KOMPLEKS MERTEBEDEN ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARININ ÇEŞİTLİ ÖZELLİKLERİ

Tarkan ÖZTÜRK

DANIŞMAN

Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KARS-2019

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS MERTEBEDEN ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARININ ÇEŞİTLİ ÖZELLİKLERİ

Tarkan ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Tarkan ÖZTÜRK'ün Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Kompleks Mertebeden Analitik Fonksiyon Siniflarinin Çeşitli Özellikleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy . . . . ile kabul edilmiştir.

. . / . . / 20..

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	: Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tarkan ÖZTÜRK
17.01.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Kompleks Mertebeden Analitik Fonksiyon Sınıflarının Çeşitli Özellikleri

Tarkan ÖZTÜRK

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı ve bu sınıfa ait olan fonksiyonun ters fonksiyonu için katsayı problemi incelendi ve bu fonksiyonların bazı ilk katsayıları için kesin değerlendirmeler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, normalize edilmiş fonksiyon.

2019, 42 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Various Properties of Complex Order Analytic Function Classes

Tarkan ÖZTÜRK

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis study, the coefficient problem for the function belonging to a certain subclass of analytic and univalent functions and for their inverses is investigated. Also, sharp estimates for some initial coefficients of these functions are obtained.

Key Words: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, normalized function.

2019, 42 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme şükranlarımı bir borç bilirim.

Tarkan ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$U(z_0,\varepsilon)$	z_0 noktasının ε komşuluğu
U	$U=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ merkezil açık birim disk
$f(U)$	U kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
A	Merkezil açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,...$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı
S	A'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
C	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı
S^*	Merkezil açık birim diskte normalize edilmiş yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	$S^*(\alpha)=\left\{f\in S:\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ \alpha\in[0,1),\ z\in U\right\}$
$C(\alpha)$	$C(\alpha)=\left\{f\in S:\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\ \alpha\in[0,1), z\in U\right\}$
$S^*C(\beta)$	$S^*C(\beta)=\left\{\begin{array}{l} f\in S:\ \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)+\beta z^2f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right\}>0, \\ \beta\in[0,1],\ z\in U\end{array}\right\}$

$S^*(\alpha,\tau)$ $\quad$ $$S^*(\alpha,\tau)=\left\{ f\in S:\ \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right]\right\}>\alpha,\ \alpha\in[0,1),\ z\in U\right\}$$

$C(\alpha,\tau)$ $\quad$ $$C(\alpha,\tau)=\left\{ f\in S:\ \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\right\}>\alpha,\ \alpha\in[0,1),\ z\in U\right\}$$

$S^*C(\beta,\tau)$ $\quad$ $$S^*C(\beta,\tau)=\left\{\begin{array}{l} f\in S: \\ \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>0, \\ \beta\in[0,1],\ \tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\},\ z\in U \end{array}\right\}$$

$S^*C(\alpha,\beta)$ $\quad$ $$S^*C(\alpha,\beta)=\left\{\begin{array}{l} f\in S:\ \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right\}>\alpha, \\ \alpha\in[0,1),\ \beta\in[0,1],\ z\in U \end{array}\right\}$$

$S^*C(\alpha,\beta,\tau)$ $\quad$ $$S^*C(\alpha,\beta,\tau)=\left\{\begin{array}{l} f\in S: \\ \operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>\alpha, \\ \alpha\in[0,1),\ \beta\in[0,1],\ \tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\},\ z\in U \end{array}\right\}$$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Bilindiği üzere, analitik fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların katsayı problemi bu fonksiyonların geometrisi üzerinde önemli bir katkısı olduğundan geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutar.

Ayrıca, karmaşık fonksiyonlar teorisinden bilinen Riemann teoremi gereğince karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesini birim diske konform dönüştüren bir fonksiyon vardır. Bu sebepten karmaşık düzlemde bir bölgenin analitik fonksiyon altında görüntüsünün nasıl bir küme olmasını incelemek yerine birim diskin analitik fonksiyon altında görüntüsünün nasıl bir küme olması inceleniyor.

Birim diskin analitik fonksiyonlar altında görüntülerinin nasıl bir bölge olmasına göre fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılırlar. Görüntü bölgelerinin geometrik özelliklerine göre bu sınıflardan en çok incelenleri ünivalent, yıldızıl, konveks ve bu sınıfların bazı alt sınıflarıdır.

Özellikle ters sınır değer problemlerinin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan konvekslik ve yıldızıllık kriteri bu alanda araştırmacıların dikkatini çekmektedir.

Analitik fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar karmaşık düzlemin $U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ açık birim diskinde ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ *normalize* koşulunu sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonlarının oluşturduğu bir S sınıfının alt sınıfları üzerinde yoğunlaşmıştır.

Biz bu tez çalışmasında aşağıdaki konuları ele aldık:

1. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için katsayı problemi. Tez çalışmamızda biz analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ilk üç katsayıları için kesin değerlendirmeler elde ettik.

2. Analitik ve ünivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfının ters fonksiyonlarının katsayı problemi. Tezde ters fonksiyonların ilk üç katsayıları için üst sınır değerlendirmeleri elde edildi.

Bu tez birinci bölümü kuramsal temeller, ikinci bölümü materyal ve yöntemleri ve üçüncü bölüm araştırma bulguları olmak üzere üç bölümden oluşur.

1.2. KURAMSAL TEMELLER

1.2.1. Genel Kavramlar

Tezin bu kısmında biz bazı temel bilgileri verdik.

Tanım 1.2.1.1 ($\varepsilon-$komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ için

$$U(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının $\varepsilon-$*komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.2 (İç Nokta): Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin, belli bir komşuluğu ile bu kümeye ait olan noktalarına bu kümenin bir *iç nokta*'sı denir.

Tanım 1.2.1.3 (Açık Küme): Karmaşık düzlemin sadece iç noktalarından oluşan kümesine *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.4 (Kapalı küme): Tümleyeni açık olan kümeye *kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.1.5 (Bağlantılı Küme): Kümeye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası kümeye ait ise kümeye (doğrusal) *bağlantılı küme* denir.

Tanım 1.2.1.6 (Bölge): Karmaşık düzlemin açık ve bağlantılı kümesine bir *bölge* denir.

1.2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 1.2.2.1 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ karmaşık değişkenli ve karmaşık değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilir (veya diferensiyallenebilir) denir. Eğer, bir fonksiyon tanımlı olduğu bir noktanın belli bir komşuluğunda türevlenebilirse bu fonksiyona bu noktada *analitik fonksiyon* denir [1].

Tanım 1.2.2.2 (Tam Fonksiyon): $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemin her noktasında analitik olan fonksiyona *tam fonksiyon* denir.

Tam fonksiyona örnek olarak e^z, $\sin z$, $\cos z$, $az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ gibi bir çok fonksiyon gösterilir.

Tanım 1.2.2.3 (Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı): $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlayan $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna *normalize edilmiş fonksiyon* denir [2].

U birim diskinde normalize edilmiş analitik fonksiyonlar

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \; a_n \in \mathbb{C}, n = 2, 3, ... \qquad (1.2.2.1)$$

şekilli açılıma sahip olup bu fonksiyonlarının sınıfı A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde yazılır

$$A=\left\{ f:\ f\left(z\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad z\in U\right\}.$$

<u>Tanım 1.2.2.4</u> (Ünivalent fonksiyon): Kompleks düzlemin bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f\left(z\right)$ analitik fonksiyonu, kendi $f\left(D\right)$ resmi üzerine birebir oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir.

Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f\left(z_1\right)=f\left(z_2\right)$ olduğunda $z_1=z_2$ ya da $z_1\neq z_2$ olduğunda $f\left(z_1\right)\neq f\left(z_2\right)$ oluyorsa $f\left(z\right)$ fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir [2].

U bölgesinde analitik ve ünivalent olan (1.2.2.1) şekilli fonksiyonların sınıfı S olsun. Yani,

$$S=\left\{ f\in A:\ f-\text{ünivalent}\right\}$$

yazılır [3].

<u>Tanım 1.2.2.5</u> (Yıldızıl (Starlike) Bölge): Karmaşık düzlemde bir bölgenin belli bir w_0 noktasını keyfi noktasıyla birleştiren doğru parçası bu bölgeye ait ise bu bölgeye w_0 *noktasına göre yıldızıl (starlike) bölge* denir. Orijine göre yıldızıl bölgeye (kısaca) *yıldızıl bölge* denir [3].

<u>Tanım 1.2.2.6</u> (Yıldızıl fonksiyon): Karmaşık düzlemde tanımlı görüntü kümesi yıldızıl olan bir analitik ünivalent fonksiyona *yıldızıl fonksiyon* denir [3].

<u>Not</u>: Biz bu tez çalışmasında açık birim diskte yıldızıl fonksiyonlar sınıfını araştıracağız.

Teorem 1.2.2.1 (Yıldızıl fonksiyonların analitiklik karakterizasyonu): $f \in S$ fonksiyonunun U 'da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

sağlanmasıdır.

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir. Yani,

$$S^* = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0,\ z \in U \right\}$$

olarak tanımlanır [3].

Tanım 1.2.2.7 (α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı): $f \in S$ olsun. Eğer U kümesinde $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir ve α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Yani,

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha,\ \alpha \in [0,1),\ z \in U \right\}$$

olarak yazılır [4].

Tanım 1.2.2.8 (Konveks bölge): B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere B'deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B'ye *konveks bölge* denir [3].

Tanım 1.2.2.9 (Konveks fonksiyon): $f \in A$ olmak üzere $f(U)$ bölgesi bir konveks bölge ise, $f(z)$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir [3].

Teorem 1.2.2.2 (Konveks fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f \in S$ fonksiyonunun U'da konveks olması için gerekli ve yeterli şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

sağlanmasıdır.
Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir. Yani,

$$C=\left\{f \in S : \operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,\ z \in U\right\}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 1.2.2.10 (α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı): $f \in S$ olsun. Eğer U diskinde $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden konvekstir* denir ve α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir.

Yani,

$$C(\alpha)=\left\{ f\in S:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U\right\}$$

yazılır [23].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda teoremde verilmiştir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander teoremi): $f\in C \Leftrightarrow zf'\in S^*$ [2].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Materyaller

Bu bölümde biz, tez çalışmamızda kullanacağımız bazı ön bilgileri verdik.

Her $f \in S$ fonksiyonu için $D = \{w : |w| < r_0(f)\}$, $r_0(f) \geq 1/4$ diskinde tanımlanan ve

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots \text{ fonksiyonunun tersi}$$

$$f^{-1}(w) = w + A_2 w^2 + A_3 w^3 + A_4 w^4 + \cdots,\ w \in D, \tag{2.1.1}$$

olur. Burada $A_2 = -a_2,\ A_3 = 2a_2^2 - a_3,\ A_4 = -5a_2^3 + 5a_2 a_3 - a_4,$ şekilli açılıma sahip analitik ünivalent $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonu vardır ([5]).

Bilindiği üzere, (1.2.2.1) şekilli analitik fonksiyonların bazı ilk katsayılarının değerlendirilmesine geometrik fonksiyonlar teorisinde katsayı problemi denir.

Katsayı probleminin yanı sıra ters fonksiyonun katsayılarının değerlendirilmesi de literatürde önemli yer tutmaktadır ([6]).

Bununla beraber, $f \in S$ olmak üzere $\log\left(f(z)/z\right)$ fonksiyonunun katsayıları için kesin değerlendirmelerin bulunması çok büyük önem taşımaktadır ([6]).

Tez çalışmamızda biz analitik ve ünivalent fonksiyonların $\beta(\beta \geq 0)$ parametresinin değerlerine göre $\alpha(\alpha \geq 0)$ mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfının aşağıda tanımlanan bazı alt sınıflarını inceledik.

<u>Tanım 2.1.1.</u> (1.2.2.1) ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right\}>0,\ z\in U$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon sınıfına $S^*C(\beta),\beta\geq 0$ sınıfındandır denilir.

<u>Tanım 2.1.2.</u> (1.2.2.1) ile tanımlanan $f\in S$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right\}>\alpha,\ z\in U$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon sınıfına $S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ sınıfındandır denilir.

<u>Hatırlatma 2.1.1.</u> Tanım 2.1.1'de $\beta=0$ yazılırsa iyi bilinen $S^*(\alpha),\alpha\in[0,1)$ sınıfını elde ederiz.

<u>Hatırlatma 2.1.2.</u> Tanım 2.1.1'de $\beta=1$ yazılırsa iyi bilinen $C(\alpha),\alpha\in[0,1)$ sınıfını elde ederiz.

<u>Tanım 2.1.3.</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f\in S$ fonksiyonlarının

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>0,\ z\in U$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $S^*C(\beta,\tau),\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ sınıfı denilir.

Tanım 2.1.4. (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonlarının

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]\right\}>\alpha,\ z\in U$$

koşulunu sağlayan alt sınıfına $S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha\in[0,1),\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ sınıfı denilir.

Hatırlatma 2.1.3. Tanım 2.1.4'de $\beta=0$ yazılırsa

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right]\right\}>\alpha,\ z\in U$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların $S^*(\alpha,\tau),\alpha\in[0,1),\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ alt sınıfı elde edelir.

Hatırlatma 2.1.4. Tanım 2.1.4'de $\beta=1$ yazılırsa

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\right\}>\alpha,\ z\in U$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların $C(\alpha,\tau),\alpha\in[0,1),\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ alt sınıfı elde edilir.

2.2. Yöntemler

Bu alt bölümde biz tezde kullanacağımız bazı lemmaları vereceğiz.

Lemma 2.2.1 ([7]): P sınıfı U açık birim diskte analitik, $p(0)=1,\ \operatorname{Re}p(z)>0$ koşullarını sağlayan,

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots,\ z\in U. \tag{2.2.1}$$

şekilli seri açılımlı $p(z)$ foksiyonların ailesi olsun. Bu durumda, $p(z)$ fonksiyonunun katsayıları için $|p_n|\le 2,\ n=1,2,3,...$ eşitsizlikleri kesindir ve $|z|\le 1$ ve $|w|\le 1$ olmak üzere z ve w karmaşık parametrelerinin bazı değerleri için

$$2p_2=p_1^2+\left(4-p_1^2\right)z, \tag{2.2.2}$$

$$4p_3=p_1^3+2\left(4-p_1^2\right)p_1z-\left(4-p_1^2\right)p_1z^2+2\left(4-p_1^2\right)\left(1-|z|^2\right)w \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 2.2.2 ([8,9]): P sınıfı U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$ koşullarını sağlayan ve (2.2.1) şekilli $p(z)$ foksiyonların ailesi ise

$$\left|p_2-\frac{\mu}{2}p_1^2\right|\le 2\cdot\max\{1,|\mu-1|\}=2\begin{cases}1 & \text{eğer } \mu\in[0,2],\\ |\mu-1|, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dır.

