T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL FONKSİYONLARIN HARDY UZAYLARI

Arzu BAYIR
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

OCAK-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Arzu BAYIR'ın Prof. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bazı Özel Fonksiyonların Hardy Uzayları" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy **birliği** ile kabul edilmiştir.

28/01/2019

Adı ve Soyadı		**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Fatih NURAY	
Üye	: Prof. Dr. Halit ORHAN	
Üye	: Prof. Dr. Erhan DENİZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Arzu BAYIR
28.01.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Bazı Özel Fonksiyonların Hardy Uzayları

Arzu BAYIR

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, Gauss hipergeometrik fonksiyonları, Bessel fonksiyonları, Struve fonksiyonları, Lommel fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonları gibi özel fonksiyonların bugüne kadar yapılan Hardy uzayı ile ilgili çalışmalar sunuldu. Bizde Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının geometrik özelliklerini ve Hardy uzayını çalıştık.

Anahtar Kelimeler: Hardy uzayı, Hipergeometrik fonksiyon, Bessel fonksiyon, Struve fonksiyon, Lommel fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyon, Wright fonksiyon, Bessel-Struve çekirdek fonksiyon.

2019, 80 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Hardy Spaces of Some Special Functions

Arzu BAYIR

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, earlier studies related with Hardy spaces of some special functions such as Gauss hypergeometric functions, Bessel functions, Struve functions, Lommel functions, Mittag-Leffler functions and Wright functions are presented. We have also studied the geometric properties and Hardy space of Bessel-Struve kernel functions.

Key Words: Hardy spaces, Hypergeometric function, Bessel function, Struve function, Lommel function, Mittag-Leffler function, Wright function, Bessel-Struve kernel function.

2019, 80 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasında bazı özel fonksiyonlarının Hardy uzayları ele alınmıştır. Bu çalışmada büyük emeği geçen, bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ' e en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bugüne gelmemde en büyük destekçilerim olan ve her zaman yanımda bulunan sevgili aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Arzu BAYIR

Kars-2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

SİMGE	TANIMI
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\Gamma(z)$	Kompleks değerli Gamma fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochammer sembolü
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonun sanal kısmı
U	Açık birim disk
$\mathcal{A}$	Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}^p$	Hardy uzaylarının sınıfı
$F(a,b;c;z)$	Gauss hipergeometrik fonksiyon
$F(a,b;z)$	Kummer hipergeometrik fonksiyon
J_p	$p.$ mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyon
I_p	$p.$ mertebeden modifiye edilmiş Bessel fonksiyon

H_p	p. mertebeden Struve fonksiyon
L_p	p. mertebeden modifiye edilmiş Struve fonksiyon
$s_{\mu,p}$	Birinci çeşit Lommel fonksiyon
$h_{\mu,p}$	Normalize edilmiş Lommel fonksiyon
$E_{\lambda,\mu}$	Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyon
$\mathbb{E}_{\lambda,\mu}$	Normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyon
$W_{\lambda,\mu}$	Wright fonksiyon
$\mathcal{W}_{\lambda,\mu}$	Normalize edilmiş Wright fonksiyon
B_p	Bessel-Struve çekirdek fonksiyon
$\mathcal{B}_p$	Normalize edilmiş Bessel-Struve çekirdek fonksiyon

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi ünivalent fonksiyonlardır. Çünkü bu teoride matematiksel bir meselenin geometrisi ile analitikliği arasında bir bağ kurma olayı vardır. Riemenn dönüşüm teoremiyle başlayan süreç 1916 yılında Bieberbach tarafından $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayıları için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağlandığını veren tahmini ortaya atmasıyla devam etmiştir. Bu tahmin 1985 yılında Louis De-Branges tarafından ispatlanmıştır.

Branges'in ispatında rol alan önemli etkenlerden biri Hipergeometrik fonksiyonlardır. Daha sonra bazı araştırmacılar farklı yöntemler kullanarak Hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini ele almışlardır. Gauss hipergeometrik fonksiyonların ünivalentliği ve yıldızıllığı gibi geometrik özelliklerini 1961 yılında E. P. Merkes ve W. T. Scott, Gauss'un sürekli-kesir yöntemini kullanarak incelemişlerdir. 1987 yılında ise S. Owa ve H. M. Srivastava ünivalent fonksiyonlar teorisinde sıkça kullanılan Jack lemmasını kullanarak genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini ele almışlardır. 1993 yılında ise H. Silverman, yıldızıl ve konveks fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini kullanarak hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği için bazı durumlarda yeter şartları bazı durumlarda ise gerek ve yeter şartları içeren sonuçları vermişlerdir. Bu süreçte S. Ponnusamy ve M. Vourinen hipergeometrik fonksiyonların ünivalentliği, yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse yakınlığı üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerinde detaylı bilgi için 2013 yılında yazılan Semra Polat' ın tezine bakılabilir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi uygulama alanı bakımından geniş bir sahaya hitap etmektedir. Bu teorinin doğuşundan bu zaman kadar bir çok bilim adamı bu teoriyi başka kavramlarla bir araya getirmiştir. Mesela matematiğin yine önemli konularından biri olan ve ilk olarak 1915 te G. H. Hardy tarafından çalışılan Hardy uzayı ile ünivalent fonksiyonlar arasında ilişkiyi ilk defa 1970 yılında P. J. Eenigenburg and F. R. Keogh incelemişlerdir. Daha sonra 1996 yılında Ponnusamy çalışmalarında hipergeometrik fonksiyonların Hardy uzayına ait olma koşullarını incelemiştir.

Son yıllarda ise Bessel, Struve, Lommel, Mittag-Leffler ve Wright gibi özel fonksiyonların Hardy uzayları üzerine çalışmalara yoğunlaşıldığını görmekteyiz. Bunula ilgili olarak 2006 yılında Baricz Bessel fonksiyonlarının, 2014 yılında Yağmur ve Orhan genelleştirilmiş Struve fonksiyonlarının, 2015 yılında Yağmur Lommel fonksiyonlarının, 2016 yılında Mondal Wright fonksiyonlarının ve son olarak 2018 yılında Prajapat, Maharana ve Bansal Mittag-Leffler fonksiyonunun Hardy uzayı üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bizde yukarıda bahsedilen çalışmalardan yola çıkarak Bessel-Struve çekirdek fonksiyonunun Hardy uzayını çalıştık.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Kuramsal temeller bölümünde tez için gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Mataryel ve yöntem bölümünde Gauss hipergeometrik fonksiyonları, Bessel fonksiyonları, Struve fonksiyonları, Lommel fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonları tanıtılıp Hardy uzayına ait olma koşulları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise araştırma bulgularına yer verilmiştir.

1.2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bağlamda ilk önce metrik uzay kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay): X bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $x, y, z \in X$ parametreleri için

i. $d(x,y) \geq 0$

ii. $d(x,y) = d(y,x)$

iii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir *metrik* denir. (X,d) sıralı ikilisine ise *metrik uzay* denir (Meise, 1997).

Örneğin; $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x,y) = |x-y|$ biçiminde tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 1.2.2 (Normlu Uzay): X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere $\|.\|: X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ile tanımlanan fonksiyon her $x, y \in X$ parametreler ve $\alpha \in \mathbb{F}$ skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde *norm* denir. Oluşan $(X, \|.\|)$ sıralı ikilisine ise *normlu uzay* denir (Meise, 1997).

Örneğin; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir normdur.

Tanım 1.2.3 (Cauchy Dizisi ve Tamlık): $X = (X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_0$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı var ise (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Meise, 1997).

X vektör uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (diğer bir ifade ile X vektör uzayı, $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğe göre tam ise) $(X, \|.\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay veya Banach uzayı* adı verilir (Meise, 1997).

1.2.1. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlar için önemli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $f : A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olması durumunda

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında *diferansiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir)* denir. Burada limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir. $f'(z_0)$ ifadesi $z = z_0$ noktasındaki f fonksiyonunun türevidir (Zill ve Shanahan, 2013).

Tanım 1.2.1.2 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir z_0 noktasında ve z_0 noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir (Zill ve Shanahan, 2013).

Tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlara *tam fonksiyon* denir.

Örneğin; $f(z)=2z,\quad f(z)=e^z,\quad f(z)=\sin z$.

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *singüler (tekil) noktası* denir.

$z=z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu, z_0 merkezli bir kuvvet serisine açılamaz. Fakat $z=z_0$ çıkarılmış singüler nokta civarında $f(z)$ yi $\left(z-z_0\right)$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini içinde bulunduran Laurent serisi olarak seri gösterimi aşağıdaki gibi yapılabilir.
z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktası ve $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

serisine $f(z)$ *fonksiyonunun* z_0 *merkezli Laurent serisi* denir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}$ serisi Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$ serisi ise Laurent serisinin analitik kısmıdır. z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olduğunda bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisinin göz önüne alınsın. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terimi varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun *kutup noktası* denir. Serinin esas kısmında paydadaki $(z-z_0)$ ın en büyük kuvveti 1 ise z_0 noktası f fonksiyonunun basit kutup noktasıdır.

Analitik fonksiyonların önemini belirten teoremlerden biri Cauchy-Türev formülüdür.

<u>Teorem 1.2.1.3</u>: $f(z)$ fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. $n=0,1,2,\ldots$ için

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

ifadesi gerçeklenir (Ponnusamy ve Silverman, 2006).

Cauchy-Türev formülünden çıkarılabilecek en önemli sonuç: “ $f(z)$ bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler o bölgede analitiktir” dır. Bu durumda $f(z)$ analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\ , \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.2.1.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

<u>Tanım 1.2.1.4</u> (Meromorf Fonksiyon): Bir $f(z)$ fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde *meromorf fonksiyon* denir (Zill ve Shanahan, 2013).

Örneğin; $f(z)=e^z/z$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir meromorf fonksiyondur.

<u>Teorem 1.2.1.5</u> (Maksimum Prensibi): $f(z)$, $E\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini E bölgesinin sınırında alır (Possunamy ve Silverman, 2006).

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.
Bu tez boyunca orijin merkezli açık birim disk $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ ile gösterilecektir.

<u>Lemma 1.2.1.6</u> (Schwarz Lemması): $f(z)$ fonksiyonu U birim diskinde analitik bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\le 1$ oluyor ise bu durumda $|f'(0)|\le 1$ ve $|f(z)|\le|z|$ dır. Eşitlik sadece özel bir durum olan ($\theta\in\mathbb{R}$ için) $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için sağlanır (Ponnusamy ve Silverman, 2006).

<u>Tanım 1.2.1.7</u> (Ünivalent Fonksiyon): $f(z)$, $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir analitik fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in B$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\ne z_2$ olduğunda $f(z_1)\ne f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) $f(z)$ fonksiyona B bölgesinde *ünivalent (veya schlicht) fonksiyonu* denir (Duren 1983).

Eğer $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna *yerel ünivalent fonksiyon* denir.

<u>Teorem 1.2.1.8:</u> Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeter şart $f'\left(z_0\right) \neq 0$ olmasıdır (Duren, 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı, $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani $f(z)$ analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = z^2$ fonksiyonu $E = \left\{z : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi\right\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent fonksiyon değildir.

<u>Tanım 1.2.1.9</u> (Konform Dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 *noktasında konformdur* denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde *konformdur* denir (Zill ve Shanahan, 2013).

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

<u>Teorem 2.1.10:</u> $f(z)$ fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu konformdur (Duren, 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon aynı zamanda konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri de Möbiüs dönüşümüdür. Bu dönüşüm, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

şeklindedir Bu dönüşüm, genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

1851 yılında Riemann, $z-$ düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\left(\mathcal{D} \neq \mathbb{C}\right)$ bölgesini, $w-$ düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f konform fonksiyonunun varlığından söz etmiştir.

Teorem 1.2.1.11 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemde tüm $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\left(\mathcal{D} \neq \mathbb{C}\right)$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan $\mathcal{D}$ yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren, 1983).

1.2.2. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak düşünüldüğünde, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip olduğunda; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı $f(z)$ analitik fonksiyonu yerine U da tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılmaktadır. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in U$$

biçimindeki fonksiyona *normalize edilmiş analitik fonksiyon* denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in U \text{ için } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon} \right\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.2.2.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ *sınıfı* denir ve kısaca

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } f - \text{ünivalent} \}$$

biçiminde gösterilir (Pommerenke 1975; Goodman 1983b; Duren 1983).

Örneğin; $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots \in \mathcal{S}$ fonksiyonu U birim diskini $\{ w = u + iv : \operatorname{Re} w > -1/2 \}$ kümesine resmeder.

Teorem 1.2.2.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda:

i. Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \ldots$ ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

ii. Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n \,, \quad (z \in U)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

iii. Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in U)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

iv. Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right)}{(1 - |z_0|^2) f'(z)}, \quad (z \in U)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

v. Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

vi. Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w} \quad (z \in U)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

vii. n kök dönüşümü: Eğer $n = 2,3,4,...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2{}^2)z^{2n+1} + ..., \quad (z \in U)$$

biçiminde verilen $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir (Duren, 1983).

Tanım 1.2.2.3 ($\mathcal{P}$ Sınıfı): U birim diskinde $f(0) = 1, \operatorname{Re} f(z) > 0$ koşullarını sağlayan $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *Caratheodory sınıfı* veya ($\mathcal{P}$ *sınıfı*) denir (Duren, 1983).

Örneğin; $f(z) = (1+z)/(1-z)$, $(z \in U)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup bu fonksiyon U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden konform bir dönüşümdür. $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 1.2.2.4 (Ω Sınıfı): U birim diskinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir* ve Ω ile gösterilir (Duren, 1983).

Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda gösterilen bir ilişki vardır:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)}, \quad f(z) \in \Omega.$$

1.2.3. Ünivalent Fonksiyonların Temel Sınıfları

Bu bölümde $\mathcal{S}$ sınıfının önemli bazı alt sınıfları tanımlanacaktır.

<u>Tanım 1.2.3.1</u> ($\mathcal{S}^*$ Sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 *noktasına göre yıldızıl küme* denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye *orijine göre yıldızıl küme* veya kısaca *yıldızıl küme* denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, U birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. $f(z)$ fonksiyonu U birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna kısaca *yıldızıl fonksiyon* denir. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir.

<u>Teorem 1.2.3.2:</u> $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

dır (Pommerenke 1975; Goodman 1983a).

Kısaca yıldızıl fonksiyonlar için

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

yazılabilir.

Örneğin; $z \in U$ olmak üzere $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ dır. Burada verilen $k(z)$ fonksiyonuna *Koebe fonksiyonu* denir.

Tanım 1.2.3.3 ($\alpha-$Mertebeden Yıldızıl Fonksiyon): $f:U\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $0\leq\alpha<1$ olsun. Her $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan $f\in\mathcal{S}$ ye *$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa ise *$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı* denir ve $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir (Goodman, 1983a).

Kısaca $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere

$$\mathcal{S}^*(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{S}:\forall z\in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha\right\}$$

ile gösterilir. Ayrıca

$$\mathcal{S}_1^*(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{S}:\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<1-\alpha, z\in U\right\}$$

ile tanımlanan bu sınıf $\mathcal{S}^*(\alpha)$ nın bir alt kümesidir. Yani $\mathcal{S}_1^*(\alpha)\subset\mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğu açıktır (Silverman, 1993).

Tanım 1.2.3.4 ($\mathcal{C}$ Sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa (yani B, her noktasına göre yıldızıl ise) B ye *konveks küme* denir. Eğer bir f fonksiyonu, U birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Goodman 1983a, Duren 1983).

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.3.5: $f\in\mathcal{S}$ olmak üzere

$$f\in\mathcal{C}\Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in\mathcal{P}$$

dır (Pommerenke 1975; Goodman 1983a).

Bu teoreme göre $\mathcal{C}$ sınıfı

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \mathcal{C}$ dir.

Tanım 1.2.3.6 ($\alpha-$Mertebeden Konveks Fonksiyon): Her $z \in U$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\alpha-$*mertebeden konveks fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa ise $\alpha-$*mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı* denir ve $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir (Goodman 1983a).

Kısaca $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \right\}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$\mathcal{C}_1(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < 1 - \alpha, \quad \alpha \in [0,1), \, z \in U \right\}$$

ile tanımlanan bu sınıf $\mathcal{C}(\alpha)$ nın alt kümesidir. Yani $\mathcal{C}_1(\alpha) \subset \mathcal{C}(\alpha)$ olduğu açıktır (Silverman, 1993).

Teroem 1.2.3.7 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ ve $z \in U$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır. (Pommerenke 1975; Goodman 1983; Duren 1983).

Tanım 1.2.3.8 ($\mathcal{K}$ Sınıfı): $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) \geq 0$$

olacak şekilde bir $g \in \mathcal{C}$ varsa f fonksiyonuna *konvekse yakın fonksiyon* denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir (Kaplan 1952).

Her konveks fonksiyon yıldızıldır, her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır. Daha genel olarak her konvekse yakın fonksiyon ünivalenttir. Yani,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

dır. Bu bağıntının tersi genelde doğru değildir. Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2}\right)$ fonksiyonu konvekse yakın fonksiyon olmasına rağmen yıldızıl değildir. Yine $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ olmasına rağmen konveks değildir.

