T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMALİZE EDİLMİŞ WRIGHT FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

Merve YARCAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMALİZE EDİLMİŞ WRIGHT FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

Merve YARCAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

OCAK-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve YARCAN'ın Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Özellikleri " adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy **Birliği** ile kabul edilmiştir.

. . / . . / 20..

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ	
Üye	: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve YARCAN
17.01.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri

Merve YARCAN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında Wright fonksiyonundan türetilen, üçü yeni olmak üzere beş çeşit özel fonksiyon tanıtıldı ve bu fonksiyonların ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği incelendi. Bu tez çalışmasında bu fonksiyonların ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği için kriterler verildi. Bu çalışmada, türetilen fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemler bulundu. Ayrıca, tezde türetilen fonksiyonları içeren bazı integral operatörlerin analitikliği, ünivelentliği, yıldızıllığı ve konveksliği incelendi. Dahası, bu tür integral operatörlerin ünivelentliği, yıldızıllığı ve konveksliği için kriterler verildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, Wright fonksiyonu, normalize edilmiş Wright fonksiyonu, integral operatör.

2019, 81 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Some Properties of Normalized Wright Functions

Merve YARCAN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis study, five new types special functions which are derived from Wright functions are introduced such that three of these are novel; and univalency, starlikeness and convexity of these functions are investigated. In this thesis work, criterions for these functions to be univalent, starlike and convexity are given. In the study, differential equations that these derived functions satisfy are obtained. Furthermore, analyticity, univalency, starlikeness and convexity of some integral operators involving these derived functions are investigated. Moreover, criterions for these integral operators to be univalent, starlike or convex are given.

Key Words: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, Wright function, normalized Wright function, integral operator.

2019, 81 pages

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bana bilgi ve deneyimlerinden yararlanma fırsatı tanıyarak rehberlik eden, umut ve güç veren, her türlü yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı sevgili aileme teşekkür ederim.

Merve YARCAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_2$	$\mathbb{N}-\{1\}$
U	Açık birim disk
$f(U)$	Açık birim diskin f fonksiyonu altında görüntüsü
$[a,b]$	Başlangıç noktası a, bitiş noktası b olan kapalı aralık
A	Açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}, n=2,3,...$ şekilli fonksiyonların sınıfı
T	Açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n \geq 0, n=2,3,...$ şekilli fonksiyonların sınıfı
S	A'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
S^*	Açık birim diskte yıldızıl (starlike) fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	Açık birim diskte α mertebeden yıldızıl (starlike) fonksiyonların sınıfı
$TS^*(\alpha)$	$T \cap S^*(\alpha)$
$TC(\alpha)$	$T \cap C(\alpha)$
$T(\alpha,\beta)$	$\left\{ f \in T : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta z f'(z)+(1-\beta)f(z)} \right) > \alpha, z \in U \right\}$
$W_{\lambda,\mu}(z)$	Wright fonksiyonu

$J_{\mu}(z)$	Birinci çeşit Bessel fonksiyonu
$g_{\mu}(z)$	Normalize edilmiş Bessel fonksiyonu
$E_{p}(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{p,\mu}(z)$	Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)$	Normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)$	Birinci çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)$	İkinci çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$	Üçüncü çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$	Dördüncü çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu
$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$	Beşinci çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu
$(x)_{\mu}$	$(x)_{\mu} = \dfrac{\Gamma(\mu+x)}{\Gamma(x)}$ - Pochammer (veya Appell) sembolünün Euler Gamma fonksiyonu yardımıyla ifadesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Bilindiği üzere, analitik fonksiyonların bazı alt sınıflarının geometrik özellikleri, katsayıları için üst sınır değerlendirmeleri, Fekete-Szegö fonksiyonelinin ve Hankel determinantının üst sınır değerlendirmesi geometrik fonksiyonlar teorisinin temel konularıdır.

Karmaşık düzlemde bir bölgenin analitik fonksiyon altında görüntüsünün nasıl bir küme olması geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli tartışma konusudur.

Ayrıca, karmaşık fonksiyonlar teorisinden bilinen Riemann teoremi gereğince kompleks düzlemin basit bağlantılı bir bölgesini birim diske konform dönüştüren bir fonksiyon vardır. Bu sebepten karmaşık düzlemde bir bölgenin analitik fonksiyon altında görüntüsünün nasıl bir küme olmasını incelemek yerine birim diskin analitik fonksiyon altında görüntüsünün nasıl bir küme olması incelenir.

Bu yüzden geometrik fonksiyonlar teorisinde yapılan çalışmalar birim diskte yapılmaktadır.

Birim diskin analitik fonksiyonlar altında görüntülerinin nasıl bir bölge olmasına göre fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılırlar. Görüntü bölgelerinin geometrik özelliklerine göre bu sınıflardan en çok incelenleri ünivalent, yıldızıl, konveks ve bu sınıfların bazı alt sınıflarıdır.

Özellikle ters sınır değer problemlerinin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan konvekslik ve yıldızıllık ölçütü bu alanda araştırmacıların dikkatini çekmektedir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinin temel konularından biri de özel fonksiyonlardır. Bilinen özel fonksiyonların yukarıda bahsi geçen analitik fonksiyonlar sınıfına ait olup olmaması ve yeni özel fonksiyonların türetilmesi araştırmacıların geniş kitlesini ilgilendirmektedir. Ayrıca, bu fonksiyonların parçacıkların asimptotik teorisinde, integral dönüşümler teorisinde, kesir mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde geniş uygulamaları bulunmaktadır.

Fizik ve matematik anabilim dallarının birçok uygulamalı problemlerinin matematik modeli bu tür özel fonksiyonları içeren denklemlerle ifade edilebilmektedir.

Bu sebepten özel fonksiyonların geometrik özelliklerinin incelenmesi ve yeni çeşit özel fonksiyonların türetilmesi güncelliğini korumaktadır.

Analitik fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar karmaşık düzlemin $U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ birim açık diskinde ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ *normalleştirme* koşulunu sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonlarının oluşturduğu bir S sınıfının alt sınıfları üzerinde yoğunlaşmıştır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde özel bir yeri olan integral operatörler ile ilgili çalışmalar 20. asrın başında 1915'li yıllarda Alexander tarafından başlatılmış ve ilerleyen zamanlarda araştırmacılar tarafından geniş ilgi görmüştür. Bazı özel fonksiyonların, bu fonksiyonları içeren integral operatörlerin ve ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarını içeren integral operatörlerin ünivalentlik, yıldızıllık, konvekslik gibi geometrik özelliklerinin incelenmesi üzerine birçok çalışmalar vardır (bknz., örneğin [1-19]). Bu çalışmalarda integral operatörün içerdiği fonksiyonlar farklı sınıflardan alınarak integral operatörlerin hangi sınıftan olduğu incelenmiştir.

Biz bu tez çalışmasında aşağıdaki konuları ele aldık:

1. Literatürde mevcut olan normalize edilmiş iki çeşit Wright fonksiyonlarını içeren bazı integral operatörlerin ünivalentlik, yıldızıllık ve konvekslik gibi geometrik özelliklerininin incelenmesi;

2. Bu tür fonksiyonları içeren integral operatörlerin analitik ve ünivalent fonksiyonların bazı özel alt sınıflarından olması için yeterli koşulların bulunması;

3. Wright fonksiyonundan yeni özel fonksiyonlar türetilmesi;

4. Türetilen yeni çeşit özel fonksiyonların ünivalentlik, yıldızıllık ve konvekslik gibi geometrik karakterizasyonlarının incelenmesi;

5. Türetilen yeni çeşit özel fonksiyonların analitik ve ünivalent fonksiyonların bazı özel alt sınıflarından olması için yeterli ve hem de gerekli koşulların bulunması;

6. Türetilen yeni çeşit *normalize edilmiş* Wright fonksiyonlarını içeren bazı integral operatörlerin geometrik özelliklerinin incelenmesi;

7. Türetilen yeni çeşit *normalize edilmiş* Wright fonksiyonlarını içeren bazı integral operatörlerin analitik ve ünivalent fonksiyonların bazı özel alt sınıflarından olması için koşulların bulunması.

Bu tez çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kuramsal temeller, ikinci bölüm materyal ve yöntemler üçüncü bölümde ise araştırma bulguları yer almaktadır.

1.2. Kuramsal Temeller

1.2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda tezde kullanılacak bazı temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 1.2.1.1 ($\varepsilon-$komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ için

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının $\varepsilon-$*komşuluğu* denir.

Tanım 1.2.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in A$ noktası için $U(z_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç* *noktası* denir. Bir başka deyişle $z_0 \in A$ için $U(z_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir komşuluk varsa z_0 noktasına A noktasının bir *iç noktası* denir.

Tanım 1.2.1.3 (Açık Küme): Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, A kümesinin her noktası A'nın bir iç noktası ise yani A kümesi kendi içine eşitse A kümesine *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.4 (Kapalı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık küme ise A kümesine *kapalı küme* denir.

Tanım 1.2.1.5 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde *eğri (çevre)* denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla *eğrinin başlangıç ve bitim noktaları* adı verilir.

Tanım 1.2.1.6 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir olmak üzere $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya *kapalı eğri* denir.

Tanım 1.2.1.7 (Basit kapalı eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a,b]$ olsun. $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ'ya basit kapalı eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer, γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya basit *kapalı eğri* denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ'ya diferensiyallenebilir eğri denir. Diferensiyallenebilir bir γ eğrisi ve $\forall t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ'ya *düzgün eğri* denir.

Tanım 1.2.1.8 (Bağlantılı Küme): Eğer $A \subset A_1 \cup A_2$, $A \cap A_1 \neq \varnothing$, $A \cap A_2 \neq \varnothing$ ve $A \cap A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ olacak şekilde A_1 ve A_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme bulunamaz ise $A \subset \mathbb{C}$ kümesine *bağlantılıdır* denir. Aksi halde A'ya *bağlantısız küme* denir.

Tanım 1.2.1.9 (Bölge): Karmaşık düzlemde açık ve bağlantılı olan kümeye $\mathbb{C}$'de bir *bölge* denir.

1.2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 1.2.2.1 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ karmaşık değişkenli ve karmaşık değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, sonlu

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilirdir (veya diferensiyallenebilirdir) denir. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir [20].

Tanım 1.2.2.2 (Tam Fonksiyon): $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemin tamamında analitik olan fonksiyona *tam fonksiyon* denir.

Örneğin $f_1(z)=e^z$ ve $f_2(z)=\sin z$ fonksiyonları birer tam fonksiyonlardır.

Tanım 1.2.2.3 (Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı): $f(0)=f'(0)-1=0$

koşulunu sağlayan $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik olan f fonksiyonuna *normalize edilmiş fonksiyon* denir [21].

U birim diskinde normalize edilmiş

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,\ \ (a_n\in\mathbb{C})$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde yazılır

$$A=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}.$$

Tanım 1.2.2.4 (Ünivalent fonksiyon): Kompleks düzlemin bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine birebir oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde *ünivalenttir* denir. Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunda $z_1 = z_2$ olması gerekiyorsa ya da $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir [21].

A sınıfının U açık birim diskinde hem de ünivalent olan fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı S olsun. Yani,

$$S = \{ f \in A : \forall z \in U \text{ için } f - \text{ünivalent} \}.$$

[22].

<u>Tanım 1.2.2.5</u> (Yıldızıl (Starlike) Bölge): $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $y \in B$ olmak üzere y noktasını B bölgesinin her x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B bölgesinin içinde kalıyorsa B bölgesine y noktasına göre *yıldızıl (starlike) bölge* denir. Orijine göre yıldızıl bölgeye kısaca *yıldızıl bölge* denir. Bir bölgenin yıldızıl olması için gerekli ve yeterli şart her noktasına göre yıldızıl olmasıdır [22].

<u>Tanım 1.2.2.6</u> (Yıldızıl fonksiyon): $f \in A$ olmak üzere $f(U)$ kümesi orijine göre yıldızıl ise, $f(z)$ fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir [22].

<u>Teorem 1.2.2.1</u> (Yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f \in S$ fonksiyonunun U 'da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

sağlanmasıdır.

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir ve

$$S^* = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \right\}$$

olarak tanımlanır [22].

<u>Tanım 1.2.2.7</u> (α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı): $f \in S$ olsun. Eğer, U kümesinde $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden yıldızıldır* denir ve bu sınıf

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in S : \operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \right\}$$

olarak tanımlanır [23].

<u>Tanım 1.2.2.8</u> (Konveks bölge): B bir bölge olmak üzere B'deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B'ye *konveks bölge* denir [22].

<u>Tanım 1.2.2.9</u> (Konveks fonksiyon): $f \in A$ olmak üzere $f(U)$ kümesi konveks ise, $f(z)$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir [22].

<u>Teorem 1.2.2.2</u> (Konveks fonksiyonların analitik karakterizasyonu): $f \in S$ fonksiyonunun U'da konveks olması için gerekli ve yeterli şart her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

sağlanmasıdır.

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir ve

$$C=\left\{ f\in S:\mathrm{Re}\left\{ 1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\} >0\right\}$$

şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 1.2.2.10 (α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı): $f\in S$ olsun. Eğer U diskinde $0\le\alpha<1$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{ 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} >\alpha$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α *mertebeden konvekstir* denir ve α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir ve

$$C(\alpha)=\left\{ f\in S:\mathrm{Re}\left\{ 1+\frac{zf''(z)}{f(z)}\right\} >\alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander teoremi): $f\in S$ fonksiyonu veilsin. $f\in C$ olması için gerekli ve yeterli koşul $zf'\in S^*$ olmasıdır [21].

