T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

c_0 ÜZERİNDE EŞDEĞER NORM AİLELERİ VE SABİT NOKTA TEORİSİ

Tahsin ATEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

c_0 ÜZERİNDE EŞDEĞER NORM AİLELERİ VE SABİT NOKTA TEORİSİ

Tahsin ATEŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Tahsin Ateş'in Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "c_0 üzerinde eşdeğer norm aileleri ve sabit nokta teorisi" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği... ile kabul edilmiştir.

20/ 06/ 2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ... .../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tahsin ATEŞ
20.06.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

c_0 ÜZERİNDE EŞDEĞER NORM AİLELERİ VE SABİT NOKTA TEORİSİ

TAHSİN ATEŞ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

Yansımayan Banach uzaylarının sabit nokta teorisine (SNT'ye) sahip olup olmadığı veya sahip olmayanların SNT'ye sahip olacak şekilde yeniden normlanması literatürde yakın zamanda ilgi odağı olmuş ve sıkça yer almıştır. Gerçekten de iyi bilinen yansımayan Banach uzaylarından biri olan ℓ^1'in sabit nokta teorisine sahip olmadığı fakat zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmiştir. Bir diğer iyi bilinen ve ℓ^1 ile ortak bir çok özelliğe sahip fakat Schur özelliği gibi ℓ^1 kadar etkin araçlara sahip olmayan yansımayan Banach uzayı c_0 için analog sonuçlar Maurey tarafından gösterilmiştir. Yakın zamanda çok önemli bir sonuç olarak P. K. Lin tarafından ℓ^1 'in genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği gösterilmiştir. Bu sonuca ulaşırken, Goebel ve Kuczumow'un teoreminden esinlenilmiştir öyle ki Goebel ve Kuczumow'un teoreminde ℓ^1 içinde SNT'ye genişlemeyen fonksiyonlar için sahip olan zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. P. K. Lin'in sonucunun c_0-analoğu halen açık olup bu önemli sorunun çözümüne ilk adımları sağlayabilmesine imkan tanıyacak olması sebebiyle Goebel ve Kuczumow'un sonucunun bir eşdeğer norm ile c_0-analoğunu çalışmakta büyük önem arz etmektedir. Bu amaçla öncelikte bu tez çalışmasında P. K. Lin'in çalışmasının c_0-analoğunu

incelemek amacıyla Goebel ve Kuczumow teorisinin bir eşdeğer norm ile c_0-analoğu afinlik koşulu altında araştırılmıştır. Yani, tez çalışmasında c_0 üzerinde tez danışmanı tarafından tanımlanmış bir eşdeğer norm $\|\cdot\|$ vasıtasıyla c_0'da zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip olduğu gösterilmiştir. Hatta görülmüştür ki bu sınıflar uzayımızın bilinen normu $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre bazı c_0-toplam baz dizilerinin kapalı konveks kabuğu olup Lennard ve Nezir tarafından 2011'de yapılan çalışmaya göre herhangi c_0-toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi bozar. Daha sonra ise bu tanımlanan eş değer norma göre P. K. Lin'in sonucunun c_0-analoğuna pozitif cevabın fonksiyonların afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen olması durumunda verilebileceği gösterilmiştir. Yani, c_0 üzerinde bir eşdeğer norm $\|\cdot\|$ 'un bulunabileceği öyleki bu norm için c_0 içinde boş olmayan her kapalı, sınırlı, konveks E alt kümeleri üzerinde tanımlı her afin $\|\cdot\|$-genişlemeyen $U: E \to E$ fonksiyonunun E'de bir sabit noktası vardır. Tanımlanmış olan bu eşdeğer norm aşağıdaki şekilde verilmektedir: $\forall x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$\|x\| := \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ öyle ki burada } \gamma_k \uparrow_k 3 \text{ ve}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \gamma_k > 2 \; olmak \; \text{ü}zere \; \gamma_k \text{ azalmayan.}$$

Son olarak ise bu sonuç daha da genelleştirilerek şu genel sonuç verilmiştir: $\rho(\cdot)$ normu c_0 üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan bir eşdeğer norm olsun: Sıfıra zayıf yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi ve her $x \in c_0$ için

$$\limsup_n \rho\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} x_m + x \right) = \limsup_n \rho\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} x_m \right) + \rho(x)$$

dir. Bu durumda her $\lambda > 0$ için c_0 üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_\rho = \rho(\cdot) + \lambda \, \|\cdot\|$ eşdeğer norm ailesine göre c_0 Banach uzayı afin $\|\cdot\|_\rho$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahiptir.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, yansımayan Banach uzayı, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yeniden normlama, sıfıra yakınsak dizi uzayı c_0

2019, 50 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

FAMILY OF EQUIVALENT NORMS ON c_0 AND FIXED POINT PROPERTY

Tahsin ATEŞ

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

In literature, it has been a wide research subject for fixed point theory researchers to investigate whether or not any nonreflexive space has the fixed point property (FPP) or if these spaces can be renormed to have FPP. Indeed, as a well-known nonreflexive Banach space ℓ^1, it has been showed that ℓ^1 fails FPP whereas it has the weak fixed point property. Maurey proved the analogous result for c_0, another well-known nonreflexive Banach space sharing many common properties with ℓ^1 while c_0 does not offer as many tools like Schur property as ℓ^1 does. Recently, as a significat development, it is proved by P. K. Lin that ℓ^1 can be renormed to have FPP for nonexpansive mappings. While reaching this result, it was inspired a lot by Goebel and Kuczumow's theorem which showed that a large class of closed, bounded, convex (c.b.c.), non-weak*-compact subsets of ℓ^1 has FPP for nonexpansive mappings. c_0-analogue of P. K. Lin's result is still open but aiming to obtain c_0-analogue of Goebel and Kuczumow's theorem with an equivalent norm is also very important since it is the first stage of the study directed towards the problem, c_0-analogue of Lin's theorem about ℓ^1. For this goal, in this thesis study, first of all, positive answer is given for the problem about c_0-analogue of Goebel and Kuczumow's theorem with an equivalent norm that is constructed by thesis supervisor Nezir, under affinity assumption; that is, in this thesis study, it is shown that an equivalent norm $\|\cdot\|$ on c_0 can be found such that there exist non-weakly compact c.b.c. subsets that have FPP for affine $\|\cdot\|$-nonexpansive mappings. In fact, it is seen that the examples used are closed, convex hulls of some asymptotically isometric (ai) c_0-summing basic sequences respect to $\|\cdot\|_\infty$ norm whereas in 2011 it is shown by Lennard and Nezir that the closed, convex hull of any ai c_0-summing basic sequence fails FPP for affine $\|\cdot\|_\infty$-nonexpansive mappings. Next, using that renorming which is also given below, positive answer for c_0-analogue of P. K. Lin's result is given in our study if functions are affine $\|\cdot\|$-nonexpansive. That is, we show that there exists an equivalent norm $\|\cdot\|$ on c_0 such that for every closed, bounded, convex (non-empty) subset E of c_0 with associated norm $\|\cdot\|$, every affine nonexpansive mappings $U: E \to E$, U has a fixed point in E. We verify this using our norm given by

$\| x \| := \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}}$ where $\gamma_k \uparrow_k 3$, γ_k is strictly increasing with $\gamma_k > 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x = (\xi_k)_k \in c_0$.

Finally, we generalize this result and show that if $\rho(\cdot)$ is an equivalent norm to the usual norm on c_0 such that

$$\limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m + x\right) = \limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right) + \rho(x)$$

for every weakly null sequence $(x_n)_n$ and for all $x \in c_0$, then for every $\lambda > 0$, c_0 with the norm $\|\cdot\|_\rho = \rho(\cdot) + \lambda \|\cdot\|$ has the FPP for affine $\|\cdot\|_\rho$-nonexpansive self-mappings.

Key Words: nonexpansive mapping, non-reflexive Banach space, fixed point property, closed bounded convex subset, renorming, space of the sequences converging to zero

2019, 50 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri için başta danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir hocama, sonra ise eşim Hüsna Ateş, babam Dursun Ali Ateş, annem Asiye Ateş ve kardeşlerime teşekkür ederim.