Tanım 1.2.3.9 ($\alpha-$Mertebeden Konvekse Yakın Fonksiyon): $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha$$

olacak biçimde U da konveks bir g fonksiyonu varsa f ye *$\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon* (veya g ye göre $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon) denir. $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir (Graham ve Kohr 2003; Baricz 2008b).

Kısaca $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha,\ g \in \mathcal{C} \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Özel olarak $g(z) = z \in \mathcal{C}$ alınırsa $\mathcal{K}(\alpha) = \{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re} f'(z) > \alpha \}$ olur.

Teorem 1.2.3.10: f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ konveks bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir (Duren 1983).

Lemma 1.2.3.11: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$|zf''(z)| < \frac{1-\alpha}{4}, \; z \in U, 0 \le \alpha < 1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ise bu durumda

$$\operatorname{Re} f'(z) > \frac{1+\alpha}{4}, \; z \in U, 0 \le \alpha < 1$$

dır (Owa, Nunokawa ve Srivastava, 2002).

Tanım 1.2.3.12 (Hadamard Çarpımı): $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } \mathrm{g}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

biçiminde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı (ya da konvülasyonu)

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $"*"$ Hadamart çarpımını gösterir (Duren, 1983).

Bu çarpım altında analitik fonksiyonların bir takım özellikleri korunabilmektedir. Örneğin;

(i) $f, g \in \mathcal{K} \Rightarrow f * g \in \mathcal{K}$ dır.

(ii) $f \in \mathcal{K}$ ve $g \in \mathcal{C} \Rightarrow f * g \in \mathcal{C}$ dir.

(iii) $f \in \mathcal{K}$ ve $g \in \mathcal{S}^* \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}^*$ dır.

1.2.4. Gamma ve Beta Fonksiyonları

Bu bölümde Gamma ve Beta fonksiyonlarının tanım ve bazı özellikleri verilecektir.

<u>Tanım 1.2.4.1:</u> $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks değerli Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. $z = x + iy,\ \ x > 0$ için bu integral mutlak yakınsaktır.

Gamma fonksiyonu için

i. $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$

ii. $n \in \mathbb{N}$ *için* $\Gamma(n+1) = n!$

iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iv. $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

v. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

özellikler yazılabilir. n ' in yeteri kadar büyük değerleri için $\Gamma(n)$ hesaplanması zor olduğundan hesaplamanın kolaylığı açısından $\Gamma(n)$ için yeni bir formül verilir. Buna $\Gamma(n)$ 'in asimptotik formülü denir. Bu formül

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12(n+1)}}, \quad (n \in \mathbb{R})$$

formunda verilir. Burada n 'yi yeteri kadar büyük değer alındığında $e^{\frac{\theta}{12(n+1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$' e yaklaşır. $n \in \mathbb{N}$ olduğunda

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ ve } \Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}$$

gerçeklenir. Burada $n \in \mathbb{R}$ alındığında $n!$ özel olarak Stirling Kesirsel Yaklaşımı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.4.2: $\operatorname{Re} m, \operatorname{Re} n > 0$ olmak üzere

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

fonksiyonuna *Beta fonksiyonu* denir.

Sonuç 1.2.4.3: $B(m,n) = B(n,m)$ eşitliği gerçeklenir. Bu özellik Beta fonksiyonun simetri özelliği olarak adlandırılır.

Beta fonksiyonun trigonometrik gösterimi

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta$$

şeklindedir. Beta fonksiyonunun diğer gösterimleri

$$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} + y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy\,,$$

$$B(m,m-1) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)} dy, \quad 0 < p < 1\,,$$

$$B(m,n) = a^m b^n \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(ay+b)^{m+n}} dy$$

şeklindedir.

Sonuç 1.2.4.4: $m,n > 0$ olmak üzere $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ dır.

Gamma fonksiyonuna bağlı olarak aşağıda verilen tanım hipergeometrik fonksiyonların katsayılarının belirlenmesinde önemli bir rol oynar.

Tanım 1.2.4.5: $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun.

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n\text{-}1), & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

olarak tanımlanan $(\alpha)_n$ ifadesine *Pochhammer Sembolü* denir.

Pochhammer Sembolü

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n$$

$$(\alpha)_{n+1} = (\alpha+n)(\alpha)_n$$

özelliklerine sahiptir.

Özel olarak ilk eşitlikte $n=0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ olarak tanımlanır.

1.2.5. Hardy Uzayları

İngilizlerin ünlü matematikçisi olan Godfrey Harold Hardy, 1877 yılında Cranleigh-Surrey de doğdu. Hardy, Asal Sayı Teorisindeki birçok sorunu çözüme kavuşturmuştur. Analitik fonksiyonlar kuramında da yine önemli çalışmaları vardır. Hardy; tür içi gen alışverişinin fazla olduğu topluluklarda başat ve çekinik genetik özelliklerin dağılımının oranını veren Hardy-Wingberg yasası olarak da bilinen teorisi ile önemli rol oynamıştır. Matematik eğitimi almayan Ramanujan'ı Hindistandan getirttirmiştir. Birlikte önemli matematiksel çalışmalar yapmışlardır.

Hardy uzayı birim diskteki analitik fonksiyonların bir alt uzayıdır. Hardy uzayı tanımını ilk olarak Frigyes Riesz yapmıştır. Hardy uzayı kavramı 1910 ve 1920 yılları arasında Fourier serileri ve tek değişkenli kompleks analizde ortaya çıkmıştır. Fakat ingiliz matematikçi olan Godfrey Harold Hardy 1915 yılında: $\mathcal{H}$, U da tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesi, $p \in (0,\infty]$ ve $r \in [0,1)$ olmak üzere $f(z) \in \mathcal{H}$ için f fonksiyonunun maksimum modülünü

$$M_p(r,f)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}, & p\in(0,\infty)\\ \max\limits_{|z|<r}\left|f(z)\right|, & p=\infty\end{cases}$$

biçiminde tanımlamıştır (Hardy, 1915). Eğer $\left\{M_p\left(r,f\right):\ r\in[0,1)\right\}$ kümesi sınırlı ise f fonksiyonu $\mathcal{H}^p$ Hardy uzayına aittir denir.

Klasik $\mathcal{H}^p$ uzayları, birim küre veya yarı düzlemde, kompleks analizdeki metotlar yardımıyla da tanımlanabilmektedir. f fonksiyonu $\mathbb{R}_+^2$ üst yarı düzlemde analitik olmak üzere, eğer $0<p<\infty$ için f fonksiyonu

$$\sup_{0\le r<1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x+iy)\right|^p dx\right)^{1/p}<\infty$$

eşitsizliğini sağlarsa bu fonksiyonlar kümesine *Hardy uzayı* denir ve $\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ ile gösterilir. Eğer $f\in\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ ise f nin reel kısmının sınır değeri

$$\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\left\{f(x+iy)\right\}$$

limiti hemen hemen her yerde tanımlıdır. $\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ uzayındaki fonksiyonların tüm sınır değerleri toplanarak, reel $\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}\right)$ uzayı tanımlanabilir. Yani

$$\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}\right)=\left\{f:f(z)=\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\left\{f(x+iy)\right\},z=x+iy,\ f\in\mathcal{H}^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right\}$$

biçiminde yazılabilir (Lu, 1995).

1960 yılında Stein ve Weiss Hardy uzaylarının n boyutlu $\mathbb{R}^n$ öklid uzayına genişletilebilir olduğunu ispatlamışlardır.

Hardy uzayları analiz dersinde çok önemli bir yere sahip olup kontrol teorisi ve saçılım teorisinde uygulaması yapılmaktadır. Günümüzde de önemi ve kullanım alanları oldukça geniştir.

$1 \le p \le \infty$ olması durumunda $\mathcal{H}^p$ uzayı, $\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f)$ normuyla bir Banach uzayı olur. Ayrıca $\mathcal{H}^\infty$, $\mathcal{H}$ sınıfına ait ve U da sınırlı fonksiyonların kümesidir. $0 < p \le q \le \infty$ olduğunda $\mathcal{H}^q \subseteq \mathcal{H}^p$ olur (Duren, 1970). Hardy uzayına ilişkin

$$\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^q \subset \mathcal{H}^p,\ 0 < p < q < \infty$$

bağıntısı doğrudur.

$\mathcal{H}^p$ Hardy uzayında yaygın olarak bilinen aşağıdaki sonucu verelim.

<u>Teorem 1.2.5.1:</u> $z \in \mathbb{C}$ ve $f(z) \in \mathcal{H}$ için,

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f' \in \mathcal{H}^q, & \forall q < 1 \\ f \in \mathcal{H}^{q/(1-q)}, & \forall q \in (0,1) \end{cases} \qquad (1.2.5.1)$$

dır. (1.2.5.1) deki ilk açıklama W.I. Smirnow a aittir (Priwalow, 1956).

Şimdi $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere, Hardy uzayı ile bağlantılı olan sınıflarını verelim;

$$\mathcal{P}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H} : f(0) = 1, \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left[e^{i\eta} f(z)\right] > \alpha \right\}$$

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left[e^{i\eta} f'(z)\right] > \alpha \right\}.$$

$\eta = 0$ için $\mathcal{P}(\alpha)$ ve $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıflarını sırasıyla $\mathcal{P}_0(\alpha)$ ve $\mathcal{R}_0(\alpha)$,

$\alpha = 0$ için $\mathcal{P}_0(\alpha)$ ve $\mathcal{R}_0(\alpha)$ sınıflarını da sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{R}$ ile göstereceğiz.

Bu sınıfların kendi aralarında bazı bağıntılar mevcuttur. Bunlar aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

<u>Teorem 1.2.5.2:</u> $\alpha, \beta < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1-\alpha)(1-\beta)$ olmak üzere $\mathcal{P}_0(\alpha) * \mathcal{P}_0(\beta) \subset \mathcal{P}_0(\gamma)$ dır (Stankiewicz ve Stankiewicz, 1986).

<u>Teorem 1.2.5.3:</u> $\alpha, \beta < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1-\alpha)(1-\beta)$ olmak üzere $\mathcal{R}(\alpha) * \mathcal{R}_0(\beta) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ (veya buna denk olarak $\mathcal{P}(\alpha) * \mathcal{P}_0(\beta) \subset \mathcal{P}(\gamma)$) dır (Ponnusamy, 1998).

Aşağıdaki teorem özel fonksiyonların Hardy uzayları ile alakalı sonuçlarında önemli bir rol oynar.

Teorem 1.2.5.4: $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için eğer $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ fonksiyonu

$$f(z)=\begin{cases} \mu + \nu z\left(1-ze^{i\lambda}\right)^{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ \mu + \nu Log\left(1-ze^{i\lambda}\right), & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

biçiminde yazılamıyorsa aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. $f' \in \mathcal{H}^{\delta+\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(f) > 0$ sayısı vardır.

ii. Eğer $\alpha \in [0,1/2)$ ise $f \in \mathcal{H}^{\tau+\frac{1}{1-2\alpha}}$ olacak şekilde bir $\tau = \tau(f) > 0$ sayısı vardır.

iii. Eğer $\alpha \geq 1/2$ ise $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ dur (Eenigenburg ve Keogh, 1970).

Teorem 1.2.5.5: U da analitik bir f fonksiyonunun $|z| \leq 1$ kapalı birim diskinde sürekli ve $|z| = 1$ çemberi üzerinde mutlak sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $f' \in \mathcal{H}^1$ olmasıdır. Eğer $f' \in \mathcal{H}^1$ ise bu durumda

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} \lim_{r\to 1} f'(re^{i\theta})$$

eşitliği vardır (Duren, 1970).

Teorem 1.2.5.6: f, U da analitik ve ünivalent bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p < 1/2$ için $f \in \mathcal{H}^p$ dir (Duren, 1970).

Aşağıda $\mathcal{H}^p$ uzayına ait olduğu halde $\mathcal{H}^1$ uzayına ait olmayan bir örnek verilecektir.

Örnek 1.2.5.7: $f(z) = (1-z)^{-1}$ ile tanımlı fonksiyon $p < 1$ için $\mathcal{H}^p$ uzayına ait iken $p = 1$ için $\mathcal{H}^1$ uzayına ait değildir (Akbulut, 1998).

Teorem 1.2.5.8: $\mathcal{H}^p$ $(0 < p < 1)$ uzayı tamdır (Walters, 1950).

2. MATARYEL VE YÖNTEM

2.1. Hipergeometrik Fonksiyonların Hardy Uzayları

Hipergeometrik fonksiyonlar geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynar, özellikle de Bieberbach varsayımının de Branges tarafından çözümü ve bu fonksiyon sınıflarının kullanımı, fonksiyonlar teorisine yeniden ilgiyi arttırmıştır (Branges 1985). Diğer taraftan Matematik, Fizik, Mühendislik ve Olasılık teorisinde karşımıza çıkmaktadır. Hipergeometrik fonksiyonlar ilk olarak Carl Friedrich Gauss tarafından ele alınmıştır. Hipergeometrik fonksiyon, $u = u(z)$ olmak üzere,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \left[c-(a+b+1)z\right]\frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \tag{2.1.1}$$

şeklindeki bir diferensiyel denklemin çözümü olarak ortaya çıkmıştır ve adına Gauss diferansiyel denklem denir. Hipergeometrik fonksiyonlar sonraki yıllarda Appell, Lauricella, Horn, Srivastava tarafından çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar olarak genişletilmiştir.

Tezin bu bölümünde hipergeometrik fonksiyonun tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Sonrasında hipergeometrik fonksiyonların Hardy uzayına ait olma durumları incelenmiştir.

(2.1.1) denkleminde $\infty, 0$ ve 1 noktaları, hipergeometrik denklemin düzgün tekil noktalarıdır. Bu denklemin, $z = 0$ noktasının komşuluğunda, Frobenius yöntemi ile seri çözümü yapıldığında, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ için çözüm

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n = 1 + \frac{ab}{1.c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} z^2 + \ldots$$

şeklinde elde edilir. Bu seriye, *Gauss hipergeometrik seri* denir. Gauss hipergeometrik serinin genel terimi $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ için

$$a_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)} z^n$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}|z| = |z|$$

gerçeklenir. D'Alembert oran kuralına göre, $|z|<1$ için yakınsaktır. Bu durumda $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere

$$u(z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n, \quad |z|<1$$

ile gösterilir. Gauss hipergeometrik denklemin çözümü olan ${}_2F_1(a,b;c;z)$ fonksiyonuna *Gauss hipergeometrik fonksiyon* denir. ${}_2F_1(a,b;c;z)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu, genellikle $F(a,b;c;z)$ şeklinde gösterilir ve bu fonksiyon analitik bir fonksiyondur.

Gauss hipergeometrik fonksiyonların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $\mathrm{Re}(c-a-b)>0,\;\; \mathrm{Re}(c-a)>0$ ve $\mathrm{Re}(c-b)>0$ olması durumunda

$$\lim_{z\to 1}F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

ifadesi gerçeklenir.

- $\mathrm{Re}\,a>0,\;\; \mathrm{Re}\,b>0,\; \mathrm{Re}(a+b)>0$ ve $\mathrm{Re}(c-a-b)=0$ olması durumunda

$$\lim_{z\to 1}\frac{F(a,b;c;z)}{Log(1-z)} = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

doğrudur.

- $\mathrm{Re}(c-a-b)<0,\; \mathrm{Re}\,a>0,\; \mathrm{Re}\,b>0$ ve $\mathrm{Re}\,c>0$ için

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{a+b-c}F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

sağlanır.

Gauss hipergeometrik denklemde $z=\frac{y}{b}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dz}=b\frac{du}{dy} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2u}{dz^2}=b\frac{d^2u}{dy^2}$$

olmak üzere

$$\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)b^2\frac{d^2u}{dy^2}+\left[c-\left(a+b+1\right)\frac{y}{b}\right]b\frac{du}{dy}-abu=0$$

veya

$$y\left(1-\frac{y}{b}\right)\frac{d^2u}{dy^2}+\left[c-\left(\frac{a+1}{b}+1\right)y\right]\frac{du}{dy}-au=0$$

elde edilir. Bu denklem $b\to\infty$ iken limit alındığında

$$y\frac{d^2u}{dy^2}+(c-y)\frac{du}{dy}-au=0$$

şeklindeki Kummer hipergeometrik denklemi bulunur. Kummer hipergeometrik denklemin çözümü, Kummer hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır. Kummer hipergeometrik fonksiyon, $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunda z yerine $\frac{y}{b}$ konulup $b\to\infty$ iken limitinin alınmasıyla

$${}_1F_1(a;c;y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}y^n, \quad |y|<1$$

şeklinde elde edilir. Bu fonksiyon analitik bir fonksiyon olur.

Bir çok fonksiyon, hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak ifade edilebilir.

Örneğin;

$$F\left(1,1;2;-z\right)=\frac{1}{z}Log\left(1+z\right),$$

$$F\left(a,b;b;z\right)=\frac{1}{\left(1-z\right)^a},$$

$$F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2\right)=\frac{1}{2z}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)=\frac{1}{z}\arcsin z\,,$$

$$F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right)=\arccos z\,,$$

$$F(a;a;z)=e^z.$$

Şimdi hipergeometrik fonksiyonların Hardy uzayına ait olması için gerekli bilgilere yer verilecektir.