Bu sınıflar arasında $C\subset S^*\subset S$ şeklinde bir ilişki vardır.

$$f(z)=z-a_1z-a_2z^2-\ldots-a_nz^n-\ldots=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,a_n\ge0 \qquad (1.2.2.1)$$

ile tanımlanan $f(0)=0=f'(0)-1$ koşuluyla normalleştirilen U açık birim diskinde analitik $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı T olsun.

U açık birim diskte $\alpha\left(\alpha\in[0,1)\right)$ mertebeden sırasıyla, yıldızıl ve konveks olan fonksiyonlardan oluşan T 'nin alt sınıflarını $TS^*(\alpha)$ ve $TC(\alpha)$ ile göstereceğiz.

Tanımdan,

$$TS^*(\alpha)=\left\{f\in T:\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha, z\in U\right)\right\}, \alpha\in[0,1] \tag{1.2.2.2}$$

$$TC(\alpha)=\left\{f\in T:\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}>\alpha, z\in U\right)\right\}, \alpha\in[0,1] \tag{1.2.2.3}$$

yazabiliriz. (ayrıntılar için bknz [21, 22] ve [24])

$TS^*(\alpha)$ ve $TC(\alpha)$'nın ilginç birleşimi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right)>\alpha, z\in U, \alpha\in[0,1), \beta\in[0,1]$$

koşulunu sağlayan $f\in T$ fonksiyonlarının $T(\alpha,\beta)$ sınıfıdır.

Böylece,

$$T(\alpha,\beta)=\left\{f\in T:\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\right)>\alpha, z\in U\right\}, \tag{1.2.2.4}$$
$$\alpha\in[0,1), \beta\in[0,1].$$

$T(\alpha,\beta)$ sınıfı Altintaş ve diğerleri tarafından [25] ve [26] çalışmasında ($T_n(p,\alpha,\beta)$ daha genel bir şekilde) ve Irmak ve diğerleri tarafından [27] çalışmasında incelendi. Özellikle de Altintaş tarafından [28] çalışmasında $T_n(1,\alpha,\beta)$ sınıfı olarak kabul edilir.

Özel durumda $\beta=0$ ve $\beta=1$ için

$$T(\alpha,0)=TS^{*}(\alpha) \text{ ve } T(\alpha,1)=TC(\alpha) \tag{1.2.2.5}$$

yazarız.

1.2.3. Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 1.2.3.1 (Wright fonksiyonu): Bilindiği üzere [29], *Wright fonksiyonu* aşağıdaki seri ile tanımlanır

$$W_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{z^n}{n!},\ \lambda>-1,\mu,z\in\mathbb{C} \tag{1.2.3.1}$$

Bu seri $\lambda=-1$ iken U açık birim diskte, $\lambda>-1$ iken $\mathbb{C}$'de mutlak yakınsaktır. Ayrıca, $\lambda>-1$ için Wright fonksiyonu tam fonksiyondur. $W_{\lambda,\mu}(z)$ Wright fonksiyonu ilk defa Wright tarafından [29] çalışmasında tanımlandı ve $\lambda>0$ için parçacıkların asimptotik teorisinde uygulandı. Daha sonra, bu fonksiyon, ilk önce Mikusinski'nin operatör hesabı ve Hankel tipli integral dönüşümler teorisinde birçok uygulama bulmuştur. Dahası, kısmi diferansiyel denklemlerin Lie grup yönteminin kesir mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere genişletilmesinde görüldü ki, bu denklemlerin grup-invariant çözümleri Wright fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilir.

Son zamanlarda bu fonksiyonlar kesir dereceli diferansiyel denkemlerin çözümlerinde kullanılır ve denklemlerin Green fonksiyonları Wright fonksiyonları yardımıyla ifade edilir (bknz [30, 31]).

Tanım 1.2.3.2 (Bessel Fonksiyonu): Bilindiği üzere,

$$J_{\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\mu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\mu}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *birinci çeşit Bessel fonksiyonu* denir [11].

Tanım 1.2.3.3 (Normalize edilmiş Bessel fonksiyonu**):**

$$g_{\mu}(z)=2^{\mu}\Gamma(1+\mu)z^{1-\mu/2}J_{\mu}\left(z^{1/2}\right)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *normalize edilmiş Bessel fonksiyonu* denir [11].

Belirtelim ki, 1. çeşit Bessel fonksiyonu ile normalize edilmiş Bessel fonksiyonu arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$g_{\mu}(4z)=4\Gamma(\mu+1)z^{1-\mu/2}J_{\mu}\left(2\sqrt{z}\right).$$

Burada, $J_{\mu}(z)$ 1. çeşit Bessel fonksiyonu ve $g_{\mu}(z)$ normalize edilmiş Bessel fonksiyonudur. Bilindiği üzere, 1. çeşit Bessel fonksiyonu aşağıdaki ikinci dereceden lineer homojen diferensiyel denklemin özel çözümü olarak tanımlanır (bknz örn [11])

$$z^2w''(z)+zw'(z)+\left(z^2-\mu^2\right)w(z)=0.$$

Bu yüzden çoğu zaman bu denklem Bessel diferensiyel denklemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.3.4 (Mittag-Leffler fonksiyonu): Bilindiği üzere,

$$E_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(pk+1)},\ p\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(p)>0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Mittag-Leffler fonksiyonu* denir [32].

$$E_{p,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(pk+\mu)},\ p,\mu\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(p)>0$$

ise *genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu*dur.

Tanım 1.2.3.5 (Normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu):

$$E_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)=\Gamma(\mu)zE_{\lambda,\mu}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)}z^n,$$
$$z,\lambda,\mu\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\lambda)>0,\ \ \mu\neq 0,-1,-2,...$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon *normalize edilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu*dur [33].

(1.2.3.1) ile tanımlanan $W_{\lambda,\mu}(z)$ Wright fonksiyonunun A sınıfına ait olmadığı açıktır. Böylece, Wright fonksiyonundan türetilen ve A sınıfına ait olan aşağıdaki fonksiyonları tanımlamamız doğaldır:

1) İyi bilinmektedir ki

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z) &:= \Gamma(\mu) z W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{z^{n+1}}{n!} \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma((n-1)\lambda+\mu)} \frac{z^n}{(n-1)!}, \quad \lambda > -1,\ \mu > 0,\ z \in U, \end{aligned} \tag{1.2.3.2}$$

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z) &:= \Gamma(\lambda+\mu)\left[W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\lambda+\mu)} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma((n-1)\lambda+\lambda+\mu)} \frac{z^n}{n!}, \quad \lambda > -1,\ \lambda+\mu > 0,\ z \in U \end{aligned} \tag{1.2.3.3}$$

fonksiyonları sırasıyla, *normalize edilmiş Wright fonksiyonu* olarak adlandırılır (bknz [1, 6]). $W_{\lambda,\mu}^{(1)}, W_{\lambda,\mu}^{(2)} \in A$ olduğu açıktır.

$W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)$ fonksiyonlarını *1. ve 2. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonları* olarak tanımlayacağız.

Kolaylıkla gösterebiliriz ki (ayrıca, bknz. [1])

$$\lambda z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)' = (\mu-1)W_{\lambda,\mu-1}^{(1)}(z) + (\lambda-\mu+1)W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z),$$

$$\lambda z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)' = (\lambda+\mu-1)W_{\lambda,\mu-1}^{(2)}(z) - (\mu-1)W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z),$$

$$W_{\lambda,\lambda+\mu}^{(1)}(z) = z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)',$$

ayrıca,

$$W_{1,\mu+1}^{(1)}(-z) = -\Gamma(\mu+1) z^{1-\mu/2} J_\mu\left(2\sqrt{z}\right),$$

dolayısıyla

$$J_\mu(z) = -\frac{4}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} z^{\mu-2} W^{(1)}_{1,\mu+1}\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

Sonuncu formülü ve Bessel diferansiyel denklemini kullanırsak $W^{(1)}_{1,\mu}(z)$ fonksiyonunun aşağıdaki diferansiyel denklemi sağladığını kolayca gösterebiliriz:

$$z^2 w''(z) + (\mu-1) z w'(z) + (z^2 - \mu + 1) w(z) = 0.$$

Sonuncu denklemden ve 1. ve 2. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonları arasındaki ilişkiden $W^{(2)}_{1,\mu}(z)$ fonksiyonunun aşağıdaki homojen diferansiyel denklemi sağladığını kolayca çıkarabiliriz:

$$z w'''(z) + (\mu+2) w''(z) + w'(z) = 0.$$

2) (1.2.3.1) ile tanımlanan $W_{\lambda,\mu}(z)$ Wright fonksiyonunun T sınıfına ait olmadığı açıktır.

$W_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki iki fonksiyonu tanımlayalım:

$$W^{(3)}_{\lambda,\mu}(z) := 2z - \Gamma(\mu) z W_{\lambda,\mu}(z), z \in U, \lambda > -1, \mu > 0$$

ve

$$W^{(4)}_{\lambda,\mu}(z) := 2z - \Gamma(\lambda+\mu)\left[W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}\right], z \in U, \lambda > -1, \lambda+\mu > 0,$$

yani

$$W^{(3)}_{\lambda,\mu}(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \frac{z^n}{(n-1)!},\ z \in U,\ \lambda > -1,\ \mu > 0, \qquad (1.2.3.4)$$

$$W^{(4)}_{\lambda,\mu}(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\lambda+\mu)} \frac{z^n}{n!},\ z \in U,\ \lambda > -1,\ \lambda+\mu > 0, \qquad (1.2.3.5)$$

$$W^{(3)}_{\lambda,\mu}(z) = 2z - W^{(1)}_{\lambda,\mu}(z),\ \ W^{(4)}_{\lambda,\mu}(z) = 2z - W^{(2)}_{\lambda,\mu}(z).$$

$W_{\lambda,\mu}^{(3)}, W_{\lambda,\mu}^{(4)} \in T$ olduğu açıktır; yani bu fonksiyonlar U açık birim diskte (1.2.2.1) ile tanımlanan analitik fonksiyonlardır ve

$$W_{\lambda,\mu}^{(3)}(0) = \left(W_{\lambda,\mu}^{(3)}(0)\right)' - 1 = 0,\ W_{\lambda,\mu}^{(4)}(0) = \left(W_{\lambda,\mu}^{(4)}(0)\right)' - 1 = 0$$

normalleşme koşullarını sağlarlar.

$W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonlarına *3. ve 4. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonları* diyeceğiz.

3)

$$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) := \Gamma(\lambda+\mu) z W_{\lambda,\mu}{}'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda(n+1)+\mu)} \frac{z^{n+1}}{n!}\ .$$

Bu fonksiyonu kolayca aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{z^{n}}{(n-1)!},\ \lambda > -1,\ \lambda+\mu > 0,\ z \in U\ . \qquad (1.2.3.6)$$

$W_{\lambda,\mu}^{(5)} \in A$ olduğu açıktır.

$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunu *5. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonu* olarak tanımlayacağız.

Kolayca gösterebiliriz ki

$$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) = W_{\lambda,\lambda+\mu}^{(1)}(z),\ W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) = z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)',$$

$$W_{1,\mu}^{(5)}(-z) = -\Gamma(\mu+1) z^{1-\mu/2} J_{\mu}\left(2\sqrt{z}\right) = -\frac{1}{4} g_{\mu}(4z).$$

Burada, $J_{\mu}(z)$ 1. çeşit Bessel fonksiyonu, $g_{\mu}(z)$ normalize edilmiş Bessel fonksiyonudur.

Kolayca görülebilir ki $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)' - W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) - a(\lambda,\mu) z W_{\lambda,\lambda+\mu}^{(5)}(z) = 0, \tag{1.2.3.7}$$

$$z^2\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'' - 2z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)' + 2W_{\lambda,\mu}^{(5)} - b(\lambda,\mu) W_{\lambda,2\lambda+\mu}^{(5)}(z) = 0. \tag{1.2.3.8}$$

Burada,

$$a(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(2\lambda+\mu)} = \frac{1}{(\lambda+\mu)_\lambda},$$

$$b(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(3\lambda+\mu)} = \frac{1}{(\lambda+\mu)_{2\lambda}},$$

$(x)_r = \dfrac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(x)}$, $(x)_0 = 1$ *Pochammer* (veya *Appell*) sembolünün Euler Gamma fonksiyonu yardımıyla ifadesidir.

Not 1.2.1: Umarız ki $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu matematik ve ilgili alanlarda geniş uygulama alanı bulur.

1.2.4. Analitik Fonksiyonların Bazı İntegral Operatörleri

Son yıllarda aşağıdaki integral operatörlerin ünivalentliği üzerine birçok çalışma yapılmıştır (örnek için bknz [34-36])

$$G_p(z) = \left\{ p\int_0^z t^{p-1} f'(t)\,dt \right\}^{1/p}, \tag{1.2.4.1}$$

$$G_{q_1,q_2,\ldots,p}(z) = \left\{ p\int_0^z t^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k(t)}{t} \right)^{q_k} dt \right\}^{1/p}, \tag{1.2.4.2}$$

$$G_q(z) = \left\{ q\int_0^z t^{q-1} \left(e^{f(t)}\right)^q dt \right\}^{1/q}, \tag{1.2.4.3}$$

$$G_{p,q}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^q dt\right\}^{1/p}, z\in U, \tag{1.2.4.4}$$

burada, $f_k(z),\ k=1,2,...,n$ ve $f(z)$ fonksiyonu A sınıfına aittir ve $q_k,\ k=1,2,...,n$ üzere $p,\ q$ (1.2.4.1) – (1.2.4.3) integrallerini yakınsak yapan parametrelerdir.