Lemma 2.2.3 ([8,9]): P sınıfı U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$ koşullarını sağlayan, (2.2.1) şekilli $p(z)$ foksiyonların ailesi ve $0\le B\le 1$, $B(2B-1)\le D\le B$ olsun. Bu durumda,

$$\left|p_3-2Bp_1p_2+Dp_1^3\right|\le 2.$$

Lemma 2.2.4 ([8,9]): P sınıfı U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$ koşullarını sağlayan, (2.2.1) şekilli $p(z)$ foksiyonların ailesi olsun. Bu durumda,

$$\left|p_3-(1+\lambda)p_1p_2+\lambda p_1^3\right|\le 2\cdot\max\begin{cases}1 & \lambda\in[0,1],\\ |2\lambda-1|, & \text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Katsayı Problemi

3.1.1 $S^*C(\beta)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonlar İçin Katsayı Problemi

Tezimizin bu bölümünde , biz $S^*C(\beta), \beta \geq 0$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ilk üç katsayıları için kesin değerlendirmeler veririz.

Teorem 3.1.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta),\ \beta \geq 0$ altsınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq \frac{2}{1+\beta},\ |a_3| \leq \frac{3}{1+2\beta} \text{ ve } |a_4| \leq \frac{4}{1+3\beta}.$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in S^*C(\beta),\ \beta \geq 0$ olsun. O halde,

$$\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta z f'(z)+(1-\beta) f(z)} = p(z),\ z \in U, \tag{3.1.1.1}$$

burada $p \in \mathrm{P}$ Lemma 2.2.1'de tanımlanan fonksiyondur.

Aşağıdaki ifadeleri (3.1.1.1) eşitliğinde dikkate alır ve sadeleştirmeler yaparsak

$$zf'(z)+\beta z^2 f''(z) = z\left[1+\sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right]+\beta z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} =$$

$$z+\sum_{n=2}^{\infty} n\left[1+(n-1)\beta\right] a_n z^n,\ z \in U$$

$$\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)=\beta z\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}\right)+(1-\beta)\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right)$$

$$=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+(n-1)\beta\right]a_nz^n,\ z\in U$$

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots,\ z\in U$$

bir sonraki eşitliği elde ederiz

$$z+\sum_{n=2}^{\infty}n\big(1+(n-1)\beta\big)a_nz^n=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n\right)\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\big(1+(n-1)\beta\big)a_nz^n\right);$$

dolayısıyla,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\big(1+(n-1)\beta\big)a_nz^n=\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\big(1+(n-1)\beta\big)a_nz^n\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n\ . \tag{3.1.1.2}$$

(3.1.1.2) eşitliğiden z'nin kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek $f(z)$ fonksiyonunun $a_2,\ a_3$ ve a_4 katsayıları için aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$a_2=\frac{1}{1+\beta}p_1, \tag{3.1.1.3}$$

$$a_3=\frac{1}{2(1+2\beta)}p_2+\frac{1}{2(1+2\beta)}p_1^2, \tag{3.1.1.4}$$

$$a_4=\frac{1}{3(1+3\beta)}p_3+\frac{1}{2(1+3\beta)}p_1p_2+\frac{1}{6(1+3\beta)}p_1^3. \tag{3.1.1.5}$$

(3.1.1.3)'den

$$|a_2|=\frac{1}{1+\beta}|p_1|$$

ve de Lemma 2.2.1 gereğince

$$|a_2| \leq \frac{2}{1+\beta}$$

elde ederiz.

(3.1.1.4) eşitsizliğine üçgen eşitsizliğini uygular ve p_2 ve p_1^2 ’nin katsayılarının pozitif olduklarını da dikkate alırsak

$$|a_3| \leq \frac{1}{1+2\beta} + \frac{2}{1+2\beta}$$

elde ederiz. Buradan teoremin ikinci eşitsizliğinin doğruluğu çıkar.

$|a_3|$ ’ün değerlendirmesine benzer şekilde (3.1.1.5) ifadesinden $|a_4|$ ’ün değelendirmesi için buluruz

$$|a_4| \leq \frac{1}{3(1+3\beta)}|p_3| + \frac{1}{2(1+3\beta)}|p_1||p_2| + \frac{1}{6(1+3\beta)}|p_1^3|.$$

Buradan, Lemma 2.2.1 gereğince teoremde $|a_4|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu kolayca çıkar.

Teoremin ispatından da görüldüğü üzere, $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ alınırsa elde edilen eşitsizlikler eşitlik olarak gerekleşir.
Ayrıca, gösterebiliriz ki

$$\beta(1-z)z^2y'' + \left[1-\beta-(1+\beta)z\right]zy' - (1-\beta)(1+z)y = 0$$

lineer diferansiyel denklemin özel çözümü için teoremde elde edilen eşitsizlikler kesindir.

Bununla Teorem 3.1.1.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.1.1'den aşağıdaki sonuçları kolayca elde ederiz.

<u>Sonuç 3.1.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu S^* alt sınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_n| \le n,\; n = 2,3,4$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir. Ayrıca,

$$(1-z)zy' - (1+z)y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots +$$

fonksiyonu için eşitsizlikler eşitlik olarak sağlanır.

<u>Sonuç 3.1.1.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu C alt sınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_n| \le 1,\; n = 2,3,4 \ldots$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir .Ayrıca,

$$\left(1-z\right)y''-2y'=0$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$f\left(z\right)=\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+z^4+\cdots+,$$

fonksiyonu için eşitsizlikler eşitlik olarak sağlanır.

Not 3.1.1.1: Sonuç 3.1.1.2 ve 3.1.1.2’de elde edilen sonuçlar, sırasıyla, [10, Sonuç 2.2 ve 2.3], [11, Sonuç 2.4 ve 2.5] ve [12, Sonuç 2.2 v2 2.]’deki sonuçları doğular.

3.1.2 $S^*C\left(\alpha,\beta\right)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonlar İçin Katsayı Problemi

Bu bölümde, biz $S^*C\left(\alpha,\beta\right),\ \alpha\in\left[0,1\right),\ \beta\geq 0$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ilk üç katsayıları için kesin değerlendirmeler vereceğiz.

Teorem 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f\left(z\right)$ fonksiyonu $S^*C\left(\alpha,\beta\right),\ \alpha\in\left[0,1\right),\ \beta\geq 0$ alt sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için

$$\left|a_2\right|\leq\frac{2\left(1-\alpha\right)}{1+\beta},\ \ \left|a_3\right|\leq\frac{\left(1-\alpha\right)\left(3-2\alpha\right)}{1+2\beta}\ \text{ ve }\left|a_4\right|\leq\frac{2\left(1-\alpha\right)\left(2\alpha^2-7\alpha+6\right)}{3\left(1+3\beta\right)}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

İspat: Kabul edelim ki $f\in S^*C\left(\alpha,\beta\right),\ \alpha\in\left[0,1\right),\beta\geq 0$ olsun. O halde,

$$\frac{zf'\left(z\right)+\beta z^2f''\left(z\right)}{\beta zf'\left(z\right)+\left(1-\beta\right)f\left(z\right)}=\alpha+\left(1-\alpha\right)p\left(z\right),\ z\in U, \tag{3.1.2.1}$$

burada $p\in\mathrm{P}$ Lemma 2.2.1’de tanımlanan fonksiyondur.