Normalize edilmiş f analitik fonksiyonu üzerinde temsil edilen $\left[\mathcal{P}_\beta^m f\right]$ operatörü, Hadamard çarpımı ile $m>0$ ve $\beta>-1$ için

$$\left[\mathcal{P}_\beta^m f\right](z)=\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\beta+1}{\beta+n}\right)^m z^n\right)* f(z) \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlanır. Bu operatör Gauss hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla da verilebilir. Öyleki $a=1, b=\beta+1, c=\beta+2$ ve $f\in\mathcal{A}$ alınırsa

$$zF(a,\beta+1;\beta+2;z)* f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\beta+1}{\beta+n}\right)a_n z^n \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. f ile $zF(1,\beta+1;\beta+2;z)$ fonksiyonlarının $m-$kez Hadamard çarpımı alınırsa

$$\left[\mathcal{P}_\beta^m f\right](z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\beta+1}{\beta+n}\right)^m a_n z^n \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Burada (2.1.4) formülü tüm $m\geq 0$ ve $\beta>-1$ için anlamlıdır; bu nedenle $\mathcal{P}_\beta^m$ ifadesi verilen parametrelerin bu değerleri için iyi tanımlıdır.

Ponnusamy 1996 yılında bazı özel hipergeometrik fonksiyonlar ile Hardy uzayı arasında bazı bağıntılar elde etmiştir. Bulunan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

<u>Teorem 2.1.1:</u> $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda,

i. $m > 1$ ise bu durumda $\left[\mathcal{P}_1^m f\right](z) \in \mathcal{H}^\infty$ dır.

ii. $\alpha > 1$ ve $\beta > -1$ ise $\left[\mathcal{I}_\beta^\alpha f\right](z) \equiv zF(1, \beta+1; \alpha+\beta+1; z) * f(z) \in \mathcal{H}^\infty$ dır.

iii. $\beta > -1$ ise $\left[\mathcal{I}_\beta^1 f\right](z) \equiv zF(1, \beta+1; \beta+2; z) * f(z) \in \mathcal{H}^\infty$ dır (Jung, Kim ve Srivastava ,1993).

Burada önemli olan nokta; $\mathcal{H}^\infty$ nın elamanlarının $\mathcal{R}$ de olması gerekmez. Şimdi ise aşağıda $f \in \mathcal{R}$ fonksiyonların hangi a, b, c, β ve m parametreleri için $zF(a,b;c;z) * f(z)$, $zF(a,c;z) * f(z)$ ve $\left[\mathcal{P}_\beta^m f\right](z)$ çarpımlarından herbirinin $\mathcal{H}^\infty \cap \mathcal{R}$ uzayına ait olmasını gerektiren koşullar verilecektir.

<u>Teorem 2.1.2:</u> a, b, c pozitif reel sayıları

$$c \geq \max\left\{a+b-1, (a+b+ab-1)/2, a+b-1+\frac{2}{3}(a-1)(b-1)\right\}, \quad c > a+b-1 \tag{2.1.5}$$

ve

$$2c(c+1-2ab) \geq ab\left[4-(a+1)(b+1)\right] \tag{2.1.6}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda $f \in \mathcal{R}$ ise $zF(a,b;c;z) * f(z) \in \mathcal{H}^\infty \cap \mathcal{R}$ dır (Ponnusamy, 1996).

Teorem 2.1.2 ye eşdeğer bir diğer form ise aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>Teorem 2.1.3:</u> a, b, c pozitif reel sayı ve

$$a_0 = \frac{\sqrt{1+2ab(1-a)(1-b)}+2ab-1}{2}, \quad (1-a)(1-b) \geq 0$$

olsun. Bu durumda

i. $a \in (0,1], b \in [1, \infty)$ ve $c > a+b-1$

ii. $a \in (1,\infty), b \in (1,\infty)$ ve $c \geq a_0$

iii. $a \in (0,1), b \in (0,1)$ ve $c \geq a_0$

koşullardan herhangi birisinin sağlanması durumunda eğer $f \in \mathcal{R}$ ise $zF(a,b;c;z) * f(z) \in \mathcal{H}^{\infty} \cap \mathcal{R}$ dır (Ponnusamy, 1996).

Teorem 2.1.3 ün (ii) ve (iii) numaralı kısımlarında $a = 1,\ b = \beta + 1$ ve $c = \alpha + \beta + 1$ alındığında aşağıdaki sonuç verilir.

<u>Sonuç 2.1.4:</u> $\alpha > 0, \beta > -1$ ve $f \in \mathcal{R}$ için

$$zF(1,\beta+1;\alpha+\beta+1;z) * f(z) \equiv z + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} a_n z^n$$

fonksiyonu $\mathcal{H}^{\infty} \cap \mathcal{R}$ uzayındandır (Ponnusamy, 1996).

Sonuç 2.1.4, Teorem 2.1.1 in (ii) inci ve (iii) üncü kısımlarını içerir. Teorem 2.1.3 ün (iii) üncü kısmında $a = b = 1/2$ alınsın, $f \in \mathcal{R}$ ise, $c \geq \left(3 - \sqrt{2}\right)/4\sqrt{2} \approx 0.2803$ olduğunda $zF(1/2,1/2;c;z) * f(z) \in \mathcal{H}^{\infty} \cap \mathcal{R}$ olduğu sonucuna varılır.

Teorem 2.1.2 den yola çıkarak Kummer hipergeometrik fonksiyonlar için aşağıdaki sonuca ulaşılır.

<u>Teorem 2.1.5</u>: $a > 0$ ve $0 \neq c \geq \max\{0, (a - 1/2)\}$ olsun. Bu parametreler

i. $c \geq \left(\sqrt{25 + 8a} - 5\right)/2$

ii. $3c^2 + c(3 - 2a) - (1 + 4a) \geq 0$

iii. $2(c+1)(c-2a) + a^2 + a \geq 0$

koşullarından herhangi birini sağlasın. Bu durumda $f \in \mathcal{R}$ ise $zF(a;c;z) * f(z)$ çarpımı $\mathcal{H}^{\infty} \cap \mathcal{R}$ uzayındadır (Ponnusamy, 1996).

Sonuç 2.1.6: a ve c; $a>0$ ve $c\geq 2a+1/3$ veya $a\geq 1$ ve $c\geq 2a$ şartlarının ikisinden birini yerine getirsin. Eğer $f\in\mathcal{R}$ ise bu durumda $zF(a;c;z)*f(z)\in\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ dir.

Teorem 2.1.7: $a,c>0$ sayıları için

$$a_1=\frac{\sqrt{(3-2a)^2+12(1+4a)}-(3-2a)}{6}$$

$$a_2=\frac{\sqrt{2a^2+2a+1}-(1-2a)}{2}$$

verilsin. Eğer $c\geq\max\{a_1,a_2\}$ ve $f\in\mathcal{R}$ ise bu durumda $zF(a;c;z)*f(z)\in\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ dir (Ponnusamy, 1996).

Şimdi verilecek olan teorem, Teorem 2.1.1 in (i). kısmını daha genel formda göstermiştir.

Teorem 2.1.8: Eğer $f\in\mathcal{R}$ ise bu durumda tüm $m>0$ ve $\beta>-1$ için, $\left[\mathcal{P}_{\beta}^{m}f\right](z)$ fonksiyonu $\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ uzayındadır (Ponnusamy, 1996).

Teorem 2.1.9: $m\geq 1$ ve $\beta>-1$ olsun. Eğer $\beta\leq 2(m-1)$ ve $f\in\mathcal{C}$ ise o zaman $\left[\mathcal{P}_{\beta}^{m}f\right](z)$ fonksiyonu $\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ uzayındadır (Ponnusamy, 1996).

Sonuç 2.1.10: m nin pozitif bir tamsayı olması durumunda $zF(1,\beta+1;\beta+2;z)$ konveks fonksiyonunun $m-kez$ Hadamard çarpımı alınırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\beta}{n+\beta}\right)^{m}z^{n}$$

serisi U da konvekstir (Ruschewey ve Sheil-Small, 1973). Böylece;

i. Eğer $f\in\mathcal{C}$ ise bu durumda $\left[\mathcal{P}_{\beta}^{m}\right]f\in\mathcal{C}$ dir.

ii. Eğer $f\in\mathcal{S}^{*}$ ise bu durumda $\left[\mathcal{P}_{\beta}^{m}\right]f\in\mathcal{S}^{*}$ dır.

iii. Eğer $f\in\mathcal{K}$ ise bu durumda $\left[\mathcal{P}_{\beta}^{m}\right]f\in\mathcal{K}$ dır.

2.2. Bessel Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

Matematikte Bessel fonksiyonları üzerine ilk çalışmalar 1732 yılında ünlü matematikçi Daniel Bernoulli tarafından yapılmıştır. Adını veren ve genelleştirilmiş Bessel fonksiyonunun tanımını bulan ise uzay bilimcisi olan Friedrich W. Besseldir.

Bernoulli, sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonunu kullanarak bir ucundan askıya alınan zincirin salınım probleminin bir çözümünü yapmıştır. 1764 yılında ise Euler, gerilmiş bir zarın titreşiminin analizinde tam sayı mertebeli Bessel fonksiyonlarını kullanmıştır. Bessel fonksiyonu, Kepler' in karşılıklı kütle çekimi altında hareketli üç cismin birlikteki hareketlerini belirlemek için Bessel'in önemli bir araştırmasıdır. 1824'de Bessel, bir gök cisminin hareketinde başka bir cismin etkisi ile meydana gelen düzensizliği inceleyen çalışmasına Bessel fonksiyonlarını dahil etmiştir.

1878'de Rayleigh, Bessel fonksiyonlarının Laplace fonksiyonlarının özel durumu olduğunu gösteren çalışmalar yapmıştır.Bessel fonksiyonları; Laplace denkleminin silindirik koordinat sisteminin çözümünden elde edilmiştir Bu yüzden Bessel fonksiyonları silindirik fonksiyonlar veya silindirik harmonikler olarak da bilinir. Mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan bazı fonksiyonlar; üstel, polinom, logaritmik, trigonometrik gibi fonksiyonlarla ifade edilemez. Bu tür fonksiyonların bir kısmı Bessel fonksiyonları gibi özel integraller ile ifade edilir.

Laplace denklemi ve Helmholtz denklemlerinde silindirik veya küresel koordinatlar üzerinde çözümler bulunurken için Bessel denklemi ortaya çıkar. Bessel fonksiyonları dalga yayılımı ve statik potansiyeller konusunda büyük önem taşır. Bessel fonksiyonları; silindirik koordinat sistemlerindeki problemleri çözmede tam sayılı değer alırken küresel koordinat sistemindeki problemleri çözerken yarım tamsayı değerini alır. Bessel fonksiyonları;

- Silindirik bir dalga kılavuzunun içindeki elektromanyetik dalgalar
- Silindirik bir nesnede ısı aktarımı
- Bir ince dairesel titreşimde Modlar (veya halkası), yapay Membran (bir bavul veya diğer membranofon gibi)

- Bir kafes üzerinde difüzyon sorunları, serbest parçacık için radyal Schrödinger denklemi (küresel veya silindirik koordinatlarda) ve çözümleri
- Akustik radyasyonlar desenlerinin çözümleri

gibi problemlerin çözümünde kullanılır.

Bessel fonksiyonları ayıca istatistik, olasılık, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde yaygın olarak kullanılır. Bessel fonksiyonları teorisi son zamanlarda daha çok elektrik, hidrodinamik, radyo fiziği, haberleşme teorisi, atom ve nükleer fizik, ses bilimi (akustik) gibi problemlerinin çözümünde kullanılır. 2010 yılında Baricz ve Ponnusamy Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini 2006 yılında ise Baricz Hardy uzaylarını çalışmışlardır.

Tanım 2.2.1 (Bessel Fonksiyonu): $p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - p^2) w(z) = 0 \qquad (2.2.1)$$

şeklindeki ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemine *Bessel diferansiyel denklemi* denir. Bu deklemin çözümlerine ise *Bessel fonksiyonu* denir. Dolayısıyla (2.2.1) denkleminin özel bir çözümü olan

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad (2.2.2)$$

fonksiyonuna p. mertebeden birinci çesit Bessel fonksiyonu denir ve J_p ile gösterilir (Watson, 1944).

Her $z \in \mathbb{C}$ için p. mertebeden birinci çesit Bessel fonksiyonunun integral gösterimi

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - pt)\, dt - \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x\sinh(t) - vt}\, dt \qquad (2.2.3)$$

biçiminde veya

$$J_p(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos\left(xt\right)dt$$

biçiminde ifade edilir (Watson, 1944).

Tanım 2.2.2 (Modifiye Bessel fonksiyonu): $p\in\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2w''(z)+zw'(z)-(z^2+p^2)w(z)=0$$

biçiminde verilen bu denkleme *Modifiye Bessel diferansiyel denklemi* denir. Bu denklemin tüm $z\in\mathbb{C}$ için özel çözümü olan

$$I_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \tag{2.2.4}$$

fonksiyonuna da p. *mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu* denir ve $I_p(z)$ ile gösterilir (Watson, 1944).

Tanım 2.2.3 (Küresel Bessel fonksiyonu): $p\in\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2w''(z)+2zw'(z)+\left[z^2-p\left(p+1\right)\right]w(z)=0$$

olarak verilen bu denkleme *küresel Bessel diferansiyel denklemi* denir. Bu denklemin tüm $z\in\mathbb{C}$ için özel çözümü

$$j_p(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{p+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\Gamma(p+n+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \tag{2.2.5}$$

biçimindedir. Buradaki $j_p(z)$ fonksiyonuna p. mertebeden birinci çesit *küresel Bessel fonksiyonu* denir (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Tanım 2.2.4 (Modifiye Küresel Bessel Fonksiyonu): $p\in\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2w''(z)+2zw'(z)-\left[z^2+p\left(p+1\right)\right]w(z)=0$$

biçiminde verilen denkleme *modifiye küresel Bessel diferansiyel denklemi* denir.

Bu denklemin tüm $z \in \mathbb{C}$ için özel çözümü

$$i_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \tag{2.2.6}$$

şeklindedir. i_p ye *p. mertebeden birinci tür modifiye küresel Bessel fonksiyonu* denir ve $i_p(z)$ ile gösterilir (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Tanım 2.2.5 (Genelleştirilmiş Bessel Diferansiyel Denklemi): $b, c, p \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left[cz^2 - p^2 + \left((1-b)p\right)\right] w(z) = 0, \quad \left(z \in \mathbb{C}\right) \tag{2.2.7}$$

biçimindeki ikinci dereceden diferansiyel denkleme *genelleştirilmiş Bessel diferansiyel denklemi* denir.

(2.2.7) denklemi Bessel, Modifiye, Küresel ve Modifiye Küresel Bessel diferansiyel denklemlerinin genelleştirilmiş formudur. Bu denklemin özel çözümü

$$w_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(p+n+\frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}, \quad \left(z \in \mathbb{C}\right) \tag{2.2.8}$$

biçimindedir. Buradaki $w_p(z)$ ye *p. mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyon* denir. (Baricz, 2010).

Burada $w_p(z)$ serisinde b ve c ye çeşitli değerler verilerek p. mertebeden birinci çeşit tüm Bessel fonksiyon tipleri elde edilebilir. Örneğin;

w_p fonksiyonunda $b = c = 1$ alınırsa J_p Bessel fonksiyonu,

w_p fonksiyonunda $c = -1$ ve $b = 1$ alınırsa I_p Modifiye Bessel fonksiyonu,

w_p fonksiyonunda $c=1$ ve $b=2$ alınırsa j_p Küresel Bessel fonksiyonu,

w_p fonksiyonunda $c=-1$ ve $b=2$ alınırsa $\frac{2i_p}{\sqrt{\pi}}$ fonksiyonu

elde edilir.

p. mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu,

$$w_p(z)=\left[2^p\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1}z^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c/4)^n\,\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(n+p+\frac{b+1}{2}\right)}z^{2n}$$

formunda yazılacak olursa, $n\geq 0$ için,

$$b_n=\frac{(-c/4)^n\,\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(n+p+\frac{b+1}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$u_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Tüm $z\in\mathbb{C}$ için

$$w_p(z)=\left[2^p\Gamma\left(p+\frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1}z^p u_p(z^2)$$

ifadesi elde edilir. Pochhammer (Appell) sembolünün özelliklerinden

$$u_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{2.2.9}$$

dönüşümü bulunur. Burada $b,p,c\in\mathbb{C}$ olup $\kappa\neq 0,-1,-2...$ için $\kappa=p+\frac{b+1}{2}$ şeklindedir. Elde edilen $u_p(z)$ fonksiyonuna *genelleştirilmiş ve normalize edilmiş* p. *mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu* denir (Baricz, 2010, Baricz, 2008a).

Dolayısıyla $u_p(z)$ fonksiyonu

$$u_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{c}{4}\right)^n \frac{\Gamma\left(p+(b+1)/2\right)}{\Gamma\left(p+n+(b+1)/2\right)}\frac{z^n}{n!}, \quad b,p,c\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{C}$$

biçiminde de yazılır. Ayrıca, $u_p(z)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{C}$ de analitiktir ve

$$4z^2u''(z)+4\kappa zu'(z)+czu(z)=0$$

biçimindeki diferansiyel denklemini sağlar.