Tahsin ATEŞ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SNT (g.f.)	:	Genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi
ai	:	Asimtotik izometrik
ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
bkkk	:	Boştan farklı, kapalı, konveks küme
ysnd	:	Yaklaşık sabit nokta dizisi
$c_0(E)$	:	E ‘nin konveks kabuğu
$\overline{c_0}(E)$	:	E ‘nin kapalı konveks kabuğu
D bir T-görüntüsünü içeren	:	$T: D \to D, T(D) \subseteq D$
$\overline{E}^w$	:	E kümesinin zayıf kapanışı
e_n	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0’ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Metrik sabit nokta teorisi hakkında bir özet ile giriş bölümü aşağıdaki şekilde anlatılabilir.

Sabit nokta teorisi üzerine çalışmaların 1912'de Brouwer'ın şu sonucu [3] ile başladığı söylenebilir: her $n \in \mathbb{N}$ için R^n'in kapalı birim yuvarı C üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon $f: C \to C$ 'nin bir sabit noktası vardır. 1930 yılında bu sonuç daha sonra Schauder [28] tarafından Banach uzayının her kompakt kümesi için genelleştirilmiştir. Sürekli fonksiyonların sınıfının çok geniş olması sebebiyle daha dar sınıflar için sabit nokta teorisi odaklı incelemeler ünlü Banach daralma prensibi adı altında 1922'de Banach [1] tarafından başlatılmıştır. Bu prensibe göre eğer (X, d) bir tam metrik uzay ise her $f: X \to X$ daralma fonksiyonu f'nin X'de bir tek sabit noktası vardır. Bu durumda kolaylıkla Banach uzaylar için şu sonuç elde edilmiştir: bir Banach uzayı $(X, \|\cdot\|)$'den alınan her boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks alt küme C üzerinde tanımlı her $T: C \to C$ daralma fonksiyonun $d = d_{\|\cdot\|}$ metriği normdan üretilmiş olması durumunda bir tek sabit noktası vardır.

1965'de ise metrik sabit nokta teorisi üzerine bir çok araştırmalar yapılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Gerçekten de öncelikle Browder [4] tarafından daha dengeli şu sonuç verilmiştir: [$*$] [$\|\cdot\|$ normu ile eşleşen bir Hilbert uzayı $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ içinden alınan boştan farklı her kapalı, sınırlı ve konveks alt küme E üzerinde tanımlı her $U: E \to E$ $\|\cdot\|$-genişlemeyen fonksiyonunun E'de bir sabit noktası vardır [Burada not edilmelidir ki, U fonksiyonunun $\|\cdot\|$-genişlemeyen olması demek her $x, y \in E$ için $\| Ux - Uy \| \leq \| x - y \|$ koşulunu sağlamsı demektir]]. Daha sonra yine 1965 tarihinde, Browder [5] ve Göhde [12] tarafından ve birbirlerinden bağımsız olarak yukarıda yer alan [$*$] teoremi tüm düzgün konveks Banach uzaylar $(X, \|\cdot\|)$'e genelleştirilmiştir; bu uızaylara bilinen örnek, $1 < p < \infty$ için bilinen normu $\|\cdot\|_p$ ile Lebesgue uzayı $X = L^p$'dir.

Çok kısa bir süre sonra fakat yine 1965 yılında ise, Kirk [17] tarafından Browder'ın [$*$]

teoremi “normal yapıya sahip” adı verilen ve yansımalı olan Banach uzayları X ‘e genelleştirilmiştir öyle ki normal yapıya sahip olması sonlu elemanlı olmayan tüm kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin Chebsyhew yarıcaplarının kümenin bilinen metrik çapından küçük olması anlamına gelmektedir. Browder’ın bu [*] teoreminde verilen özelliğine sahip Banach uzayları $(X, \|\cdot\|)$’e "genişlemen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip" Banach uzayları olarak kabul edilmeye başlanmıştır. Bu ifade tez çalışması sırasında SNT (g.f.) şeklinde kısaltılacaktır. Not edilmelidir ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ve $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ uzaylarının ikiside yansımayan Banach uzayı olup SNT (g.f.)’ye sahip değildirler.

Kirk’ün teoremi düşünüldüğünde daha iyi genelleştirmelerin yapılıp yapılamayacağı sorusu araştırmacıların aklına gelmektedir. 54 yılın ardından, halen SNT (g.f.)’ye sahip Banach uzaylarının yansımalı olup olmadığı bilinmemektedir. Bu ve benzeri soruların yakın zamanda sabit nokta teorisi araştırmalarının odak noktası olduğu söylenebilir.

Yansımalı uzay olma ve karakterizasyonu ile genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisi arasında kuvvetli bir bağ bulunmaktadır.

Yansımayan Banach uzay $(\ell^1, \|.\|_1)$ yani mutlak toplanabilen diziler uzayı mutlak normu ile genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozar. Örneğin: $C := \left\{ (t_n) : her\ t_n \geq 0\ ve \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$ kümesi göz önüne alındığında kolayca görülebilir ki C ℓ^1’ da kapalı, sınırlı ve konveksdir. C üzerinde $T : C \to C$ sağa kayan bir fonksiyon olsun; yani, $T(t_1, t_2, t_3, \ldots) := (0, t_1, t_2, t_3, \ldots)$. Açıkça T $\|.\|_1$-genişlemeyen (ayrıca bir izometri olan) ve C ’de sabit noktası olmayan bir fonksiyondur.

Yakın zamanda yapılmış takdir edilen çok önemli bir çalışma ile, P. K. Lin [19] tarafından genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini sağlayan ilk Banach uzayı $(X, \|\,.\,\|)$’i gösterilmiştir. P. K. Lin’in bu sonucu $X = \ell^1$ üzerinde aşağıdaki eş norm $\|\,.\,\|$ u kullanarak gösterilmiştir.

Her $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ için $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{8^k}{1+8^k} \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|$.

Peki $(c_0, \|.\|_\infty)$, sıfıra yakınsayan reel değerli dizilerin Banach uzayı mutlak sup normu $\|.\|_\infty$ ile nasıl bir davranış gösterir? Bu Banach uzayları teorisinde önemli bilgiler sunan bir diğer yansımayan Banach uzaydır. Bu uzay da aynı şekilde genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozar. Örneğin: $C := \{(t_n)_{n\in N} : \text{her } t_n \geq 0 \text{ her } 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \geq t_{n+1} \downarrow_n 0\}$ kümesi göz önüne alınsın.

Bu durumda sağa kaydırma fonksiyonu adını alan $U : C \to C$ fonksiyonu ele alınsın. $U(t_1, t_2, t_3, \ldots) := (1, t_1, t_2, t_3, \ldots)$ olup U bir $\|.\|_\infty$-genişlemeyen (hatta bir izometri olan) ve C'de sabit noktası olmayan bir fonksiyondur.

O halde ℓ^1 ve c_0 bilinen normları ile ortak bir karakteristik gösterir ve genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisini bozmaktadır. Dolayısı ile P. K. Lin'in ℓ^1 için bulduğu sonucun c_0-analoğunu araştırmak araştırmacıların sorgulayabileceği konular dahilindedir. Fakat bu soru halen cevaplanamamıştır. Bu soruya pozitif cevap ise yakın zamanda tez danışmanı Nezir'in Mustafa ile ortak çalışmasında [22] afinik koşulu altında verilebilmiştir. Bu sorunun önemli bir soru olmasının yanı sıra P. K Lin'in sonucundan da önce 1979' da, K. Goebel ve T. Kuczumow [11] tarafından göstermiştir ki l^1 'in zayıf*-kompakt olmayan kapalı, sınırlı ve konveks K alt kümelerinden oluşan çok geniş bir sınıfı vardır öyle ki bu sınıf genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir. Lin'in bu çalışmadan ilham aldığı ispat yönteminde anlaşılabilmektedir. O halde Goebel ve Kuczumow'un çalışması Lin'in sonucuna önemli katkıda bulunmuş bir ön çalışma olarak düşünülebilir. Lin'in çalışmasının c_0-analoğuna ön hazırlık olarak kabul edilecek Goebel ve Kuczumow teorisinin bir eşdeğer norm ile c_0-analoğunun incelenmesi ilk sorunun çözümü için araçlar sunabilecektir. Bu amaçla gerçekten de Nezir ve Sade [25], Nezir, Mustafa ve Dutta [23], Nezir danışmanlığında yazılan Guven [13] yükseklisans tezi ile Nezir danışmanlığında yazılan Oran [27] yükseklisans tezi gibi bir çok çalışma bulunmaktadır.