Ayrıca, Breaz ve diğerleri [37] çalışmalarında aşağıdaki integral operatörlerin ünivalentliği için çeşitli yeterli koşullar elde etmişlerdir

$$G_{n,\alpha}(z)=\left\{(n\alpha+1)\int_0^z\left(\prod_{k=1}^n f_k(t)\right)^\alpha dt\right\}^{1/(n\alpha+1)}, \tag{1.2.4.5}$$

burada n bir doğal sayı, α reel sayı ve $f_k\in A,\ k=1,2,...,n$. Baricz ve Frasin [38] çalışmasında $f_k(z),\ k=1,2,...,n$ ve $f(z)$ normalize edilmiş Bessel fonksiyonları olduğu zaman (1.2.4.2) – (1.2.4.5) şekilli integral operatörlerin ünivalentliği için bazı yeterli koşullar elde ettiler.

Bu tez çalışmasında biz $f_k(z),\ k=1,2,\ldots n$ ve $f(z)$ fonksiyonları normalize edilmiş Wright fonksiyonları olduğu durumda (1.2.4.1) – (1.2.4.4) şekilli integral operatörlerin U açık birim diskte ünivalentliği için çeşitli yeterli koşullar verdik.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı İntegral Operatörler İçin Ünivalentlik Kriterleri

Bu bölümde, tez çalışmamızda kullanacağımız bazı ünivalentlik kriterlerini ve ihtiyaç duyduğumuz bazı bilgileri verdik.

Lemma 2.1.1: [39] Eğer, $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde konveks bir bölgede analitik fonksiyon ise ve $\operatorname{Re}\left(f'(z)\right)>0$ koşulu sağlanıyorsa, $f(z)$ U 'da ünivalenttir.

Lemma 2.1.2: [34] Eğer, $f(z)$ fonksiyonu her $z\in U$ için

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|\leq 1$$

koşulunu sağlarsa $f(z)$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Lemma 2.1.3: [40] $q\in\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}$ ve $\operatorname{Re}(q)\geq 1$, $a>1$ ve $2a|q|\leq 3\sqrt{3}$ olsun. Eğer, $f\in A$ fonksiyonu her $z\in U$ için $|zf'(z)|\leq a$ koşulunu sağlarsa (1.2.4.3) ile tanımlanan $G_q:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Lemma 2.1.4: [40] p ve c $\operatorname{Re}(p)>0$ ve $|c|\leq 1$, $c\neq -1$ koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Eğer, $f\in A$ fonksiyonu her $z\in U$ için

$$\left|c|z|^{2p}+\left(1-|z|^{2p}\right)\frac{zf''(z)}{pf'(z)}\right|\leq 1$$

koşulunu sağlarsa (1.2.4.1) ile tanımlanan $G_p:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Lemma 2.1.5: $x_0\cong 1.2581$

$$2x-(x+1)e^{1/(x+1)}+1=0 \tag{2.1.1}$$

denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda\geq 1$ ve $\lambda+\mu>x_0$ olsun. Bu durumda, her $z\in U$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}-1\right|\leq\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}},\tag{2.1.2}$$

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\leq\frac{1}{(\lambda+\mu)}\left\{(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right\}.\tag{2.1.3}$$

<u>İspat:</u> $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun tanımından yazrız

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}-1\right|=\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'-W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right|\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}}.\tag{2.1.4}$$

Lemmanın $\lambda\geq1$ hipotezi altında $\Gamma(n-1+\lambda+\mu)\leq\Gamma(\lambda(n-1)+\lambda+\mu)$ eşitsizliği her $n\in\mathbb{N}$ için geçerlidir. $\Gamma(n+x)=\Gamma(x)(x)_n$ olduğundan, burada

$$(x)_n=x(x+1)(x+2)...(x+n-1),\ (x)_0=1$$

Euler Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Pochammer (ya da Appell) sembolüdür,

$$\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}=\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\lambda+\mu)}\leq\frac{1}{(\lambda+\mu)_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}\tag{2.1.5}$$

elde ederiz.

Ayrıca,

$$(\lambda+\mu)_{n-1}=(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)...(\lambda+\mu+n-2)\geq(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}$$

eşitsizliği her $n\in\mathbb{N}$ için sağlanır. Buna denk olarak

$$\frac{1}{(\lambda+\mu)_{n-1}}\leq\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}},\ n\in\mathbb{N}\tag{2.1.6}$$

yazılabilir. (2.1.5) ve (2.1.6)'yı kullanarak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}\frac{1}{(n-2)!}=\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{\lambda+\mu} \tag{2.1.7}$$

sonucuna varırız.

Benzer şekilde,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}\leq\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\left(e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right) \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

(2.1.4), (2.1.7) ve (2.1.8)'den lemmadaki (2.1.2) eşitsizliğinin doğruluğu çıkar.

Şimdi (2.1.3) eşitsizliğini ispatlayalım. $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun tanımından yazabiliriz

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\leq 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}.$$

(2.1.7) ve (2.1.8)'i uygulayarak elde ederiz

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\leq 1+\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\left(e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right).$$

Bu ise lemmanın ikinci hükmünün aynısıdır.

Böylece, Lemma 2.1.5 ispatlandı.

<u>Lemma 2.1.6:</u> [6, Lemma 4] $x_0\cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda\geq 1$ ve $\lambda+\mu>x_0$ olsun. Bu durumda, her $z\in U$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)}-1\right|\leq\frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}} \tag{2.1.9}$$

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)'\right| \leq 1+\frac{1}{\mu}\left\{(\mu+2)e^{1/(\mu+1)}-(\mu+1)\right\}. \qquad (2.1.10)$$

Lemma 2.1.7 [6, Lemma 5]: $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\lambda+\mu > x_0$ olsun. Bu durumda her $z \in U$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)}-1\right| \leq \frac{(\lambda+\mu+1)e^{1/(\mu+1)}-1}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)},$$

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(2)}(z)\right)'\right| \leq 1+\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right).$$

Lemma 2.1.8 **(**bknz [25, sayfa 10, Teorem 1]**):** $f \in T$ olsun. O zaman $f(z)$ fonksiyonunun $T(\alpha,\beta)$, $\alpha[0,1)$, $\beta[0,1]$ sınıfından olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)a_n \leq 1-\alpha \qquad (2.1.11)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.1.1 [41]**:** α kompleks sayısı $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ve $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ fonksiyonu U 'da analitik fonksiyon olsun. Bu durumda, her $z \in U$ için

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re}\alpha}}{\operatorname{Re}\alpha}\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1$$

ve $\operatorname{Re}\beta \geq \operatorname{Re}\alpha$ koşulunu sağlayan her α,β kompleks sayıları için

$$F_{\beta}(z)=\left[\beta\int_{0}^{z}u^{\beta-1}f'(u)\,du\right]^{1/\beta}=z+\ldots$$

fonksiyonu U ’da ünivalenttir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri

3.1.1. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonları İçin Bazı Yeterli Koşullar

Bu bölümde biz (1.2.3.4) ve (1.2.3.5) ile tanımlanan $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının $T(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için bazı yeterli koşulları verdik.

Teorem 3.1.1.1: Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu \geq \mu_0$ =0.462 ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(2\mu+1)(\mu+1)-\left\{(1-\alpha)(\mu+1)^2+(1+(2-\alpha)\beta)(\mu+1)+\beta\right\}e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eştsizlik sağlanırsa $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ fonksiyonu $T(\alpha,\beta)$ $\alpha \in [0,1)$ ve $\beta \in [0,1]$ sınıfına aittir.

İspat:

$$W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma((n-1)\lambda+\mu)}\frac{z^n}{(n-1)!}$$

olduğundan Lemma 2.1.8 gereğince

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(\beta(n-1)+1)\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma((n-1)\lambda+\mu)}\frac{1}{(n-1)!} \leq 1-\alpha \qquad (3.1.1.1)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$L_1(\lambda,\mu;\alpha,\beta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(\beta(n-1)+1)\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma((n-1)\lambda+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}$$

olsun. Kolayca

$$\left(n-\alpha\right)\left(\beta\left(n-1\right)+1\right)=\beta\left(n-2\right)\left(n-1\right)+\left(1+\left(2-\alpha\right)\beta\right)\left(n-1\right)+\left(1-\alpha\right)$$

yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak basit hesaplama ile

$$L_1\left(\lambda,\mu;\alpha,\beta\right)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\beta}{\left(n-3\right)!}\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\left(n-1\right)\lambda+\mu\right)}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\left(\left(2-\alpha\right)\beta\right)}{\left(n-2\right)!}\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\left(n-1\right)\lambda+\mu\right)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{\left(n-1\right)!}\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\left(n-1\right)\lambda+\mu\right)}$$

elde ederiz.

Teoremin hipotezi altında her $n\in\mathbb{N}_2:=\mathbb{N}-\{1\}=\{2,3,...\}$ için $\Gamma\left(n-1+\mu\right)\leq\Gamma\left(\left(n-1\right)\lambda+\mu\right)$ sağlanır. Buna göre, $\Gamma\left(n-1+\mu\right)=\Gamma\left(\mu\right)\left(\mu\right)_{n-1}$ olduğundan,

$$\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\left(n-1\right)\lambda+\mu\right)}\leq\frac{1}{\left(\mu\right)_{n-1}} \tag{3.1.1.2}$$

olur. Burada, $\left(\mu\right)_n=\Gamma\left(n+\mu\right)/\Gamma\left(\mu\right)=\mu\left(\mu+1\right)\cdots\left(\mu+n-1\right),$, $\left(\mu\right)_0=1$ Euler Gamma fonksiyonu ile tanımlanan Pochammer (ya da Appell) sembolüdür.

(3.1.1.2)’yi kullanarak

$$L_1\left(\lambda,\mu;\alpha,\beta\right)\leq\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\beta}{\left(n-3\right)!}\frac{1}{\left(\mu\right)_{n-1}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\left(2-\alpha\right)}{\left(n-2\right)!}\frac{1}{\left(\mu\right)_{n-1}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{\left(n-1\right)!}\frac{1}{\left(\mu\right)_{n-1}}$$

buluruz. Ayrıca, her $n\in\mathbb{N}_2$ için

$$\left(\mu\right)_{n-1}=\mu\left(\mu+1\right)\cdots\left(\mu+n-2\right)\geq\mu\left(\mu+1\right)^{n-2},$$

dolayısıyla

$$\frac{1}{(\mu)_{n-1}} \leq \frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_2 \qquad (3.1.1.3)$$

olduğu açıktır.

(3.1.1.3)'ü kullanarak

$$L_1(\lambda,\mu;\alpha,\beta) \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\beta}{(n-3)!} \frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(2-\alpha)\beta}{(n-2)!} \frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} \frac{1}{\mu(\mu+1)^{n-2}} = \left\{ \frac{\beta}{\mu(\mu+1)} + \frac{1+(2-\alpha)\beta}{\mu} + \frac{(1-\alpha)(\mu+1)}{\mu} \right\} e^{1/(\mu+1)}$$
$$-\frac{(1-\alpha)(\mu+1)}{\mu}$$

elde ederiz. Bu durumda,

$$\left\{ \frac{\beta}{\mu(\mu+1)} + \frac{1+(2-\alpha)\beta}{\mu} + \frac{(1-\alpha)(\mu+1)}{\mu} \right\} e^{1/\mu+1} - \frac{(1-\alpha)(\mu+1)}{\mu} \leq 1-\alpha$$

koşulu sağlanırsa (3.1.1.1) gerçekleşir. Bu ise aşağıdaki eşitsizliğe denktir

$$(1-\alpha)(2\mu+1)(\mu+1) - \left\{ (1-\alpha)(\mu+1)^2 + \big(1+(2-\alpha)\beta\big)(\mu+1)\beta + \beta \right\} e^{1/(\mu+1)} \geq 0 \, .$$

Böylece, Teorem 3.1.1.1'in ispatı tamamlandı.

Teorem 3.1.1.1'de $\beta = 0$ alır ve (1.2.2.5)'deki ilk bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.1.1.1:</u> Eğer $\lambda \geq 1, \mu \geq \mu_0 = 0.462$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(2\mu+1) - \left[(1-\alpha)(\mu+1) + 1 \right] e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizlik sağlanırsa $W^{(3)}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonu $TS^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.1.1.1'de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.1.2: Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq x_1$ ise normalize edilmiş $W^{(3)}_{\lambda,\mu}(z)$ Wright fonksiyonu TS^* sınıfına aittir. Burada, $x_1 \cong 2.4898$

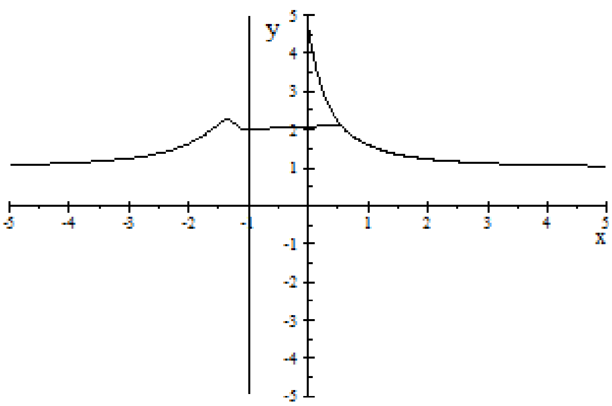
$$2x+1-(x+2)e^{1/(x+1)} = 0 \qquad (3.1.1.4)$$

denkleminin nümerik köküdür.