Bessel fonksiyonları için bazı örnekler;

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \qquad J_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right),$$

$$I_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh z, \qquad I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh z, \qquad I_{3/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sinh z}{z}-\cosh z\right).$$

$\kappa\neq 0,-1,-2...$ iken $b,p,c,z\in\mathbb{C}$ için $p.$ mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlar için aşağıda verilen rekürans bağıntıları doğrudur (Baricz, 2008a)

i. $zw_{p-1}(z)+czw_{p+1}(z)=(2p+b-1)w_p(z)$

ii. $zw'_p(z)+\left(p+b-1\right)w_p(z)=zw_{p-1}(z)$

iii. $zw'_p(z)+czw_{p+1}(z)=pw_p(z)$

iv. $\left[z^{-p}w_p(z)\right]'=-cz^{-p}w_{p+1}(z)$ dır. $z=0$ değeri için yandaki bağıntının her iki tarafı limit değerleriyle yer değiştirir.

Lemma 2.2.6: Eğer $b,p,c\in\mathbb{C}$ ve $\kappa\neq 0,-1,-2,...$ ise u_p fonksiyonu, tüm $z\in\mathbb{C}$ için

$$4\kappa u'_p(z)=-cu_{p+1}(z) \tag{2.2.10}$$

bağıntısını sağlar (Baricz, 2008a).

Teorem 2.2.7: Eğer $\alpha \in [0,1), b, p, c \in \mathbb{R}$, ve $c \neq 0$ için $4\alpha^2 + (|c|-6)\alpha + 2 \geq 0$ ise bu durumda w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. Eğer $\kappa \geq \dfrac{|c| + 2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise bu durumda $u_p \in \mathcal{C}(\alpha)$. Ayrıca $\operatorname{Re}\left[u_p'(z)\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} > \dfrac{1}{2}$ ifadesi tüm $z \in U$ için gerçeklenir.

ii. Eğer $\kappa \geq \dfrac{|c| + 2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise bu durumda $zu_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $z\left[-\dfrac{c}{4(\kappa-1)}u_p(z)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır.

iii. Eğer $\kappa \geq \dfrac{|c| + 2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ve $\alpha \neq 0$ ise bu durumda $z^{\frac{2(1-\alpha)-p}{2\alpha}} w_p\left(z^{\frac{1}{2\alpha}}\right) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır (Baricz, 2010).

Şimdi ise Bessel fonksiyonun tanımından yola çıkılarak u_p Bessel fonksiyonunun $\mathcal{H}^\infty$ uzayına ait olma koşulları ve $zu_p(z) * f(z)$ çarpımının da $\mathcal{H}^\infty \cap \mathcal{R}$ de olması için gereken şartlar belirtilecektir.

Lemma 2.2.8: $\alpha \in [0,1), b, p, c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Re}\left[u_p(z)\right] > \alpha$ gerçeklenir. Burada $\lambda = (1-c^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0$ ve $\kappa \geq (1-\alpha)|c| / 4\sqrt{\lambda} + 1$ dir (Baricz, 2008a).

Lemma 2.2.9: $b, p \in \mathbb{R}$ ve $\kappa = p + (b+1)/2 \neq 0$ olsun. Birim disk üzerinde aşağıda verilen durumlar doğrudur:

i. Eğer $c < 0$ için, $N(c) = \left[-(c+2) + \sqrt{c^2/2 - 4c + 4}\right]/2$ ve ayrıca $\kappa \geq N(c)/2$ ise bu durumda $\operatorname{Re}\left[u_p(z)\right] > 1/2$ olur.

ii. Eğer $|c| < 1$ için $\kappa \geq |c| / \sqrt{1-c^2} + 1$ ise bu durumda $\operatorname{Re}\left[u_p(z)\right] > 1/2$ dir (Baricz, 2008a).

Teorem 2.2.10: $\alpha \in [0,1)$, $b, p, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $4\alpha^2 + (|c|-8)\alpha + 2 \geq 0$ ve $\kappa = p + (b+1)/2 \neq 0$ olsun. Eğer $\kappa \leq \left[|c| + 2(2\alpha^2 - 4\alpha + 1)\right] / \left[4(1-\alpha)\right]$ ise bu durumda;

i. $\alpha \geq 1/2$ için $u_p \in \mathcal{H}^{\infty}$ olur

ii. $\alpha \geq [0,1/2)$ için $u_p \in \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ olur (Baricz, 2006).

İspat: İlk olarak $\alpha \neq 1/2$ ve γ reel sayısı için

$$\frac{1}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}} = F\left(1, 1-2\alpha; 1; ze^{i\gamma}\right)$$

fonksiyonu tanımlansın. $F(a,b;c;z)$ fonksiyonu Gauss hipergeometrik fonksiyon olduğundan u_p fonksiyonu

$$\begin{cases} \left(1-ze^{i\gamma}\right)^{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ \log\left(1-ze^{i\gamma}\right), & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

formlarına sahip değillerdir. u_p fonksiyonu α -mertebeden konveks olduğundan Teorem 2.2.7 (i). kısmı ve Teorem 1.2.5.4 ile teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.11: Eğer $b, c, p \in \mathbb{R}$ ve $\kappa \geq |c|/4 - 1/2$ ise, bu durumda $u_p \in \mathcal{H}^{\infty}$ olur (Baricz, 2006).

İspat: Yukarıda verilen Lemma 2.2.6 ile hipergeometrik gösterimden $u_{p+1}(z)$ fonksiyonunun $\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{-1}$ formunda olmadığı belirtilir. Teorem 2.2.7 nin (i). kısmında $\alpha = 0$ olması durumu ile (2.2.7) eşitliğinin birleşmesiyle u_p' nin birim diskte konveks olduğu ve $\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{-1}$ formunda olmadığı belirtilir. Lemma 1.2.5.4 ile $u_p' \in \mathcal{H}^1$ olduğu görülür. Bu nedenle Teorem 3.11 i (bakınız Duren, 1970) ü kullanarak u_p nin $\overline{U} = U \cup \partial U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ de sürekli olduğunu görülür. Ayrıca u_p nin U da sürekli sınırlı bir analitik fonsiyon olduğu ifade edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.12: $b, p \in \mathbb{R}$ ve $\kappa = p + (b+1)/2 \neq 0$ olsun. Bu durumda $N(c) = \left[-(c+2) + \sqrt{c^2/2 - 4c + 4}\right]/2$ olmak üzere

i. $c < 0$ için $\kappa \geq N(c)/2$

ii. $|c| < 1$ için $\kappa \geq |c|/\sqrt{1-c^2} + 1$

şartlarından biri sağlansın. Böylece $f \in \mathcal{R}$ ise o zaman $zu_p(z) * f(z) \in \mathcal{H}^\infty \cap \mathcal{R}$ dir (Baricz 2006).

İspat: $g(z) = zu_p(z) * f(z)$ fonksiyonu tanımlansın. Her iki tarafın türevi alınırsa $g'(z) = u_p(z) * f'(z)$ olur. Hipotezler ve Lemma 2.2.9 ile $\operatorname{Re} u_p(z) > 1/2$ yazılır. $f \in \mathcal{R}$ olduğundan Teorem 1.2.5.3 den $g \in \mathcal{R}$ elde eder. Burada u_p fonksiyonunun bir tam fonksiyon olduğu ve sonuç olarak g fonksiyonunun da bir tam fonksiyon olduğu söylenebilir. Sonuç olarak g fonksiyonu sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 2.2.13: Aslında burada Teorem 2.2.12 nin kanıtı için başka bir argüman verilmiştir. Önceki kanıttan $g \in \mathcal{R}$ olduğu açıktır. Böylece, tüm $q < 1$ için Sonuç 1.2.5.1 ifadesinin ilk bileşeninden $g' \in \mathcal{H}^q$ olduğu görülür. Bu nedenle Hardy ve Littlewood' un iyi bilinen bir sonucu ile Teorem 1.2.5.1 in ikinci ifadesinden, tüm $q \in (0,1)$ için $g \in \mathcal{H}^{q/(1-q)}$ veya tüm $p \in (0,\infty)$ için $g \in \mathcal{H}^p$ gerçeklenir.

İspat: Caratheodory fonksiyonları için iyi bilinen sınırı kullanarak, tüm $n \geq 2$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}$ ise o zaman $n|a_n| \leq 2$ dir. Buradan

$$|g(z)| = \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} a_n z^n \right| = \left| z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{c}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{a_n}{(\kappa)_{n-1}} \frac{z^n}{(n-1)!} \right) \right|$$

$$\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} \left| \left(-\frac{c}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{(\kappa)_{n-1}(n-1)!} \right| |a_n| |z|^n$$

$$< 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left| -\frac{c}{4} \right|^{n-1} \frac{1}{(\kappa)_{n-1}(n-1)!} \frac{2}{n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{c}{4}\right|^{n}\frac{1}{(\kappa)_n(n)!}\frac{1}{n+1}<1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{c}{4}\right|^{n}\frac{1}{(\kappa)_n(n)!}\frac{1}{n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu nedenle D'Alembert' in yakınsaklık testi uygulandığında yukarıdaki

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{c}{4}\right|^{n}\frac{1}{(\kappa)_n(n)!}\frac{1}{n}$$

serisinin $|z|<1$ için mutlak yakınsak olduğu görülür. Bu bilgi $g(z)$ kuvvet serisinin mutlak yakınsak olduğunu ifade eder (Duren 1970). Ayrıca $g'\in\mathcal{H}^q$ ile birlikte g fonksiyonunun $\overline{U}$ üzerinde devam etmesi, U nun kapanışı anlamına gelir. Son olarak, $\overline{U}$ üzerinde g fonksiyonu sürekli olup bu g fonksiyonu U üzerinde sınırlı bir analitik fonksiyondur. Bu yüzden $g\in\mathcal{H}^{\infty}$ olur ve bu ispatı tamamlar.

2.3. Struve Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

1882 yılında Rus bilim adamı Karl Hermann Struve, Struve fonksiyonunu tanımlamıştır. 1911 yılında ise J.W. Nicholson Modifiye edilmiş Struve fonksiyonlarını tanımlamıştır. Struve fonksiyonları, homojen olmayan Bessel diferansiyel denkleminin özel bir çözümüdür. Fizikte; su ve yüzey dalgaları, elektrodinamik, optik kırınım gibi uygulama alanlarına sahiptir. 2014 yılında H. Orhan ve N. Yağmur Struve fonksiyonlarının geometrik özelliklerini 2014 yılında ise Hardy uzaylarını çalışmışlardır.

<u>Tanım 2.3.1</u> (Struve Fonksiyonu): $p\in\mathbb{C}(\text{veya }\mathbb{R})$ ve $z\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2w''(z)+zw'(z)+(z^2-p^2)w(z)=\frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \qquad (2.3.1)$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemin bir özel çözümü olan

$$H_p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \tag{2.3.2}$$

fonksiyonuna *p. mertebeden birinci çeşit Struve fonksiyonu* denir ve $H_p(z)$ ile gösterilir (Watson 1944; Zhang 1996).

Diğer taraftan Struve fonksiyonu, Gauss hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$H_p(z)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+1} F\left(1,\frac{3}{2};p+\frac{3}{2};\frac{-z^2}{4}\right) \tag{2.3.3}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.2. (Modifiye Edilmiş Struve Fonksiyonu): $p\in\mathbb{C}(\text{veya }\mathbb{R})$ ve $z\in\mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned}
L_p(z)&=-ie^{-ip\pi/2}H_p(iz)\\
&=-i\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2n+p+1}\\
&=(-i)^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(i)^{2n+p+1}}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

fonksiyonuna *modifiye edilmiş Struve fonksiyonu* denir ve $L_p(z)$ ile gösterilir (Orhan ve Yağmur, 2013).

Bu fonksiyon

$$z^2w''(z)+zw'(z)-\left(z^2+p^2\right)w(z)=\frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \tag{2.3.5}$$

biçimindeki diferansiyel denklemin bir özel çözümüdür.

$p = n + \frac{1}{2}$ ve n, negatif olmayan bir tamsayı olması durumunda Struve fonksiyonları Bessel fonksiyonları cinsinden

$$H_{-(n+1/2)}(z) = (-1)^n J_{n+1/2}(z) \quad (n = 0,1,2,...) \tag{2.3.6}$$

şekinde yazılabilir.

Struve fonksiyonları parametrelerin özel durumlarında trigonometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir.
Örneğin;

$$H_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \,,\ H_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (1 - \cos z),$$

$$H_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos z - \frac{\sin z}{z} \right), \qquad H_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 + \frac{2}{z^2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin z + \frac{\cos z}{z} \right),$$

$$H_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \sin z - \frac{3}{z} \cos z \right].$$

$p = n + \frac{1}{2}$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olması durumunda modifiye edilmiş Struve fonksiyonu, $I_p(z)$ modifiye edilmiş Bessel fonksiyonları cinsinden

$$L_{-(n+1/2)}(z) = I_{n+1/2}(z) \quad n = 0,1,2,... \tag{2.3.7}$$

biçiminde yazılır. $L_{-(n+1/2)}(z)$ modifiye edilmiş Struve fonksiyonu elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Örnekler;

$$L_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z \,, \quad L_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\cosh z - 1),$$

$$L_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right), \quad L_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 - \frac{2}{z^2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sinh z - \frac{\cosh z}{z} \right),$$

$$L_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\left(1 + \frac{3}{z^2} \right) \sinh z - \frac{3}{z} \cosh z \right].$$

$p > -\frac{1}{2}$ için Struve fonksiyonunun integral gösterimi,

$$H_p(z) = \frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{p-\frac{1}{2}} \sin(zt)dt$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\left(z\cos\theta\right)\sin^{2p}\theta d\theta \qquad (2.3.8)$$

formunda verilir (Olver, 2010).

Tanım 2.3.3. (Genelleştirilmiş Struve Diferansiyel Denklemi): $b, c, p \in \mathbb{C}\left(\text{veya } \mathbb{R}\right)$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + bzw'(z) + \left[cz^2 - p^2 + (1-b)p\right]w(z) = \frac{4\left(\frac{1}{2}z\right)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \qquad (2.3.9)$$

formundaki ikinci dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemine, *genelleştirilmiş Struve diferansiyel denklemi* denir (Orhan ve Yağmur, 2013).

Tüm $z \in \mathbb{C}$ için (2.3.9) diferansiyel denkleminin bir çözümü

$$w_{p,b,c}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-c\right)^n}{\Gamma\left(n+3/2\right)\Gamma\left(n+p+\left(b+2\right)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \qquad (2.3.10)$$

biçiminde ifade edilir. Bu seri yakınsak bir seri olup çözüm anlamlıdır. Ayrıca $w_{p,b,c}(z)$ şeklinde belirtilen fonksiyona, *p. mertebeden genelleştirilmiş Struve fonksiyonu* denir. $w_{p,b,c}(z)$ serisinde $b = c = 1$ alındığında p. mertebeden birinci çeşit Struve fonksiyonu olan H_p fonksiyonuna indirgenir. $w_{p,b,c}(z)$ fonksiyonunu kullanarak, normalize edilmiş

$$u_{p,b,c}(z)=2^{p}\sqrt{\pi}\Gamma\left(p+\frac{b+2}{2}\right)z^{\frac{-p-1}{2}}w_{p,b,c}(\sqrt{z}) \qquad (2.3.11)$$

fonksiyonu elde edilir. Bu durumda her $n\geq 0$ için

$$b_n=\frac{(-c/4)^n\,\Gamma(3/2)\Gamma\left(p+(b+2)/2\right)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma\left(n+p+(b+2)/2\right)} \qquad (2.3.12)$$

göz önünde bulunarak

$$u_{p,b,c}(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_nz^n+\ldots$$

formundaki ifade elde edilir. Burada Pochammer (Appell) sembolü kullanılarak ve $\kappa=p+\frac{(b+2)}{2}\neq 0,-1,-2,\ldots$ olmak üzere $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu

$$u_{p,b,c}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n(\kappa)_n}z^n \qquad (2.3.13)$$

biçiminde yazılabilir. $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu analitik fonksiyondur. Bundan dolayı $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonunu

$$4z^2u''(z)+2(2p+b+3)zu'(z)+(cz+2p+b)u(z)=2p+b \qquad (2.3.14)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Ayrıca $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$u_{p,b,c}(z)=F\left(1,\frac{3}{2};\kappa;\frac{-cz}{4}\right)$$

şeklinde yazılır. $w_{p,b,c}(z)$ ve $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonları kısaca sırasıyla $w_p(z)$ ve $u_p(z)$ şeklinde gösterilebilir.