Unutulmamalıdır ki Dowling, Lennard ve Turett'in çalışmaları [7,8] ile sırasıyla gösterilmiştir ki $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$'da SNT (g.f.)'ye sahip sonsuz boyutlu kapalı bir alt uzay veya zayıf kompakt olmayan kapalı sınırlı ve konveks bir küme bulunamaz. Dolayısıyla Goebel ve Kuczumow teorisinin c_0 analoğu ancak c_0'ın bir eşdeğer norm ile ele alınması ile araştırılabilir.

Goebel ve Kuczumow analojisi için yapılan çalışmalar SNT (g.f.)'ye sahip en geniş sınıfı veren aday normların tespit edilmesini sağlamıştır ve bu sayede Nezir ve Mustafa [22] çalışması ile c_0'ın afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceği gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasının sonuçları tez danışmanının ortak olduğu Nezir, Mustafa ve Dutta kitap bölümünde [23] tezimizden yararlanılarak yapıldığı ifade edilerek iznimiz dahilinde yer almıştır. Tez çalışmasında Nezir ve Mustafa tarafından geliştirilen eşdeğer norm ile c_0'ın afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi sağlayacak şekilde yeniden normlanabilmesinin tek olmadığı, tez çalışmasında yer alan eşdeğer norm ile de aynı sonucun elde edilebileceği gösterilmektedir. Aslında tez çalışmasında yer alan eşdeğer normun tanımı da Nezir [20] çalışmasında verilmiştir. Tez çalışmasında öncelikle aşağıda tanımı verilmiş olan bu norm ile Goebel ve Kuczumow analojisi fonksiyonlara afinlik koşu eklenilerek araştırılmış ve sonra ise c_0'ın bu eşdeğer norm ile yeniden normlanması halinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip olduğu ve hatta bu norm vasıtasıyla elde edilecek bir eşdeğer norm ailesi elde edilebildiği ve c_0'ın bu eşdeğer norm ailesi ile yeniden normlandığında afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip olduğu gösterilmiştir.

Tanımlanmış olan bu eşdeğer norm aşağıdaki şekilde verilmektedir: $\forall x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$\|x\| \coloneqq \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ öyle ki burada } \gamma_k \uparrow_k 3 \text{ ve}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \gamma_k > 2 \; olmak \; \text{üzere} \; \gamma_k \text{ azalmayan.}$$

Not edilmelidir ki çalışmada kullanılan kümeler Nezir ve Lennard [18] çalışmasında bulunan kümelerden alınmıştır ve bu kümelerin genelleştilmesi ile daha geniş sınıflar elde edilmiştir.

Lennard ve Nezir [18] çalışmasında gösterilmiştir ki Banach uzaylarında her asimtotik izometrik (ai) c_0-toplam baz dizisinin kapalı konvek kabuğu SNT (g.f.)'yi bozar, dolayısıyla eğer bir Banach uzayında bir ai c_0-toplam baz dizisi bulunabilirse SNT (g.f.)'yi bozar.

Lennard ve Nezir [18] çalışmasında yer alan c_0'da bulunan bu dizilerden birisi ve ilgili teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

<u>Teorem 1.1</u> $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında sınırlı bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n\, e_n$ ile c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve bu dizi kullanılarak c_0'da $\sum_{k=1}^{n} f_k$ kısmi toplam dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki E kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda bu küme afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi bozar.

Bu kümelerin daha genel halleri ise Lenard danışmanlığında yazılmış olan Nezir [20] doktora tezi çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri $(0,\infty)$ olmak üzere λ skalerine yakınsak bir dizi olsun, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise her $N \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_N$ ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}|$ yakınsak olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4 + \ldots + b_n e_n)$ şeklinde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın öyleki bu dizi $\exists K \in (0,\infty)$ ve $\forall\, \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için $K \sup_{n\geq 1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j \right\|$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\exists L > 0$ vardır öyle ki $(\frac{\eta_n}{L})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir ai c_0-toplam baz dizisidir ve dolayısıyla bu dizinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi bozar.

Tez çalışmasında tanımlanmış olan $\|.\|$ eşdeğer normu ile c_0'ın yeniden normlanması durumunda gösterilmektedir ki; $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinin $(0,\infty)$ aralığında keyfi seçilmesi ile yukarıda belirtilen küme sınıflarını genelleştiren küme sınıfı olan $(\mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + \dots + b_ne_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğunun afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

Ayrıca, not edilmelidir ki c_0'ın afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği ilk defa Nezir ve Mustafa tarafından 2018'de gösterilmiş olup tez çalışması aynı sonucu verecek benzer normların varlığını göstermektedir.

1.2 Kuramsal temeller

Tez çalışmasında yararlanılan ön bilgiler tanım, teorem ve lemmalar halinde bu bölümde verilecektir.

Tanım 1.2 E kümesi bir $(X,\|.\|)$ Banach uzayında boştan farklı kapalı, sınırlı, konveks alt küme olsun. $T:E\to E$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer her $\lambda\in[0,1]$ ve her $x,y\in E$ için $T((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)T(x)+\lambda T(y)$ ise T 'ye afin fonksiyon denir [6].

2. Eğer *her* $x,y\in E$ için $\|T(x)-T(y)\|\leq\|x-y\|$ ise T ' ye genişlemeyen fonksiyon denir [6].

Ayrıca, eğer her genişlemeyen $T:E\to E$ için enaz bir $z\in E$ var öyle ki $T(z)=z$ ise E kümesine SNT (g.f.)'ye sahiptir denir [6].

$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı olsun ve $E\subseteq X$ olsun. E ' nin kapalı konveks kabuğu $\overline{c_0}(E)$ ile sembolize edilir. Bilindiği üzere $(c_0,\|.\|_\infty)$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$c_0 := \left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{her } x_n\in\mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

Ayrıca, her $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$ için $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ ve $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\ell^1 := \left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{her } x_n\in\mathbb{R} \text{ ve } \|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}.$$

[18] çalışmasında yer alan bir $(X,\|.\|)$ Banach uzayının içinde bulunabilecek bir asimtotik izometrik c_0 - toplam baz dizisi tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 1.3 $(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı olsun, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki koşulu sağlayan X 'in bir dizi olsun; bu durumda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine $(X,\|.\|)$ uzayında bir asimtotik izometrik (a.i) c_0-toplam baz dizisi denir: 0'a azalarak yakınsayan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset [0,\infty)$ bulunabilir öyle ki her $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\epsilon c_0$ için

$$\sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n}\right)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right\| \leq \sup_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n)\left|\sum_{j=n}^{\infty} t_j\right|.$$

[21] çalışmasında aşağıdaki ispatı çok açık olan lemma ile Goebel ve Kuczumow [11, Lemma 1] lemmasının kısmi bir analojisi elde edilmiştir. Tez çalışmasının ilk bölümünde bu lemma anahtar rolunü üstlenmektedir.

Lemma 1.4 $(x_n)_n$ dizisi bir $(X,\|\cdot\|)$ Banach uzayında sınırlı dizi olsun. Herhangi bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi için aşağıdaki şekilde tanımlanan $s: X\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$s(y)=\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y\right\| \text{ , } \forall y\in X \text{ .}$$

Bu durumda, c_0'ın zayıf Banach-Saks özelliği dolayısıyla [26], eğer $(y_m)_m$ dizisi c_0'da x'e zayıf topolojide yakınsayan bir dizi ise, o zaman $\|\cdot\|$ normu c_0 üzerinde $\|\cdot\|_\infty$ normuna eşdeğer herhangi bir norm olmak üzere Cesaro avarajı normsal olarak x'e yakınsayan en az bir $(x_n)_n$ alt dizisi vardır öyle ki s fonksiyonunu bu alt dizi vasıtasıyla yazılırsa her $y \in c_0$ için $s(y) = \|y - x\|$ dır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

ℓ^1'de zayıf* kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın genişleneyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahp olduğu Goebel ve Kuczumow [11] tarafından gösterilmiştir. Daha sonra tez danışmanı Nezir'in de doktora tez danışmanı olan Chris Lennard'ın danışmanlığı altında yapılmış olan Everest [9] doktora tez çalışmasında ise ℓ^1'de çok daha geniş sınıfların SNT (g.f.)'ye sahip olduğu gösterilerek Goebel ve Kuczumow'un çalışması genelleştirilmiştir. Goebel ve Kuczumow'un ve Everest'in sonuçları sırasıyla aşağıdaki teoremlerle görülebilir.