İspat: $\phi(x) = 2x+1-(x+2)e^{1/(x+1)}$, $x > 0$ olsun. Basit hesaplama ile

$$\phi'(x) = 2 - \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{1/(x+1)}$$

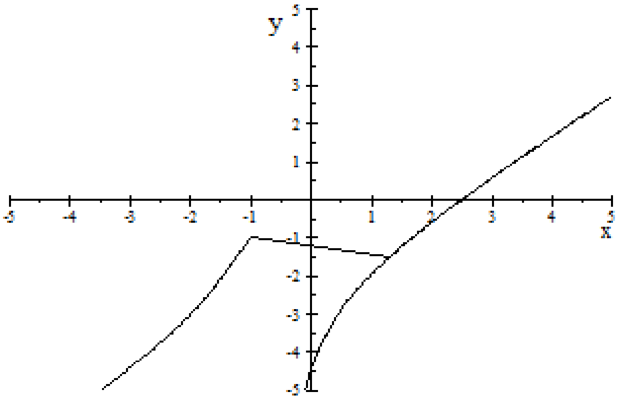
elde edilir. Bu fonksiyonun grafiğinden görüldüğü gibi $\phi'(x) > 0$'dır (bknz Şekil 1).



Şekil 1. $y = \phi'(x) = 2 - \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

O halde, $\phi(x)$ fonksiyonu kesin artan fonksiyondur.

Ayrıca, $\phi(x)$ fonksiyonunun grafiğinden ya da (3.1.1.4) denkleminin bilgisayar çözümünden $x_1 \cong 2.4898$'in bu denklemin nümerik kökü olduğunu görürüz (bknz şekil 2).



Şekil 2. $y=\phi(x)=2x+1-(x+2)e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Bu nedenle $\mu \geq x_1$ için $2\mu+1-(\mu+2)e^{1/(\mu+1)} \geq 0$ olacaktır.

Böylece, Sonuç 3.1.1.2'nin ispatı tamamlandı.

Teorem 3.1.1.1'de $\beta=1$ alır ve (1.2.2.5)'deki ikinci bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.1.1.3:</u> Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu \geq \mu_0 = 0.462$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(\mu+1)(2\mu+1)-\left\{(1-\alpha)(\mu+1)^2+(3-\alpha)(\mu+1)+1\right\}e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ fonksiyonu $TC(\alpha), \alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.1.1.3'de $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.1.1.4:</u> Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu \geq x_2$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ fonksiyonu TC sınıfına aittir. Burada, $x_2 \cong 4.8523$ aşağıdaki

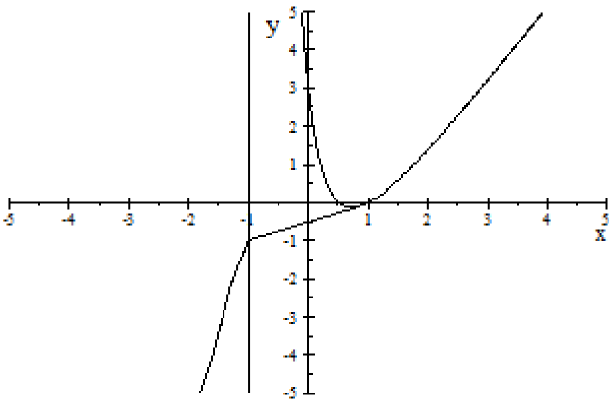
$$2x^2+3x+1-\left(x^2+5x+5\right)e^{1/(x+1)}=0 \qquad (3.1.1.5)$$

denkleminin nümerik köküdür.

<u>İspat:</u> $x>0$ olmak üzere $\Psi(x)=2x^2+3x+1-\left(x^2+5x+5\right)e^{1/(x+1)}$ olsun. Basit hesaplama ile

$$\Psi'(x)=4x+3-\frac{x\left(2x^2+8x+7\right)}{\left(x+1\right)^2}e^{1/(x+1)}$$

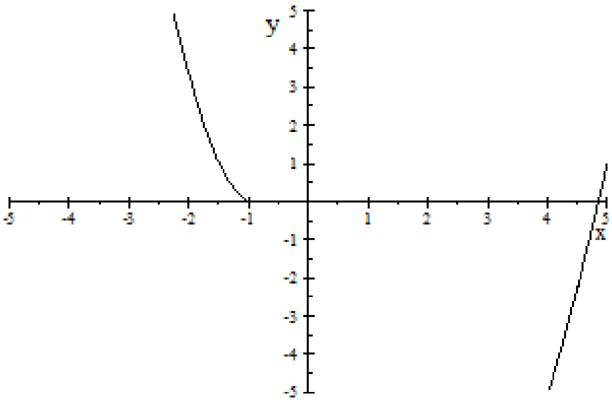
elde edilir. Bu fonksiyonun grafiğinden görüldüğü gibi $x>1.25$ için $\Psi'(x)>0$'dır (bknz şekil 3).



Şekil 3. $y=\Psi'(x)=4x+3-\dfrac{x\left(2x^2+8x+7\right)}{\left(x+1\right)^2}e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Buna göre, $x>1.25$ için $\Psi(x)$ fonksiyonu kesin artan fonksiyondur.

Ayrıca, $\Psi(x)$ fonksiyonunun grafiğinden ya da (3.1.1.5) denkleminin bilgisayar çözümünden $x_2\cong 4.8523$'ün bu denklemin nümerik kökü olduğu görülür (ayrıca, bknz şekil 4).



Şekil 4. $y=\Psi(x)=2x^2+3x+1-\left(x^2+5x+5\right)e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Buna göre, her $\mu \geq x_2$ için

$$2\mu^2+3\mu+1-\left(\mu^2+5\mu+5\right)e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

sağlanır.

Böylece, Sonuç 3.1.1.4 ispatlandı.

<u>Teorem 3.1.1.2:</u> $\lambda \geq 1$, $\mu > 0$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(\lambda+\mu)-\left\{\left(1-(1-\beta)\alpha\right)(\lambda+\mu+1)^2+(1-\alpha\beta)(\lambda+\mu+1)\beta\right\}e^{1/(\lambda+\mu+1)}$$
$$+(\lambda+\mu+1)\left\{\left(1-(1-\beta)\alpha\right)(\lambda+\mu+2)+(1-\alpha\beta)\right\} \geq 0$$

eşitsizlik sağlansın. Bu durumda $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonu $T(\alpha,\beta)$, $\alpha \in [0,1)$ ve $\beta \in [0,1]$ sınıfına aittir.

<u>İspat:</u>

$$W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\frac{z^n}{n!}$$

olduğundan Lemma 2.1.8 gereğince

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\frac{1}{n!}\leq 1-\alpha \tag{3.1.1.6}$$

olduğunu göstermek yetecektir.

$$L_2(\lambda,\mu;\alpha,\beta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\frac{1}{n!}$$

olsun.

Kolayca $(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)=\beta_n(n-1)+(1-\alpha\beta)n-(1-\beta)\alpha$ yazabiliriz.

Bu eşitliği kullanarak basit hesaplama ile yazarız:

$$\begin{aligned}L_2(\lambda,\mu;\alpha,\beta)&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta}{(n-2)!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\alpha\beta-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(n-1)!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-(1-\beta)\alpha}{n!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}.\end{aligned}$$

μ yerine $\lambda+\mu$ yazar, (3.1.1.2) ve (3.1.1.3)'ü kullanırsak

$$\begin{aligned}L_2(\lambda,\mu;\alpha,\beta)&\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta}{(n-2)!}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha\beta}{(n-1)!}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}\\&+\frac{\left(1-(1-\beta)\alpha\right)(\lambda+\mu+1)^2}{\lambda+\mu}\left(e^{1/(\lambda+\mu+1)}-\frac{1}{\lambda+\mu+1}-1\right)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\left(1-(1-\beta)\alpha\right)(\lambda+\mu+1)^2}{\lambda+\mu}+\frac{(1-\alpha\beta)(\lambda+\mu+1)}{\lambda+\mu}+\frac{\beta}{\lambda+\mu}\right\}e^{1/(\lambda+\mu+1)}\\&-\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}+\left\{\left(1-(1-\beta)\alpha\right)(\lambda+\mu+2)+(1-\alpha\beta)\right\}\leq 1-\alpha\end{aligned}$$

koşulu sağlanırsa (3.1.1.6) sağlanır.

Bununla, Teorem 3.1.1.2'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.1.2'de $\beta = 0$ alır, (1.2.2.5)'deki ilk bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.1.1.5:</u> $\lambda \geq 1$, $\mu > 0$ ve

$$(1-\alpha)\left[(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)+\lambda+\mu\right]+\lambda+\mu+1$$
$$-\left[(1-\alpha)(\lambda+\mu+1)+1\right](\lambda+\mu+1)e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eşitzisliği sağlanırsa $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonu $TS^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.1.1.5'te $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.1.1.6:</u> $\lambda \geq 1$, $\lambda + \mu \geq x_3$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonu TS^* sınıfına aittir. Burada, $x_3 \cong 1.7703$

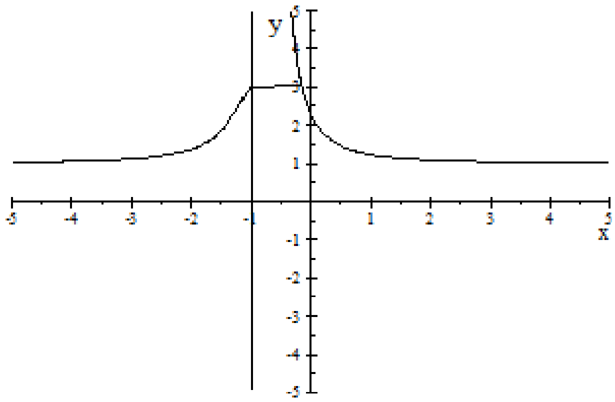
$$x^2+5x+3-\left(x^2+3x+2\right)e^{1/(x+1)} = 0 \qquad (3.1.1.7)$$

denkleminin nümerik köküdür.

<u>İspat:</u> $h(x) = x^2+5x+3-\left(x^2+3x+2\right)e^{1/(x+1)}$, $x > 0$ olsun. Basit hesaplama ile

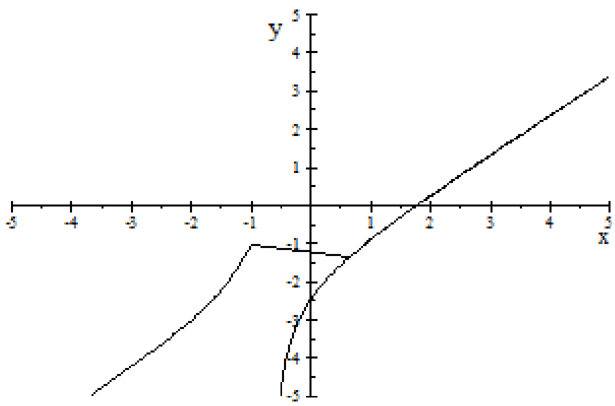
$$h'(x) = 2x+5-\frac{2x^2+4x+1}{x+1}e^{1/(x+1)}$$

yazarız. Bu fonksiyonun grafiğinden görüldüğü üzere $h'(x) > 0$ dır (bknz şekil 5).



Şekil 5. $y = h'(x) = 2x + 5 - \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{x+1} e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Böylece, $h(x)$ fonksiyonu kesin artan fonksiyondur. Ayrıca, $h(x)$ fonksiyonunun grafiğinden ya da (3.1.1.7) denkleminin bilgisayar çözümünden $x_3 \cong 1.7703$'ün bu denklemin nümerik kökü olduğu görülür (bknz şekil 6).



Şekil 6. $y = h(x) = x^2 + 5x + 3 - (x^2 + 3x + 2)e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Buna göre, her $\lambda + \mu \geq x_3$ için

$$2(\lambda+\mu) + (\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2) + 1 - (\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)e^{1/(\mu+1)} \geq 0.$$

Böylece, Sonuç 3.1.1.6 ispatlandı.

Teorem 3.1.1.2'de $\beta = 1$ alır, (1.2.2.5)'deki ikinci bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.1.1.7: Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu > 0$ ve

$$(1-\alpha)\left[2(\lambda+\mu)+1\right]+(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)$$
$$-\left[(1-\alpha)(\lambda+\mu+1)+(\lambda+\mu+1)^2\right]e^{1/(\lambda+\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonu $TC(\alpha), \alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.1.1.7'de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.1.8: Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu \geq x_3$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonu TC sınıfına aittir. Burada $x_3 \cong 1.7703$ (3.1.1.7) denkleminin nümerik köküdür.

3.1.2. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarının Ünivalentliği, Yıldızıllığı ve Konveksliği

Bu bölümde esas amacımız $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun U 'da ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği için yeterli koşul vermektir.

Aşağıdaki teorem $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği üzerinedir.

Teorem 3.1.2.1: $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu > x_1$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için Lemma 2.1.1'i uygulayacağız. Lemma 2.1.1 gereğince, $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu U 'da analitik olduğundan, her $z \in U$ için

$\mathrm{Re}\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)' > 0$ olduğunu göstermemiz gerekir. Kolayca gösterebiliriz ki bu koşulun sağlanması için $\left|1-\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right| < 1$ koşulunun sağlanması yeterlidir.

$W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun tanımından, basit hesaplamayla

$$\begin{aligned}\left|1-\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{nz^{n-1}}{(n-1)!}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}\end{aligned} \tag{3.1.2.1}$$

elde ederiz.

