılaştırıldığında

$$c_k'(t)=2\kappa(t)^k + kc_k(t)+2\sum_{j=1}^{k-1}\kappa(t)^{k-j}\, jc_j(t)$$

bulunur. Şimdi

$$b_0(t)=0,\quad b_k(t)=\sum_{j=1}^{k} jc_j(t)\kappa(t)^{-j},\quad k=1,2,... \tag{3.11}$$

olsun. Bu durumda

$$c_k'(t)=2\kappa(t)^k - kc_k(t)+2\kappa(t)^k b_k(t),\quad k=1,2,... \tag{3.12}$$

dir. Sabit bir n için

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(k\left|c_k(t)\right|^2-\frac{4}{k}\right)\tau_{n,k}(t) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlansın. O halde (3.6) dan Milin tahmini

$$\varphi(0)=\sum_{k=1}^{n}\left(k\left|c_k(0)\right|^2-\frac{4}{k}\right)(n-k+1)\le 0 \tag{3.14}$$

olur. (3.14) ifadesinin ispatı aşağıdaki şekildedir. Bunun için

$$\varphi'(t)=-\sum_{k=1}^{n}\left|b_{k-1}(t)+b_k(t)+2\right|^2\frac{\tau_{n,k}'(t)}{k} \tag{3.15}$$

eşitliğini $t\ge 0$ için ispatlamak gerekir. Eğer (3.15) sağlanıyorsa bu durumda Teorem 3.1.3 den $\varphi'(t)\ge 0$ olur ve böylece $\varphi(t)$ monoton artan bir fonksiyondur. S nin kompaktlığından ve $\{\tau_{n,k}(t)\}$ in 4.2.1 deki tanımından $\varphi(\infty)=0$ elde edilir. Bu tam olarak Milin tahmini olan $\varphi(0)\le 0$ anlamına gelir.

Şimdi de bazı basit cebirsel hesaplamalar ile birlikte (3.13) den (3.15) i ispatlamak için (3.12) ve Teorem 3.1.4 kullanılacaktır.

$|\kappa(t)| = 1$ ve $\kappa(t)^{-1} = \overline{\kappa}(t)$ olduğundan (3.11) den

$$\begin{cases} \overline{b}_k(t) - \overline{b}_{k-1}(t) = k\overline{c}_k(t)\kappa(t)^k \\ b_k - b_{k-1} = kc_k\overline{\kappa(t)^k} \\ |b_k - b_{k-1}|^2 = k^2|c_k|^2 \end{cases} \tag{3.16}$$

dir. (3.13) ve (3.16) den

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(|b_k - b_{k-1}|^2 - 4\right)\frac{\tau_{n,k}(t)}{k} \tag{3.17}$$

elde edilir. $kc_k(t) = \kappa^k(b_k(t) - b_{k-1}(t)) = u(t)$ olsun. O halde $|u|^2 = |b_k - b_{k-1}|^2$ ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial |u|^2}{\partial t} &= u_t\overline{u} + u\overline{u}_t = 2\Re e(u_t\overline{u}) = 2\Re e(kc_k'(t)\overline{u}) \\ &= 2\Re e\left[kc_k'(t)\kappa(t)^{-k}(\overline{b}(t) - \overline{b}_{k-1}(t))\right] \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|b_k - b_{k-1}|^2}{k}\right) = 2\Re e\left\{c_k'(t)\kappa(t)^{-k}(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1})\right\} \tag{3.18}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte (3.12) de ki c_k' yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|b_k - b_{k-1}|^2}{k}\right) = 2\Re e\left\{2(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1}) - kc_k\kappa^{-k}(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1}) + 2b_k(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1})\right\}$$

elde edilir. (3.16) den $kc_k\kappa^{-k} = b_k - b_{k-1}$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|b_k - b_{k-1}|^2}{k}\right) &= 2\Re e\left\{2(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1}) - |b_k - b_{k-1}|^2 + 2b_k(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1})\right\} \\ &= -2|b_k - b_{k-1}|^2 + 4\Re e\left\{(1 + b_k)(\overline{b}_k - \overline{b}_{k-1})\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Önceki denklemi kullanarak ve (3.17) nin diferensiyeli alınırsa