Teorem 2.1 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında sınırlı bir dizi olsun. $b \coloneqq \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$ olarak tanımlansın. c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $f_n := b_n\, e_n$, ile her $n \in \mathbb{N}$ için tanımlansın. Daha sonra ise bu dizi kullanılarak ℓ^1'de aşağıdaki E kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n : \text{ her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesinin SNT (g.f.)'ye sahip olması için gerek ve yeter koşul $N_0 = \{ j \in \mathbb{N} : b = b_j \}$ kümesinin boştan farklı olmasıdır [7].

Teorem 2.2 $(b_{j,n})_{j,n\in\mathbb{N}}$ dizisi reel terimli bir dizi olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{j,n}\, e_n$ olarak tanımlansın fakat en az bir sonlu elemanlı $F \subset \mathbb{N}$ olsun öyle ki her $n \in \mathbb{N}\backslash F$ için $b_{j,n} = 0$ olsun. Bu durumda bu dizi kullanılarak ℓ^1'de tanımlanan aşağıdaki E kümesi SNT (g.f.)'ye sahiptir [11].

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n : \text{ her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Goebel ve Kuczumow [11] çalışmasının bir çok benzeri c_0 için farklı eşdeğer normlar kullanılarak tez danışmanının baş yazar olarak yer aldığı bir çok çalışmada gözlemlenebilir. Yakın zamanda tez danışmanının tanımladığı eşdeğer norm ile yapılmış ve Nezir, Mustafa ve Dutta [23] kitap bölümünde yayınlanmış olan Güven [13] yüksek lisans tezine ilham ve araç olmuş ilk teorem aşağıdaki şekildedir..

Teorem 2.3 $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(\mathrm{f_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1,\ f_2 := b\, e_2$ ve her $\mathrm{n} \geq 3$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak c_0'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $E = E_b$ tanımlansın;

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan E kümesi c_0'de aşağıda tanımlanan Nezir, Mustafa ve Dutta çalışmasında yer alan [23] çalışmasında yer alan eşdeğer normuna göre en az bir $b \in (0,\ 1)$, $\alpha > 1$ için $Q_1 > \frac{2\alpha}{1+2\alpha}$ olmak üzere afin fonksiyonlar için SNT (g.f.)'ye sahiptir.

Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için c_0 üzerinde $\|\,.\,\|$ eşdeğer normu

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left|\xi_k - \alpha \xi_j\right| \text{ öyle ki burada } \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 1,$$

$$Q_k \downarrow_k 0 \text{ ve } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } Q_k > Q_{k+1} \text{ dir.}$$

Yakın zamanda tarafımızın da ortak olduğu Nezir, Mustafa, Sade ve Ateş [24] çalışması ile gösterilmiştir ki c_0 üzerinde tanımlı aşağıda verilen eşdeğer norm için çok daha geniş sınıflar afin fonksiyonlar için SNT (g.f.)'ye sahiptir. Bu eşdeğer norm Nezir [21] çalışması ile tanıtılmış olup tez bulgularında yer alan eşdeğer normda bu norm vasıtasıyla Nezir [21] çalışmasında yer alan aşağıdaki tanım ve teorem yardımıyla elde edilmiştir.

Tanım 2.4 Her $\mathrm{x} = (\xi_\mathrm{k})_\mathrm{k} \in \mathrm{c}_0$ için $\|\mathrm{x}\|_\sim$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|\mathrm{x}\|_\sim := \lim_{\mathrm{p}\to\infty} \sup_{\mathrm{k}\in\mathrm{N}} \gamma_\mathrm{k} \left(\sum_{\mathrm{j}=\mathrm{k}}^{\infty} \frac{|\xi_\mathrm{j}|^\mathrm{p}}{2^\mathrm{j}} \right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \text{ öyle ki burada } \gamma_\mathrm{k} \uparrow_\mathrm{k} 1 \text{ ve } \gamma_\mathrm{k} \text{ artan dizidir.}$$

Bu normun bir eşdeğer norm olduğu aşağıdaki teorem gereğince açıktır.

Teorem 2.5 Her $x = (\xi_k)_k \in c_0$ için

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir [21].

İspat. $x = (\xi_k)_k \in c_0$ alınsın. $x \neq (0,0,\cdots)$ olduğu kabul edilecektir aksi taktirde ispat aşikardır.

$$\exists N \in \mathbb{N} \ni \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k|$$

Bu durumda,

$$= \max_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k| = |\xi_N|.$$

Ohalde ortalama kuvvet eşitsizliği dolayısıyla [14], $\|x\|_\infty = \max_{k\le N}|\xi_k|$

$$= \max\{|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_N|\} \qquad = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots+|\xi_N|^p}{N}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{N}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ayrıca, ağırlıklı ortalama kuvvet eşitsizliği dolayısıyla [14],

$$\|x\|_\infty = \max_{k\le N}|\xi_k| = \max\{|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_N|\}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots+|\xi_N|^p}{2^N}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{2^N}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Şimdi gösterilebilir ki

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Gerçekten de bu aşağıdaki şekilde ispatlanabilir.

Öncelikle;

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{|\xi_k|^p}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Ayrıca, $\exists s\in\mathbb{N}$ öyleki $|\xi_k| < \dfrac{1}{k^2}$, $\forall k \geq s$.

Bu sebeple,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\sum_{k=s}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\frac{|\xi_s|^p}{s^2}+\int_s^\infty\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\ dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\int_s^\infty\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\ dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Dolayısıyla,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{|\xi_k|^p}{k^2}+\int_s^\infty\frac{1}{k^{2p+2}}\ dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(|\xi_N|^p\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(2p+1)\ s^{2p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left(|\xi_N|^p\left[1+\int_1^s\frac{1}{k^2}\ dk\right]-\frac{1}{(2p+1)\ s^{2p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\xi_N|$$
$$= \|x\|_\infty$$

Bu norm vasıtasıyla aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 2.5 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(0,\infty)$ aralığında dizileri herhangi dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \mu_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + ... + b_ne_n)$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şekilde bir dizi tanımlansın. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E := \overline{c_0}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ Bu durumda Tanım 2.7 ile verilen $\|.\|_\sim$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|_\sim$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Bu sonuç Nezir ve Mustafa [22] ile en genel sonucuna aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Öncelikle not edilmelidir ki [22] çalışmasında kullanılan norm ise bir önceki bahsedilen normun bir kısıtlaması olup şu şekildedir:

Tanım 2.6 $\forall x = (\xi_k)_k \in c_0$ için $\|x\|_\sim$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|x\|_\sim := \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{2^j} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{öyle ki burada } \gamma_k \uparrow_k 3 \text{ ve}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\gamma_k > 2$ *olmak üzere* γ_k azalmayan dizi olsun.

Bu durumda [22] çalışmasının ana sonuçları olan ve tez çalışmasının aynı yöntemleri uygulandığı teoremler şu şekildedir.

Teorem 2.7 $(c_0, \|.\|_\sim)$ Banach uzayı afin $\|.\|_\sim$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

Teorem 2.8 $\rho(\cdot)$ normu c_0 üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan bir eşdeğer norm olsun: Sıfıra zayıf yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi ve her $x \in c_0$ için

$$\limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m + x\right) = \limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right) + \rho(x)$$

dir. Bu durumda her $\lambda > 0$ için c_0 üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_\rho = \rho(\cdot) + \lambda\|.\|_\sim$ eşdeğer norm ailesine göre c_0 Banach uzayı afin $\|\cdot\|_\rho$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahiptir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde verilecek ve tez çalışmasının en genel sonucu olan; yukarıdaki sonuçları sağlayan bir başka eşdeğer normun varlığının gösterilmesi için Nezir ve Mustafa [22] çalışmasının da temel parçalarını oluşturan aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulacaktır. Not edilmelidir ki elde edilen sonuçlarda Helga Fetter ve Berta Gamboa de Buen [10] çalışmasının önemli etkileri bulunmaktadır öyleki [10] çalışması ile P. K. Lin [19] çalışması genelleştirilmiştir. Bu bahsi geçen çalışmaların yardımıyla ve verdikleri ilhamlarla bahsi geçen çalışmalar ve tez çalışması elde edilmiştir.