Teoremin hipotezi altında her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\Gamma(n-1+\lambda+\mu)\le\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\Gamma(n+x)=\Gamma(x)(x)_n$ olduğundan

$$\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}=\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\le\frac{1}{(\lambda+\mu)_{n-1}},n\in\mathbb{N} \tag{3.1.2.2}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$(\lambda+\mu)_{n-1}=(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1),...,(\lambda+\mu+n-2)\ge(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}$$

eşitsizliği her $n\in\mathbb{N}$ için sağlanır. Bu eşitsizlik aşağıdaki eşitsizliğe denktir

$$\frac{1}{(\lambda+\mu)_{n-1}}\le\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}},n\in\mathbb{N}. \tag{3.1.2.3}$$

(3.1.2.2) ve (3.1.2.3)'ü uygularsak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}\frac{1}{(n-2)!}=\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{\lambda+\mu} \tag{3.1.2.4}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}\leq\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\left(e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right) \tag{3.1.2.5}$$

eşitsizliğine sahibiz.

Böylece, (3.1.2.1), (3.1.2.4) ve (3.1.2.5) ‘den

$$\left|1-\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\leq\frac{\lambda+\mu+2}{\lambda+\mu}e^{1/(\lambda+\mu+1)}-\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}$$

elde edilir.

Kolayca görülür ki yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin üstten 1 sayısı ile sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$2(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}+1\geq 0 \tag{3.1.2.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\varphi(x)=2x+1-(x+2)e^{1/(x+1)}.$$

Her $x>0$ için $\varphi'(x)=2-\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}e^{1/(x+1)}>0$ olduğu bilgisayar programı yardımıyla ya da fonksiyonun grafiğinden görülebilir (bknz şekil 1). $\varphi(x)$ fonksiyonunun türevi pozitif olduğundan $\varphi(x)$ fonksiyonu $x>0$ için kesin monoton artan fonksiyondur.

Ayrıca, (3.1.1.4) denkleminin kökünün $x_1\cong 2.4898$ olduğunu basit bilgisayar programı yardımıyla görebiliriz. Böylece $x>x_1$ olduğu durumda $\varphi(x)>0$ ’dır (bknz Şekil 2).

Bu ise teoremin hipotezinin aynısıdır.

Böylece, Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamlandı.

Aşağıdaki teorem $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun konveksliği ve ünivalentliği üzerinedir.

<u>Teorem 3.1.2.2:</u> $x_2 \cong 4.8523$ (3.1.1.5) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\lambda+\mu > x_2$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu U 'da konveks ve ünivalenttir.

<u>İspat:</u> İlk olarak teoremin birinci hükmünü ispatlayalım. Bunun için $\operatorname{Re}\left(1+\dfrac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right) > 0$ olduğunu göstermek yetecektir. Bilindiği üzere, eğer $\left|\dfrac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right| < 1$ ise bu koşul sağlanır. O halde, her $z \in U$ için

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right| < 1$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(3.1.2.1)'e benzer şekilde

$$\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right| = \left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)z^{n-1}}{(n-1)!}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{nz^{n-1}}{(n-1)!}}\right| < \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)}{(n-1)!}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!}} \qquad (3.1.2.7)$$

elde ederiz. Buradan, görüldüğü üzere eğer,

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)}{(n-1)!}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!}}<1 \tag{3.1.2.8}$$

ise $\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right|<1$ olacaktır. Ayrıca, (3.1.2.8) eşitsizliği

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!}<1 \tag{3.1.2.9}$$

eşitsizliğine denktir.

Kolayca

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-3)!}+3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}\end{aligned} \tag{3.1.2.10}$$

yazarız.

(3.1.2.4)'e benzer şekilde yazılır

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-3)!}\le\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)}. \tag{3.1.2.11}$$

(3.1.2.4), (3.1.2.5) ve (3.1.2.11) yardımıyla (3.1.2.10)'dan

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n(n-1)}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{n}{(n-1)!}\\&\le\frac{(\lambda+\mu+1)^2+3(\lambda+\mu)+4}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)}e^{1/(\lambda+\mu+1)}-\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\end{aligned} \tag{3.1.2.12}$$

elde ederiz.

Kolayca görebiliriz ki (3.1.2.12)'nin sağ tarafının 1 sayısından küçük olması için

$$2(\lambda+\mu)^2+3(\lambda+\mu)+1-\left[\left((\lambda+\mu)^2+5(\lambda+\mu)+5\right)\right]e^{1/(\lambda+\mu+1)}>0 \qquad (3.1.2.13)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Şimdi $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\psi(x)=2x^2+3x+1-\left(x^2+5x+5\right)e^{1/(x+1)}.$$

Her $x>1$ için $\psi'(x)=4x+3-\dfrac{2x^3+8x^2+7x}{(x+1)^2}e^{1/(x+1)}>0$ olduğunu bilgisayar programı yardımıyla görebiliriz (ayrıca, bknz şekil 3). Buna göre, her $x>1$ için $\psi(x)$ fonksiyonu kesin artan fonksiyondur. Ayrıca, (3.1.1.5) denkleminin kökünün $x_2\cong 4.8523$ olduğunu bilgisayar programı yardımıyla görebiliriz. Bundan dolayı, $x>x_2$ iken $\psi(x)>0$'dır (bknz şekil 4).

Bu ise teoremin hipotezinin aynısıdır. Böylece, teoremin birinci kısmı ispatlanmış oldu.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

Her $z\in U$ için

$$\left(1-|z|^2\right)\left(\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right)\le\left|\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right|$$

sağlandığından teoremin birinci kısmını uygulayarak, (3.1.2.13) sağlanırsa

$$\left(1-|z|^2\right)\left(\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)''}{\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}\right)<1$$

olduğunu elde ederiz. Böylece, Lemma 2.1.2 gereğince $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Bununla Teorem 3.1.2.2 ispatlandı.

Şimdi, $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonunun yıldızıllığı üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

<u>Teorem 3.1.2.3:</u> $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu > x_1$ ise $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ fonksiyonu U 'da yıldızıldır.

<u>İspat:</u> Teoremi ispatlamak için her $z \in U$ için $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right) > 0$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $\left|1 - \dfrac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(3.1.2.1) ve (3.1.2.7)'ye benzer olarak

$$\left|1 - \frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right| = \left|\frac{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z) - z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{n-1}{(n-1)!}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{1}{(n-1)!}} \tag{3.1.2.14}$$

elde ederiz.

(3.1.2.14) eşitsizliğinden görüldüğü üzere eğer,

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{n-1}{(n-1)!}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \frac{1}{(n-1)!}} < 1 \tag{3.1.2.15}$$

ise, dolayısıyla,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}<1 \qquad (3.1.2.16)$$

eşitsizliği sağlanırsa $\left|1-\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right|<1$ olacaktır.

(3.1.2.4) ve (3.1.2.5)'i uygulayarak

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda n+\mu)}\frac{1}{(n-1)!}\\&\leq\frac{\lambda+\mu+2}{\lambda+\mu}e^{1/(\lambda+\mu+1)}-\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}\end{aligned} \qquad (3.1.2.17)$$

elde ederiz.

(3.1.2.16) eşitsizliğinin sağlanması için (3.1.2.17) eşitsizliğinin sağ tarafının 1'den küçük olması, yani

$$2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}>0 \qquad (3.1.2.18)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Sonuç olarak eğer, (3.1.2.18) sağlanırsa $\left|1-\frac{z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}\right|<1$ eşitsizliği sağlanacaktır.

Bununla Teorem 3.1.2.3'ün ispatı tamamlandı.

Not 3.1.2.1: Belirtelim ki 1. ve 2. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği Prajapat [1] tarafından incelendi. 3. ve 4. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği tezimizdekine benzer şekilde incelenebilir.

3.2. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarını İçeren İntegral Operatörlerin Bazı Özellikleri

3.2.1. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonları ile Temsil Edilen İntegral Operatörler İçin Bazı Yeterli Koşullar

Bu bölümde $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonlarını içeren integral dönüşümler için bazı yeterli koşullar verildi.

$$G_1(\lambda,\mu;z)=\int_0^z \frac{W_{\lambda,\mu}^{(3)}(t)}{t}dt \text{ ve } G_2(\lambda,\mu;z)=\int_0^z \frac{W_{\lambda,\mu}^{(4)}(t)}{t}dt,\ z\in U \qquad (3.2.1.1)$$

olsun. Burada $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ ve $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonları sırasıyla (1.2.3.4) ve (1.2.3.5)'de tanımlanan fonksiyonlardır. Not edelim ki $G_1, G_2 \in T$.

Bir sonraki teoremlerde $W_{\lambda,\mu}^{(3)}(z)$ve $W_{\lambda,\mu}^{(4)}(z)$ fonksiyonlarının $T(\alpha,\beta)$sınıfında olması için yeterli koşulları vereceğiz.

<u>Teorem 3.2.1.1:</u> $\lambda\ge 1$, $\mu\ge\mu_0=0.462$ ve aşağıdaki

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\mu+\{(1-(1-\beta)\alpha)(\mu+2)+1-\alpha\beta\}(\mu+1)\\&-\{(1-(1-\beta)\alpha)(\mu+1)^2+(1-\alpha\beta)(\mu+1)\}e^{1/(\mu+1)}\ge 0\end{aligned}$$

eşitsizlik sağlansın. Bu durumda, $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $T(\alpha,\beta)$ $\alpha\in[0,1)$ ve $\beta\in[0,1]$ sınıfına aittir.

<u>İspat:</u> Teorem 3.2.1.1'in ispatı Teorem 3.1.1.2'nin ispatına benzerdir. Gerçekten de $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonunun tanımından kolaca yazarız:

$$G_1(\lambda,\mu;z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\mu)} \frac{z^n}{n!} = W_{\lambda,\mu-\lambda}^{(4)}(z).$$

Bu durumda Teorem 3.1.2.1'in ispatını tamamlamak için Teorem 3.1.1.2'de μ yerine $\mu-\lambda$ yazmak yeterlidir.

Teorem 3.2.1.1'de $\beta = 0$ alır, (1.2.2.5)'deki birinci bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.2.1.1:</u> Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu \geq \mu_0 = 0.462$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)\left[(\mu+1)^2 + 2\mu+1\right] + \mu+1-\left[(1-\alpha)(\mu+1)+1\right](\mu+1)e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizlik sağlanırsa $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $TS^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.2.1.1'de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.1.2:</u> Eğer $\lambda \geq 1$ve $\mu \geq x_3$ ise $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu TS^* sınıfına aittir. Burada, $x_3 \cong 1.7703$'ün (3.1.1.7) denklemin nümerik köküdür.

<u>İspat:</u> Sonuç 3.2.1.1'in ispatı Sonuç 3.1.1.6'nın ispatına çok benzerdir. Bu yüzden Sonuç 3.2.1.1'in ispatını vermeye lüzum yoktur.

Teorem 3.2.1.1'de $\beta = 1$ alır, (1.2.2.5)'deki ikinci bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.2.1.3:</u> Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu \geq \mu_0 = 0.462$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(2\mu+1)+(\mu+1)(\mu+2)-(\mu+2-\alpha)(\mu+1)e^{1/(\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $TC(\alpha), \alpha\in[0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.2.1.3'de $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1.4: $x_3 \cong 1.7703$ (3.1.1.7) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda\geq 1$ ve $\mu\geq x_3$ ise $G_1(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu TC sınıfındandır.

İspat: Sonuç 3.2.1.4'ün ispatı Sonuç 3.1.1.8'in ispatına benzer olduğundan bu sonucun ispatını vermeyeceğiz.

Teorem 3.2.1.2: $\lambda\geq 1$, $\mu>0$ olsun ve aşağıdaki eşitsizlik sağlansın

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)(\lambda+\mu)+\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)+(\lambda+\mu+1)\beta\\&-\left\{\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+1)+\beta\right\}(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}\geq 0.\end{aligned} \tag{3.2.1.2}$$

Bu durumda, $G_2(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $T(\alpha,\beta)$, $\alpha\in[0,1)$ ve $\beta\in[0,1]$ sınıfına aittir.

İspat: Teoremi ispatlamak için

$$G_2(\lambda,\mu;z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\lambda+\mu)}\frac{z^n}{nn!}$$

olduğundan, Lemma 2.1.3 gereğince

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)(\beta(n-1)+1)\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda(n-1)+\lambda+\mu)}\frac{1}{nn!}\leq 1-\alpha \tag{3.2.1.3}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$L_3(\lambda,\mu;\alpha,\beta)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}\frac{1}{nn!}$$

olsun. Aşağıdaki eşitlik açıktır

$$(n-\alpha)\left(\beta(n-1)+1\right)=n^2\beta+(1-\alpha\beta)n-n\beta-(1-\beta)\alpha\,.$$

Bu eşitlikten basit hesaplama yardımıyla

$$L_3(\lambda,\mu;\alpha,\beta)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\beta}{(n-1)!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1-\alpha\beta}{n!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{nn!}\frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda(n-1)+\lambda+\mu\right)}$$

elde ederiz.

(3.1.1.2) ve (3.1.1.3)'ü μ yerine $\lambda+\mu$ alarak kullanırsak

$$L_3(\lambda,\mu;\alpha,\beta)\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta}{(n-1)!}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha\beta}{n!}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\alpha}{nn!}\frac{1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)^{n-2}}=-\left\{\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+2)+\beta(\lambda+\mu+1)\right\}$$
$$+\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+1)+\beta\right\}(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{\left\{\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+1)+\beta\right\}(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}\right.$$
$$\left.-\left\{\left[2-(1+\beta)\alpha\right](\lambda+\mu+2)+\beta\right\}(\lambda+\mu+1)\right\}\le1-\alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.2.1.2) eşitsizliğinin sağlanacağı kolayca görülür.
Böylece, Teorem 3.2.1.2 ispatlandı.