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 - 4\right)\frac{\tau'_{n,k}(t)}{k} + \sum_{k=1}^{n}\tau_{n,k}(t)\left[-2\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e(1+b_k)(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$$

yazılır. Ayrıca

$$-\sum_{k=1}^{n}(2\left|b_k\right|^2 + 4\Re e b_k)\tau_{n,k+1} = -\sum_{k=1}^{n+1}(2\left|b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e b_{k-1})\tau_{n,k} = -\sum_{k=1}^{n}(2\left|b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e b_{k-1})\tau_{n,k}$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{k=1}^{n}(2\left|b_k\right|^2 + 4\Re e b_k)(\tau_{n,k} - \tau_{n,k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(2\left|b_k\right|^2 + 4\Re e b_k - 2\left|b_{k-1}\right|^2 - 4\Re e b_{k-1})\tau_{n,k}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$-2\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e(1+b_k)(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1}) = 2\left|b_k\right|^2 - 2\left|b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e b_k - 4\Re e b_{k-1}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\tau_{n,n+1}^{(t)} = 0$ ve $b_0(t) = 0$ olduğundan dolayı

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 - 4\right)\frac{\tau'_{n,k}(t)}{k} + \sum_{k=1}^{n}(2\left|b_k\right|^2 + 4\Re e b_k)(\tau_{n,k} - \tau_{n,k+1})$$

bulunur. (3.5) den $\tau_{n,n+1}^{(t)} = 0$ ve $b_0(t) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 - 4\right)\frac{\tau'_{n,k}(t)}{4} + \sum_{k=1}^{n}(2\left|b_k\right|^2 + 4\Re e b_k)\left(-\frac{\tau'_{n,k}}{k} - \frac{\tau'_{n,k+1}}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[(\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 - 4) - 2\left|b_k\right|^2 - 4\Re e b_k\right]\frac{\tau'_{n,k}}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}(2\left|b_{k-1}\right|^2 + 4\Re e b_{k-1})\frac{\tau'_{n,k}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\tau'_{n,k}}{k}\left[(\left|b_k - b_{k-1}\right|^2 - 4) - 2\left|b_k\right|^2 - 4\Re e b_k - 2\left|b_{k-1}\right|^2 - 4\Re e b_{k-1}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\left|b_k + b_{k-1} + 2\right|^2\frac{\tau'_{n,k}}{k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Milin tahmini ispatlanmış olur.

Şimdi de Milin Tahmininde eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şartın fonksiyonun Koebe fonksiyonu ve Koebe fonksiyonunun dönmeleriyle mümkün olabileceğini ispatlayalım.

Eğer $f(z) \in S$ fakat bir Koebe fonksiyonu veya Koebe fonksiyonunun bir dönmesi değil ise Teorem 1.2.2.4 den $|a_2| \leq 2$ olur. Bir $f_m \in S$ fonksiyon dizisi seçelim. f_m fonksiyon dizisi $|z| < 1$ diskini kompleks düzlemden bir ucu sonsuzluğa uzanan Jordan eğrisinin çıkarıldığı bölgeye resmeder Ayrıca f_m dizisi $|z| < 1$ in herhangi kompakt alt kümesi üzerinde f e düzgün yakınsaktır. f_m için $f_m(z,t)$ vardır. $f_m(z,t)$ deki $a_{n,m}(t)$ katsayıları (3.8) deki $c_{n,m}(t)$ katsayılarına karşılık gelir. m yeterice büyük alındığında,

$$|c_{1,m}(0)| = |a_{2,m}(0)| < \alpha < 2 \tag{3.19}$$

olacak şekilde bir α vardır. (3.12) den

$$|c'_{1,m}(0)| = |c_{1,m}(t) + 2\kappa(t)| \leq |a_{2,m}(t)| + 2 \leq 4$$

elde edilir. Dolayısıyla $t \geq 0$ için $|c_{1,m}(t)| \leq \alpha + 4t$ olur. $0 \leq t \leq \dfrac{2-\alpha}{4}$ için $\alpha + 4t \leq 2$ yazılır. (3.19) ve $\tau'_k(t) < 0$ dan $0 \leq t \leq \dfrac{2-\alpha}{4}$ ve yeterince büyük m için,

$$\varphi'_m(t) \geq \left|c_{1,m}(t)\overline{k}_m(t) + 2\right|^2 (-\tau'_1(t)) \geq (2-\alpha-4t)^2(-\tau'_1(t))$$

olur. Diğer taraftan

$$-\int_0^\infty \varphi'_m(t)dt = \varphi_m(0) = \sum_{k=1}^{n} (k\left|c_{k,m}(0)\right|^2 - \frac{4}{k})(n+1-k)$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n}(k\left|c_{k,m}(0)\right|^2-\frac{4}{k})(n+1-k)\leq-\int_0^{\frac{2-\alpha}{8}}\varphi_m'(t)dt$$

$$\leq\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2\int_0^{\frac{2-\alpha}{8}}\tau_1'(t)dt=\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2\left[\tau_1\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)-\tau_1(0)\right]<0$$

bulunur. Böylece $m\to\infty$ için $\sum_{k=1}^{n}\left(k\left|c_k\right|^2-\frac{4}{k}\right)(n+1-k)<0$ olur.