Önerme 2.3.4: $b,c,p\in\mathbb{C}$, $\kappa=p+(b+2)/2, \kappa\neq 0,-1,-2,...$ ve $z\in\mathbb{C}$ olmak üzere, genelleştirilimiş Struve fonksiyonlar için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Orhan ve Yağmur, 2013):

i. $zw_{p-1}(z)+czw_{p+1}(z)=(2\kappa-3)w_p(z)+\dfrac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$

ii. $zw_p'(z)+(p+b-1)w_p(z)=zw_{p-1}(z)$

iii. $zw_p'(z)+czw_{p+1}(z)=pw_p(z)+\dfrac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$

iv. $\left[z^{-p}w_p(z)\right]'=-cz^{-p}w_{p+1}(z)+\dfrac{1}{2^p\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$

v. $u_p(z)+2zu'(z)+\dfrac{c}{2\kappa}zu_{p+1}(z)=1$.

Teorem 2.3.5: $b,c,p\in\mathbb{C}$, $\kappa=p+(b+2)/2$ ve $\alpha\in[0,1)$ olsun. $g_p=zu_p$ olmak üzere, eğer

i. $\kappa>\dfrac{9-\alpha+\sqrt{\alpha^2-14\alpha+7}}{24(1-\alpha)}|c|$ ise $g_p\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır,

ii. $\kappa>\dfrac{13-7\alpha}{12(1-\alpha)}|c|$ ise $g_p\in\mathcal{C}(\alpha)$ dır,

iii. $\kappa>\dfrac{9-\alpha+\sqrt{\alpha^2-14\alpha+7}}{24(1-\alpha)}|c|$ ve $\alpha\neq 0$ ise $z\mapsto z^{(1-2\alpha-p)/2\alpha}w_p\left(z^{1/2\alpha}\right)$ fonksiyonu

U da yıldızıldır (Orhan ve Yağmur, 2013).

Teorem 2.3.6: $b,p\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{C}$, $\kappa=p+(b+2)/2$ olsun. $g_p=zu_p$ den g_p fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Orhanve Yağmur, 2013):

i. M, $\cos M=M$, $(M\approx 0.73909)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı ve $\kappa>\dfrac{7M+2+\sqrt{M^2+12M+4}}{24M}|c|$ ise her $z\in U$ için $\operatorname{Re} g_p'(z)>0$ dır. Bu durumda $g_p(z)$, U da ünivalenttir,

ii. $\kappa > \dfrac{9+\sqrt{17}}{24}|c|$ ise $g_p(z)$, U da yıldızıldır,

iii. $\kappa > \dfrac{13}{12}|c|$ ise $g_p(z)$, U da konvekstir,

iv. $\kappa > \dfrac{1}{3}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z|<1/2$ diskinde yıldızıldır,

v. $\kappa > \dfrac{7}{12}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z|<1/2$ diskinde konvekstir.

<u>Teorem 2.3.7:</u> $b,c,p\in\mathbb{R}$, $\kappa = p+(b+2)/2$ ve $\alpha\in\left[0,2-\sqrt{2}\right]$ $(g_p = zu_p)$ olmak üzere,

$$\kappa \geq \frac{3\alpha^2-10\alpha+5+(1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2+c^2\left(\alpha^2-4\alpha+2\right)}}{4\left(\alpha^2-4\alpha+2\right)}$$

ise her $z\in U$ için $\operatorname{Re} u_p(z)>\alpha$ dır (Orhan ve Yağmur, 2013).

Şimdi ise Struve fonksiyonunun Hardy uzayına ait olma koşulları incelenmiştir.

<u>Teorem 2.3.8:</u> $\alpha\in[0,1)$, $b,c,p\in\mathbb{R}$ ve κ=p+$(b+2)/2$ olsun. $\kappa > \dfrac{13-7\alpha}{12(1-\alpha)}|c|$ ve $g_p(z)=zu_p(z)$ olmak üzere

i. $\alpha\in[0,1/2)$ için $g_p\in\mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ dır

ii. $\alpha\geq 1/2$ için $g_p\in\mathcal{H}^{\infty}$ dır (Orhan ve Yağmur, 2014).

<u>İspat:</u> Gauss hipergeometrik fonksiyonun tanımından

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<1$$

yazılır. $\alpha\neq 1/2$ olmak üzere $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ ve $\gamma\in\mathbb{R}$ sabitleri için

$$\mu+\frac{\nu z}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}}=\mu+\nu zF(1,1-2\alpha;1;ze^{i\gamma})$$

$$=\mu+\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2\alpha)_n}{n!}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

bulunur. Ayrıca

$$\mu + vLog\left(1 - ze^{i\gamma}\right) = \mu - vzF(1,1;2;ze^{i\gamma})$$

$$= \mu - v\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda g_p nin

$$\begin{cases}\mu + vz\left(1 - ze^{i\gamma}\right)^{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2\\ \mu + vLog\left(1 - ze^{i\gamma}\right), & \alpha = 1/2\end{cases}$$

biçiminde olmadığı görülür. Teorem 2.3.5 in (ii) kısmından g_p nin α mertebeden konveks bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla verilen Teorem 1.2.5.4 den ispat tamamlanmış olur.

<u>Teorem 2.3.9:</u> $b, p, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ \kappa = p + \left(b+2\right)/2$ ve $\kappa > \frac{13}{12}|c| - 1$ olsun. Bu durumda

$$h_p(z) = 2zu_p(z) - \int_0^z u_p(t)dt$$

olmak üzere $h_p \in \mathcal{H}^\infty$ olur (Orhan ve Yağmur, 2014).

<u>İspat:</u> $\kappa > \frac{13}{12}|c| - 1$ olduğundan Teorem 2.3.6 nın (iv). kısmından

$g_{p+1}(z) = zu_{p+1}(z) \in \mathcal{C}$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.3.4 in (v). Kısmından

$$u_p(z) + 2zu_p'(z) + \frac{c}{2\kappa}zu_{p+1}(z) = 1$$

olduğunu bilinir. Bu durumda $g_{p+1} \in \mathcal{C}$ olduğundan $z \to \frac{2\kappa}{c}\left[1 - u_p(z) - 2zu_p'(z)\right]$

fonksiyonu da konvekstir. O halde $h(z) = u_p(z) + 2zu_p'(z)$ fonksiyonu da konveks bir fonksiyon olur. Gauss hipergeometrik fonksiyon gösteriminden $h(z)$ $\mu, v \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\mu + \frac{vz}{1 - ze^{i\gamma}} = \mu - vzF\left(1,1;1;ze^{i\gamma}\right) = \mu + v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

formunda olmadığı görülür. Bu durumda Teorem 1.2.5.4 den $h(z)=u_p(z)+2zu_p'(z)\in\mathcal{H}^1$ olur. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$h_p(z)=\int_0^z\left[u_p(t)+2tu_p'(t)\right]dt$$

$$=2zu_p(z)-\int_0^z\left[u_p(t)\right]dt$$

biçiminde yazılır. $\overline{U}=U\cup\partial U=\{z:|z|\leq 1\}$ de sürekli olduğundan Teorem 1.2.5.4 ye göre U da sınırlı analitik bir fonksiyon olur (Duren 1970). O halde $h_p\in\mathcal{H}^\infty$ dur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.10: $b,c,p\in\mathbb{R},\ \kappa=p+(b+2)/2,\ \kappa>\dfrac{5+\sqrt{1+2c^2}}{8}$ ve $f\in\mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $zu_p*f\in\mathcal{R}\cap\mathcal{H}^\infty$ dır (Orhan ve Yağmur, 2014).

İspat: $h(z)=zu_p(z)*f(z)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $h'(z)=u_p(z)*f'(z)$ olur. Teorem 2.3.7 nın (i). kısmından $\operatorname{Re}u_p(z)>0$ olduğu biliniyor. Ayrıca $f\in\mathcal{R}$ olduğundan Teorem 1.2.5.3 den $h\in\mathcal{R}$ elde edilir. u_p fonksiyonu bir tam fonksiyon olduğundan h fonksiyonu da tam fonksiyondur. Dolasıyla h fonksiyonu U da sınırlı bir fonksiyondur. O halde $h\in\mathcal{R}\cap\mathcal{H}^\infty$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.11: $b,c,p\in\mathbb{R},\ \kappa=p+(b+2)/2$ ve $\alpha\in\left[0,2-\sqrt{2}\right)$ olmak üzere

$$\kappa\geq\frac{3\alpha^2-10\alpha+5+(1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2+c^2\left(\alpha^2-4\alpha+2\right)}}{4\left(\alpha^2-4\alpha+2\right)}\qquad(2.3.18)$$

olsun. Bu durumda $\alpha_1<1$ ve $\gamma=1-2(1-\alpha_1)(1-\alpha)$ olmak üzere $f\in\mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p*f\in\mathcal{R}(\gamma)$ dır (Orhan ve Yağmur, 2014).

İspat: $h(z)=zu_p(z)*f(z)$ olsun. Bu durumda $h'(z)=u_p(z)*f'(z)$ olur. Teorem 2.3.7 den, $u_p\in\mathcal{P}_0(\alpha)$ ve Teorem 1.2.5.4 ün (i). kısmından $f'\in\mathcal{P}(\alpha_1)$ olduğu biliniyor. Bu durumda $\gamma=1-2(1-\alpha_1)(1-\alpha)$ olmak üzere $h'\in\mathcal{P}(\gamma)$ olur. $h'\in\mathcal{P}(\gamma)$ olması $h\in\mathcal{R}(\gamma)$ olmasına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3.12: α, b, c, p ve κ sayıları Teorem 2.3.11 in şartlarını sağlasın. Bu durumda $\alpha_1=(1-2\alpha)/(2-2\alpha)$ olmak üzere $f\in\mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p*f\in\mathcal{R}(0)$ dir.

Sonuç 2.3.12 de $\alpha=0$ alınması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.13: $b,c,p\in\mathbb{R}$, $\kappa=p+(b+2)/2$ ve $\kappa>\dfrac{5+\sqrt{1+2c^2}}{8}$ olsun. Bu durumda $f\in\mathcal{R}(1/2)$ ise $zu_p*f\in\mathcal{R}(0)$ olur.

Lemma 2.3.14: $b,p\in\mathbb{R}$, $\kappa=p+(b+2)/2$, $c<0$ ve $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere

$$c_0=\frac{c}{6(\alpha-1)}, \tag{2.319}$$

$$c_1=\frac{-(20c+29)+\sqrt{160c^2-3640c-6839}}{120} \tag{2.3.20}$$

şeklinde verilsin. Ayrıca b_n, $\left(b_n=\dfrac{(-c/4)^n}{(3/2)_n(\kappa)_n}\right)$, $u_p(z)$ nin n. katsayısını göstersin. Bu durumda $\kappa\geq\max\{c_0,c_1\}$ ise

$$A_1=1,\ \text{her } n\geq 2 \text{ için } A_n=\frac{b_{n-1}}{2(1-\alpha)}$$

biçiminde tanımlanan $\{A_n\}_{n\geq 1}$ dizisi; negatif olmayan, konveks ve azalan bir dizidir (Orhan ve Yağmur, 2014).

Lemma 2.3.14 kullanılarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.3.15: $b, p \in \mathbb{R}$, κ=p+$(b+2)/2$, $c<0$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1 Lemma 2.3.14 deki şekilde verilsin. Bu durumda $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ ise $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ olur yani $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ dır (Orhan ve Yağmur, 2014).

İspat: A_n, Lemma 2.3.14 deki gibi verilsin. Bu durumda $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ ifadesi

$$\operatorname{Re}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n-1}\right] > 1/2, \quad z \in U \tag{2.3.23}$$

ifadesine denktir. Hipotez ve Lemma 2.3.14 den $\{A_n\}_{n\geq 1}$ dizisinin negatif olmayan, konveks ve azalan bir dizi olduğu biliniyor. O halde Teorem 1.2.5.2 den $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ elde edilir. Bu ise $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.16: $b, p \in \mathbb{R}$, κ=p+$(b+2)/2$, $c<0$, $\alpha_1 < 1$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1, Lemma 2.3.14 deki şekilde tanımlansın ve $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ olarak verilsin. Bu durumda $\gamma = 1-2(1-\alpha_1)(1-\alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ olur (Orhan ve Yağmur, 2014).

Sonuç 2.3.17: $\gamma = 0$ olmak üzere Teorem 2.3.16 in şartlarını sağlansın. Bu durumda $\alpha_1 = (1-2\alpha)/(2-2\alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(0)$ dır.

2.4. Lommel Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

Lommel fonksiyonu ilk olarak 1876 yılında Eugen von Lommel tarafından tanımlanmıştır. Lommel fonksiyonları da homojen olmayan Bessel diferansiyel eşitliğinin özel bir çözümüdür. Lommel fonksiyonları matematik, mühendislik ve fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. 1972 yılında J. Steining, Lommel fonksiyonunu $s_{\mu.p}(z)$ biçiminde tanımlamıştır. Lommel fonksiyonlarını μ, p nin pozitif reel sayılar üzerine incelemiştir. Lommel, $\mu < 1/2$ durumunda $s_{\mu,p}(z)$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ aralığında sonsuz sayıda değişkene sahip olduğunu göstermiştir. Koumandos ve Lamrecht 2012 yılında $\mu \in (0,1)$ için $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının yerleri konusunda kesin tahminler vermişlerdir. Baricz ve Koumandos $s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)$ fonksiyonunu Turan tipli eşitsizlikleri için çalışmışlardır. Baricz ve Szasz $l_{\mu}(z) = \mu(\mu+1) z^{-\frac{\mu}{2}+\frac{3}{4}} s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\sqrt{z})$ eşitliğinin yıldızıl ve yakın konveksliğini incelemiştir. 2015 yılında Çağlar ve Deniz normalize edilmiş Lommel fonksiyonlarınının kısmi toplamları üzerine çalışmışlardır.

<u>Tanım 2.4.1.</u> (Lommel Fonksiyonu): $\mu, p \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + (z^2 - p^2) w(z) = z^{\mu+1} \tag{2.4.1}$$

biçiminde verilen homojen olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denkleme Lommel diferansiyel denklemi adı verilir. Bu denklemin çözümlerine ise *Lommel fonksiyonu* denir. Dolayısı ile tüm $z \in \mathbb{C}$ için (2.4.1) in özel bir çözümü olan

$$s_{\mu,p}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left((\mu-p+1)/2\right)\Gamma\left((\mu+p+1)/2\right)}{\Gamma\left((\mu-p+n+3)/2\right)\Gamma\left((\mu+p+n+1)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2.4.2}$$

fonksiyonuna, *birinci çeşit Lommel fonsiyonu* denir (Watson, 1944).

μ, p nin özel durumlarında $s_{\mu,p}(z)$ trigonometrik fonksiyonlara dönüşür. Örneğin;

$$s_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)=\frac{1-\cos z}{\sqrt{z}}, \quad s_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(z)=\frac{z-\sin z}{\sqrt{z}}, \quad s_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}(z)=\frac{z^2+2\cos z-2}{\sqrt{z}} .$$

<u>Tanım 2.4.2</u> (Normalize Edilmiş Lommel Fonksiyonu): $h_{\mu,p}: U \to \mathbb{C}$ tanımlı

$$h_{\mu.p}(z)=4\left(\frac{\mu-p+1}{2}\right)\left(\frac{\mu+p+1}{2}\right)z^{\frac{-\mu+1}{2}}s_{\mu,p}\left(\sqrt{z}\right) \tag{2.4.3}$$

fonksiyona *normalize edilmiş Lommel fonksiyonu* denir (Çağlar ve Deniz 2015).

Pochhammer (Appell) ifadesi kullanılırsa,

$$h_{\mu,p}(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^{n+1} \tag{2.4.4}$$

serisi biçiminde yazılır. Burada $K=\dfrac{\mu-p+3}{2}\neq -1,-2,...$ ve $F=\dfrac{\mu+p+3}{2}\neq -1,-2,...$ olmak üzere

$$A_n=\frac{(-1)^n}{4^n (K)_n (F)_n}$$

şeklindedir.

$\mu, p \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(\mu \pm p+1)>0$ ve $z\in\mathbb{C}/(-\infty,0]$ için, J_p birinci çeşit Bessel fonksiyonu, Y_p de ikinci çeşit Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$s_{\mu,p}(z)=\frac{\pi}{2}\left[Y_p(z)\int_0^z t^{\mu}J_p(t)dt-J_p(z)\int_0^z t^{\mu}Y_p(t)dt\right] \tag{2.4.5}$$

formunda veya $\mu \pm p$ negatif tek tamsayı olmamak üzere,

$$s_{\mu,p}(z)=\frac{\pi}{2\sin p\pi}\left[J_p(z)\int_0^z t^{\mu}J_{-p}(t)dt-J_{-p}(z)\int_0^z t^{\mu}J_p(t)dt\right] \tag{2.4.6}$$

ifadesi birinci çeşit Lommel fonksiyonunun integral gösterimidir (Watson, 1944).

$\mu\in(-1,1)$ aralığında ve $\xi_{\mu,n}$, Lommel fonksiyonunun *n*. pozitif sıfırı olmak üzere, Lommel fonksiyonunun sonsuz çarpım gösterimi

$$s_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z)=\frac{z^{\mu+\frac{1}{2}}}{\mu(\mu+1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\xi_{\mu.n}^2}\right) \tag{2.4.7}$$

şeklindedir.