Teorem 3.2.1.2'de $\beta=0$ alır, (1.2.2.5)'deki ilk bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.2.1.5: Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu>0$ ve aşağıdaki

$$(1-\alpha)(\lambda+\mu)+(2-\alpha)(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)-(2-\alpha)(\lambda+\mu+1)^2 e^{1/(\lambda+\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizlik sağlanırsa $G_2(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $TS^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.2.1.5'de $\alpha=0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1.6: Eğer $\lambda \geq 1$ ve $\lambda+\mu \geq x_4$ ise $G_2(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu TS^* sınıfına aittir. Burada, $x_4 \cong 1.1728$

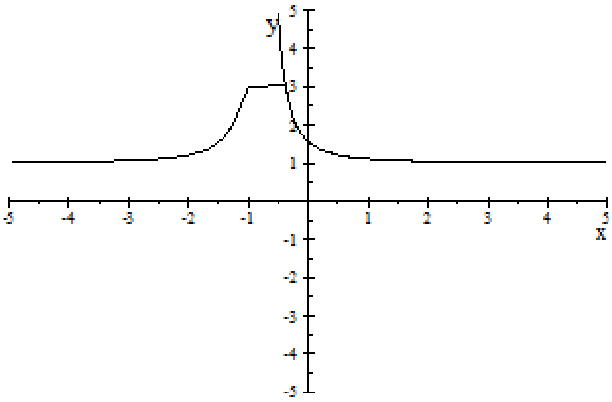
$$2x^2+7x+4-2(x+1)^2 e^{1/(x+1)}=0 \tag{3.2.1.4}$$

denkleminin nümerik köküdür.

İspat: $\sigma(x)=2x^2+7x+4-2(x+1)^2 e^{1/(x+1)}$, $x>0$ olsun. Basit hesaplama ile

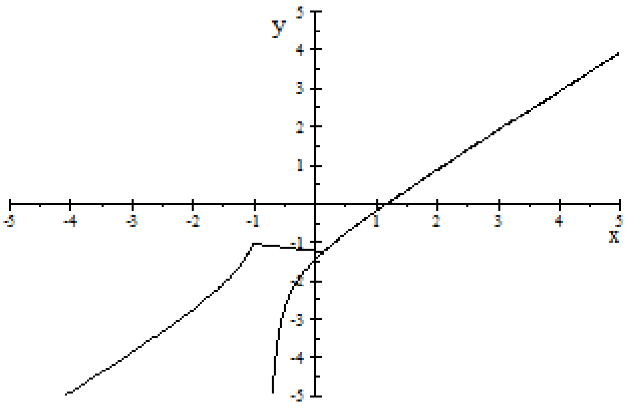
$$\sigma'(x)=4x+7-2(2x+1)e^{1/(x+1)}$$

buluruz. Türev fonksiyonunun grafiğinden $\sigma'(x)>0$ olduğu görülür (bknz şekil 7).



Sekil 7. $\sigma'(x) = 4x + 7 - 2(2x+1)e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

O halde, bu fonksiyon kesin artan fonksiyondur. Ayrıca, $\sigma(x)$ fonksiyonunun grafiğinden (bkz şekil 8) ya da (3.2.1.4) denkleminin bilgisayar çözümünden $x_4 \cong 1.1728$'in bu denklemin nümerik kökü olduğu görülür.



Şekil 8. $\sigma(x) = 2x^2 + 7x + 4 - 2(x+1)^2 e^{1/(x+1)}$ fonksiyonunun grafiği.

Buna göre, her $\lambda + \mu \geq x_4$ için

$$(\lambda+\mu) + 2(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2) - 2(\lambda+\mu+1)^2 e^{1/(\lambda+\mu+1)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece, Sonuç 3.2.1.6 ispatlandı.

Teorem 3.2.1.2'de $\beta = 1$ alır, (1.2.2.5)'deki ikinci bağlantıyı kullanırsak aşağıdaki sonuca varırız.

Sonuç 3.2.1.7: Eğer $\lambda \geq 1$, $\mu > 0$ ve aşağıdaki

$$\begin{gathered}(1-\alpha)\left[2(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu+2)+\lambda+\mu\right]+\lambda+\mu+1 \\ -(\lambda+\mu+1)\left[2(1-\alpha)(\lambda+\mu+1)+1\right]e^{1/(\lambda+\mu+1)} \geq 0\end{gathered}$$

eşitsizlik sağlanırsa $G_2(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu $TC(\alpha), \alpha \in [0,1)$ sınıfına aittir.

Sonuç 3.2.1.7'de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1.8: Eğer, $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu \geq x_5$ ise $G_2(\lambda,\mu;z)$ fonksiyonu TC sınıfına aittir. Burada, $x_5 \cong 2.2791$

$$2x^2+8x+5-\left(2x^2+5x+3\right)e^{1/(x+1)}=0$$

denkleminin nümerik köküdür.

İspat: Sonuç 3.2.1.8'in ispatı yukarıdaki sonuçların ispatına çok benziyor. Bu yüzden sonucun ispatını vermiyoruz.

3.2.2. Normalize Edilmiş Wright Fonksiyonlarını İçeren İntegral Operatörlerin Ünivalentliği, Yıldızıllığı ve Konveksliği

Bu bölümde, biz normalize edilmiş Wright fonksiyonlarını içeren bazı integral operatörlerin ünivalentliğini inceledik.

$$G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(t)}{t}\right)^{q_k}dt\right\}^{1/p}, \qquad (3.2.2.1)$$
$$\lambda>-1,\mu_k>0,\ k=1,2,\ldots,n,z\in U$$

olsun. Burada, $W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)$ fonksiyonu $\mu\equiv\mu_k, k=1,2,\cdots,n$ olmak üzere (1.2.3.2) ile tanımlanan 1. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonudur.

$G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.1: $\lambda\geq 1$, n bir doğal sayı $q_1,q_2,\ldots,q_n$ sıfır olmayan kompleks sayılar ve $\mu>x_0$ olsun. Burada, $\mu=\min\{\mu_k:k=1,2,\ldots,n\}$ ve $x_0\cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin köküdür. Ayrıca, x_0, p ve c, $\mathrm{Re}(p)>0$ ve

$$|c|\leq 1-\frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{q_k}{p}\right|$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsun. Bu durumda, (3.2.2.1) ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

İspat: Öncelikle $G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\int_0^z\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(t)}{t}\right)^{q_k}dt\,. \qquad (3.2.2.2)$$

Her $k=1,2,\ldots,n$ için, $W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}\in A$ olduğundan, $G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}\in A$ olduğu kolayca gösterilebilir.

(3.2.2.2)'yi kullanarak $G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazarız

$$G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\left(G_{\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(t)\right)'dt\right\}^{1/p}.$$

Basit hesaplamayla,

$$\left(G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)}{z}\right)^{q_k} \qquad (3.2.2.3)$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca,

$$\frac{\left(G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)''}{\left(G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'}=\sum_{k=1}^{n}q_k\,\frac{z\left(W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)\right)'-W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)}{zW_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)},$$

yani

$$\frac{\left(G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)''}{\left(G_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)\right)'}=\sum_{k=1}^{n}q_k\left(\frac{z\left(W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)\right)'}{W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)}-1\right)$$

yazılabilir.

Bu durumda, (2.1.9)'u kullanarak her μ_k, $k=1,2,\ldots,n$ için elde ederiz:

$$\left|\frac{\left(G^{q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)''}{\left(G^{q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)'}\right| \le \sum_{k=1}^{n}|q_k|\left|\frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'}{W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)}-1\right| \le \sum_{k=1}^{n}|q_k|\frac{e^{1/(\mu_k+1)}}{(2\mu_k+1)-(\mu_k+1)e^{1/(\mu_k+1)}}.$$

Şimdi $g:(1.2581,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$g(x)=\frac{e^{1/(x+1)}}{(2x+1)-(x+1)e^{1/(x+1)}}. \tag{3.2.2.4}$$

Bu fonksiyonun azalan olduğu kolaylıkla görülür. Buna göre, $\mu=\min\{\mu_k : k=1,2,\dots,n\}$ için

$$\frac{e^{1/(\mu_k+1)}}{(2\mu_k+1)-(\mu_k+1)e^{e^{1/(\mu_k+1)}}} \le \frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}. \tag{3.2.2.5}$$

Üçgen eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\left|c|z|^{2p}+\left(1-|z|^{2p}\right)\frac{\left(G^{p,q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)''}{p\left(G^{p,q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)'}\right| \le |c|+\frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{q_k}{p}\right|.$$

Görüldüğü üzere eğer,

$$|c|\le 1-\frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{q_k}{p}\right|$$

ise

$$\left|c|z|^{2p}+\left(1-|z|^{2p}\right)\frac{\left(G^{p,q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)''}{p\left(G^{p,q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)'}\right|\le 1$$

olacaktır.

Böylece, (3.2.2.1) ile tanımlanan $G^{p,q_1,q_2,\dots,q_n}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)$ fonksiyonu Lemma 2.1.4 gereğince U 'da ünivalenttir.

Bununla, Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

Teorem 3.2.1.1'de $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2.1: $\lambda \geq 1$, n bir doğal sayı q sıfır olmayan kompleks sayı ve $\mu > x_0$ olsun. Burada, $\mu = \min\{\mu_k : k = 1,2,\dots,n\}$ ve $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin köküdür. Ayrıca, p ve c, $\operatorname{Re}(p) > 0$ ve

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{q}{p}\right| \frac{ne^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Bu durumda,

$$G^{p,q}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z) = \left\{ p\int_0^z t^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{W^{(1)}_{\lambda.\mu_k}(t)}{t} \right)^q dt \right\}^{1/p}$$

ile tanımlanan integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Teorem 3.2.2.1'de $n = 1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2.2: $\lambda \geq 1$ ve $\mu > x_0$ burada $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olsun. Ayrıca, p ,q ve c, $\operatorname{Re}(p) > 0$, $|q| < 1$ ve

$$|c| \leq 1 - \frac{|q| e^{1/(\mu+1)}}{|p| \left| (2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)} \right|}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Bu durumda,

$$G_{\lambda,\mu}^{p,q}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\left(\frac{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(t)}{t}\right)^q dt\right\}^{1/p}$$

ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{p,q}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Sonuç 3.2.2.2'de $q=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.2.3:</u> $\lambda\geq 1$ ve $\mu>x_0$ olsun. Burada $x_0\cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin köküdür. Ayrıca, p ve c, $\operatorname{Re}(p)>0$, $|c|<1$ ve

$$|c|\leq 1-\frac{e^{1/(\mu+1)}}{|p|\left|(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}\right|}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Bu durumda,

$$G_{\lambda,\mu}^{p}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-2}W_{\lambda.\mu}^{(1)}(t)dt\right\}^{1/p} \tag{3.2.2.6}$$

ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{p}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Şimdi aşağıdaki integral operatörü ele alalım

$$F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{p,q_1,q_2,\ldots,q_n}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{\lambda,\mu_k}^{(2)}(t)}{t}\right)^{q_k}dt\right\}^{1/p}, \tag{3.2.2.7}$$
$$\lambda>-1,\lambda+\mu_k>0,k=1,2,\ldots,n,z\in U.$$

Burada, $W_{\lambda,\mu_k}^{(2)}(z)$ fonksiyonu (1.2.3.3) ile tanımlanan 2. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonudur.

Aşağıdaki teorem $F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}^{p,q_1,q_2,...,q_n}(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği üzerinedir.

<u>Teorem 3.2.2.2:</u> $\lambda \geq 1$, n bir doğal sayı $q_1, q_2, ..., q_n$ sıfır olmayan kompleks sayılar ve $\lambda + \mu > x_0$ olsun. Burada $\mu = \min\{\mu_k : k = 1, 2, ..., n\}$ $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin köküdür. Ayrıca, p ve c, $\operatorname{Re}(p) > 0$, $|c| < 1$ ve

$$|c| \leq 1 - \frac{(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{q_k}{p}\right|$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar. Bu durumda, (3.2.2.7) ile tanımlanan $F_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}^{p,q_1,q_2,...,q_n} : U \to \mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

<u>İspat:</u> Teorem 3.2.2.2'nin ispatı Teorem 3.2.2.1'in ispatına çok benzediğinden ispatını vermiyoruz.

Teorem 3.2.2.2'de $q_1, q_2, ..., q_n = q$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

<u>Sonuç 3.2.2.4:</u> $\lambda \geq 1$, n bir doğal sayı q sıfır olmayan kompleks sayılar ve $\lambda + \mu > x_0$ olsun. Burada, $\mu = \min\{\mu_k : k = 1, 2, ..., n\}$ $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin köküdür. Ayrıca , p ve c, $\operatorname{Re}(p) > 0$, $|c| < 1$ ve

$$|c| \leq 1 - \left|\frac{q}{p}\right| \frac{n(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar.
Bu durumda,

$$F^{p,q}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W^{(2)}_{\lambda,\mu_k}(t)}{t}\right)^{q_k}dt\right\}^{1/p}$$

ile tanımlanan $F^{p,q}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U ’da ünivalenttir.

Teorem 3.2.2.2’de $n=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2.5: $x_0\cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda\geq 1$ ve $\lambda+\mu>x_0$ olsun. Ayrıca , p,q ve c, $\operatorname{Re}(p)>0$, $|c|<1$ ve

$$|c|\leq 1-\left|\frac{q}{p}\right|\frac{(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar.
Bu durumda,

$$F^{p,q}_{\lambda,\mu}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\left(\frac{W^{(2)}_{\lambda,\mu}(t)}{t}\right)^{q}dt\right\}^{1/p}$$

ile tanımlanan $F^{p,q}_{\lambda,\mu}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U ’da ünivalenttir.