Lemma 2.9 [10] $(X, \|\ .\ \|)$ bir Banach uzay olsun ve $C \subset X$ boş olmayan bir kapalı, konveks küme (bkkk) olsun. Kabul edilsin ki $T: C \to C$ sabit noktasız genişlemeyen bir fonksiyon olsun. Bu durumda bir bkkk T-görüntüsünü içeren D kümesi ve bir $a > 0$ vardır öyle ki her T-görüntüsünü içeren $D' \subset D$ için $Çap D' > a$ dır.

Lemma 2.10 [10] $(X, \|\ .\ \|)$ bir Banach uzay olsun ve $C \subset X$ boş olmayan bir bkkk olsun. Kabul edilsin ki $T: C \to C$ bir afin genişlemeyen fonksiyon ve $(x_n)_n \subset C$ bir yaklaşık sabit nokta dizisi (ysnd) olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\Phi: C \to [0, \infty)$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$\Phi(y) = \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - y\right\| \quad , \forall y \in C\ .$$

Eğer $d > \inf_{x \in C}\Phi(x)$ ve $D = \{x \in C \colon \Phi(x) \le d\}$ ise, bu durumda D bir bkkk T-görüntüsünü içeren küme olup $Çap D \le 2d$ dır.

Lemma 2.11 [22] $(X, \|\ .\ \|)$ bir Banach uzay olsun ve $C \subset X$ boş olmayan bir bkkk olsun. Kabul edilsin ki $T: C \to C$ bir afin genişlemeyen fonksiyon olsun ve $D \subset C$ ile $a > 0$ Lemma 2.9'deki gibi olsun. Bu durumda,

$$\inf\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - y\right\| : (x_n)_n \subset D \ , \quad (x_n)_n \text{ bir ysnd } , \quad y \in D \right\} \geq \frac{a}{2}$$

dir.

İspat. Olmayana ergi metodu ile kabul edilsin ki

$$\inf\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - y\right\| : (x_n)_n \subset D \ , \quad (x_n)_n \text{ bir ysnd } , \quad y \in D \right\} < \frac{a}{2}$$

dir. Bu durumda bir ysnd $(x_n)_n \subset D$ vardır öyleki

$$D' = \left\{y \in D : \limsup_m \left\|\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{n=1}^{m} x_n - y\right\| \leq \tfrac{a}{2}\right\} \neq \emptyset$$

dir. Lemma 2.9 gereğince, D' bir bkkk, T-görüntüsünü içeren küme olup $ÇapD' \leq a$ dir ki bu bir çelişkidir.

<u>Lemma 2.12</u> [22] $(X, \| \ . \ \|)$ bir Banach uzay olsun ve $C \subset X$ boş olmayan bir bkkk olsun. Kabul edilsin ki $T: C \to C$ bir sabit noktasız afin genişlemeyen fonksiyon olsun. $D \subset C$ ile $a > 0$ Lemma 2.9'deki gibi olsun öyle ki D bir T-görüntüsünü içeren bkkk olmak üzere T-görüntüsünü içeren her $D' \subset D$ bkkk için $ÇapD' > a$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\inf_{z\in X}\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - z\right\| : (x_n)_n \subset D \ , \quad (x_n)_n \text{ bir ysnd } \right\} \geq \frac{a}{4}$$

dir.

İspat. Lemma 2.9 kullanılarak denilebilir ki her $s \in \mathbb{N}$, her ysnd $(x_k)_k \subset D$ ve her $z \in X$ için

$$\frac{a}{2} \leq \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} x_r\right\| \leq \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - z\right\| + \left\|z - \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} x_r\right\|$$

dir. Bu sebeple,

$$\frac{a}{2} \leq \limsup_s \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} x_r\right\|$$

$$\leq \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - z\right\| + \limsup_s \left\|z - \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} x_r\right\|$$

$$= 2\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - z \right\|$$

dir.

Sonuç 2.13 [22] $(X, \| \, . \, \|)$ bir Banach uzay olsun ve $C \subset X$ boş olmayan bir bkkk olsun. Kabul edilsin ki $T: C \to C$ bir sabit noktasız afin genişlemeyen fonksiyon ve her T-görüntüsünü içeren $D \subset C$ için $a > 0$ skaleri Lemma 2.9'deki koşulu sağladığında $ÇapD > a$ olsun. Bu durumda,

$$\inf\left\{\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - x \right\| : (x_n)_n \subset C \ , \quad (x_n)_n \text{ bir ysnd}, \quad x_n \underset{z^*}{\to} x \right\} \geq \frac{a}{4}$$

dır.

Tez çalışmasında kullanılan ve [23] çalışmasında yer alan eş değer norm ise aşağıdaki şekilde olup bu normun gerçekten de bir eş değer norm olduğu yine Teorem 2.5 vasıtasıyla görülebilir.

Tanım 2.14 $\forall x = (\xi_k)_k \in c_0$ için $\|x\|$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|x\| \coloneqq \lim_{p\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ öyle ki burada } \gamma_k \uparrow_k 3 \text{ ve}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\gamma_k > 2$ *olmak* üzere γ_k azalmayan dizi olsun.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümü üç başlık altında sunulacaktır. İlk başlıkta c_0'ın bir eş değer norm ile yeniden normlanması sonucu elde edilen ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır. İkinci başlıkta ise birinci bölüm genelleştirilerek kullanılan eşdeğer norm sayesinde c_0'ın tamamının afin fonksiyonlar için SNT (g.f.)'ye sahip olduğu gösterilecektir. Son alt bölümde ise tez çalışmasının en genel sonucu olarak bir eşdeğer norm ailesi ile c_0 yeniden normlandığında afin fonksiyonlar için SNT (g.f.)'ye sahip olduğu gösterilecektir. Not etmeliyiz ki araştırma bulgularımız iznimiz dahilinde tez danışmanının çalışmaya büyük katkısı dolayısıyla Nezir, Mustafa, Dutta [23] kitap bölümünde tezimizden yararlanıldığı belirtilerek yer almaktadır. Araştırma bulgularımız dahilinde olan fakat aşağıdaki ilk bölümle yöntem ve uygulamalar olarak benzerlik içermesinden dolayı tez çalışmasında ayrıntılarını vermeye gerek duymadığımız yayınlanmış Nezir, Mustafa, Sade ve Ateş [24] çalışmamız mevcuttur.

3.1 c_0'ın yeniden normlanması ile afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde [24] çalışmasında yer alan c_0'ın bir eş değer norm ile yeniden normlanması sonucu elde edilen ve afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır.

<u>Örnek 3.1</u> Toplam baz dizisinin kapalı konveks kabuğu ele alınsın. Yani, her $n \geq 1$ için $f_n := e_n$ olacak şekilde c_0 'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini göz önüne alınsın. Daha sonra c_0 ' da $E = E_{\vec{b}}$ kümesi aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : 1 = t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

$\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$, $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olmak üzere $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın.

Kolayca görülebilir ki $E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \eta_n : her\ \alpha_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \right\}.$

Bu durumda çok iyi bilindiği üzere E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğudur ve sağa kaydırma fonksiyonu sabit noktasız afin $\|.\|_\infty$-genişlemeyen bir fonksiyondur.

<u>Teorem 3.2</u> Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için yukarıdaki örnekte verilen E kümesi afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. $T: E \to E$ bir afin genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan bir dizi $\left(x^{(n)}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}} \in$ E vardır $\ni$ $\left\| Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\| \underset{n}{\to} 0$ ve bu sebeple $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_\infty \underset{n}{\to} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt dizi ile değişim yapılarak denilebilir ki en az bir z $\in$ c_0 vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z'ye zayıf topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 1.4 gereğince, bir $s: c_0 \to [0,\infty)$ fonksiyonu $s(y) = \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - y\right\|$, $\forall y \in c_0$ ile tanımlanabilir ve bu durumda $s(y) = \|y - z\|$, $\forall y \in c_0$ dir.

Şimdi E kümesinin zayıf kapanışı

$$W := \overline{E}^z = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\eta_n \text{: her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1\right\}$$

ile tanımlansın. İki durum göz önüne alınmalıdır.

*Durum 1***:** $z \in E$ olsun.

Öncelikle $s(Tz) = \|Tz - z\|$ dir.

Ayrıca T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$s(Tz) \leq \limsup_m \left\|Tz - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)}\right)\right\| + \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m Tx^{(k)}\right\|$$
$$\leq s(z)$$

dir.

Öyleyse, $\|z - Tz\| \leq 0$ dir ve dolayısıyla $Tz = z$ dir.

*Durum 2***:** $z \in W \backslash E$ olsun.