Böylece Milin Tahminindeki eşitliğin sağlanmasının Koebe fonksiyonu veya dönmelerinin sağladığı görülmüş olur. Yani De Branges Teoremi ispatlanmış olur.

De Branges Teoremi Robertson tahminini dolayısıyla Bieberbach tahminini belirtir.

3.2 Weinstein'in İspatı

Wientein'in ispatında Branges'in ispatındaki Jacobi polinomlarından farklı olarak Legendre polinomları kullanılmıştır. Şimdi bu polinomu tanıyalım. x bir reel sayı, z bir kompleks sayı ve $\left|2xz-z^2\right|<1$ olsun. Şimdi $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ifadesinin $2xz-z^2$ 'nin kuvvetleri şeklinde seriye açalım. Bu seri

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}=P_0(x)+zP_1(x)+z^2P_2(x)+z^3P_3(x)+\ldots \tag{3.20}$$

şeklindedir. Burada

$$P_0(x)=1\,,\ P_1(x)=x\,,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\,,\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,,\ldots$$

olup genel olarak

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$$

şeklindedir.

Burada değişkeni x olan $P_0(x), P_1(x), \ldots$ polinomları *Legendre polinomları* olarak bilinir.

$P_n(x)$ 'de *n.*dereceden Legendre polinomu olarak adlandırılır. Eğer *n* bir tamsayı alınırsa

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r}$$

şeklinde olur. (3.20) den ve yukarıdaki son eşitlikten

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{3.21}$$

yazılır. Bu sonuç *Rodrigues formülü* olarak bilinir.

Analitik fonksiyonun *n.* türevinin integral temsili (Cauchy Türev Formülü) kullanılarak

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-x)^{n+1}} dt \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada C saat yönünün tersinde basit kapalı bir eğridir. Bu formülle Legendre formülleri için *Schäfli formülüdür*.

Legendre polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılabilir. Bunun için $|1-x| \le 2(1-\delta)$, $0<\delta<1$ ve C de $|1-t| = 2-\delta$ çemberi olsun. Dolayısıyla

$$\left|\frac{1-x}{1-t}\right| \le \frac{2-2\delta}{2-\delta} < 1$$

olduğundan $(t-x)^{-n-1}$ ifadesi düzgün yakınsak bir seriye

$$(t-x)^{-n-1} = (t-1)^{-n-1} \times \left\{1 + (n+1)\frac{x-1}{t-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^2 + \ldots\right\}$$

şeklinde açılabilir.

Bu eşitlik yukarıdaki Schäfli integralinde yerine yazılıp terim terim integrali alınırsa

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(x-1)^r}{2^{n+1}\pi i}\frac{(n+1)(n+2)...(n+r)}{r!}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1+r}}dt$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(x-1)^r(n+1)(n+2)...(n+r)}{2^n(r!)^2}\left[\frac{d^r}{dt^r}(t+1)^n\right]_{t=1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left[\frac{d^r}{dt^r}(t+1)^n\right]_{t=1}=2^{n-r}n(n-1)(n-r+1)$$

olduğundan dolayı $|1-x|\le 2(1-\delta)<2$ için

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)...(n+r)(-n)(1-n)...(r-1-n)}{(r!)^2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)^r\\&={}_2F_1(n+1,-n;1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)\end{aligned}\tag{3.23}$$

yazılır. (3.23) den

$$P_n(x)=P_{-n-1}(x)\tag{3.24}$$

olur. k bir pozitif tamsayı $-1<x<1$ olmak üzere

$$P_n^k(x)=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n(x)}{dx^k}\tag{3.25}$$

fonksiyonu k. mertebeden ve n. dereceden *Ferrer yardımcı Legendre fonksiyonu* denir.