Sonuç 3.2.2.5’de $q=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.2.6: $x_0\cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda\geq 1$ ve $\lambda+\mu>x_0$ olsun. Ayrıca, p ve c, $\operatorname{Re}(p)>0$, $|c|<1$ ve

$$|c|\leq 1-\frac{(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)}{|p|\left[(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu+1)\left(e^{1/(\mu+1)}-1\right)\right]}$$

koşullarını sağlayan kompleks sayılar olsunlar.
Bu durumda,

$$F_{\lambda,\mu}^{p}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-2}W_{\lambda,\mu}^{(2)}(t)\,dt\right\}^{1/p}$$

ile tanımlanan $F_{\lambda,\mu}^{p}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Şimdi aşağıdaki integral operatörü göz önünde bulunduralım

$$H_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n}^{n,\alpha}(z)=\left\{(n\alpha+1)\int_0^z\left(\prod_{k=1}^{n}W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(t)\right)^{\alpha}dt\right\}^{1/(n\alpha+1)}, \qquad (3.2.2.8)$$
$$\lambda>-1,\mu_k>0,k=1,2,\ldots,n,z\in U.$$

Burada, $W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)$ fonksiyonu (1.2.3.2) ile tanımlanan 1. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonudur.

Aşağıdaki teorem (3.2.2.8) ile tanımlanan integral operatörün U açık birim diskte ünivalentliği için bir yeterli koşul verir.

<u>Teorem 3.2.2.3:</u> $\lambda\geq 1$ ve n bir doğal sayı ve $\mu>x_0(n)$ olsun. Burada, $\mu=\min\{\mu_k:k=1,2,\ldots,n\}$ ve $x_0(n)$

$$2x-(x+n+1)e^{1/(x+1)}+1=0$$

denkleminin köküdür. Ayrıca, α ve $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ ve

$$|\alpha|\leq 1-\frac{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}}{ne^{1/(\mu+1)}}\operatorname{Re}(\alpha)$$

koşulunu sağlayan kompleks sayı olsun. Bu durumda, (3.2.2.8) ile tanımlanan $H^{n,\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

<u>İspat:</u> $H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu

$$H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)=\int_0^z\prod_{k=1}^n\left(\frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(t)}{t}\right)^{\alpha}dt \tag{3.2.2.9}$$

ile tanımlansın. $H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}\in A$ olduğunu çok kolay görebiliriz.

Basit hesaplamalarla

$$\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)'=\prod_{k=1}^n\left(\frac{W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)}{z}\right)^{\alpha}, \tag{3.2.2.10}$$

$$\frac{\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)''}{\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)'}=\sum_{k=1}^n\alpha\,\frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'-W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)}{zW^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)},$$

yani

$$\frac{z\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)''}{\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)'}=\sum_{k=1}^n\alpha\left(\frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'}{W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)}-1\right)$$

elde ederiz.

(2.1.9)'u kullanarak her μ_k, $k=1,2,...,n$ için

$$\left|\frac{z\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)''}{\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)\right)'}\right|\le\sum_{k=1}^n|\alpha|\left|\frac{z\left(W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)\right)'}{W^{(1)}_{\lambda,\mu_k}(z)}-1\right|\le\sum_{k=1}^n|\alpha|\frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu_k+1)-(\mu_k+1)e^{1/(\mu+1)}}$$

elde ederiz.

Diğer taraftan, (3.2.2.5)'i kullanarak her $z\in U$ için yazarız:

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re}(\alpha)}}{\operatorname{Re}(\alpha)}\left|\frac{z\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)''}{\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)\right)'}\right| \le \frac{|\alpha| n}{\operatorname{Re}(\alpha)} \frac{e^{1/(\mu+1)}}{(2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}} .$$

Teoremin hipotezi altında bu son ifade bir sayısı ile sınırlıdır.

Öte yandan, $H^{n,\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}$ fonksiyonu

$$H^{n,\alpha}_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(z)=\left\{(n\alpha+1)\int_0^z t^{n\alpha}\left(H^{\alpha}_{\lambda,\mu_1,\dots,\mu_n}(t)\right)' dt\right\}^{1/(n\alpha+1)}$$

şeklinde yazılabildiğinden ve $\operatorname{Re}(n\alpha+1)>\operatorname{Re}(\alpha)$ olduğundan Teorem 2.1.1'i uygulayarak gerekli sonucu elde ederiz.

Böylece, Teorem 3.2.2.3 ispatlandı.

Teorem 3.2.2.3'te $n=1$ alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.2.7: $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda \ge 1$ ve $\mu > x_1$ ayrıca α, $\operatorname{Re}(\alpha)>0$ ve

$$e^{1/(\mu+1)}|\alpha| \le \left((2\mu+1)-(\mu+1)e^{1/(\mu+1)}\right)\operatorname{Re}(\alpha)$$

koşullarını sağlayan bir kompleks sayı olsun.

Bu durumda,

$$H^{\alpha}_{\lambda,\mu}(z)=\left\{(\alpha+1)\int_0^z \left(W^{(1)}_{\lambda,\mu}(t)\right)^{\alpha} dt\right\}^{1/(\alpha+1)}$$

ile tanımlanan $H^{\alpha}_{\lambda,\mu}: U \to \mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Sonuç 3.2.2.7'de $\alpha = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.2.2.8: $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\mu > x_1$ olsun. Bu durumda,

$$H_{\lambda,\mu}(z) = \sqrt{2}\left\{\int_0^z W_{\lambda,\mu}^{(1)}(t)\right\}^{1/2}$$

ile tanımlanan $H_{\lambda,\mu} : U \to \mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Not 3.2.2.1: (3.2.2.8) integral operatöründe $W_{\lambda,\mu_k}^{(1)}(z)$ fonksiyonu yerine 2. çeşit normalize edilmiş $W_{\lambda,\mu_k}^{(2)}(t)$ fonksiyonu alınırsa benzer sonuçlar ispatlanabilir.

Son olarak

$$\Phi_{\lambda,\mu}^{q}(z) = \left\{q\int_0^z t^{q-1}\left(e^{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(t)}\right)^q dt\right\}^{1/q}, \lambda > -1, \lambda + \mu > 0, z \in U \qquad (3.2.2.11)$$

integral operatörünün U açık birim diskte univalentliği için bir yeterli koşul içeren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.4: $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $q \in \mathbb{C}$, $\lambda \geq 1$ ve $\mu > x_0$ olsun. Eğer, $\operatorname{Re}(q) \geq 1$ ve aşağıdaki

$$|q| \leq \frac{3\sqrt{3}\mu}{2\left[(\mu+2)e^{1/(\mu+1)} - 1\right]} \qquad (3.2.2.12)$$

koşulu sağlanırsa (3.2.2.11) ile tanımlanan $\Phi_{\lambda,\mu}^{q} : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

İspat: (2.1.10)'dan her $z \in U$ için

$$\left| z\left(W_{\lambda,\mu}^{(1)}(z)\right)' \right| \le 1+\frac{1}{\mu}\left\{(\mu+2)e^{1/(\mu+1)}-(\mu+1)\right\}$$

yazarız. Ayrıca,

$$a=1+\frac{1}{\mu}\left\{(\mu+2)e^{1/(\mu+1)}-(\mu+1)\right\}$$

alırsak (3.2.2.12) sağlandığında $2a|q|\le 3\sqrt{3}$ olacağı kolayca görülür.

Böylece, teoremin hipotezi altında Lemma 2.1.3'ün koşullarının tamamı sağlanır. O halde, $\Phi_{\lambda,\mu}^{q}:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Bununla, Teorem 3.2.2.4 ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2.4'te $q=1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

<u>Sonuç 3.2.2.9:</u> $x_6 \cong 1.6692$ aşağıdaki denklemin kökü olmak üzere $\lambda \ge 1$ ve $\mu > x_6$ olsun

$$3\sqrt{3}x-2(x+2)e^{1/(x+1)}+2=0\,. \qquad (3.2.2.13)$$

Bu durumda,

$$\Phi_{\lambda,\mu}(z)=\int_0^z e^{W_{\lambda,\mu}^{(1)}(t)}dt$$

ile tanımlanan $\Phi_{\lambda,\mu}:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Şimdi,

$$D_{\lambda,\mu}^{q}(z)=\left\{q\int_0^z t^{q-1}\left(e^{W_{\lambda,\mu}^{(2)}(t)}\right)^q dt\right\}^{1/q}, \lambda>-1, \lambda+\mu>0, z\in U \qquad (3.2.2.14)$$

olsun.

(3.2.2.14) fonksiyonu için ispatı Teorem 3.2.2.4'ün ispatına benzeyen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.5: $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $q \in \mathbb{C}$, $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu > x_0$ olsun. Eğer, $\operatorname{Re}(q) \geq 1$ ve

$$|q| \leq \frac{3\sqrt{3}(\lambda+\mu)}{2\left[(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right]}$$

koşulu sağlanırsa (3.2.2.14) ile tanımlanan $D^q_{\lambda,\mu} : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Teorem 3.2.2.5'de $q = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.2.10: $x_5 \cong 1.6692$ (3.2.2.13) denklemin kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$ ve $\lambda + \mu > x_5$ olsun. Bu durumda,

$$D_{\lambda,\mu}(z) = \int_0^z e^{W^{(2)}_{\lambda,\mu}(t)} dt$$

ile tanımlanan $D_{\lambda,\mu} : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Şimdi

$$G^q_{\lambda,\mu}(z) = \int_0^z \left(\frac{W^{(5)}_{\lambda,\mu}(t)}{t} \right)^q dt, \ \lambda > -1, \ \lambda + \mu > 0, \ z \in U \tag{3.2.2.15}$$

integral operatörünü alalım.

Bu integral operatörün ünivalentliği üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.6: $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda > -1$, $\lambda + \mu > x_0$ koşulları sağlansın. Ayrıca, q

$$|q| \leq \frac{\left(2(\lambda+\mu)+1\right)-(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{e^{1/(\lambda+\mu+1)}} \tag{3.2.2.16}$$

eşitsizliğini sağlayan bir kompleks sayı olsun. Bu durumda, (3.2.2.15) ile tanımlanan $G^q_{\lambda,\mu} : U \to \mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

İspat: $W^{(5)}_{\lambda,\mu} \in A$ olduğundan $G^q_{\lambda,\mu}(0) = \left(G^q_{\lambda,\mu}(0)\right)' - 1 = 0$, yani $G^q_{\lambda,\mu} \in A$ olduğu açıktır. Öte yandan basit hesaplamayla

$$\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)' = \left(\frac{W^{(5)}_{\lambda,\mu}(z)}{z}\right)^q \quad \text{ve} \quad \frac{z\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)'} = q\left[\frac{z\left(W^{(5)}_{\lambda,\mu}(z)\right)'}{W^{(5)}_{\lambda,\mu}(z)} - 1\right]$$

olduğu kolayca görülür.

Lemma 2.1.5'in birinci hükmünü uygularsak her $z \in U$ ve $\lambda + \mu > x_0$ için

$$\left|\frac{z\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)'}\right| \leq \frac{|q|e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}} \tag{3.2.2.17}$$

elde ederiz. Burada, $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin nümerik köküdür.

Buna göre, her $z \in U$ ve $\lambda + \mu > x_0$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{z\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)'}\right| \leq \left(1-|z|^2\right)\frac{|q|e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}}.$$

Açıktır ki (3.2.2.16) sağlanırsa yukarıdaki ifadenin sağ tarafı 1'den küçük olacaktır. Dolayısıyla,

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{z\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)''}{\left(G^q_{\lambda,\mu}(z)\right)'}\right| \leq 1$$

elde ederiz. Böylece, Lemma 2.1.2 gereğince $G^q_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Bununla, Teorem 3.2.2.6 ispatlandı.

Teorem 3.2.2.6'da $q=1$ alırsak aşağıdaki sonuca varırız.

<u>Sonuç 3.2.2.11:</u> $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$, $\lambda+\mu > x_1$ koşulları sağlanırsa

$$G_{\lambda,\mu}^{q}(z)=\int_0^z \frac{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)}{t}dt,\ z\in U$$

ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{q}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Özel durumlarda, Teorem 3.2.2.6'da $\lambda=1$, $\mu\equiv\mu+1$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.2.12:</u> Eğer $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin nümerik kökü , $\mu > x_0-2$ ve q

$$|q|\leq \frac{(2\mu+5)-(\mu+3)e^{1/(\mu+3)}}{e^{1/(\mu+3)}}$$

koşulunu sağlayan bir kompleks sayı ise

$$G_{\mu}^{q}(z)=\int_0^z\left(\frac{g_\mu(-t)}{t}\right)^q dt,\ z\in U$$

şeklinde tanımlanan $G_{\mu}^{q}:U\to\mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Özel durumda, Sonuç 3.2.2.12'de $q=1$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde edilir.

Sonuç 3.2.2.13: $x_1 \cong 2.4898$ (3.1.1.4) denkleminin kökü olmak üzere $\mu > x_1 - 2$ koşulu sağlanırsa

$$G_\mu(z) = \int_0^z \frac{g_\mu(-t)}{t} dt, \; z \in U$$

şeklinde tanımlanan $G_\mu : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Şimdi,

$$G_{\lambda,\mu}^{p,q}(z) = \left\{ p \int_0^z t^{p-1} \left(\frac{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(t)}{t} \right)^q dt \right\}^{1/p}, \; \lambda > -1, \; \lambda + \mu > 0, \; z \in U \tag{3.2.2.18}$$

integral operatörünü göz önünde bulunduralım.