Aşağıdaki ifadeleri (3.1.2.1) eşitliğinde dikkate alır ve sadeleştirmeler yaparsak

$$zf'(z)+\beta z^2 f''(z)=z\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^{n-1}\right]+\beta z^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n z^{n-2}=$$
$$z+\sum_{n=2}^{\infty}n\left[1+(n-1)\beta\right]a_n z^n,\ z\in U$$

$$\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)=\beta z\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^{n-1}\right)+(1-\beta)\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\right)=$$
$$z+\sum_{n=2}^{\infty}\left[1+(n-1)\beta\right]a_n z^n,\ z\in U$$

$$\alpha+(1-\alpha)p(z)=1+(1-\alpha)p_1 z+(1-\alpha)p_2 z^2+\cdots,\ z\in U$$

bir sonraki eşitliği elde ederiz

$$z+\sum_{n=2}^{\infty}n\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)p_n z^n\right)\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n\right);$$

dolayısıyla,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n=\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)p_n z^n. \qquad (3.1.2.2)$$

(3.1.2.2) eşitliğiden z'nin kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek $f(z)$ fonksiyonunun $a_2,\ a_3$ ve a_4 katsayıları için aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$a_2=\frac{1-\alpha}{1+\beta}p_1, \qquad (3.1.2.3)$$

$$a_3=\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)}p_2+\frac{(1-\alpha)^2}{2(1+2\beta)}p_1^2, \qquad (3.1.2.4)$$

$$a_4 = \frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)} p_3 + \frac{(1-\alpha)^2}{2(1+3\beta)} p_1 p_2 + \frac{(1-\alpha)^3}{6(1+3\beta)} p_1^3 . \qquad (3.1.2.5)$$

(3.1.2.3)’den

$$|a_2| = \frac{1-\alpha}{1+\beta} |p_1|$$

ve de Lemma 2.2.1 gereğince

$$|a_2| \le \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}$$

elde ederiz.

(3.1.2.4) eşitsizliğine üçgen eşitsizliğini uygular ve p_2 ve p_1^2 ’nin katsayılarının pozitif olduklarını da dikkate alırsak

$$|a_3| \le \frac{1-\alpha}{1+2\beta} + \frac{2(1-\alpha)^2}{1+2\beta}$$

elde ederiz. Buradan teoremin ikinci eşitsizliğinin doğruluğunu çıkarır.
$|a_3|$’ün değerlendirmesine benzer şekilde (3.1.2.5) ifadesinden $|a_4|$’ün değelendirmesi için buluruz

$$|a_4| \le \frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)} |p_3| + \frac{(1-\alpha)^2}{2(1+3\beta)} |p_1||p_2| + \frac{(1-\alpha)^3}{6(1+3\beta)} |p_1^3| .$$

Buradan, Lemma 2.2.1 gereğince teoremde $|a_4|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu kolayca çıkar.

Teoremin ispatından da görüldüğü üzere, $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ alınırsa elde edilen eşitsizlikler eşitlik olarak gerekleşir.

Ayrıca, gösterebiliriz ki

$$\beta(1-z)z^2y'' + \left\{\left[(2\alpha-1)\beta-1\right]z+1-\beta\right\}zy' - (1-\beta)\left[1+(1-2\alpha)z\right]y = 0$$

lineer diferansiyel denklemin özel çözümü için teoremde elde edilen eşitsizlikler kesindir.

Bununla Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.1.2.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta),\ \beta \geq 0$ alt sınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq \frac{2}{1+\beta},\ |a_3| \leq \frac{3}{1+2\beta} \text{ ve } |a_4| \leq \frac{4}{1+3\beta}.$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

<u>Not 3.1.2.1</u> Sonuç 3.1.2.1'de elde edilen sonuçlar Teorem 3.1.1.1'deki sonuçları doğular.

<u>Sonuç 3.1.2.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(\alpha),\ \alpha \in [0,1)$ alt sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq 2(1-\alpha),\ |a_3| \leq (1-\alpha)(3-2\alpha) \text{ ve } |a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)(2\alpha^2-7\alpha+6)}{3}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir. Burada elde edilen eşitsizlikler

$$(1-z)zy' - \left[1+(1-2\alpha)z\right]y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}=$$
$$z+2(1-\alpha)z^2+(1-\alpha)(3-2\alpha)z^3+\frac{2(1-\alpha)(3-2\alpha)(2-\alpha)}{3}z^4+\cdots+,$$

fonksiyonu için eşitlik olarak sağlanır.

Sonuç 3.1.2.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(\alpha),\ \alpha\in[0,1)$ alt sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2|\le 1-\alpha\,,\ |a_3|\le\frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{3}\ \text{ve}\ |a_4|\le\frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)(2-\alpha)}{6}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir. Burada elde edilen eşitsizlikler

$$(1-z)y''-2(1-\alpha)y'=0$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$f(z)=\frac{(1-z)^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}-\frac{1}{1-2\alpha}=$$
$$z+(1-\alpha)z^2+\frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{3}z^3+\frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)(2-\alpha)}{6}z^4+\cdots+,$$

fonksiyonu için eşitlik olarak sağlanır.

3.1.3 $S^*C(\beta,\tau)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonlar İçin Katsayı Problemi

Tezimizin bu bölümünde, biz $S^*C(\beta,\tau),\beta\ge 0,\tau\in\mathbb{C}^*$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ilk üç katsayıları için değerlendirmeler veririz.

Teorem 3.1.3.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta,\tau), \beta \geq 0$, $\tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun ilk üç katsaysı için

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|}{1+\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{(2|\tau|+1)|\tau|}{1+2\beta} \text{ ve } |a_4| \leq \frac{2(2|\tau|^2+3|\tau|+1)|\tau|}{3(1+3\beta)}$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $|a_2|$ için eşitsizlik kesindir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in S^*C(\beta,\tau), \beta \geq 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ olsun. O halde,

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right] = p(z),\ z \in U, \tag{3.1.3.1}$$

Burada $p \in \mathrm{P}$ Lemma 2.2.1'de tanımlanan fonksiyondur.
(3.1.3.1) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(1+(n-1)\beta)a_n z^n = \tau \cdot \left(z+\sum_{n=2}^{\infty}(1+(n-1)\beta)a_n z^n\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

eşitliğini elde ederiz.
Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}&(1+\beta)a_2z^2+2(1+2\beta)a_3z^3+3(1+3\beta)a_4z^4+\cdots=\\&\tau\left\{p_1z^2\left[(1+\beta)a_2p_1+p_2\right]z^3+\left[(1+2\beta)a_3p_1+(1+\beta)a_2p_2+p_3\right]z^4+\cdots\right\}.\end{aligned} \tag{3.1.3.2}$$

(3.1.3.2) eşitliğiden z'nin kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek $f(z)$ fonksiyonunun a_2, a_3 ve a_4 katsayıları için aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$a_2 = \frac{\tau}{1+\beta}p_1, \tag{3.1.3.3}$$

$$a_3=\frac{\tau}{2(1+2\beta)}p_2+\frac{\tau^2}{2(1+2\beta)}p_1^2, \qquad (3.1.3.4)$$

$$a_4=\frac{\tau}{3(1+3\beta)}p_3+\frac{\tau^2}{2(1+3\beta)}p_1p_2+\frac{\tau^3}{6(1+3\beta)}p_1^3. \qquad (3.1.3.5)$$

(3.1.3.3)'den

$$|a_2|=\frac{|\tau|}{1+\beta}|p_1|$$

ve de Lemma 2.2.1 gereğince

$$|a_2|\leq\frac{2|\tau|}{1+\beta}$$

elde ederiz.

(3.1.3.4) eşitsizliğine üçgen eşitsizliğini uygular ve p_2 ve p_1^2'nin katsayılarının pozitif olduklarnı da dikkate alırsak

$$|a_3|\leq\frac{|\tau|}{1+2\beta}+\frac{2|\tau|^2}{1+2\beta}$$

elde ederiz. Buradan teoremin ikinci eşitsizliğinin doğruluğu çıkar.