(3.22) ve (3.25) den

$$P_n^k(x)=\frac{(n+1)(n+2)...(n+k)}{2^{n+1}\pi i}(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\int_C(t^2-1)^n(t-x)^{-n-k-1}\tag{3.26}$$

yazılır. Ayrıca $t=x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\phi}$ yani C, x merkezli $\left|(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|$ yarıçaplı bir çemberdir. Bu durumda $dt=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\phi}id\phi$ olur .

$t^2-1=2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\phi}((x^2-1)\cos\phi+x)$ ve $t-1=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\phi}$ sonuçları (3.26) da yerine yazılırsa,

$$P_n^k(x)=\frac{(n+1)(n+2)...(n+k)}{2\pi}(-1)^{\frac{k}{2}}.\int_{-\pi}^{\pi}((x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi+x)^n e^{-ik\phi}d\phi$$

bulunur.

$(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi+x$, ϕ 'nin bir çift fonksiyonu olduğundan

$$\int_{-\pi}^{\pi}((x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi+x)^n\sin k\phi d\phi=0$$

dır. Böylece

$$P_n^k(x)=\frac{(n+1)(n+2)...(n+k)}{2\pi}(-1)^{\frac{k}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}((x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi+x)^n\cos k\phi d\phi \tag{3.27}$$

olur. Şimdi Legendre polinomları için farklı bir temsil teoremini verelim.

$$P_n(x)=P_n(u)P_n(v)+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^k(u)P_n^k(v)\cos k\theta \tag{3.28}$$

yani, $x=uv-(u^2-1)^{\frac{1}{2}}(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta$ olmak üzere (3.28) temsilinin doğru olduğunu gösterelim. Sabit bir v için eğer $v>0$ ise kolaylıkla

$$\left|\frac{u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}}co(\theta-\varphi)}{v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi}\right|$$

φ 'nin sınırlı bir fonksiyonudur. M bu fonksiyonun üst sınırı $|z|<M^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}}co(\theta-\varphi))^n}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}}$$

φ ye göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} co(\theta-\varphi))^n}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\varphi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} co(\theta-\varphi))^n}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\varphi \tag{3.29}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[v-2u+((v^2-1)^{\frac{1}{2}} - z(u^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta)\cos\varphi - z(u^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\sin\varphi \right]^{-1} d\varphi$$

yazılır. Basit hesaplamalarla $\left| A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}} \right| < \left| (B^2+C^2)^{\frac{1}{2}} \right|$ olması durumunda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi} = \frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

doğrudur. (3.29) nun sağ tarafının integrali

$$2\pi\left[(v-2u)^2 - \left[(v^2-1)^{\frac{1}{2}} - z(u^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta \right]^2 - \left[z(u^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\theta \right]^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2\pi}{(1-2zx+z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.30}$$

dır.

Yukarıdaki ifadeler Legendre polinomunun tanımında yerine yazılırsa

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} co(\theta-\varphi))^n}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\varphi \tag{3.31}$$

bulunur.

$P_n(x)$, $\cos\theta$ ya bağlı n. dereceden bir polinom olduğundan bu fonksiyon *Fourier kosinüs serisi*

$$P_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos k\theta$$

şeklinde olur. Burada

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[u + (u^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi \right]^n \sin k\psi d\psi = 0$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} co(\theta-\varphi))^n \cos k\theta}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi)^n \cos k(\varphi+\psi)}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\psi d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u+(u^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi)^n \cos k\varphi \cos k\psi)}{(v+(v^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi)^{n+1}} d\psi d\varphi \end{aligned}$$

şeklindedir.

Dolayısıyla (3.24) ve (3.27) den

$$A_k = 2\frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(u) P_n^k(v)$$

bulunur. Böylece (3.28) ispatlanmış olur.

<u>Weinstein Teoreminin ispatı</u>: Sabit $z \in D$, $w = w_t(z)$, $\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{e^t w}{(1-w)^2}$, $t \geq 0$ olsun.