$G_{\lambda,\mu}^{p,q}(z)$, $z \in U$ fonksiyonunun ünivalentliği üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.7: $x_0 \cong 1.2581$ (2.1.1) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda \geq 1$, $\lambda + \mu > x_0$ koşulları sağlansın. Ayrıca, p, q ve c kompleks sayılarının $\operatorname{Re}(p) > 0$, $|c| < 1$ ve

$$|c| \leq 1 - \frac{|q| e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{|p| \left[2(\lambda+\mu) + 1 - (\lambda+\mu+1) e^{1/(\lambda+\mu+1)} \right]} \tag{3.2.2.19}$$

koşullarını sağladığını varsayalım. Bu durumda (3.2.2.18) ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{p,q} : U \to \mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

İspat: (3.2.2.18) integral operatörünü aşağıdaki gibi yeniden yazarız.

$$G_{\lambda,\mu}^{p,q}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-1}\left(G_{\lambda,\mu}^{q}(t)\right)'dt\right\}^{1/p}. \qquad (3.2.2.20)$$

Burada, $G_{\lambda,\mu}^{q}:U\to\mathbb{C}$ (3.2.2.15) ile tanımlanan fonksiyondur.

Üçgen eşitsizliği ve (3.2.2.17) eşitsizliğinden

$$\left|c|z|^{2p}+\left(1-|z|^{2p}\right)\frac{z\left(G_{\lambda,\mu}^{q}(z)\right)''}{p\left(G_{\lambda,\mu}^{q}(z)\right)'}\right|\le|c|+\frac{|q|e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{|p|\left[2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+1)\right]e^{1/(\lambda+\mu+1)}}$$

elde ederiz. Öte yandan, (3.2.2.19) sağlandığından bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade 1'den küçüktür. O halde, Lemma 2.1.4 gereğince (3.2.2.20) ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{p,q}(z)$ operatörü U 'da ünivalenttir.

Böylece, Teorem 3.2.2.7 'nin ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2.7'de $q=1$ alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

<u>Sonuç 3.2.2.14:</u> $x_0\cong1.2581$ (2.1.1) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda\ge1$, $\lambda+\mu>x_0$ koşulları sağlansın. Ayrıca, kabul edelim ki p ve c kompleks sayıları $\mathrm{Re}(p)>0$, $|c|<1$ ve

$$|c|\le1-\frac{e^{1/(\lambda+\mu+1)}}{|p|\left[2(\lambda+\mu)+1-(\lambda+\mu+1)e^{1/(\lambda+\mu+1)}\right]}$$

koşullarını sağlasınlar. Bu durumda,

$$G_{\lambda,\mu}^{p}(z)=\left\{p\int_0^z t^{p-2}W_{\lambda,\mu}^{(5)}(t)\,dt\right\}^{1/p},\ z\in U \qquad (3.2.2.21)$$

ile tanımlanan $G_{\lambda,\mu}^{p}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

Biz şimdi $f(z)$ fonksiyonu yerine $W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)$ normalize edilmiş Wright fonksiyonu olmak üzere (1.2.4.3) şekilli integral operatörleri göz önünde bulunduracağız.

Son olarak

$$H_{\lambda,\mu}^{q}(z)=\left\{q\int_{0}^{z}t^{q-1}\left(e^{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(t)}\right)^{q}dt\right\}^{1/q},\ \lambda>-1,\ \lambda+\mu>0,\ z\in U \tag{3.2.2.22}$$

integral operatörünü alalım.

$H_{\lambda,\mu}^{q}(z),\ z\in U$ fonksiyonunun ünivalentliği üzerine aşağıdaki teoremi verelim.

<u>Teorem 3.2.2.8:</u> $\lambda\geq 1$ ve $\lambda+\mu>0$ olsun. Ayrıca, q kompleks sayısı $\operatorname{Re}(q)\geq 1$,

$$|q|\leq\frac{3\sqrt{3}(\lambda+\mu)}{2\left[(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right]} \tag{3.2.2.23}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda, (3.2.2.22) ile tanımlanan $H_{\lambda,\mu}^{q}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

<u>İspat:</u> (2.1.3)'ten her $z\in U$ için

$$\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\leq\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right\} \tag{3.2.2.24}$$

yazabiliriz.

Aşağıdaki eşitlik açıktır

$$\frac{1}{(\lambda+\mu)}\left\{(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right\}=1+\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-(\lambda+\mu+1)\right\}.$$

Ayrıca, her $x>0$ için $(x+2)e^{1/(x+1)}-(x+1)>0$ olduğu bilgisayar yardımıyla kolayca görülebilir.

Şimdi

$$a=\frac{1}{\lambda+\mu}\left\{(\lambda+\mu+2)e^{1/(\lambda+\mu+1)}-1\right\}$$

alırsak her $\lambda+\mu>0$ için $a>1$ ve ayrıca, (3.2.2.23) sağlanırsa $2a|q|\le 3\sqrt{3}$ olacaktır.

O halde, (3.2.2.24)'den $\left|z\left(W_{\lambda,\mu}^{(5)}(z)\right)'\right|\le a$ olacaktır. Böylece, Lemma 2.1.3 gereğince $H_{\lambda,\mu}^{q}(z)$ fonksiyonu U 'da ünivalenttir.

Bununla, Teorem 3.2.2.8'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2.8'de $q=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.2.2.15:</u> $x_6 \cong 1.6692$ (3.2.2.13) denkleminin nümerik kökü olmak üzere $\lambda\ge 1$ ve $\lambda+\mu>x_6$ koşulları sağlansın. Bu durumda,

$$H_{\lambda,\mu}(z)=\int_0^z e^{W_{\lambda,\mu}^{(5)}(t)}dt\,,\quad z\in U$$

şeklinde tanımlanan $H_{\lambda,\mu}:U\to\mathbb{C}$ integral operatörü U 'da ünivalenttir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Ele alınan bu tez çalışmasında üçü yeni olmak üzere beş çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonları tanımlandı. Tezde bu tür fonksiyonların ve bu fonksiyonları içeren integral operatörlerin analitik ve ünivalent fonksiyonların bazı özel alt sınıflarından olması için yeterli koşullar verildi.

Bu tez çalışmasında normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği için koşullar bulundu.

Ayrıca, ele alınan normalize edilmiş Wright fonksiyonlarını içeren bazı integral operatörlerin ünivalentlik, yıldızıllık ve konvekslik gibi özellikleri öğrenildi. Bunun için yeteri koşullar verildi.

Lemma 1.2.5 bu tezde ilk defa ispatlandı.

Lemma 2.1.5'in benzeri lemma 3. ve 4. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonları için de ispatlanabilir. Bu lemmadan yararlanarak 3. ve 4. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği incelenebilir.

Ayrıca, 3. ve 4. çeşit normalize edilmiş Wright fonksiyonlarını içeren integral operatörlerin ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği araştırmacılar için bir çalışma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Prajapat, J.K., (2015). Certain geometric properties of the Wright function. Integral Transforms and Special Functions, 26(3), 203-212.

[2] Bansal, D. and Prajapat., K., (2016). Certain geometric properties of the Mittag-Leffler functios. Complex Variables and Elliptic Equations, 61(3), 338- 350.

[3] Mustafa, N., Prajapat, J. K., (2016). Corrigendum to " Certain Geometric Properties of the Wright function'', Integral Transforms Spec. Funct. http://dx.doi.org/10.1080/10652469.2016.1174702.

[4] Mustafa, N., (2016). Some geometric properties of the Wright functions, AIP/Conference Proceedings 1726, 020080; doi:10.1063/1.4945906.

[5] Mustafa, N., (2017). Integral Operators of the Normalized Wright Functions and Their Some Geometric Properties. GUJSci, 30(1), 333-343.

[6] Mustafa, N., (2017). Univalence of Certain Integral Operators Involving Normalized Wright Functions. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser A1 Math. Stat. 66(1), 19-28.

[7] Mustafa, N. (2016). Geometric properties of normalized Wright functions. Math. Comput. Appl. Paper No. 14, 10 pages.

[8] Maharana, S., Prajapat, J. K., Bansal, D. (2018). Geometric properties of Wright function. Mathemaica Bohemica, 143(1), 99-111.

[9] Brown, R. K. (1960). Univalence of Bessel functions. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 278-283.

[10] Gorenflo, R., Luchko, Y., Mainardi, F. (1999). Analytic properties and applications of Wright functions. Frac. Cal. Appl. Anal. 2(4), 383-414.

[11] Prajapat, J. K. (2011). Certain geometric properties of normalized Bessel functions. Appl. Math. Lett. 24, 2133-2139.

[12] Baricz, A. (2008). Geometric properties of generalized Bessel functions. Publ. Math. Debrecen. 73, 155-178.

[13] Selinger, V. (1995). Geometric properties of normalized Bessel functions. Pure Math. Appl. 6, 273-277.

[14] Szasz., R., Kupan, P. A. (2009). About the univalence of the Bessel functions. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 54(1), 127-132.

[15] Szasz., R. (2014). About the starlikeness of Bessel functions. Integral Transforms Spec. Funct. 25(9), 750-755.

[16] Breaz, D., Breaz, N. (2006). Some convexity properties for a general integral operator. J. Ineq. Pure Appl. Math. 7(5), Art. 177.

[17] Deniz, Erh., Deniz, Esr., Mustafa, N. (2016). Starlikeness and Convexity of P-valent Integral Operators. Hacettepe J. Math. Stat. 1367-1378.

[18] Mustafa, N., Yarcan, M. (2018). Univalence of the Integral Operators Involving Produced Wright Functions. J. Sci. Eng. Res. (JSAER), 5(5), 569-577.

[19] Pescar, V., Owa, S. (2000). Sufficient conditions for univalence of certain integral operators. Indian J. Math. 42(3), 347-351.

[20] Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhâuser. Boston.

[21] Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

[22] Goodman, A.W. (1983). Univalent Function-1,2. Mariner Publishing Company, Tapma, Florida 311 p.

[23] Lahenkani, J. (1985). Coefficients of power of some subclasses of univalent unctions and convolutions of some classes of polynomials and analytic

functions. Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

[24] Srivastava, H. M., Owa, S. (1992). Editors, Current Topics in Analytic Function Theory. Singapore: World Scientific.

[25] Altintaş, O., Irmak, H., Srivastava H. M. (1995). Fractional calculus and certain starlike functions with negative coefficients. Comput Math Appl. 30(2), 9-16.

[26] Altintaş, O., Özkan, Ö., Srivastava, H. M. (2004). Neighborhoods of a certain family of multivalent functions with negative coefficients. Comput Math Appl. 47, 1667-1672.

[27] Irmak, H., Lee, S. H., Cho, N. E. (1997). Some multivalently starlike functions with negative coefficients and their subclasses defined by using a differential operator. Kyungpook Math J. 37, 43-51.

[28] Altintaş, O. (1991). On a subclass of certain starlike functions with negative coefficient. Math Japon. 36, 489-495.

[29] Wright, E. M. (1933). On the coefficients of power series having exponential singularities. J. London Math. Soc. 8, 71-79.

[30] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations. San Diego: Academic Press.

[31] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Gordon and Breach: New York.

[32] Mittag-Leffler, G. (1903). Sur la nouvelle fontion E_{α}. Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances Del Academie Des Sciences, Paris 2(137), 554- 558.

[33] Wiman, A. (1905). Über den fundamental Satz in der Theorie der Funktionen. Acta Math. 29, 191-201.

[34] Becker, J. (1972). Löwnersche differentialgleichung und quasikoform fortsetzbare schlichte funktionen. J. Reine Angw Math. 255, 23-43 (in German).

[35] Blezu, D. (2006). On Univalence Criteria. General Mathematics, 14(1), 87-93.

[36] Breaz, D., Günay, H.Ö. (2008). On the univalence criterion of a general integral operator, J. Inequal. Appl. p. 8 Art. ID 702715.

[37] Breaz, D., Breaz, N., Srivastava, H.M. (2009). An extension of the univalent condition for a family of integral operator. Appl. Math. Lett. 22, 41-44.

[38] Baricz, A., Frasin, B. A. (2010). Univalence of integral operators involving Bessel functions. Appl. Math. Lett. 23(4), 371-376.

[39] Goodman, A. W. (1983) Univalent Functions. Volume I, Polygonal, Washington, 246p.

[40] Pescar, V. (1996). A new generalization of Ahlfor's and Becker's criterion of univalence. Bull. Math. Soc. (Second Series), 9, 53-54.

[41] Pascu, N. N. (1987). An improvement of Beckr's invalence criterion. Proceedings of the Commemorative Session Simion Stoilov, Braşov, 43-48.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Merve YARCAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: HATAY/Antakya 23.05.1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (e-posta)	: merveyarcan19031903@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Hacı Ali Nurlu Lisesi 2005-2009
Lisans	: Kafkas Üniversitesi 2011-2015
Yüksek Lisans	: Kafkas Üniversitesi 2017-2019

Yayınları (SCI ve diğer):

1. Mustafa, N., Yarcan, M. (2018). Univalence of the Integral Operators Involving Produced Wright Functions. J. Sci. Eng. Res. (JSAER), 5(5), 569-577.

2. Mustafa, N., Yarcan, M. (2018). Univalence of the Integral Operators Involving Produced Wright Functions. ICMRS 2018 Conference Proceedings, April 30-May 4, 2018, Antalya/TURKEY.

3. Mustafa, N., Yarcan, M. (2018). Univalence, starlikeness and convexity of the Wright functions. ICMRS 2018 Conference Proceedings, April 30-May 4, 2018, Antalya/TURKEY.

4. Mustafa, N., Yarcan, M. (2018). Univalence Criteria of the Certain Integal Opeators Involving Some Special Functions. Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica (sunuldu).