$|a_3|$'ün değerlendirmesine benzer şekilde (3.1.3.5) ifadesinden $|a_4|$'ün değelendirmesi için buluruz

$$|a_4|\leq\frac{|\tau|}{3(1+3\beta)}|p_3|+\frac{|\tau|^2}{2(1+3\beta)}|p_1||p_2|+\frac{|\tau|^3}{6(1+3\beta)}|p_1^3|.$$

Buradan, Lemma 2.2.1 gereğince teoremde $|a_4|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu kolayca çıkar.

$p_1 = 2$ seçilirse $|a_2|$ için elde edilen eşitsizliğin eşitlik olarak gerçekleştiği kolayca görülür.

Böylece, Teorem 3.1.3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.3.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.3.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta), \beta \geq 0$ alt sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq \frac{2}{1+\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{3}{1+2\beta} \text{ ve } |a_4| \leq \frac{4}{1+3\beta}$$

eşitsizlikler geçerlidir.

Not 3.1.3.1 Sonuç 3.1.3.1'de elde edilen eşitsizlikler Teorem 3.1.1.1'de elde edilen eşitsizliklerle çakışır.

3.1.4 $S^*C(\alpha, \beta, \tau)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonlar İçin Katsayı Problemi

Tezimizin bu bölümünde, biz $S^*C(\alpha, \beta, \tau), \alpha \in [0,1), \beta \geq 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ilk üç katsayıları için değerlendirmeler vereceğiz.

Teorem 3.1.4.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\alpha, \beta, \tau), \alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\alpha)\left[2(1-\alpha)|\tau|+1\right]|\tau|}{1+2\beta}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{2(1-\alpha)\left[2(1-\alpha)^2|\tau|^2+3(1-\alpha)|\tau|+1\right]|\tau|}{3(1+3\beta)}$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $|a_2|$ için elde edilen eşitsizlik kesindir.

<u>İspat:</u> Kabul edelim ki $f \in S^*C(\alpha,\beta,\tau), \alpha \in [0,1), \beta \ge 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ olsun. O halde,

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}-1\right]=\alpha+(1-\alpha)p(z),\ z\in U, \tag{3.1.4.1}$$

burada $p \in \mathrm{P}$ Lemma 2.2.1'de tanımlanan fonksiyondur.

(3.1.4.1) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n=\tau\cdot\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}\big(1+(n-1)\beta\big)a_n z^n\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)p_n z^n$$

eşitliğini elde ederiz.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}&(1+\beta)a_2z^2+2(1+2\beta)a_3z^3+3(1+3\beta)a_4z^4+\cdots=\\&\tau(1-\alpha)\left\{p_1z^2\left[(1+\beta)a_2p_1+p_2\right]z^3+\left[(1+2\beta)a_3p_1+(1+\beta)a_2p_2+p_3\right]z^4+\cdots\right\}.\end{aligned} \tag{3.1.4.2}$$

(3.1.4.2) eşitliğiden z'nin kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek $f(z)$ fonksiyonunun a_2, a_3 ve a_4 katsayıları için aşağıdaki ifadeleri buluruz

$$a_2=\frac{(1-\alpha)\tau}{1+\beta}p_1, \tag{3.1.4.3}$$

$$a_3 = \frac{(1-\alpha)\tau}{2(1+2\beta)} p_2 + \frac{(1-\alpha)^2 \tau^2}{2(1+2\beta)} p_1^2, \tag{3.1.4.4}$$

$$a_4 = \frac{(1-\alpha)\tau}{3(1+3\beta)} p_3 + \frac{(1-\alpha)^2 \tau^2}{2(1+3\beta)} p_1 p_2 + \frac{(1-\alpha)^3 \tau^3}{6(1+3\beta)} p_1^3. \tag{3.1.4.5}$$

(3.1.4.3)'den

$$|a_2| = \frac{(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta} |p_1|$$

ve de Lemma 2.2.1 gereğince

$$|a_2| \le \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta}$$

elde ederiz.

(3.1.4.4) eşitsizliğine üçgen eşitsizliğini uygular ve p_2 ve p_1^2'nin katsayılarının pozitif olduklarını da dikkate alırsak

$$|a_3| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{1+2\beta} + \frac{2(1-\alpha)^2|\tau|^2}{1+2\beta}$$

elde ederiz. Buradan teoremin ikinci eşitsizliğinin doğruluğu çıkar.

$|a_3|$'ün değerlendirmesine benzer şekilde (3.1.4.5) ifadesinden $|a_4|$'ün değelendirmesi için buluruz

$$|a_4| \le \frac{(1-\alpha)|\tau|}{3(1+3\beta)} |p_3| + \frac{(1-\alpha)^2|\tau|^2}{2(1+3\beta)} |p_1||p_2| + \frac{(1-\alpha)^3|\tau|^3}{6(1+3\beta)} |p_1^3|.$$

Buradan, Lemma 2.2.1 gereğince teoremde $|a_4|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu kolayca çıkar.

Ayrıca, $p_1 = 2$ seçilirse $|a_2|$ için elde edilen eşitsizliğin eşitlik olarak gerçekleşir.

Bununla, Teorem 3.1.4.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.4.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.4.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\alpha,\beta), \alpha \in [0,1)$, $\beta \geq 0$ alt sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun ilk üç katsayısı için

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{1+2\beta} \text{ ve } |a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)(2\alpha^2-7\alpha+6)}{3(1+3\beta)}$$

eşitsizlikler geçerlidir.

Not 3.1.4.1: Sonuç 3.1.4.1'de elde edilen eşitsizlikler Teorem 3.1.2.1'de elde edilen eşitsizliğin aynısıdır.

3.2. Ters Fonksiyon İçin Katsayı Problemi

3.2.1 $S^*C(\beta)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonların Tersi İçin Katsayı Problemi

Tezin bu bölümünde biz $S^*C(\beta), \beta \geq 0$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ters fonksiyonu için katsayı problemini inceleyecek ve ters fonksiyonun ilk üç katsayısı için kesin eşitsizlikler vereceğiz.

Teorem 3.2.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta)$, $\beta \in [0,1]$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \leq \frac{2}{1+\beta}, \quad |A_3| \leq \frac{-3\beta^2+10\beta+5}{(1+2\beta)(1+\beta)^2}$$

ve

$$|A_4| \leq \frac{2}{3(1+3\beta)}\left\{1-\frac{6\left(-\beta^2+6\beta+2\right)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4\left(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8\right)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right\}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

İspat: $f \in S^*C(\beta),\ \beta \in [0,1]$ olsun. Bu durumda, $S^*C(\beta) \subset S$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(w)$ vardır ve $D = \{w : |w| < r_0(f)\},\ r_0(f) \geq 1/4$ diskinde (2.1.1) formülü ile tanımlanır.

O halde, (3.1.1.3) ve (2.1.1) formülleri gereğince A_2 için yazarız

$$A_2 = -\frac{p_1}{1+\beta}.$$

Buradan ve Lemma 2.2.1'den $|A_2|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu çıkar.

(2.1.1), (3.1.1.3) ve (3.1.1.4) formüllerinden A_3 için yazarız

$$A_3 = \frac{2p_1^2}{(1+\beta)^2} - \frac{p_2}{2(1+2\beta)} - \frac{p_1^2}{2(1+2\beta)} = \left[\frac{2}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{2(1+2\beta)}\right]p_1^2 - \frac{p_2}{2(1+2\beta)} =$$
$$\frac{\left[12-(\beta-3)^2\right]p_1^2}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)} - \frac{p_2}{2(1+2\beta)}.$$

Buradan, A_3 için $\mu = 2\left(12-(3-\beta)^2\right)/(1+\beta)^2$ olmak üzere

$$A_3 = \frac{-1}{2(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{\mu}{2}p_1^2\right)$$

yazılır.

Sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2'nin basit uygulaması bize $|A_3|$ için istenen eşitsizlikleri verir.

(2.1.1), (3.1.1.3)-(3.1.1.5) formüllerinden A_4 için aşağıdaki eşitliği yazarız

$$A_4 = -\frac{1}{3(1+3\beta)}p_3 + \frac{-\beta^2+6\beta+2}{(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1p_2 - \frac{\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8}{3(1+\beta)^3(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1^3.$$

Buradan, $\lambda = 3\left(-\beta^2+6\beta+2\right)/(1+\beta)(1+2\beta)-1$ ve

$$D = \frac{\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}$$

olmak üzere A_4 için aşağıdaki ifadeyi yazarız

$$A_4 = -\frac{1}{3(1+3\beta)}\left\{p_3-(1+\lambda)\,p_1p_2+\lambda p_1^3+(D-\lambda)\,p_1^3\right\}.$$

$\lambda \geq 1$ olduğundan sonuncu eşitliğe önce üçgen eşitsizliğini ve sonra Lemma 2.2.4'ü uygularsak $|A_4|$ için istenen eşitsizlik elde edilir.

Şimdi elde edilen eşitsizliklerin kesin olduğunu görelim.

A_2'nin ifadesinden görüldüğü üzere, $p_1 = 2$ seçilirse $|A_2|$ için elde edilen eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

A_3'nin ifadesinde $p_1 = p_2 = 2$ alınırsa $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

$p_1 = p_2 = p_3 = 2$ alınırsa $|A_4|$ için elde edilen eşitsizliğin eşitlik olarak gerçekleştiği A_4'ün ifadesinden kolayca görülür.

Bununla, Teorem 3.2.1.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.1.1'en aşağıdaki sonuçları kolaylıkla elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu S^* alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \leq 2, \ |A_3| \leq 5 \text{ ve } |A_4| \leq 18$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

Sonuç 3.2.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu C alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_n| \leq 1, \ n = 2,3 \text{ ve } |A_4| \leq \frac{67}{36}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

3.2.2 $S^*C(\alpha,\beta)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonların Tersi İçin Katsayı Problemi

Tezin bu bölümünde biz $S^*C(\alpha,\beta), \alpha \in [0,1), \beta \geq 0$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için kesin eşitsizlikler vereceğiz.

Teorem 3.2.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\alpha,\beta), \ \alpha \in [0,1), \ \beta \in [0,1]$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}, \ |A_3| \leq \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{1+2\beta}, & \alpha \in [0,\alpha_0], \\ \dfrac{(1-\alpha)\left[2(1-\alpha)\left(12-(3-\beta)^2\right)-(1+\beta)^2\right]}{(1+2\beta)(1+\beta)^2}, & \alpha \in [\alpha_0,1), \end{cases}$$

burada $\alpha_0 = 2\left(1+2\beta-\beta^2\right)/\left(3+6\beta-\beta^2\right)$.

Ayrıca,

$$|A_4| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+3\beta)} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{6(-\beta^2+6\beta+2)(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)} + \\ \dfrac{4(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)} \end{array} \right\}, & \alpha \in [0,\alpha_1], \\ \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+3\beta)}, & \alpha \in [\alpha_1, 1), \end{cases}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir. Burada $\alpha_1 = \left(4+12\beta-7\beta^2\right)/3\left(2+6\beta-\beta^2\right)$.

<u>İspat:</u> $f \in S^*C(\alpha,\beta),\ \alpha \in [0,1), \beta \in [0,1]$ olsun. Bu durumda, $S^*C(\alpha,\beta) \subset S$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(w)$ vardır ve $D = \{w : |w| < r_0(f)\},\ r_0(f) \ge 1/4$ diskinde (2.1.1) formülü ile tanımlanır.

O halde, Teorem 3.1.2.1 ve (2.1.1) formülü gereğince A_2 için yazarız

$$A_2 = -\frac{1-\alpha}{1+\beta} p_1.$$

Buradan, $|A_2|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu çıkar.

(2.1.1), (3.1.1.3) ve (3.1.1.4) formüllerinden A_3 için

$$A_3 = -\frac{1-\alpha}{2(1+2\beta)} \left[p_2 - \frac{(-\beta^2+6\beta+3)(1-\alpha)}{(1+\beta)^2} p_1^2 \right],$$

dolayısıyla $\mu = 2\left(12-(3-\beta)^2\right)(1-\alpha)/(1+\beta)^2$ olmak üzere yazarız.

$$A_3 = \frac{\alpha-1}{2(1+2\beta)} \left(p_2 - \frac{\mu}{2} p_1^2 \right).$$

Her $\beta \in [0,1]$ için $\alpha \in [0,\alpha_0]$ durumunda $\mu \in [0,2]$ ve $\alpha \in [\alpha_0,1)$ durumunda ise $2 \le \mu$ olduğundan sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2 uygulanırsa $|A_3|$ için gerekli eşitsizlik elde edilir. Burada, $\alpha_0 = 2(1+2\beta-\beta^2)/(3+6\beta-\beta^2)$.

Şimdi, (2.1.1), (3.1.1.3)-(3.1.1.5) formüllerinden A_4 için yazarız

$$A_4 = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4 =$$
$$-\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}p_3 + \frac{(1-\alpha)^2(-\beta^2+6\beta+2)}{(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1p_2 - \frac{(1-\alpha)^3(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)}{3(1+\beta)^3(1+2\beta)(1+3\beta)}p_1^3.$$

Buradan,

$$B = \frac{3(-\beta^2+6\beta+2)(1-\alpha)}{2(1+\beta)(1+2\beta)} \text{ ve } D = \frac{(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}$$

olmak üzere A_4 için aşağıdaki ifadeyi yazarız

$$A_4 = -\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}\left\{p_3 - 2Bp_1p_2 + Dp_1^3\right\}.$$

Her $\alpha \in [\alpha_1,1)$ ve $\beta \in [0,1]$ için $0 \le B \le 1$ ve $B(2B-1) \le D \le B$ eşitsizliklerinin sağlandığı basit hesaplamalarla kolayca gösterilebilir. Burada, $\alpha_1 = (-7\beta^2+12\beta+4)/3(-\beta^2+6\beta+2)$. O halde, A_4 için bulduğumuz sonuncu eşitsizliğe Lemma 2.2.3'ün uygulaması bize $|A_4|$ için ikinci eşitsizliği verir.

Ayrıca, $\lambda = 3(-\beta^2+6\beta+2)(1-\alpha)/(1+\beta)(1+2\beta)-1$ olmak üzere A_4'ün ifadesini aşağıdaki şekilde yeniden yazarız

$$A_4 = -\frac{1-\alpha}{3(1+3\beta)}\left\{p_3 - (1+\lambda)p_1p_2 + \lambda p_1^3 + (D-\lambda)p_1^3\right\}.$$

Her $\alpha \in [0, \alpha_1]$ değeri için ve her $\beta \in [0,1]$ için $\lambda \geq 1$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda, A_4 için bulduğumuz sonuncu ifadeye Lemma 2.2.4'ü uygularsak $|A_4|$ için birinci eşitsizliği elde ederiz.

Şimdi elde edilen eşitsizliklerin kesin olduğunu gösterelim.

Doğrudan da A_2'nin ifadesinden görüldüğü üzere $p_1 = 2$ alınırsa $|A_2|$ için bulduğumuz eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

Ayrıca, $p_1 = 0 = p_2 - 2$ durumunda $|A_3|$ için bulunan birinci eşitsizliğin ve $p_1 = p_2 = 2$ durumunda da ikinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

Son olarak, $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ seçilirse $|A_4|$ için elde ettiğimiz birinci eşitsizlik ve $p_1 = 0 = p_3 - 2$ seçilirse ikinci eşitsizlik eşitlik olarak gerçekleşir.