Bu durumda $\frac{\partial w}{\partial t} = -w\frac{1-w}{1+w}$ ve $t \to \infty$ için $w_t(z) \to 0$ 'dan dolayı

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k}-k|c_k(0)|^2\right)(n-k+1)\right)z^{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k|c_k(0)|^2\right)(n-k+1)z^{n+1}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mz^{m+k}\left(\frac{4}{k}-k|c_k(0)|^2\right)=\frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k|c_k(0)|^2\right)z^k\\
&=\int_0^{\infty}-\frac{z}{(1-z)^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k}-k|c_k(t)|^2\right)w^k\right)dt\\
&=\int_0^{\infty}\frac{e^t w}{1-w^2}\frac{1+w}{1-w}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k(c_k(t)\bar{c}_k(t))'w^k+\sum_{k=1}^{\infty}(4-k^2|c_k(t)|^2)w^k\frac{1-w}{1+w}\right)dt
\end{aligned} \tag{3.32}$$

yazılır. (3.9) dan $z_1=re^{i\theta}$ olmak üzere

$$c_k'(t)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial f(z_1,t)}{\partial t}}{f(z_1,t)}\bar{z}_1^k\,d\theta$$

şeklindedir. (3.32) nin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\frac{e^t w}{1-w^2}\left[\frac{1+w}{1-w}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial f(z_1,t)}{\partial t}}{f(z_1,t)}k\bar{c}_k(t)\bar{z}_1^k\,d\theta\right)w^k\right)\right.\\
&+\frac{1+w}{1-w}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial \bar{f}(z_1,t)}{\partial t}}{\bar{f}(z_1,t)}kc_k(t)z_1^k\,d\theta\right)w^k\right)\\
&\left.-2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)+\frac{4w}{1-w}-\sum_{k=1}^{\infty}k^2|c_k(t)|^2w^k\right]dt\\
&=\int_0^{\infty}\frac{e^t w}{1-w^2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial f(z_1,t)}{\partial t}}{f(z_1,t)}(2(1+2+\ldots+k\bar{c}_k(t)\bar{z}_1^k)-k\bar{c}_k(t)\bar{z}_1^k)\,d\theta\right)w^k+1\right.\\
&\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial \bar{f}(z_1,t)}{\partial t}}{\bar{f}(z_1,t)}2(1+2+\ldots+kc_k(t)z_1^k)-kc_k(t)z_1^k)\,d\theta\right)w^k-2-\sum k^2|c_k(t)|w^k\right]dt
\end{aligned} \tag{3.33}$$

ifadesine denktir. (3.32) den (3.33) ün sağ tarafı

$$\int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left(\sum_{k=1}^\infty \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\dfrac{\partial f(z_1,t)}{\partial t}}{f(z_1,t)}\frac{f(z_1,t)}{z_1\dfrac{\partial f(z_1,t)}{\partial z_1}}\right\}\left(1+\sum_{l=1}^\infty lc_l(t)z_1^l\right)\right.$$
$$\times 2((1+2+\ldots+k\overline{c}_k(t)z_1^k)-k\overline{c}_k(t)z_1^k)d\theta w^k$$
$$+\sum_{k=1}^\infty \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\dfrac{\partial \overline{f}(z_1,t)}{\partial t}}{\overline{f}(z_1,t)}\frac{\overline{f}(z_1,t)}{\overline{z}_1\dfrac{\partial \overline{f}(z_1,t)}{\partial \overline{z}_1}}\right\}\left(1+\sum_{l=1}^\infty l\overline{c}_l(t)\overline{z}_1^l\right) \tag{3.34}$$
$$\left.\times 2((1+2+\ldots+kc_k(t)z_1^k)-kc_k(t)z_1^k)d\theta w^k-\sum_{k=1}^\infty k^2\left|c_k(t)\right|^2 w^2\right)dt$$

şeklinde yazılır. (3.7) Löwner diferansiyel denkleminden

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\left(z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\right)^{-1}=\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}$$

ve

$$(1+\sum_{l=1}^k lc_l(t)z_1^l)(2(1+\ldots+k\overline{c}_k(t)\overline{z}_1^k)-k\overline{c}_k(t)\overline{z}_1^k)$$
$$=\frac{1}{2}\left|2(1+\ldots+kc_k(t)z_1^k)-kc_k(t)z_1^k\right|^2+kc_k(t)z_1^k(1+\ldots$$
$$+(k-1)\overline{c}_{k-1}(t)\overline{z}_1^{k-1})+\frac{1}{2}k^2\left|c_k(t)\right|^2 r^{2k}$$

bulunur. Ayrıca (3.34) ifadesi

$$\int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\sum_{k=1}^\infty \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re e\left\{\frac{1+\kappa(t)z_1}{1-\kappa(t)z_1}\right\}\left|2(1+\ldots+kc_k(t)z_1^k)\right.$$
$$\left.-kc_k(t)z_1^k\right|^2 d\theta w^k dt=\int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2}\left(\sum_{k=1}^\infty A_k(t)w^k\right)dt \tag{3.35}$$

şeklinde yazılır. Burada $\Re e\left\{\frac{1+\kappa(t)z_1}{1-\kappa(t)z_1}\right\}\geq 0$ olduğundan $t\geq 0,\ k=1,2,\ldots,$ için

$$A_k(t)=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re e\left\{\frac{1+\kappa(t)z_1}{1-\kappa(t)z_1}\right\}\left|2(1+\ldots+kc_k(t)z_1^k)-kc_k(t)z_1^k\right|^2 d\theta\geq 0 \tag{3.36}$$

şeklindedir.