Bu durumda, ele alınan nokta z şu formda yazılabilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \eta_n \text{ öyle ki} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \ < 1 \text{ dir.}$$

Buradan

$$\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

olarak ve

$$h_\lambda := (\sigma_1 + \lambda\delta)\eta_1 + (\sigma_2 + (1-\lambda)\delta)\eta_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \sigma_n \eta_n$$

şeklinde tanımlansın. h_λ nın E'de olabilmesi için λ skalerleri $\left[-\frac{\sigma_1}{\delta}, \frac{\sigma_2}{\delta} + 1\right]$ aralığından seçilsin, bu durumda

$$\begin{aligned}
\|h_\lambda - z\| &= \lambda\delta e_1 + (1-\lambda)\delta(e_1 + e_2) \\
&= \limsup_{p \to \infty} \left\{ \gamma_1 \left[\delta^p + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\} \\
&= \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}
\end{aligned}$$

olacaktır.

Yukarıdaki eşitlik kullanılarak $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]} \|h_\lambda - z\|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\Gamma = 0$ ve dolayısıyla bir tek minimumlaştıran h_{λ_0} değeri $\lambda_0 \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta} + 1\right]$ için mevcut olup $\|h_{\lambda_0} - z\|$ sayısı Γ'nın bir minimumudur.

Şimdi ele alınan küme içerisinde $\Lambda := \{y : \|y - z\| \ \leq \Gamma\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. Not edilebilir ki $\Lambda \subseteq E$ boştan farklı kompakt ve konveks bir küme olup $h \in \Lambda$ için, T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$s(Th) \leq \limsup_m \left\| Th - T\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right)\right\| + \limsup_m \left\| \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|$$
$$\leq s(h)$$

dır.

Ayrıca, $s(Th) = \|z - Th\|$ ve $s(h) = \|z - h\|$ dir.

Bu sebeple, $\|z - Th\| \leq \|z - h\| \Rightarrow \|z - Th\| = \|z - h\| \Rightarrow Th \in \Lambda$.

O halde, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olup T'nin sürekli olması sebebiyle Schauder's Sabit nokta teoremi kullanılarak [28] T nin bir sabit noktası olduğu ve bu noktanın $\|y - z\| \ : y \in E$ değerlerini minumumlaştıran $h = h_{\lambda_0}$ dır ve $Th = h$ dır.

Dolayısıyla, E kümesi bu iki durum sonucuna göre gf-snt'ye afin fonksiyonlar için sahiptir.

Teorem 3.3 $b \in (0,1)$ keyfi olmak üzere $f_1 := be_1$, $f_2 := be_2$, ve her $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ alarak $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ler c_0'ın kanonik bazı olmak üzere; yani $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skaler dizisi tanım kümesi N olan, n-yinci koordinatı 1 ve diğer koordinatları 0 olan ve $(c_0, \|.\|_\infty)$ ile $(l^1, \|.\|_1)$' in bir koşulsuz bazıdır) c_0' da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0' ın kapalı sınırlı konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n : \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}$$

Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\|h_\lambda - z\| = \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b e_1 + (1-\lambda)\delta(be_1 + be_2)$$
$$= b\limsup_{p\to\infty}\left\{\gamma_1\left[\frac{\delta^p}{2} + \frac{|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}$$
$$= b\max\left\{\gamma_1|1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min_{\lambda\in\left[-\frac{\gamma_1}{\delta},\frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın. Bu durumda yine görülecektir ki $\Gamma = 0$ dir.

Şimdi aşağıdaki teorem ve bulgularla sonuçlar daha da genelleştirilir.

Teorem 3.4 $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,1]$ aralığında $\mathrm{b_n} \uparrow_{\mathrm{n}} 1$ olacak şekilde bir artan dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 'ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\eta_n\text{: her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\right\}$$

Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ - genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\|h_\lambda - z\| = \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1 e_1 + b_2 e_2)$$
$$= \limsup_{p\to\infty}\left\{\gamma_1\left[{b_1}^p\delta^p + \frac{{b_2}^p|1-\lambda|^p\delta^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2|1-\lambda|\delta}{4}\right\}$$

$$= b_2 \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^p \delta^p + \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}$$

$$\leq b_2 \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\Gamma \leq \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} b_2 \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\} = 0$ olduğundan $\Gamma = 0$ dir.

Teorem 3.5 $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\kappa > 0$ sayısına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n : \ her \ a_n \geq 0 \ ve \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. Teorem 3.2 ile aynı metod kullanılacaktır ve dolayısıyla benzer ayrıntılar atlanılarak sadece Teorem 3.2'nin ispatının Durum 2'sinden farklılıklar aşağıdaki şekilde sunulabilir.

$$\|h_\lambda - z\| = \lambda\delta\eta_1 + (1-\lambda)\delta\eta_2 = \lambda\delta b_1 e_1 + (1-\lambda)\delta(b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

$$= \limsup_{p\to\infty} \left\{ \gamma_1 \left[{b_1}^p \delta^p + \frac{{b_2}^p |1-\lambda|^p \delta^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}}, \frac{\gamma_2 b_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}$$

$$= \max\{b_1, b_2\} \limsup_{p\to\infty} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \left[\begin{array}{l} \left(\frac{b_1}{\max\{b_1, b_2\}}\right)^p \delta^p \\ + \left(\frac{b_2}{\max\{b_1, b_2\}}\right)^p \frac{|1-\lambda|^p \delta^p}{4} \end{array} \right]^{\frac{1}{p}}, \\ \frac{b_2 \gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4\max\{b_1, b_2\}} \end{array} \right\}$$

$$\leq \max\{b_1, b_2\} \max \left\{ \gamma_1 |1-\lambda| \delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda| \delta}{4} \right\}$$

olacaktır. Yine $\Gamma := \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \|h_\lambda - z\|$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$\Gamma \leq \min_{\lambda \in \left[-\frac{\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta}+1\right]} \max\{b_1, b_2\} \max\left\{\gamma_1 |1-\lambda|\delta, \frac{\gamma_2 |1-\lambda|\delta}{4}\right\} = 0$ olduğundan $\Gamma = 0$ dir.

Takip eden sonuçlar Teorem 3.5 ve ispatından doğrudan kolayca elde edilebilir.

Sonuç 3.6 $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir sınırlı dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \colon \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\right\}.$$

Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

Teorem 3.5'in ispatı kullanılarak en genel sonuçlar aşağıdaki şekilde ispatsız olarak sunulabilir.

Teorem 3.7 $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n e_n$ olacak şekilde c_0 da bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Daha sonra ise $\eta_1 := f_1$ ve her $n \geq 2$ için $\eta_n := f_1 + \ldots + f_n$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. Sonra $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki c_0 ' ın kapalı, sınırlı, konveks $E = E_b$ alt kümesi tanımlansın.

$$E = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \colon \text{ her } a_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\right\}.$$

Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

<u>Sonuç 3.8</u> $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında öyle bir diziki her $N\in\mathbb{N}$ için $\Gamma\leq\gamma_N$ olacak şekilde $\Gamma>0$ var ve $\sigma:=\sum_{n=2}^{\infty}|\mu_n-\mu_{n-1}|<\infty$ olsun ve kabul edilsin ki $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında bir $\lambda\in(0,\infty)$ sayısına yakınsasın. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\eta_n:=\mu_n(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4+....+b_ne_n)$ olacak şekilde bir dizi tanımlansın. Ayrıca kabul edilsin ki $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi alt c_0 -toplam tahminini sağlasın. Yani, kabul edilsin ki $\exists K\in(0,\infty)$ var öyle ki $\forall\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\epsilon c_{00}$ için $K\sup_{n\geq1}\left|\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j\right|\leq\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\eta_j\right\|$. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani $E:=\overline{c_0}(\{x_n: n\in\mathbb{N}\})$ Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için E kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

<u>Sonuç 3.9</u> $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $(0,\infty)$ aralığında herhangi dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\eta_n:=\mu_n(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4+....+b_ne_n)$ olacak şekilde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şekilde bir dizi tanımlansın. E kümesi $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin kapalı konveks kabuğu olsun; yani, $E:=\overline{c_0}(\{x_n: n\in\mathbb{N}\})$Bu durumda Tanım 2.14 ile verilen $\|.\|$ eş değer normu için$E$ kümesi afin $\|.\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

3.2 c_0 afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabilir

Bu bölümde Tanım 2.14 ile verilmiş olan eşdeğer norm kullanılarak c_0'ın afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğini gösterilecektir. Not etmeliyiz ki c_0'ın SNT'yi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceği ilk olarak Nezir ve Mustafa [22] çalışmasında gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bu sonucun bir başka eşdeğer norm ile de verilebileceği gösterilmektedir. Bu bölüm daha önce de not ettiğimiz gibi Nezir, Mustafa ve Dutta [23] çalışmasında yer almaktadır.