Böylece, Teorem 3.2.2.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2.1'den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.2.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta),\ \beta \in [0,1]$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \leq \frac{2}{1+\beta},\quad |A_3| \leq \frac{-3\beta^2 + 10\beta + 5}{(1+2\beta)(1+\beta)^2}$$

ve

$$|A_4| \leq \frac{2}{3(1+3\beta)}\left\{1 - \frac{6(-\beta^2 + 6\beta + 2)}{(1+\beta)(1+2\beta)} + \frac{4(\beta^4 - 19\beta^3 + 42\beta^2 + 40\beta + 8)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right\}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

Not 3.2.2.1: Sonuç 3.2.2.1'de elde edilen sonuç Teorem 3.2.1.1'de elde edilen sonucu doğrular.

Sonuç 3.2.2.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(\alpha),\ \alpha\in[0,1)$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2|\le 2(1-\alpha),\ \ |A_3|\le\begin{cases}(1-\alpha)(5-6\alpha), & \alpha\in\left[0,\frac{2}{3}\right],\\ 1-\alpha, & \alpha\in\left[\frac{2}{3},1\right).\end{cases}$$

Ayrıca,

$$|A_4|\le\begin{cases}\dfrac{2(1-\alpha)\left[1+2(1-\alpha)(13-16\alpha)\right]}{3}, & \alpha\in\left[0,\frac{2}{3}\right],\\ \dfrac{2(1-\alpha)}{3}, & \alpha\in\left[\frac{2}{3},1\right)\end{cases}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

Sonuç 3.2.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(\alpha),\ \alpha\in[0,1)$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2|\le 1-\alpha,\ \ |A_3|\le\begin{cases}\dfrac{(1-\alpha)(3-4\alpha)}{3}, & \alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \dfrac{1-\alpha}{3}, & \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Ayrıca,

$$|A_4|\le\begin{cases}\dfrac{(1-\alpha)\left[6+(61-82\alpha)(1-\alpha)\right]}{36}, & \alpha\in\left[0,\frac{3}{7}\right],\\ \dfrac{1-\alpha}{6}, & \alpha\in\left[\frac{3}{7},1\right)\end{cases}$$

kesin eşitsizlikler geçerlidir.

3.2.3 $S^{*}C\left(\beta,\tau\right)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonların Tersi İçin Katsayı Problemi

Tezin bu bölümünde biz $S^{*}C\left(\beta,\tau\right),\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^{*}$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ters fonksiyonu için katsayı problemini inceleyecek ve ters fonksiyonun ilk üç katsayısı için değerlendirmeler vereceğiz.

Teorem 3.2.3.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f\left(z\right)$ fonksiyonu $S^{*}C\left(\beta,\tau\right),\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^{*}$ alt sınıfından ve $f^{-1}\left(w\right)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}\left(w\right)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$\left|A_2\right|\leq\frac{2\left|\tau\right|}{1+\beta},\quad \left|A_3\right|\leq\frac{\left|2\left(-\beta^2+6\beta+3\right)\tau-\left(1+\beta\right)^2\right|\left|\tau\right|}{\left(1+\beta\right)^2\left(1+2\beta\right)}$$

ve

$$\left|A_4\right|\leq\frac{2\left|\tau\right|}{3\left(1+3\beta\right)}\left[1+\frac{6\left(-\beta^2+6\beta+2\right)}{\left(1+\beta\right)\left(1+2\beta\right)}\left|\tau\right|+\frac{4\left(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8\right)}{\left(1+\beta\right)^3\left(1+2\beta\right)}\left|\tau\right|^2\right]$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $\left|A_2\right|$ ve $\left|A_3\right|$ için elde edilen eşisizlikler kesindir.

İspat: $f\in S^{*}C\left(\beta,\tau\right),\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^{*}$ olsun. Bu durumda, $S^{*}C\left(\beta,\tau\right)\subset S$ olduğundan $f\left(z\right)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}\left(w\right)$ vardır ve $D=\left\{w:\left|w\right|<r_0\left(f\right)\right\},\ r_0\left(f\right)\geq 1/4$ diskinde (2.1.1) formülü ile tanımlanır.

O halde, (3.1.3.3) ve (2.1.1) formülleri gereğince A_2 için yazarız

$$A_2=-\frac{\tau p_1}{1+\beta}.$$

Buradan ve Lemma 2.2.1'den $\left|A_2\right|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu çıkar.

(2.1.1), (3.1.3.3) ve (3.1.3.4) formüllerinden A_3 için yazarız

$$A_3 = \frac{-\tau}{2(1+2\beta)}\left[p_2 - \frac{(-\beta^2+6\beta+3)\tau}{(1+\beta)^2} p_1^2 \right].$$

Buradan, $\mu = 2\left(12-(3-\beta)^2\right)\tau/(1+\beta)^2$ olmak üzere A_3 ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$A_3 = \frac{-\tau}{2(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{\mu}{2} p_1^2 \right).$$

Sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2'yi uygularsak $|A_3|$ için

$$|A_3| \le \frac{\left|2\left(12-(3-\beta)^2\right)\tau-(1+\beta)^2\right||\tau|}{(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bununla, $|A_3|$ için istenen eşitsizlik ispatlandı.

Şimdi (2.1.1), (3.1.3.3)-(3.1.3.5) formüllerinden A_4 için aşağıdaki eşitliği yazarız

$$A_4 = -\frac{\tau}{3(1+3\beta)}\left[p_3 - \frac{3(-\beta^2+6\beta+2)\tau}{(1+\beta)(1+2\beta)} p_1 p_2 + \frac{(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)\tau^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)} p_1^3 \right].$$

Sonuncu eşitsizlikte önce üçgen eşitsizliğini ve sonra Lemma 2.2.1'i uygularsak $|A_4|$ için istenen eşitsizliği buluruz

$$|A_4| \le \frac{2|\tau|}{3(1+3\beta)}\left[1 + \frac{6(-\beta^2+6\beta+2)}{(1+\beta)(1+2\beta)}|\tau| + \frac{4(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}|\tau|^2 \right].$$

Ayrıca, $p_1 = p_2 = 2$ seçilirse $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikler eşitlik olarak gerçekleşir.

Bununla, Teorem 3.2.3.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.3.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.3.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta), \beta \in [0,1]$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \le \frac{2}{1+\beta}, \quad |A_3| \le \frac{-3\beta^2+10\beta+5}{(1+2\beta)(1+\beta)^2}$$

ve

$$|A_4| \le \frac{2}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{6(-\beta^2+6\beta+2)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right]$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşisizlikler kesindir.

Not 3.2.3.1: Sonuç 3.2.3.1'de $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikler Teorem 3.2.1.1'de $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikleri doğrular.

3.2.4 $S^*C(\alpha,\beta,\tau)$ Alt Sınıfına Ait Fonksiyonların Tersi İçin Katsayı Problemi

Tezin bu bölümünde biz $S^*C(\alpha,\beta,\tau), \alpha \in [0,1), \beta \ge 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfına ait olan fonksiyonların ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için değerlendirmeler vereceğiz.

Teorem 3.2.4.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\alpha,\beta,\tau), \alpha \in [0,1), \ \beta \ge 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \le \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{1+\beta}, \quad |A_3| \le \frac{\left|2(-\beta^2+6\beta+3)(1-\alpha)\tau-(1+\beta)^2\right|(1-\alpha)|\tau|}{(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

ve

$$|A_4| \le \frac{2(1-\alpha)|\tau|}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{6\left(-\beta^2+6\beta+2\right)(1-\alpha)|\tau|}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{4\left(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8\right)(1-\alpha)^2|\tau|^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\right]$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşisizlikler kesindir.