Şimdi

$$\frac{e^t w^{k+1}}{1-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_k^n(t) z^{n+1} \tag{3.37}$$

olsun. Böylece (3.35) den eğer $t \geq 0$ için $\Lambda_k^n(t) \geq 0$ ispatlanırsa Milin tahmini de ispatlanmış olur.

(3.28) de $u = v = (1-e^{-t})^{\frac{1}{2}}$ olsun. Bu durumda (3.25) den $x = 1 - e^{-t} + e^{-t}\cos\theta$ ve

$$P_n^R(u) = P_n^k(v) = e^{-\frac{tk}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n P_n(t)$$

şeklindedir. (3.28) den $A_{k,n}(t) \geq 0$ olmak üzere

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,n}(t) \cos k\theta$$

dir. Böylece (3.20) den

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-2xz+z^2} &= z\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n\right\}^2 \\ &= z\left\{\sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^{m} A_{k,m}(t)\cos k\theta\right\}.\left\{\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{l=0}^{n} A_{l,n}(t)\cos n\theta\right\} \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitliğin sağ tarafında $\cos k\theta \cos l\theta = \frac{1}{2}\{\cos(k-l)\theta + \cos(k+l)\theta\}$ formülü yerine yazılırsa $B_{k,n} \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{z}{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \sum_{k=0}^{n} B_{k,n} \cos k\theta \tag{3.38}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{e^t w}{(1-w)^2}$$

şeklinde tanımlanan $w = w_t(z)$ fonksiyonunu tekrar ele alalım. Böylece

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{1-2xz+z^2} &= \frac{1}{1+\frac{1}{z}-2x} = \frac{1}{2+e^{-t}(\frac{1}{w}+w-2)-2x} \\
&= \frac{e^t w}{1-2w\cos\theta+w^2} = \frac{e^t w}{1-w^2}\cdot\frac{1-w^2}{1+w^2-2w\cos\theta} \\
&= \frac{e^t w}{1-w^2}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty} w^k \cos k\theta\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_0^n(t) z^{n+1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \Lambda_0^n(t) z^{n+1}\cos k\theta
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

yazılır. (3.38) ve (3.39) de z^{n+1} ve $z^{n+1}\cos k\theta$ nın katsayıları eşitlendiğinde sırasıyla

$$\Lambda_0^n = B_{0,n} \quad \text{ve} \quad \Lambda_n^k = \frac{1}{2} B_{k,n}, \quad k \geq 1$$

bulunur. Böylece $t \geq 0,\ k = 0,1,...,n$ için $\Lambda_k^n(t) \geq 0$ olduğu ispatlanır.

Milin tahmini için eşitlik durumu $A_1(t)$ ve $|a_2| = 2$ eşitliğinden yola çıkılarak eşitliğin ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ve onun dönmesi ile mümkün olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmasında yaklaşık 70 yıllık bir serüveni olan Bieberbach tahminin ispatına giden yolda yapılan çalışmalar ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Bu tez ünivalent fonksiyonlar teorisinde çalışacak olan lisans üstü düzeyinde matematikçiler için önemli bir arşiv kaynağı olacaktır. Aynı zamanda tezin sunumu olarak da araştırmacıları yine bu konuda çalışmaya sürükleyeceğine inanıyoruz.

Başka bir çalışmaya öneri olarak ünivalent fonksiyonlar teorisinin diğer problemleri ve ters katsayılar için katsayı eşitsizlikleri ayrı bir çalışma altında yapılablir.

5. KAYNAKLAR

[1] De Branges, L. (1984). A proof of the Bieberbach conjecture, preprint E-5-84, Leningrad Branch of the V. A. Steklov Mathematical Institute.

[2] De Branges, L. (1985). A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math., 154, 137-152.