Şimdi aşağıdaki lemma ve teoremlerde aksi belirtilmedikçe $\|.\|$ eşdeğer normunun Tanım 2.14'da verilen eşdeğer norm olduğu kabul edilsin.

<u>Lemma 3.10</u> Kabul edilsin ki $(x_n)_n \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ve $x_n \underset{w}{\to} 0$ olacak şekilde bir dizidir. Bu durumda $(x_n)_n$ 'in en az bir alt dizisi $\left(x_{n_k}\right)_k$ ve $u_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i e_i$ formunda yazılan bir $(u_k)_k$ dizisi bulunabilir ki burada $(e_i)_i$ dizisi bilinen kanonik baz ve $(a_i)_i \subset \mathbb{R}$ skalerler olup aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\|_\infty = \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\| = 0.$$

Bessaga-Pełczyn′ski Seçim prensibi [2, p.46], [6]'nin ispatı gereğince $(x_n)_n$'in uygun bir alt dizisine geçiş yapılarak ki bu dizi $(u_k)_k$ blok baz dizisine denk ve ayrık olarak destekli olacak şekilde seçilebileceğinden ispat bahsedilen teoremde uygulanan ispat ile açıktır.

<u>Lemma 3.11</u> Kabul edilsin ki $(x_n)_n \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ve $x_n \underset{z}{\to} x$ olacak şekilde bir dizi olsun öyle ki

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n - x\right\| = a \text{ mevcut olsun.}$$

Bu durumda, $$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n - x\right\|_\infty = a \text{ dır.}$$

İspat. γ_n'leri orantılayarak, γ_k'nın azalmayan ve $\gamma_k \uparrow_k 1$ olacak şekilde bir dizi olduğu kabul edilebilir ve eşdeğer norm bu gerçeğe bağlı kalarak yeniden tanımlanabilir. Ayrıca genelliği bozmadan kabul edilebilir ki $x_n \underset{z}{\rightarrow} 0$ dır. $\left(x_{n_k}\right)_k$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir alt dizisi olsun öyleki $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k}\right\|_\infty$ mevcut olsun. Lemma 3.10 gereğince, kabul edilebilir ki $u_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i e_i$ şeklinde yazılabilen bir $(u_k)_k$ dizisi bulunabilir ki burada $(e_i)_i$ kanonik baz ve $(a_i)_i \subset \mathbb{R}$ skalerler olup

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\|_\infty = \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\| = 0$$

dir. $k \in \mathbb{N}$ için $y_k = x_{n_k}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} y_k\right\| = \lim_{j\to\infty}\|u_j\| = a \text{ ve } \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} y_k\right\|_\infty = \lim_{j\to\infty}\|u_j\|_\infty \text{ dir.}$$

Eşdeğer normun tanımı gereğince, en az bir $l \in N$ vardır öyle ki

$$u_j = \gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ ki burada } i \le m_j \text{ durumunda } a_i = 0 \text{ dır.}$$

$\gamma_n < \gamma_{n+1}$ olduğundan, eğer $n \le m_j$ ise, aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\begin{aligned}\gamma_n \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=n}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} &= \gamma_n \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \gamma_{n+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \gamma_{n+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=n+1}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Ayrıca $m_j + 1 \leq l \leq m_{j+1}$ iken

$$\gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \gamma_{m_j+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\gamma_l - \gamma_{m_j+1}}{\gamma_{m_{j+1}}} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{l-1} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

O halde buradan;

$$\begin{aligned}
\left| \| u_j \|_\infty - u_j \right| &= \sup_{m_j+1 \leq i \leq m_{j+1}} |a_i| - \gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} - \gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (1-\gamma_l) \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} + \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{l-1} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\gamma_l - \gamma_{m_j+1}}{\gamma_{m_{j+1}}} - \gamma_l\right) \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{\gamma_l}{\gamma_{m_{j+1}}} - \gamma_l\right) \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda, $j \to \infty$ iken limit alınarak, $\lim_{j\to\infty} \| u_j \|_\infty - \|u_j\| = 0$ elde edilir dolayısıyla

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} y_k\right\| = \lim_{j\to\infty}\|u_j\| = \lim_{j\to\infty}\|u_j\|_\infty = \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} y_k\right\|_\infty = a.$$

O halde $\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k$ nin alt dizisinin her takip eden alt dizisleri için de $\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k}\right\|_\infty = a$ olup istenilen bir sonuç elde edilmiş olur. Diğer eşitlikte aynı düşünce ile elde edilecektir.

Lemma 3.12 Kabul edilsin ki $(x_n)_n \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ve $x_n \underset{z}{\to} x$ olacak şekilde bir dizi olsun öyle ki

$$\lim_{s\to\infty}\left\|\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} x_n\right\| = a \text{ ve } \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n\right\|$$

mevcut olsun. Bu durumda $(x_n)_n$'in en az bir alt dizisi $(y_n)_n$ vardır öyle ki

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right\| = a = 2\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n\right\| \text{ dir.}$$

İspat. Lemma 3.11'in ispatına benzer şekilde, γ_n dizisi orantılanarak, kabul edilebilir ki γ_n azalmayan ve $\gamma_k \uparrow_k 1$ olacak şekilde bir diziye dönüştürülebilir ve eşdeğer norm bu değişikiliğe uygun olarak ele alınabilir. Ayrıca $\left(x_{n_k}\right)_k$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin $\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k}\right\|_\infty$ var olmasını sağlayan bir alt dizisi olarak kabul edilebilir. Ayrıca Lemma 3.10 gereğince kabul edilebilir ki $u_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i e_i$ şeklinde yazılabilen bir $(u_k)_k$ dizisi bulunabilir ki burada $(e_i)_i$ kanonik baz ve $(a_i)_i \subset \mathbb{R}$ skalerler olup

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\|_\infty = \lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_{n_k} - u_j\right\| = 0.$$

Bir alt diziye geçilerek kabul edilebilir ki

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{j\to\infty}\left\|\tfrac{1}{j}\textstyle\sum_{n=1}^{j} x_n - \tfrac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} x_n\right\| \text{ ve } \lim_{s\to\infty}\lim_{j\to\infty}\|u_j - u_s\|$$

mevcuttur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $y_k = x_{n_k}$ olarak tanımlayalım, bu durumda her $j, s \in \mathbb{N}$ için

$$\|u_j - u_s\| - \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - u_j\right\| - \left\|\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - u_s\right\| \le \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right\|$$

$$\leq \|u_j - u_s\| + \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - u_j\right\| + \left\|\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - u_s\right\|$$

ve

$$\|u_j - u_s\|_\infty - \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - u_j\right\|_\infty - \left\|\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - u_s\right\|_\infty \leq \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right\|_\infty$$

$$\leq \|u_j - u_s\|_\infty + \left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} y_n - u_j\right\|_\infty + \left\|\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - u_s\right\|_\infty$$

dir. Bu sebeple, $\lim\limits_{s\to\infty}\lim\limits_{j\to\infty}\|u_j - u_s\| = a$ dir. Kabul edilsin ki $s > j$ dir. Eşdeğer normun tanımı gereğince, $m_j + 1 \leq l \leq m_{s+1}$ koşulunu sağlayan en az bir $l \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$a_i' = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad i \leq m_j \ \text{ veya } \ m_{j+1} < i < m_s \ \text{ ise} \\ a_i & \text{eğer} \quad m_j + 1 \leq i \leq m_{j+1} \\ & \quad \text{veya } \ m_s + 1 \leq i \leq m_{s+1} \ \text{ ise} \end{cases} \qquad \text{olmak üzere}$$

$$\|u_j - u_s\| = \gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde yazılabilir. $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ olduğundan, eğer $n \leq m_j$ ise

$$\gamma_n \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=n}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} = \gamma_n \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \gamma_{n+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \gamma_{n+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=n+1}^{m_{s+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Bu durumda ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilecektir.