<u>İspat:</u> $f \in S^*C(\alpha,\beta,\tau), \alpha \in [0,1), \beta \ge 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda, $S^*C(\beta,\tau) \subset S$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(w)$ vardır ve $D = \{w : |w| < r_0(f)\}$, $r_0(f) \ge 1/4$ diskinde (2.1.1) formülü ile tanımlanır.

O halde, (3.1.4.3) ve (2.1.1) formülleri gereğince A_2 için yazarız

$$A_2 = -\frac{(1-\alpha)\tau}{1+\beta}\, p_1.$$

Buradan ve Lemma 2.2.1'den $|A_2|$ için istenen eşitsizliğin doğruluğu çıkar.

(2.1.1), (3.1.4.3) ve (3.1.4.4) formüllerinden A_3 için yazarız

$$A_3 = \frac{\left(-\beta^2+6\beta+3\right)(1-\alpha)^2\tau^2}{2(1+\beta)^2(1+2\beta)}\, p_1^2 - \frac{(1-\alpha)\tau}{2(1+2\beta)}\, p_2.$$

Buradan, $\mu = 2\left(12-(3-\beta)^2\right)(1-\alpha)\tau/(1+\beta)^2$ olmak üzere

$$A_3 = -\frac{(1-\alpha)\tau}{2(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{\mu}{2}p_1^2\right)$$

yazarız.

Sonuncu eşitliğe Lemma 2.2.2'yi uygularsak $|A_3|$ için

$$|A_3| \le \frac{\left|2\left(12-(3-\beta)^2\right)(1-\alpha)\tau-(1+\beta)^2\right|(1-\alpha)|\tau|}{(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bununla, $|A_3|$ için istenen eşitsizlik ispatlandı.

Şimdi (2.1.1), (3.1.4.3)-(3.1.4.5) formüllerinden A_4 için aşağıdaki eşitliği yazarız

$$A_4 = -\frac{(1-\alpha)\tau}{3(1+3\beta)}\left[\begin{array}{l} p_3 - \dfrac{3\left(-\beta^2+6\beta+2\right)(1-\alpha)\tau}{(1+\beta)(1+2\beta)}\, p_1p_2 + \\ \dfrac{\left(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8\right)(1-\alpha)^2\tau^2}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}\, p_1^3 \end{array}\right].$$

Sonuncu eşitsizlikte önce üçgen eşitsizliğini ve sonra Lemma 2.2.1'i uygularsak $|A_4|$ için istenen eşitsizliği buluruz.

Ayrıca, $p_1 = p_2 = 2$ seçilirse $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikler eşitlik olarak gerçekleştiği açıktır.

Bununla, Teorem 3.2.4.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.4.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.4.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(\beta,\tau), \beta \ge 0, \tau \in \mathbb{C}^*$ alt sınıfından ve $f^{-1}(w)$ bu fonksiyonun ters fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f^{-1}(w)$ ters fonksiyonunun ilk üç katsayısı için

$$|A_2| \le \frac{2|\tau|}{1+\beta}, \quad |A_3| \le \frac{\left|2\left(-\beta^2+6\beta+3\right)\tau-(1+\beta)^2\right||\tau|}{(1+\beta)^2(1+2\beta)}$$

ve

$$|A_4| \le \frac{2|\tau|}{3(1+3\beta)}\left[1+\frac{6\left(-\beta^2+6\beta+2\right)}{(1+\beta)(1+2\beta)}|\tau|+\frac{4\left(\beta^4-19\beta^3+42\beta^2+40\beta+8\right)}{(1+\beta)^3(1+2\beta)}|\tau|^2\right]$$

eşitsizlikler geçerlidir. Burada, $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikler kesindir.

Not 3.2.4.1: Sonuç 3.2.4.1'de $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizlikler Teorem 3.2.4.1'de $|A_2|$ ve $|A_3|$ için elde edilen eşitsizliklerin aynısıdır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu yüksek lisans tezinde analitik ve ünivalent fonksiyonların $S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ ve $S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha,\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ gibi belli bir alt sınıfları tanıtıldı. Bu sınıflar için katsayı problemi incelendi ve bu sınıflara ait olan fonksiyonların ilk üç katsayıları ($S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ sınıfı) için kesin değerlendirmeler elde edildi.

Tezde $f\in S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ (ve $f\in S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha,\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$) için f^{-1} ters fonksiyonunun katsayı problemi incelendi. Ters fonksiyonların ilk üç katsayıları için kesin değerlendirmeler elde edildi.

Sonraki çalışmalarımızda, tarafımızdan tezde katsayılar için elde edilen sonuçlar kullanılarak ve de tezdeki aynı yol izlenerek $S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ ve $S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha,\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ sınıfları için Fekete-Szegö problemi ($\mu\in\mathbb{C}$ (yada $\mu\in\mathbb{R}$) olmak üzere $a_3-\mu a_2^2$ fonksiyonelinin üst sınır değerlendirmesi) ve bu sınıflar için ikinci Hankel ($a_2a_4-a_3^2$) determinantının üst sınır değerlendirmesi yapılacaktır.

Ayrıca, $f\in S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ (ve $f\in S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha,\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$) fonksiyonunun f^{-1} ters fonksiyonu için aynı problemlerin incelenmesi düşünülüyor. Dahası, sonraki çalışmalarımızda $f\in S^*C(\alpha,\beta),\alpha,\beta\geq 0$ (ve $f\in S^*C(\alpha,\beta,\tau),\alpha,\beta\geq 0,\tau\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$) fonksiyonu için $\log\left(f(z)/z\right)=g(z)$ fonksiyonunun katsayı probleminin ve $g(z)$ fonksiyonu için Fekete-Szegö benzeri problemin ($\mu\in\mathbb{C}$ (yada $\mu\in\mathbb{R}$) olmak üzere $\delta_1\delta_3-\mu\delta_2^2$ fonksiyonelinin üst sınır değerlendirmesi) de incelenmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhâuser. Boston.

[2] Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

[3] Goodman, A.W. (1983). Univalent Function-1,2. Mariner Publishing Company Tapma, Florida 311 p.

[4] Lahenkani, J. (1985). Coefficients of power of some subclasses of univalent functions and convolutions of some classes of polynomials and analytic functions. Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

[5] Frasin, B. A. (2011). New subclasses of bi-univalent functions. Appl. Math. Lett. 24: 1569-573.

[6] Thomas, D. K. (2018). On the coefficients of gamma-starlike functions. Korean Mat. Soc. 55(1), 175-184.

[7] Pommerenke, C. H. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruperch, Gottingen.

[8] Ali, R. M. (2003). Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bull. Malays. Math. Soc. 26(2), no. 1, 63-71.

[9] Libera, R. J. and Zotkiewicz, E. J. (1982). Early coefficients of the inverse of a regular convex function. Proc. Amer. Math. Soc. 85(2), 225-230.

[10] Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 133-136.

[11] Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2018). Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 149-156.

[12] Mustafa, N., Mustafa, A. (2018). On the Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 333-341.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tarkan ÖZTÜRK

Doğum Yeri ve Tarihi : ORHANGAZİ / 03.08.1993

Yabancı Dili :İngilizce

İletişim (e-posta) :tarkanztrk796@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise :Orhangazi Çok Programlı Lisesi

Lisans : Erzurum Atatürk Üniversitesi

Yüksek Lisans :Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Ana Bilim Dalı/ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :MEB(2015-)

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 133-136.
2. Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). The sharp inequalities for some initial coefficients of certain subclasses of analytic functions. Acta Mathematica Universitatis Comanianae (sunuldu).

Diğer konular