[3] FitzGerald, C.H. and Pommerenke Ch. (1985). The de Branges teorem on univalent functions. Trans. Amer. Soc., 290(2), 683-690.

[4] Koornwinder, T. H. (1986). A group theoretic interpretation of the last part of de Brangers' proof of the Bieberbach conjecture. Complex Variables Theory Appl., 6, 309-321.

[5] Nikol'skii, N. K and Vasyunin, V. I. (1991). Quasiorthogonal decompositions with respect to complementary metrics, and estimates of univalent functions. Leningrad Math. J., 2, 691-764.

[6] Nikol'skii, N. K and Vasyunin, V. I. (1992). Operator-Valued meansures and coefficients of univalent function. St.Petersburg Math. J., 3, 1199-1270.

[7] Branges, L D. (1986). Unitary linear systems whose transfer functions are Riemann mapping functions. Integral Equations and Operation Theory, 19, 105-124.

[8] Helton, J. W. and Weening, F. (1989). Some systems theorems arising from the Bieberbach conjecture. J. Nonlinear and Robust Control, (to appear).

[9] Rovnyak, J. (1989). Coefficient estimates for Riemann mapping functions. J. d'Analyse Math´ematique, 52, 53-93.

[10] Zill, D. G. and Shanahan, P. D. (2013). Complex analysis with applications. Jones and Bartlett Publishers.

[11] Ponnusamy, S. and Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhäuser, Boston.

[12] Duren, L. P. (1983). Univalent Functions. Springer–Verlag, New York.

[13] Pommerenke, Ch. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruprecht Company, Göttingen, Berlin, 376.

[14] Goodman, A. W. (1983). Univalent functions, Vol I, II. Mariner Publishing Co., Tampa Florida.

[15] Bieberbach, L. (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S. B. Preuss Akad. Wiss., 940-955.

[16] Gong, S. (1999). The Bieberbach Conjecture. American Mathematical Society, International pres, 201.

[17] Löwner, K. (C. Loewner). (1923). Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann., 89, 103-121.

[18] Garabedian, P. R. and Schiffer, M. (1955). A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficients. J. Rational Mech Anal., 4, 427-465.

[19] Charzynski, Z. and Schiffer, M. (1960). A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. Arch.Rational Mech. Anal., 5, 187-193.

[20] Pederson, R. N. (1968). A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficients. Arch. Rational Mech. Anal., 31, 331-351.

[21] Ozawa, M. (1969). On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficients. Arch. RationalMach. Anal., 21, 97-128.

[22] Gong, S. (1979). A simple proof of Bieberbach conjecture for the sixth coefficients, Scientia Sinica, Mathematics, 1157-1170.

[23] Pederson, R. N. and Schiffer, M. (1972). A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. Arch. Rational Mech. Anal., 45, 161-193.

[24] Nevanlinna, R. (1920-21). Über die konforme Abbildung von Sterngebieten. Översikt av Finska Vetenskaps Soc. Förh., 63(A), 6, 1-21.

[25] Reade, M. O. (1955-56). On close-to-convex univalent functions. Michigan Math. J., 3, 59-62.

[26] Rogosinski, W. (1932). Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen. Math. Z., 35, 93-121.

[27] Dieudonne′, J. (1931). Sur les fonctions univalents. C. R. Acad Sci. Paris, 192, 1148-1950.

[28] Szasz, O. (1933). Über Funktionen, die den Einheitskreise schlicht abbilden. Jber. Deutsch.Math.Verein, 42, 73-75.

[29] Littlewood, J. E. (1925). On inequalities in the theory of functions. Proc. London Math. Soc., 23, 481-519.

[30] Landau, E. (1929). Über schlichte Funktionen. Math, Z., 30, 635-638.

[31] Goluzin, G. M. (1948). On the coefficients of univalent functions. Mat. Sb., 22 (64), 373-380 (in Russian).

[32] Bazilevich, I. E. (1948). Improvement of the estimates of coefficients of Univalent functions. Mat. Sb., 22(64), 381-390 (in Russian).

[33] Bazilevich, I. E. (1951). On distortion theorems in the theory of univalent functions. Mat. Sb., 28(70), 283-292 (in Russian).

[34] Lebedev, N. A. and Milin, I. M. (1965). An inequality. Vestnik Leningrad Univ., 20(19), 157-158 (in Russian).

[35] Baernstein, A. (1974). Integral means, univalent functions and circular symmetrization. Acta Math., 133, 139-169.