$\mu, p\in\mathbb{C}$ olmak üzere birinci çeşit Lommel fonksiyonları için

i. $s_{\mu+2,p}(z)=z^{\mu+1}-\left((\mu+1)^2-p^2\right)s_{\mu,p}(z)$

ii. $s'_{\mu,p}(z)+(p/z)s_{\mu,p}(z)=(\mu+p-1)s_{\mu-1,p-1}(z)$

iii. $s'_{\mu,p}(z)-(p/z)s_{\mu,p}(z)=(\mu-p-1)s_{\mu-1,p+1}(z)$

iv. $(2p/z)s_{\mu,p}(z)=(\mu+p-1)s_{\mu-1,p-1}(z)-(\mu-p-1)s_{\mu-1,p+1}(z)$

v. $2s'_{\mu,p}(z)=(\mu+p-1)s_{\mu-1,p-1}(z)-(\mu-p-1)s_{\mu-1,p+1}(z)$

reküransbağıntıları gerçeklenir (Watson, 1944).

Teorem 2.4.3: $\alpha\in[0,1)$, $\mu, p\in\mathbb{R}$ ve $\mu\pm p$ negatif tek tamsayı olmasın. Bu durumda

$$M=4(K+1)(F+1)=(\mu+5)^2-p^2$$

$$N=4KF=(\mu+3)^2-p^2$$

olmak üzere

i. $\mu > -5+\sqrt{2+p^2}$ ve $\dfrac{M(M-1)}{(M-2)(MN-M-N)} < 1-\alpha$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır,

ii. $\mu > -5+\sqrt{3+p^2}$ ve $\dfrac{2M(2M-3)}{(M-3)(2MN-4M-3N)} < 1-\alpha$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır,

iii. $\mu > -5+\sqrt{3+p^2}$ ve $\dfrac{8M}{(M-3)N} < 1-\alpha$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{K}\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)$ dır ya da $\mathrm{Re}\left(h'_{\mu,p}(z)\right) > \dfrac{1+\alpha}{2}$ dır (Yağmur, 2015).

Teorem 2.4.3 de $\alpha = 0$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.4: $\mu, p \in \mathbb{R}$ ve $\mu \pm p$ negatif tek tamsayı olmasın. Bu durumda

$$M = 4(K+1)(F+1) = (\mu+5)^2 - p^2$$

$$N = 4KF = (\mu+3)^2 - p^2$$

olmak üzere

i. $\mu > -5+\sqrt{2+p^2}$ ve $\dfrac{M(M-1)}{(M-2)(MN-M-N)} < 1$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{S}^*$ dır.

ii. $\mu > -5+\sqrt{3+p^2}$ ve $\dfrac{2M(2M-3)}{(M-3)(2MN-4M-3N)} < 1$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{C}$ dır.

iii. $\mu > -5+\sqrt{3+p^2}$ ve $\dfrac{8M}{(M-3)N} < 1$ ise bu durumda $h_{\mu,p}(z) \in \mathcal{K}(1/2)$ dır veya $\mathrm{Re}\left(h'_{\mu,p}(z)\right) > 1/2$ dır (Yağmur, 2015).

Teorem 2.4.5: $\mu > -1$, $p \in \mathbb{R}$, $\mu \pm p$ negatif tek tamsayı olmasın ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda, eğer $\dfrac{8(\mu+1)\left[(\mu+1)(\mu+3)-p^2\right]-1}{16(\mu+1)^2} \geq \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}$ ise o zaman tüm $z \in U$ için $\dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ dır (Yağmur, 2015).

Sonuç 2.4.6: $\mu > -1$, $p \in \mathbb{R}$ ve $\mu \pm p$ negatif tek tam sayı olmasın. Eğer $(\mu+1)\left[(\mu+1)(\mu+3)-p^2\right] \geq 1/8$ ise bu durumda tüm $z \in U$ için $\dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} \in \mathcal{P}$ dır.

Şimdi Lommel fonksiyonlarının Hardy uzayına ait olma koşulları verilecektir.

Teorem 2.4.7: $\alpha \in [0,1)$, $\mu, p \in \mathbb{R}$ ve $\mu \pm p$ negatif tek tam sayı olmasın. Ayrıca $M = (\mu+5)^2 - p^2$ ve $N = (\mu+3)^2 - p^2$ olsun. Eğer $\mu > -5 + \sqrt{3+p^2}$ ve $\dfrac{2M(2M-3)}{(M-3)(2MN-4M-3N)} < 1-\alpha$ ise bu durumda

i. $\alpha \in [0,1/2)$ için $h_{\mu,p} \in \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ dır

ii. $\alpha \geq 1/2$ için $h_{\mu,p} \in \mathcal{H}^{\infty}$ dır (Yağmur, 2015).

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyonun tanımı ve

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

ifadesi ile $k, d \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 1/2$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$k + \frac{dz}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}} = k + dzF(1,1-2\alpha;1;ze^{i\gamma})$$

$$= k + d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2\alpha)_n}{n!} e^{i\gamma n} z^{n+1}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$k + d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right) = k - dzF\left(1,1;2;ze^{i\gamma}\right)$$

$$= k - d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

ifadesi gerçeklenir. Bu nedenle $h_{\mu,p}$ fonksiyonu $k+dz\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{2\alpha-1}$ $\left(\alpha \neq 1/2 \text{ için}\right)$ ve $k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right)$ $\left(\alpha = 1/2 \text{ için}\right)$ formlarında değildir. Teorem 2.4.3 ün (ii) kısmından $h_{\mu,p}$ fonksiyonunun α- mertebeden konveks olduğunu bilinir. Bu nedenle Teorem 1.2.5.4 ile ispat tamamlanır.

<u>Teorem 2.4.8:</u> $\mu > -1,\ p \in \mathbb{R}$ için $\mu \pm p$ negatif tek tamsayı olmasın. Eğer $(\mu+1)\left[(\mu+1)(\mu+3)-p^2\right] \geq 1/8$ ve $f \in \mathcal{R}$ ise budurumda $h_{\mu,p} * f$ çarpımı $\mathcal{H}^{\infty} \cap \mathcal{R}$ uzayındadır (Yağmur, 2015).

<u>İspat:</u> $u(z) = h_{\mu,p}(z) * f(z)$ fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda $u'(z) = \dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} * f'(z)$ olarak yazılabilir. Sonuç 2.4.6 dan $\dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} \in \mathcal{P}$ dır. $f \in \mathcal{R}$ olduğundan ve Teorem 1.2.5.3 ten $u \in \mathcal{R}$ olduğu söylenebilir. $\dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z}$ nin tam bir fonksiyon olduğu açıktır. Yani u fonksiyonu kendi başına tam bir tam fonksiyondur. Sonuç olarak u fonksiyonu sınırlı olur, bu da kanıtı tamamlar.

<u>Teorem 2.4.9:</u> $\alpha \in [0,1)$, $\mu > -1,\ p \in \mathbb{R}$ ve $\mu \pm p$ negatif tek tamsayı olmasın ve

$$\frac{8(\mu+1)\left[(\mu+1)(\mu+3)-p^2\right]-1}{16(\mu+1)^2} \geq \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}$$

olsun. Eğer $\beta < 1$ ise $f \in \mathcal{R}(\beta)$ $h_{\mu,p} * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır. Burada $\gamma = 1-2(1-\beta)(1-\alpha)$ (Yağmur, 2015).

<u>İspat:</u> $u(z) = h_{\mu,p}(z) * f(z)$ fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda $u'(z) = \dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} * f'(z)$ olarak yazılabilir. Teorem 2.4.5 den $\dfrac{h_{\mu,p}(z)}{z} \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ gerçeklenir. Teorem 1.2.5.3 ve $f' \in \mathcal{P}(\beta)$ ifadesini kullanarak, u' fonksiyonunun $\mathcal{P}(\gamma)$ ya ait

olduğu belirtilir. Burada $\gamma = 1-2(1-\beta)(1-\alpha)$ dır. Yani $u' \in \mathcal{P}(\gamma)$ ifadesi $u \in \mathcal{R}(\gamma)$ ye eşdeğerdir. Dolayısı ile ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.10: $\alpha,\ \mu, p$ parametreleri Teorem 2.4.9. un hipotezlerini sağlasın. $\beta = (1-2\alpha)/(2-2\alpha)$ olmak üzere eğer $f \in \mathcal{R}(\beta)$ ise bu durumda $h_{\mu,p} * f \in \mathcal{R}(0)$ dır (Yağmur, 2015).

Yukarıdaki sonuçta $\alpha = 0$ alınarak bir sonraki sonucu elde edilir.

Sonuç 2.4.11: $\alpha,\ \mu, p$ parametreleri Teorem 2.4.9 in hipotezlerini sağlasın. Eğer $f \in \mathcal{R}(1/2)$ ise bu durumda $h_{\mu,p} * f \in \mathcal{R}(0)$ dır (Yağmur, 2015).

2.5. Mittag-Leffler Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

Kesirli analizde sıkça kullanılan Mittag-Leffler fonksiyonlarının kullanım alanı geniştir. e^z üstel fonksiyonu, tamsayı basamaktan diferansiyel denklemler teorisinde kullanılmaktadır. Mittag-Leffler fonksiyonu, e^z nin bir parametre genişletilmiş hali olan

$$E_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\lambda n+1)}$$

formülü ile tanımlamıştır. 1903 yılında Mittag-Leffler fonksiyonu, İsveçli bilim adamı olan Gösta Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır. 1953 yılında ise Agarwall, Mittag-Leffler tipi iki parametreli fonksiyona genelleştirme işlemini yapmıştır.

Tanım 2.5.1 (Mittag-Leffler fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ olmak üzere

$$E_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\lambda n+1)} \tag{2.5.1}$$

biçiminde tanımlanan $E_\lambda(z)$ fonksiyonuna *Mittag-Leffler fonksiyonu* denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

$E_\lambda(z)$ fonksiyonunda λ' nın özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir:

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad E_1(z) = e^z, \qquad E_2(z) = \cos\sqrt{z},$$

$$E_3(z) = \frac{1}{3}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-z^{1/3}/2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}z^{1/3}\right)\right], \qquad E_4(z) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(z^{1/4}\right) + \cosh\left(z^{1/4}\right)\right].$$

<u>Tanım 2.5.2.</u> (Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu): $z, \mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ve $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ olmak üzere

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \tag{2.5.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu* denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

(2.5.2) denkleminde λ ve μ nin özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+2)} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

Ayrıca genel haliyle

$$E_{1,\mu}(z) = \frac{1}{z^{\mu-1}}\left\{e^z - \sum_{n=0}^{\mu-2} \frac{z^n}{n!}\right\}$$

biçiminde yazılır. Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumları bir anlamda hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonlarına indirgenir. Örneğin,

$$E_{2,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(2n+2)} = \frac{\sinh\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}}.$$

$E_{\lambda,\mu}$ fonksiyonun tanımından bu fonksiyon normalize değildir. Yani $E_{\lambda,\mu}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sınıfına ait değildir.

Tanım 2.5.3. (Normalize Edilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu): $\lambda,\mu,z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda)>0$, $\operatorname{Re}(\mu)>0$ ve $\mu\notin\mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...,-n,...\}$ olmak üzere

$$\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)=\Gamma(\mu)zE_{\lambda,\mu}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)z^n}{\Gamma\left(\lambda\left(n-1\right)+\mu\right)} \tag{2.5.3}$$

biçiminde verilen fonksiyona *normalize edilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu* denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

(2.5.3) denkleminde λ ve μ parametrelerinin özel değerleri için

$$\mathbb{E}_{0,1}(z)=\frac{z}{1-z},\quad \mathbb{E}_{1,1}(z)=ze^z,\quad \mathbb{E}_{1,2}(z)=e^z-1,\quad \mathbb{E}_{1,3}(z)=\frac{2(e^z-z-1)}{z},$$

$$\mathbb{E}_{1,3}(z)=\frac{6(e^z-z-1)-3z^2}{z^2},\quad \mathbb{E}_{2,1}(z)=z\cosh(\sqrt{z}),\quad \mathbb{E}_{2,2}(z)=\sqrt{z}\sinh(\sqrt{z}),$$

$$\mathbb{E}_{2,3}(z)=2\left[\cosh(\sqrt{z})-1\right],\quad \mathbb{E}_{2,4}(z)=\frac{2\left[\sinh(\sqrt{z})-\sqrt{z}\right]}{\sqrt{z}}$$

fonksiyonları elde edilir.

Mittag-Leffler fonksiyonunun geometrik özellikleri ve Hardy uzayı ile ilgili teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.5.4: $0\le\alpha<1$ ve $\lambda\ge1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur

i. Eğer $\mu\ge\mu_2$ ise bu durumda ve $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)\in\mathcal{C}(\alpha)$ dır. Burada μ_2,

$$(1-\alpha)\left(\mu^2-\mu-1\right)\left(\mu^2-4\mu+3\right)-(2-\alpha)\left(\mu^2-2\mu-3\right)-\mu\left(\mu^2-1\right)=0 \tag{2.5.4}$$

denkleminin en büyük köküdür.

ii. Eğer $\mu>\dfrac{1+\sqrt{5-4\alpha}}{2(1-\alpha)}$ ise bu durumda $\dfrac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z}\in\mathcal{P}(\alpha)$ dır (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

Teorem 2.5.4 de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.5: $\lambda \geq 1$ olsun.

(i) Eğer $\mu \geq \mu_3$ ise $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{C}$ dır. Burada $\mu_3 \approx 6.18757$

$$\mu^4 - 8\mu^3 + 10\mu^2 + 8\mu - 3 = 0 \tag{2.5.5}$$

denkleminin en büyük köküdür.

(ii) Eğer $\mu > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ise bu durumda $\frac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z} \in \mathcal{P}$ dır .

Teorem 2.5.4 de $\alpha = 1/2$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

Sonuç 2.5.6: $\lambda \geq 1$ olsun bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. Eğer $\mu \geq \mu_3$ ise $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{C}(1/2)$ dır. Burada $\mu_4 \approx 8.40811$,

$$\mu^4 - 10\mu^3 + 12\mu^2 + 12\mu - 3 = 0$$

denkleminin en büyük köküdür.

ii. Eğer $\mu > 1+\sqrt{3}$ ise bu durumda $\frac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z} \in \mathcal{P}(1/2)$ dır (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

Teorem 2.5.7: $0 \leq \alpha < 1$ ve $\lambda \geq 1$ olsun. Eğer $\mu \geq \mu_2$ ise bu durumda

$$\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z) \in \begin{cases} \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}, & \alpha \in [0,1/2) \\ \mathcal{H}^{\infty}, & \alpha \geq 1/2 \end{cases}$$

olur. Burada μ_2, (2.5.4) ün en büyük köküdür (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

İspat: Hatırlatma:

$$k + \frac{zd}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}} = k + zdF(1,1-2\alpha;1;ze^{i\gamma}) \quad \left(\alpha \neq 1/2\right) \text{ ve}$$

$$k + d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right) = k - zdF(1,1;2;ze^{i\gamma}) \qquad \left(\alpha = 1/2\right) \text{ dır.}$$

Ayrıca $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)$ nin ise $k+\dfrac{zd}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}}$ $\left(\alpha\neq 1/2\right)$ ve $k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right)$ $\left(\alpha=1/2\right)$ formlarında ifade edilemez. Teorem 2.5.4 ün (i). kısmından bilinir ki $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}\in\mathcal{C}(\alpha)$ dır. Bundan dolayı Teorem 1.2.5.4 den kullanılarak istenilen sonuç bulunur.

<u>Teorem 2.5.8:</u> $\lambda\geq 1$ ve $\mu>1+\sqrt{3}$ olsun. Eğer $f\in\mathcal{R}$ ise o zaman $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}\left(z\right)*f\in\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ dir (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

<u>İspat:</u> Eğer $f\in\mathcal{R}$ ise o zaman $f'\in\mathcal{P}$ olur. $u(z)=\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)*f(z)$ ye eşdeğer olan $u'(z)=\dfrac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z}*f'(z)$ dır. Sonuç 2.5.6 nın (ii) kısmından biliniyor ki $\dfrac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z}\in\mathcal{P}(1/2)$ gerçeklenir. Teorem 1.2.5.3 den $u'(z)\in\mathcal{P}$ dir. Böylece Teorem 1.2.5.4 ile; $u'(z)\in\mathcal{H}^{q}$ tüm $q<1$ i elde edilir, buradan da $u(z)\in\mathcal{H}^{q/(1-q)}$ tüm $0<q<1$ elde edilir. Ayrıca $u(z)\in\mathcal{H}^{p}$ tüm $0<p<\infty$ yazılabilir. Carahteodory fonksiyonları için iyi bilinen sınır kullanıldığında; eğer $f\in\mathcal{R}$ ise o zaman $\left|a_n\right|\leq 2/n$ $\left(n\geq 2\right)$ bulunur. Ayrıca

$$\left|u(z)\right|\leq\left|z\right|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda\left(n-1\right)+\mu)}\left|a_n\right|\left|z\right|^{n}\leq 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda\left(n-1\right)+\mu)}\frac{2}{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{2}{n+1}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda n+\mu\right)\left(\mu\right)_n}<\infty$$

dır. Bu belirtilen koşullar altında $u(z)$ kuvvet serisi $\left|z\right|=1$ de mutlak yakınsaktır. Ayrıca $u'(z)\in\mathcal{H}^{q}$ deki $u(z)$ nin $\overline{U}$ de sürekli olduğu anlamına gelir, U nun kapanışıdır. Son olarak $\overline{U}$ üzerinde kompakt olan $u(z)$ sürekli fonksiyonları sınırlıdır. Dolayısıyla $u(z)$ U da sınırlı analitik fonksiyondur. Bu nedenle $u(z)\in\mathcal{H}^{\infty}$ olur. Bu kanıtı tamamlar.