[36] Milin, I. M. (1965). Estimation of coefficients of univalent functions. Soviet Math. Dokl., 6, 196-198.

[37] FitzGerald, C. H. (1972). Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions. Arch. Rational Mech. Anal., 46, 356-368.

[38] Horowitz, D. A.(1976). Refinement for coefficient estimates of univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 54, 176-178.

[39] Horowitz, D A. (1978). Further refinement for coefficient estimates of univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 71, 217-221.

[40] Littewood, J. E. and Paley, R. E. A. C. (1932). A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients. J. London Math.Soc., 7, 167-169.

[41] Fekete, M. and Szegö, G. (1933). Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, J. London Math.Soc., 8, 85-89.

[42] Schaeffer, A. O. and Spencer, D. C. (1943). The coefficients of schlicht functions, Duke Math. J., 10, 611-635.

[43] Leeman, G. B. (1976). The seventh coefficient of odd symmtric univalent functions. Duke Math.J., 43, 301-307.

[44] Chen, K. K. (1933). On the theory of schlicht functions. Proc. Imp. Acad. Japan, 9, 465-467.

[45] Levin, V. I. (1935). Some remarks on the coefficients of schlicht functions. Proc. London Math. Soc., 39, 467-480.

[46] Gong, S. (1955). Contributions to the theory of schlicht functions I, Distortion theorem. Scientia Sinica, 4, 229-249; II, The coefficient problem, Scientia Sinica, 4, 359-373.

[47] Milin, I. M. (1967). On the coefficients of univalent function. Soviet Math. Dokl., 8, 1255-1258.

[48] Milin, V. I. (1980). Estimate of the coefficients of odd univalent function, Metric question of the theory of functions. (G. D. Surorov, ed.) “Naukova Dumka” Kiev, pp. 78-86.

[49] Hu, K. (1986). Coefficients of odd univalent functions. Proc. of Amer. Math. Soc., 96, 183-186.

[50] Hayman, W. K. (1955). The asymptotic behaviour of p-valent functions. Proc. London Math.Soc., 5, 257-284.

[51] Hayman, W. K. (1994). Multivalent Functions. Cambridge University Press, 2nd edition.

[52] Milin, I. M. (1970). Hayman’s regularity theorem for the coefficients of univalent functions. Soviet Math. Dokl., 11, 724-728.

[53] Pommerenke, Ch. (1975). Univalent Functions. Vanderhoeck and Puprecht. Göttingen.

[54] Aharonov, D. (1275). Bazilevich theorem and the growth of univalent functions. Complex Analysis II, Lecture Notes in Math., (Ed. C. A. Berenstein) pp.1-9.

[55] Nahari, Z. (1957). On the coefficients of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 291-293.

[56] Hamilton, D. H. (1982). On Littlewood’s conjecture for univalent functions. Proc. Amer. Soc., 86, 32-36.

[57] Bazilevich, I. E. (1965). Coefficient dispersion of univalent functions. Mat. Sb., 68(110), 549-560.

[58] Bazilevich, I. E. (1967). On a univalence criterion for regular functions and the dispersion of their coefficients. Mat. Sb., 74(116), 133-146.

[59] Ahlfors, L. V. (1979). Complex Analysis. 3rd edition, McGraw-Hill Book Co.

[60] Rogosinski, W. (1939). On subordinate functions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 35, 1-26.

[61] Rogosinski, W. (1943). On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc., 48, 48-82.

[62] Robertson, M. S. (1965). The generalized Bieberbach conjecture for subordinate functions. Michigan Math. J., 12, 421-429.

[63] Sheil-Small, T. (1973). On the convolution of analytic functions. J. Reine Angew. Math., 258, 137-152.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yüksel TOKKAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Erzurum/Horasan 08/01/1982

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) :yyuksel_tokkan@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mehmet Akif Ersoy Lisesi/ERZURUM 1996-1999

Lisans : Atatürk Üniversitesi (2001-2005)

Tezsiz Yüksek Lisans :Kafkas Üniversitesi (2008-2012)

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi (2016-2019)

Çalıştığı Kurumlar : KARS-Özel Yüce Hedef Dershanesi(2005-2006)

:KARS-Özel Çözüm Dergisi Dershanesi (2006-2011)

:KARS-Özel Özen Final Dergisi Dershanesi(2011-2015)

: KARS-Özel Kars Final Temel Lisesi (2015-2016)

:KARS-Osman Bakırcı Anadolu İmam Hatip Lisesi(2016-2019)