Teorem 2.5.9: $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \dfrac{1+\sqrt{5-4\alpha}}{2(1-\alpha)}$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{R}(\beta)$ $(\beta < 1 \text{ için})$ ise, o zaman $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z) * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır, burada $\gamma = 1-2(1-\alpha)(1-\beta)$ dir (Prajapat, Maharana ve Bansal, 2018).

İspat: Eğer $f \in \mathcal{R}(\beta)$ ise o zaman $f' \in \mathcal{P}(\beta)$ dir. $u(z) = \mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z) * f(z)$ ifadesine eşdeğer olan $u'(z) = \dfrac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z} * f'(z)$ ifadesini göz önüne alınır. Teorem 2.5.4 ün (ii). kısmından iyi bilinir ki, belirtilen koşullar altında $\dfrac{\mathbb{E}_{\lambda,\mu}(z)}{z} * \mathcal{P}(\alpha)$ dır. Teorem 1.2.5.3 ten $u'(z) \in \mathcal{P}(\gamma)$ ve eşdeğeri olan $u'(z) \in \mathcal{P}(\gamma)$ gerçeklenir. Bu kanıtı tamamlar.

2.6. Wright Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

$W_{\lambda,\mu}(z)$ Wright fonksiyonu ilk defa Wright tarafından tanımlanmıştır. $\lambda > 0$ için parçacıkların asimptotik teorisinde uygulanmıştır. Wright fonksiyonları, ilk olarak Mikusinski'nin operatör hesabı ve Hankel tipli integral dönüşümler teorisinde kullanılmıştır. Sonrasında kısmi diferansiyel denklemlerin Lie grup yönteminin kesir mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere genişletilmesinde kullanılmıştır. Bu denklemlerin grup-invariant çözümleri Wright fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilir.

Tanım 2.6.1 (Wright fonksiyonu): $\lambda > -1, \mu, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \frac{z^n}{n!} \tag{2.6.1}$$

biçiminde verilen fonksiyona *Wright fonksiyonu* denir ve $W_{\lambda,\mu}(z)$ ile gösterilir (Raza, Din ve Malik, 2016).

Bu seri $\lambda = -1$ iken U açık birim diskte, $\lambda > -1$ iken ise $\mathbb{C}$'de mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\lambda > -1$ için Wright fonksiyonu tam fonksiyondur. Bessel fonksiyonları, $W_{1,p+1}(-z^2/4)$ Wright fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$J_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p W_{1,p+1}\left(\frac{-z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+p}}{n!(n+p+1)} . \tag{2.6.2}$$

Prajabat, Wright fonksiyonlarını daha genel olarak

$$\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)} z^n \quad \lambda > -1,\ \mu > 0,\ z \in U \tag{2.6.3}$$

biçiminde tanımlamıştır.

Tanım 2.6.2 (Normalize edilmiş Wright fonksiyonu): $\lambda > -1,\ \mu > 0,\ z \in U$ ve $\lambda + \mu > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z) = z\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)} z^{n+1} \tag{3.6.4}$$

biçiminde ifade edilen $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonuna *normalize edilmiş Wright fonksiyonu* denir (Raza, Din ve Malik, 2016).

Teorem 2.6.3: $\alpha \in [0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $z \in U$ olsun.

i. Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left((2-\alpha) + \sqrt{5\alpha^2 - 16\alpha + 12}\right) / 2(1-\alpha)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır.

ii. Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left((4-\alpha) + \sqrt{5\alpha^2 - 28\alpha + 32}\right) / 2(1-\alpha)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır.

iii. Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left(6+\sqrt{48-12\alpha}\right)/(1-\alpha)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{K}\left((1+\alpha)/2\right)$ dır.

iv. Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left(1+\sqrt{5-4\alpha}\right)/2(1-\alpha)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}/z \in \mathcal{P}(\alpha)$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

Sonuç 2.6.4: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $z \in U$ olsun.

i. $\lambda \geq 1$ ve $\mu > 1+\sqrt{3}$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{S}^*$ dır,

ii. $\lambda \geq 1$ ve $\mu > 2+2\sqrt{2}$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{C}$ dır,

iii. $\lambda \geq 1$ ve $\mu > 6+4\sqrt{3}$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{K}(1/2)$ dır,

iv. $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}/z \in \mathcal{P}$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

Aşağıda Wright fonksiyonlarının Hardy uzayına ait olma durumları verilecektir.

Teorem 2.6.5: $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\mu > \left((4-\alpha)+\sqrt{5\alpha^2-28\alpha+32}\right)/2(1-\alpha)$ olsun. Bu durumda

i. $\alpha \in [0,1/2)$ için $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{H}^{1/1-2\alpha}$ dır.

ii. $\alpha \geq 1/2$ için $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} \in \mathcal{H}^{\infty}$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

İspat: Hipergeometrik fonksiyonun tanımından

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

ifadesi yazılabilir. $k,d \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 1/2$ ve γ reel sayı olmasın bu durumda

$$k + \frac{dz}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}} = k + dzF(1,1-2\alpha;1;ze^{i\gamma})$$

$$= k + d\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2\alpha)_n}{n!} e^{i\gamma n} z^{n+1}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right)=k-dzF(1,1;z;ze^{i\gamma})$$

$$=k-d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

ifadesi de gerçeklenir. Buradan $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}$ fonksiyonunun

$$\begin{cases} k+dz\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{2\alpha-1}, & \alpha\neq 1/2 \\ k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right), & \alpha=1/2 \end{cases}$$

formlarında olmadığı söylenebilir. Teorem 2.6.3 ün (ii) kısmından $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}$ fonksiyonu $\alpha-$ mertebeden konveks bir fonksiyon olduğu söylenir ve Teorem 1.2.5.4 ile ispat tamamlanır.

<u>Teorem 2.6.6:</u> $\lambda\geq 1$, $\mu>\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, ve $f\in\mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}*f(z)\in\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

<u>İspat:</u> $h(z)=\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)*f(z)$ olsun. Buradan türev alınırsa $h'(z)=\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)/z*f'(z)$ biçiminde yazılabilir. Sonuç 2.6.4. ün (iv) kısmından $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)/z\in\mathcal{P}$ dır. $f\in\mathcal{R}$ olduğundan Teorem 1.2.5.3 den $h\in\mathcal{R}$ olur. $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)/z$ fonksiyonu tam olduğundan h da tam fonksiyon olur. Bu da h ın sınırlı olduğunu verir. Dolayısı ile ispat tamamlanır.

<u>Teorem 2.6.7:</u> $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq 1$, $\mu>\left(1+\sqrt{5-4\alpha}\right)/2(1-\alpha)$, $\alpha\in[0,1)$ ve $z\in U$ olsun. $\gamma=1-2(1-\alpha)(1-\beta)$ olmak üzere eğer $f\in\mathcal{R}(\beta)$ ise $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}*f(z)\in\mathcal{R}(\gamma)$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

<u>İspat</u>: $h(z)=\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)*f(z)$ olsun. Buradan türev alınırsa $h'(z)=\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)/z*f'(z)$ biçiminde yazılabilir. Teorem 3.6.3. ün (iv) kısmından $\mathcal{W}_{\lambda,\mu}(z)/z\in\mathcal{P}(\alpha)$ dır. Teorem 1.2.5.2 den ve $f'\in\mathcal{P}(\beta)$ olduğundan $h'(z)\in\mathcal{P}(\gamma)$ yazılabilir burada $\gamma=1-2(1-\alpha)(1-\beta)$ dır. Dolayısı ile $h\in\mathcal{R}(\gamma)$ dır bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 2.6.8: $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left(1+\sqrt{5-4\alpha}\right)/2(1-\alpha)$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{R}(\beta)$, $\beta = (1-2\alpha)(2-2\alpha)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

Sonuç 2.6.9: $\lambda \geq 1$ ve $\mu > \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{R}(1/2)$ ise bu durumda $\mathcal{W}_{\lambda,\mu} * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ dır (Raza, Din ve Malik, 2016).

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlık altında normalize Bessel-Struve çekirdek fonksiyonu tanımlanarak, önce bu fonksiyonun $\alpha-$mertebeden yıldızıllığı, $\alpha-$mertebeden konveksliği ve konvekse yakınlığı gibi geometrik özellikleri incelenmiş sonrasında Hardy uzayı ile alakalı teoremler verilmiştir.

3.1. Bessel-Struve Çekirdek Fonksiyonlarının Hardy Uzayları

Bessel-Struve çekirdek fonksiyonları uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik gibi birçok alanda uygulaması vardır. Bu fonksiyonun özellikleri geçmiş yıllarda birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. 2016 yılında Arpad, Mondal ve Swaminathan Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının monotonluk özelliklerini, aynı yıl Mondal ve Al-Dhuain Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının difarensiyel subordinasyonunu ve yine aynı yıl Mondal bu fonksiyonları bazı geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

Burada $J_p(z)$ ve $H_p(z)$ sırasıyla p. mertebeden normalize edilmiş Bessel ve Struve fonksiyonları olmak üzere Φ_p ve Ψ_p dönüşümlerini

$$\Phi_p(z) = 2^p z^{-p}\Gamma(p+1)J_p(z) \quad \text{ve} \quad \Psi_p(z) = 2^p z^{-p}\Gamma(p+1)H_p(z)$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 3.1.1 (Bessel-Struve çekirdek fonksiyonu): $p > -1/2$ olmak üzere $B_p : U \to \mathbb{C}$

$$B_p(z) = \Phi_p(iz) - i\Psi_p(iz) \tag{3.1.1}$$

ile tanımlanan fonksiyonuna *Bessel-Struve çekirdek fonksiyonu* denir (Mondal 2016).

$z \mapsto B_\nu(\gamma z)$, $\gamma \in \mathbb{C}$ ile tanımlanan fonksiyon

$$\mathcal{L}_p u(z) = \lambda^2 u(z)\ ,\ u(0) = 1,\ u'(0) = \frac{\lambda \Gamma(p+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.1.2}$$

ile tanımlanan sınır değer probleminin tek çözümüdür. Burada $\mathcal{L}_p$, $p > -1/2$ Bessel-Struve operatörü olup,

$$\mathcal{L}_p\left(u(z)\right) = u''(z) + \frac{2p+1}{z}\left(u'(z) - u(z)\right) \tag{3.1.3}$$

biçiminde verilir. Ayrıca (2.2.2) ve (2.3.4) tanımlarından $B_p(z)$ ($\gamma = 1$ alındığında) fonksiyonu

$$B_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n!\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+p+1\right)} z^n \tag{3.1.4}$$

kuvvet serisi biçiminde yazılabilir. $B_p(z)$ çekirdek fonksiyonun integral gösterimi

$$B_p(z) = \frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{p-1/2} e^{zt}\, dt \tag{3.1.5}$$

biçimindedir. (3.1.2) ve (3.1.3) eşitliklerinden $M = \dfrac{2\Gamma(p+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1/2)}$ olmak üzere $B_p(z)$ fonksiyonu

$$z^2 g_p''(z) + (2p+1) g_p'(z) - z g_p(z) = zM \tag{3.1.6}$$

diferansiyel denklemini sağlar.

$B_p(z)$ fonksiyonu p. mertebeden modifiye edilmiş Bessel ve Struve fonksiyonları cinsinden yazılabilir.

Sonuç 3.1.2: $p > 0$ için

$$z^p B_p(z) = 2^p \Gamma(p+1)\big(I_p(z) + L_p(z)\big) \tag{3.1.7}$$

dır (Mondal, 2016).

Sonuç 3.1.3 : $p > 0$ için

$$zB_p'(z) = 2pB_{p-1}(z) - 2pB(z) \tag{3.1.8}$$

rekünans bağıntısı yazılabilir (Mondal, 2016).

$B_p(z)$ Bessel-Stuve çekirdek fonksiyonunun tanımına bakıldığında $\mathcal{A}$ sınıfına ait olmadığı açıktır. Ana sonuçlarımızı vermek için bu fonksiyonu normalize formunu vermek gerekir. Normalize formu aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.4 (Normalize edilmiş Bessel-Struve çekirdek fonksiyonu): $p > 0$, $z \in U$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_p(z) &= zB_p(z) \\ &= 2\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(m+v+1)m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2} \right)\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{B}_p(z)$ fonksiyonuna *normalize edilmiş Bessel-Struve çekirdek fonksiyonu* denir(Mondal, 2016).

Aşağıdaki teoremle $\mathcal{B}_p(z)$ fonksiyonunun geometrik özellikleri incelenmiştir.

<u>Teorem 3.1.5</u>: $p \in \mathbb{R}$, $K = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(3/2)\Gamma(p+3/2)}$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun.

i. Eğer $p > -3/4$ ve $\dfrac{\dfrac{2}{4p+3} + K\dfrac{4p+6}{4p+5}}{\dfrac{8p+5}{8p+7} - K\dfrac{8p+12}{8p+11}} < 1-\alpha$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır.

ii. Eğer $p > -3/4$ ve $\dfrac{16(4p+5)+4K(4p+3)(4p+6)}{(4p-1)(4p+5)-2K(4p+6)(4p+3)} < 1-\alpha$ bu durumda $\mathcal{B}_p \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır.

iii. Eğer $p > -3/4$ ve $\dfrac{16}{4p+3} + 4K\dfrac{4p+6}{4p+5} \le \dfrac{1-\alpha}{4}$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p \in \mathcal{K}\left((1+\alpha)/2\right)$ dır.

iv. Eğer $p > -7/8$ ve $\left(\dfrac{2}{8p+7} - K\dfrac{8p+12}{8p+11}\right)\dfrac{1}{1-\alpha} < 1$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p \in \mathcal{P}(\alpha)$ dır (Deniz ve Bayır, 2019).

<u>İspat</u>

(i): $\mathcal{B}_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğunu göstermek için $\left|\dfrac{z\mathcal{B}_p'(z)}{\mathcal{B}_p(z)} - 1\right| < 1-\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Dolayısıyla $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ üçgen eşitsizliği $m = 0,1,2,\cdots$ için $m!(p+1)_{m-1} \ge m(p+1)^{m-1}$ ve $(3/2)_m (p+3/2)_{m-1} \ge \dfrac{2m+1}{2}(p+3/2)^{m-1}$ eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\left|\mathcal{B}_p'(z) - \frac{\mathcal{B}_p(z)}{z}\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)2m}{2^{2m} m!\Gamma(m+p+1)} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)(2m+1)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)} z^{2m+1}\right|$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)2m}{2^{2m} m!\Gamma(m+p+1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)(2m+1)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{2^{2m} m!(p+1)_m} + K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2^{2m+1} (3/2)_m (p+3/2)_m}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2m} (p+1)^m} + K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2^{2m+1} (p+3/2)^m}$$

$$\leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4(p+1)} \right)^m + K \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4(p+3/2)} \right)^m$$

$$= \frac{2}{4p+3} + K \frac{4p+6}{4p+5} \tag{3.1.10}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|$ ters üçgen eşitsizliği $m = 0,1,2,\cdots$ için $m!(p+1)_m \geq 2^{m-1}(p+1)^m$ ve $(3/2)_m (p+3/2)_m \geq 2^{m-1}(p+3/2)^m$ eşitsizliklerinden faydalanarak

$$\left| \frac{\mathcal{B}_p(z)}{z} \right| = \left| 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{2^{2m} m! \Gamma(m+p+1)} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{2^{2m+1} \Gamma(m+3/2) \Gamma(m+p+3/2)} z^{2m+1} \right|$$

$$\geq 1 - \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m} m!(p+1)_m} + K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1} (3/2)_m (p+3/2)_m} \right\}$$

$$\geq 1 - \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1} 2^{2m} (p+1)^m} + K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1} 2^{m-1} (p+3/2)^m} \right\}$$

$$\geq 1 - \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8(p+1)} \right)^m + K \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8(p+3/2)} \right)^m \right\}$$

$$= \frac{8p+5}{8p+7} - K \frac{8p+12}{8p+11} \tag{3.1.11}$$

elde edilir.Sonuç olarak (3.1.10) ve (3.1.11) eşitisizliklerinden

$$\left| \frac{z \mathcal{B}_p'(z)}{\mathcal{B}_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{\frac{2}{4p+3} + K \frac{4p+6}{4p+5}}{\frac{8p+5}{8p+7} - K \frac{8p+12}{8p+11}}$$

bulunur. Dolayısıyla teoremin i. şıkkının hipotezinden $\mathcal{B}_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ sonucuna ulaşılır.

(ii): $\mathcal{B}_p \in \mathcal{C}(\alpha)$ olduğunu göstermek için $\left|\dfrac{z\mathcal{B}_p''(z)}{\mathcal{B}_p'(z)}\right| < 1-\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir. $|z_1+z_2| < |z_1|+|z_2|$ üçgen eşitsizliği $m=0,1,2,\ldots$ için $m!(p+1)_m \geq \dfrac{2m+1}{8}(p+1)^m$ ve $(3/2)_m(p+3/2)_m \geq ((2m+1)(m+1)/4)(p+3/2)^m$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|z\mathcal{B}_p''(z)| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+1)2m}{2^{2m}m!\Gamma(m+p+1)}z^{2m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+2)(2m+1)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)}z^{2m}\right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+1)2m}{2^{2m}m!\Gamma(m+p+1)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+2)(2m+1)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+1)2m}{2^{2m}m!(p+1)_m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+2)(2m+1)}{2^{2m+1}(3/2)_m(p+3/2)_m} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{16}{2^{2m}(p+1)^m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{2^{2m}(p+3/2)^m} \\
&= 16\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4(p+1)}\right)^m+4K\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4(p+3/2)}\right)^m \\
&= \frac{16}{4p+3}+4K\frac{4p+6}{4p+5}
\end{aligned}
\tag{3.1.12}
$$

bulunur. Diğer taraftan; $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2|$ ters üçgen eşitsizliği $m=0,1,2,\cdots$ için $m!(p+1)_m \geq \dfrac{2m+1}{4}(p+1)^m$ ve $(3/2)_m(p+3/2)_m \geq ((m+1)/2)(p+3/2)^m$ eşitsizliklerinden faydalanarak

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_p'(z)| &\geq 1-\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+1)}{2^{2m}m!\Gamma(m+p+1)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)(2m+2)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)}\right\} \\
&\geq 1-\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+1)}{2^{2m}m!(p+1)_m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(m+1)}{2^{2m+1}(3/2)_m(p+3/2)_m}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\geq 1-\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{2^{2m}\left(p+1\right)^{m}}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{2^{2m}\left(p+3/2\right)^{m}}\right\}$$

$$=1-\left\{4\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4(p+1)}\right)^{m}+2K\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4(p+3/2)}\right)^{m}\right\}$$

$$=\frac{4p-1}{4p+3}-2K\frac{4p+6}{4p+5} \tag{3.1.13}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.1.12) ve (3.1.13) eşitsizliklerinden

$$\left|\frac{z\mathcal{B}_p''(z)}{\mathcal{B}_p'(z)}\right|\leq\frac{16(4p+5)+4K(4p+3)(4p+6)}{(4p-1)(4p+5)-2K(4p+6)(4p+3)}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla teoremin ii. şıkkının hipotezinden $\mathcal{B}_p\in\mathcal{C}(\alpha)$ sonucuna ulaşılır.

(iii): (ii) den $\left|z\mathcal{B}_p''(z)\right|\leq\frac{16}{4p+3}+4K\frac{4p+6}{4p+5}$ olur. Lemma 1.2.3.11 ile Teorem 3.1.5 in iii. şıkkının hipotezinden $\mathcal{B}_p\in\mathcal{K}\left(\left(1+\alpha\right)/4\right)$ dır.

(iv): $\mathcal{B}_p\in\mathcal{P}(\alpha)$ olduğunu göstermek için $\left|\frac{\mathcal{B}_p(z)}{z}-1\right|<1-\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\left|z_1+z_2\right|<\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ üçgen eşitsizliği $m=0,1,2,\cdots$ için $m!\left(p+1\right)_m\geq 2^{m-1}\left(p+1\right)^m$ ve $\left(3/2\right)_m\left(p+3/2\right)_m\geq 2^{m-1}\left(p+3/2\right)^m$ eşitsizliklerinden faydalanarak

$$\left|\frac{\mathcal{B}_p(z)}{z}-1\right|=\left|1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(v+1)}{2^{2m}m!\Gamma(m+p+1)}z^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{2^{2m+1}\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+p+3/2)}z^{2m+1}-1\right|$$

$$\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}m!\left(p+1\right)_m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m+1}\left(3/2\right)_m\left(p+3/2\right)_m}$$

$$\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m-1}2^{2m}\left(p+1\right)^m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2m+1}2^{m-1}\left(p+3/2\right)^m}$$

$$\leq 2\frac{1}{8(p+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8\left(p+1\right)}\right)^{m}+K\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8\left(p+3/2\right)}\right)^{m}$$

$$=\frac{2}{8p+7}-K\frac{8p+12}{8p+11} \tag{3.1.14}$$

bulunur. Dolayısı ile Teoremin iv. şıkkındaki hipotezden $\dfrac{\mathcal{B}_p(z)}{z}\in\mathcal{P}(\alpha)$ dır.

Sonuç 3.1.6: $p\in\mathbb{R}$ ve $z\in U$ olsun. Bu durumda;

i. $p>-3/4$ ve $\dfrac{16(4p+5)+4K(4p+3)(4p+6)}{(4p-1)(4p+5)-2K(4p+6)(4p+3)}<1$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p\in\mathcal{S}^*$ dır,

ii. $p>-3/4$ ve $\dfrac{16(4p+5)+4K(4p+3)(4p+6)}{(4p-1)(4p+5)-2K(4p+6)(4p+3)}<1$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p\in\mathcal{C}$ dır,

iii. $p>-3/4$ ve $\dfrac{16}{4p+3}+4K\dfrac{4p+6}{4p+5}\leq\dfrac{1}{4}$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p\in\mathcal{K}(1/2)$ dır,

iv. $p>-7/8$ ve $\left(\dfrac{2}{8p+7}-K\dfrac{8p+12}{8p+11}\right)<1$ ise bu durumda $\mathcal{B}_p/z\in\mathcal{P}$ dır (Deniz ve Bayır, 2019).

Şimdi de aşağıda Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının Hardy uzayına ait olma durumları verilecektir.

Teorem 2.6.7: $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere $p>-3/4$ olsun. O zaman

i. $\alpha\in[0,1/2)$ için $\mathcal{B}_p\in\mathcal{H}^{1/1-2\alpha}$ dır.

ii. $\alpha\geq 1/2$ için $\mathcal{B}_p\in\mathcal{H}^{\infty}$ dır (Deniz ve Bayır 2019).

İspat: Hipergeometrik fonksiyonun tanımından

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

ifadesi yazılabilir. $k,d\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 1/2$ ve γ reel sayı olmasın bu durumda

$$k+\frac{dz}{\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{1-2\alpha}}=k+dzF(1,1-2\alpha;1;ze^{i\gamma})$$

$$=k+d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2\alpha)_n}{n!}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca

$$k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right)=k-dzF(1,1;z;ze^{i\gamma})$$

$$=k-d\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}e^{i\gamma n}z^{n+1}$$

ifadesi de gerçeklenir. Buradan $\mathcal{B}_p$ fonksiyonunun

$$\begin{cases} k+dz\left(1-ze^{i\gamma}\right)^{2\alpha-1}, & \alpha\neq 1/2 \\ k+d\log\left(1-ze^{i\gamma}\right), & \alpha=1/2 \end{cases}$$

formlarında olmadığı söylenebilir. Teorem 3.1.5 in (ii) kısmından $\mathcal{B}_p$ fonksiyonu $\alpha-$ mertebeden konveks bir fonksiyon olduğundan ve Teorem 1.2.5.4 den ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.8: $p>-3/4$ ve $f\in\mathcal{R}$ olsun. O zaman $\mathcal{B}_p * f(z)\in\mathcal{H}^{\infty}\cap\mathcal{R}$ dır (Deniz ve Bayır, 2019).

İspat: $h(z)=\mathcal{B}_p(z)*f(z)$ olsun. Buradan türev alınırsa $h'(z)=\left(\mathcal{B}_p(z)/z\right)*f'(z)$ biçiminde yazılabilir. Sonuç 3.1.6 un (iv) kısmından $\mathcal{B}_p(z)/z\in\mathcal{P}$ dır. $f\in\mathcal{R}$ olduğundan Teorem 1.2.5.3 den $h\in\mathcal{R}$ olur. $\mathcal{B}_p(z)/z$ fonksiyonu tam olduğundan h da tam fonksiyon olur. Bu da h ın sınırlı olduğunu verir. Dolayısı ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9: $p\in\mathbb{R}$, $\alpha\in[0,1)$ ve $z\in U$ olsun. $\gamma=1-2(1-\alpha)(1-\beta)$ olmak üzere eğer $f\in\mathcal{R}(\beta)$ ise $\mathcal{B}_p * f(z)\in\mathcal{R}(\gamma)$ dır (Deniz ve Bayır, 2019).

İspat: $h(z)=\mathcal{B}_p(z)*f(z)$ olsun. Buradan türev alınırsa $h'(z)=\left(\mathcal{B}_p(z)/z\right)*f'(z)$ biçiminde yazılabilir. Teorem 3.1.5 in (iv) kısmından $\left(\mathcal{B}_p(z)/z\right)\in\mathcal{P}(\alpha)$ dır. Teorem 1.2.5.2 den ve $f'\in\mathcal{P}(\beta)$ olduğundan $h'(z)\in\mathcal{P}(\gamma)$ yazılabilir burada $\gamma=1-2(1-\alpha)(1-\beta)$ dır. Dolayısı ile $h\in\mathcal{R}(\gamma)$ dır bu da ispatı tamamlar.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında esasen bazı özel fonksiyonların Hardy uzayına olması için sahip olmaları gereken özellikler araştırıldı. Daha açık bir ifadeyle önce Gauss hipergeometrik fonsiyonlar, Bessel fonksiyonları, Struve fonksiyonları, Lommel fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonları gibi özel fonksiyonların geometrik özellikleri ve Hardy uzayı üzerine yapılan çalışmalar verilmiştir. Sonrasında ise bu çalışmalardan esinlenerek Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının bazı geometrik özellikleri ve Hardy uzayına ait olabilmeleri için gerek yeter koşulları incelenmiştir.

Bundan sonra bu tip konular üzerine çalışma yapacak araştırmacılar yine farklı türden özel fonsiyonların veya tezde bahsi geçen özel fonksiyonların bazı genelleştirmeleri için Hardy uzayını çalışabilirler. Diğer taraftan Bessel-Struve çekirdek fonksiyonlarının integral operatörlerinin geometrik özellikleri ve sıfırları yardımıyla yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları üzerine çalışma yapabilirler.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I.A., (1965). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Dover publications, New York.

Akbulut, A., (1998). Hardy Uzayları. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baricz, A., (2010). Generalized Bessel functions of the first kind. Lecture notes in Mathematics, 1994, Springer-Verlag. Berlin.

Baricz, A., (2006). Bessel Transforms and Hardy Spaces of Generalized Bessel functions. Mathematica, 48 (71), 2, 127-136.

Baricz, A., (2008a). Geometric properties of generalized Bessel functions. Publ. Math. Debrecen, 73, 155–178.

Baricz, A., (2008b). Generalized Bessel Functions of the First Kind. Ph.D. thesis. Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca.

Baricz, A. and Ponnusamy, S., (2010). Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions. Integral Transforms Spec. Funct., 21(9), 641-653

Baricz A., (2007). Some inequalities involving generalized Bessel functions, Math. Inequal. Appl. 10(4), 827-842.

Branges, L. De., A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math., 154(1-2), s137s152, (1985)

Çağlar, M., Deniz, E., (2015). Partial sums of the normalized Lommel Fonctions, Mathematical Inequalities and Applications, 18/3, 1189-1199.

Deniz E., Bayır A., (2019). Hardy spaces of Bessel-Struve kernel function. Yayına gönderildi.

De Branges, L., (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math, 154, 137–152.

Duren, P.L., (1970). Theory of Hp-Spaces. Academic Press. New York/London.

Duren, L. P., (1983). Univalent Functions. Springer–Verlag, New York.

Eenigenburg, P. J. and Keogh, F. R., (1970). The Hardy class of some univalent functions and their derivatives, Michigan Math J., 17, 335–346.

Fejer, L., (1936). Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Acta Litterarum ac Scientiarum, 8, 89–115.

Goodman, A. W., (1983b). Univalent Functions, II. Mariner Publishing Company., Tapma, Florida., 311.

Goodman, A. W., (1983a). Univalent Functions, I. Mariner Publishing Company., Tapma, Florida., 245.

Graham, I. and Kohr, G., (2003). Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc.

Hardy, G.H., (1915). The mean value of the modules of an analytic function, Proc. London Math. Soc.(2) 14, 269-277.

Hardy, G.H. and Littlewood, J.E., (1941). Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, Quart. J. Math., Oxford Series, 12 , 221–256.

Jung I.B., Kim Y.C and Srivastava H.M, (1993). The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter familics of integral operators, J. Math.Anal. and Appl. 176, 138-147.

Kaumandos, S., Lamprecht, M., (2012). The zeros of certain Lommel functions, Proc. Amer. Math 140, 9, 3091-3100.

Kaplan, W., (1952). Close to convex schlicht functions, Michig. Math. J., (1), 2, 169–185.

Kilbas A., Srivastava H.M. and Trujillo J. J., (2006). Theory and Application of Fractional Differential Equations, North Holland Mathematics Studies 204.

Lu, S., (1995). Four lectures on real Hp-spaces, World Scientific Publishing, SingaPore.

Meise, R., Vogt, D., (1997). Introduction to functional analysis, Oxford University Press, New York.

Merkes, E. P. and Scott, B. T.,Starlike hypergeometric functions, Proc. Amer. Math. Soc., 12, s885-s888, (1961)

Mondal, S.R., (2016). Arşiv: arXiv:1601.08102v.

Mondal, S.R., Al-Dhuain M., (2016). Arşiv: arXiv:submit/1467470160 [math CV].

Mondal, S.R., Baricz A., Swaminathan A., (2016). Bull. Korean Math. Soc. 53, No. 6, 1845–1856.

Olver, F.W.J., (2010). NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Orhan H. and Yağmur N., (2013). Geometric properties of generalized Struve functions. The Scientific Annals of Al.I. Cuza University of Iasi (accepted).

Ozaki, S., (1935). On the theory of multivalent functions, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A, 40(2), 167–188.

Owa, S. and Srivastava, H.M., (1987) “Univalent and starlike generalized hypergeometric functions”, Canad. J. Math., 39(5), s1057-s1077.

Owa S., Nunokowa M., Saitoh H. and Srivastava H.M., (2002). Close-to-convexity, starlikeness and convexity of certain analytic functions. Applied Mathematics Letters, vol. 15, No.1 , 63-69.

Polat S., (2013). Hipergeometrik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

Pommerenke Ch., (1975). “Univalent Functions”, Vandenhoeck and Ruprecht Company, Göttingen, Berlin., 376.

Ponnusamy S., (1996). The Hardy space of Hypergeometric functions, Complex Variables: Theory and Appl., 29, 83–96.

Ponnusamy S. and Vuorinen M., (1997). “Asymptotic expansions and inequalities for hyper geometric functions”, Mathematika 44, , 43-64.

Ponnusamy, S., (1998). Inclusion theorems for convolution product of second order polylogarithms and functions with the derivative in a half plane. Rocky Mountain J. Math., 28(2), 695–733.

Ponnusamy, S. and Silverman, H., (2006). Complex variables with Applications. Birkhäuser, Boston.

Prajapat J. K., Maharana S. and Bansal D., (2018). Radius of Starlikeness and Hardy Space of Mittag-Leffler functions, Submitted.

Priwalow I.I, (1956). Randeigenschaften Analyticher Functionen Deutscher Verlag Der Wissenchaften.

Raza M., Din M.U., Malik S.N., (2016). Certain Geometric Properties of Normalized Wright Functions, Pakistan.

Riesz, F., (1923). Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, Acta Sci. Math. 1, 27-32.

Ruschcwcyh St. and Sheil-Small T., (1973). Hadamart products of Schlicht functions and the Polya-Schnenberg conjecture, Comment. Math. Helv. 48, 119-135.

Silverman, H., (1993). Starlike and convexity properties for hypergeometric functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications., 172, 574-581.

Stankiewicz, J. and Stankiewicz Z., (1986). Some applications of Hadamard convolutions in the theory of functions. Ann.Univ. Mariae Curie-Sklodowska, 40, 251-265.

Stein, E. M. and Weiss, G., (1960), On the theory of harmonic functions of several variables, I. Acta Math. 103, 25-62.

Steining, J., (1972). The sign of Lommel's function, Trans. Amer. Math. Soc. 163, 123-129.

Watson, G.N., (1944). A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge.

Yağmur N. and Orhan H. (2014). Hardy spaces of generalized Struve functions. Complex Veriables and Elliptic Equations. 59(7), 929-936.

Yağmur N., (2015). Hardy spaces of Lommel functions. Bull. Korean Math. Soc. 52, No. 3, pp. 1035–1046.

Zhang, S. and Jin, J., (1996). Computation of Special Functions. Wiley Interscience Publication, New York.

Zill, D. G. and Shanahan, P. D., (2013). Complex Analysis With Applications. Jones and Bartlett Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Arzu BAYIR
Doğum Yeri ve Tarihi	: EDİRNE/Merkez 31/03/1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: arzubayr06@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: 80. Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi/EDİRNE 2006-2010
Lisans	: Ankara Üniversitesi (2010-2014)
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi (2016-2019)

Çalıştığı Kurumlar	: KARS-Akyaka İmkb Anadolu Lisesi (2015-2018)
	: İSTANBUL- Kemal Atay Mes. Ve Tek. And. Lisesi (2018-…)