$$\gamma_l \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \gamma_{m_j+1} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\gamma_l - \gamma_{m_j+1}}{\gamma_{m_j+1}} \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=l}^{m_{j+1}} \frac{|a_i|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=m_j+1}^{l-1} \frac{|a_i'|^p}{i^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

dir. O halde

$$\left| \| u_j - u_s \|_\infty - \left\| u_j - u_s \right\| \right| = \sup_{m_j+1 \le i \le m_{s+1}} |a_i'| - \gamma_l \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=m_j+1}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}} - \gamma_l \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le (1-\gamma_l) \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}} + \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=m_j+1}^{l-1} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Bu sebeple,

$$\left| \| u_j - u_s \|_\infty - \left\| u_j - u_s \right\| \right| \le \left(1 + \frac{\gamma_l - \gamma_{m_j+1}}{\gamma_{m_j+1}} - \gamma_l \right) \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{\gamma_l}{\gamma_{m_j+1}} - \gamma_l \right) \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=l}^{m_{s+1}} \frac{|a_i'|^p}{i^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Dizi sınırlı olduğundan $\| u_j \|_\infty \le d$ şeklinde kabul edilebilir. Bu durumda,

$0 \le \left| \| u_j - u_s \|_\infty - \left\| u_j - u_s \right\| \right| \le \left(\frac{\gamma_l}{\gamma_{m_j+1}} - \gamma_l \right) 2d$ dir ve buradan $j \to \infty$ ve $s \to \infty$ iken limit alınırsa

$\lim_{s\to\infty} \lim_{j\to\infty} \| u_j - u_s \|_\infty - \left\| u_j - u_s \right\| = 0$ ve buradan Lemma 3.10 ve Lemma 3.11 kullanılarak (fakat daha öncesinde bir alt diziye geçildiği kabul edilerek) aşağıdakiler elde edilir.

$$a = \lim_{s\to\infty} \lim_{j\to\infty} \left\| u_j - u_s \right\| = \lim_{s\to\infty} \lim_{j\to\infty} \| u_j - u_s \|_\infty = \lim_{s\to\infty} \lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} x_k - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} x_k \right\|_\infty$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} x_k \right\|_\infty + \lim_{s\to\infty} \left\| \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} x_k \right\|_\infty = 2 \lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} x_k \right\|_\infty = 2 \lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} x_k \right\|$$

dir.

<u>Lemma 3.13</u> Kabul edilsin ki $C \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ bir bkkk'dir. $T: C \to C$ ise sabit noktasız afin genişlemeyen fonksiyon ve $(x_n)_n \subset C$ bir ysnd olsun öyle ki zayıf limiti $x_n \underset{z}{\to} u$

olmak üzere

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j} x_n - u\right\|_\infty \text{ mevcut olsun ve } \Phi: C \to [0,\infty) \text{ fonksiyonu}$$

$\Phi(x) = \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - x\right\|_\infty$ şeklinde tanımlanmak üzere

$D = \left\{x:\ \Phi(x) \leq \frac{d}{4}\right\} \neq \emptyset$ koşulu sağlansın bu durumda not edilebilir ki

$\{x:\ \Phi(x) \leq d\} \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca kabul edilsin ki $(y_n)_n \subset D$ ve $y_n \underset{z}{\to} y$ olsun. Bu durumda tüm bu koşullar dahilinde,

$$\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|_\infty \leq d - \lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - u\right\|_\infty$$

dir.

İspat. Kalton ve Werner [16] çalışmasında gösterildiği üzere $p = \infty$ için c_0 Banach uzayı m_p özelliğine sahip olup aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\limsup_n \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x\right\|_\infty = \max\left\{\limsup_n \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|_\infty, \quad \|x\|_\infty\right\}$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\limsup_n \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|_\infty^{p} + \|x\|_\infty{}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dolayısıyla bu eşitlik kullanılarak söylenebilir ki her $s \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{d}{4} \geq \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - y_s\right\|_\infty = \limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - u + u - y_s\right\|_\infty$$

$$\geq \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - u\right\|_\infty + \frac{1}{2}\|y_s - y + y - u\|_\infty$$

dir. Bu sebeple, aynı eşitlik gereğince

$$\frac{d}{4} \geq \limsup_s \limsup_m \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - y_k\right\|_\infty$$

$$\geq \limsup_{s} \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} y_n \right\|_{\infty}$$

$$\geq \frac{1}{4} \lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - u \right\|_{\infty} + \frac{1}{4} \|y-u\|_{\infty} + \frac{1}{4} \lim_{s\to\infty} \left\| \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} y_n - y \right\|_{\infty}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_{\infty} \leq d - \lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - u \right\|_{\infty} - \|y-u\|_{\infty}$$

dir.

Şimdi aşağıdaki lemma ile yukarıdaki sonucun çalışmada yer alan eşdeğer norm için analoğu verilecektir.

Lemma 3.14 Kabul edilsin ki $C \subset (c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ bir bkkk, $T: C \to C$ bir sabit noktasız afin genişlemeyen fonksiyon, $(x_n)_n \subset C$ dizisi $x_n \underset{z}{\to} u$ olacak şekilde aşağıdakileri sağlayan bir ysnd olsun.

$\lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} x_n - u \right\|$ mevcut, $(u_n)_n$ dizisi Lemma $3.10'$da sunulan koşullara sahip, $\lim_{j\to\infty} \left\| \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{j} x_n - u - u_j \right\| = 0$, $\Phi: C \to [0,\infty)$ fonksiyonu ise $\Phi(x) = \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - x \right\|$ şeklinde tanımlı olmak üzere $D = \{x\colon \Phi(x) \leq d\} \neq \emptyset$ koşulunu sağlasın. Ayrıca kabul edilsin ki $(y_n)_n \subset D$ dizisi $y_n \underset{z}{\to} y$ ve $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k - y \right\|$ limiti mevcut olacak şekilde bir dizi olsun.

Bu durumda,

$$\lim_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\| \leq d - \lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n - u \right\|$$

dir.

İspat. Kabul edilsin ki $\varepsilon > 0$ keyfi ve k doğal sayısı $\|y - P_k y\| < \varepsilon$ ile $\|u - P_k u\| < \varepsilon$ koşullarını sağlasın öyle ki burada P_k doğal projeksiyondur. $(y_n)_n$ dizisinin bir alt dizisine geçilerek $v_n = \sum_{i=r_n+1}^{r_{n+1}} b_i e_i$ formunda bir $(v_n)_n$ dizisi elde edilebilir ve

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - y - v_n\right\| = 0$ dır. $N > k$ öyle bir doğal sayı olsun ki $n > N$ için $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - u - u_n\right\| < \varepsilon$ ve $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - y - v_n\right\| < \varepsilon$ koşulları sağlansın. Bu durumda, eğer $m_n > r_{j+1} > N$ ise

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left\|u_n + P_k u - v_j - P_k y_k\right\| \\
&\qquad \le \limsup_n \begin{pmatrix} \left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_n - y_j\right\| + \left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_n - u - u_n\right\| \\ +\left\|y_j - y - v_j\right\| + \|u - P_k u\| \\ +\|y - P_k y\| \end{pmatrix} \\
&\qquad \le d + 4\varepsilon
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda, eğer $r_{j+1} \ge k,\ m_n + 1 > r_{j+1}$ ve $r_j + 1 \le s_j \le r_{j+1}$ için $\left\|v_j\right\| = \gamma_{s_j} P_{s_j} \parallel v_j \parallel_\infty$ ise $\left\|u_n + P_k u - v_j - P_k y_k\right\| \ge \gamma_{s_j}(\parallel v_j \parallel_\infty + \parallel u_n \parallel_\infty)$ $= \left\|v_j\right\| + \gamma_{s_j} \parallel u_n \parallel_\infty$ olacaktır. Bu sebeple, $u_n \underset{z}{\to} 0$ olduğundan, Lemma 3.10 gereğince, $d + 4\varepsilon \ge \left\|v_j\right\| + \gamma_{s_j} \lim\limits_n \parallel u_n \parallel_\infty = \left\|v_j\right\| + \gamma_{s_j} \lim\limits_n \|u_n\|$ olup $j \to \infty$ iken limit alınırsa

$d + 4\varepsilon \ge \lim\limits_j \left\|v_j\right\| + \lim\limits_n \|u_n\| = \lim\limits_j \left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} y_k - y\right\| + \lim\limits_n \left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m - u\right\|$ elde edilecektir. Bu ise ispatı tamamlar.

<u>Teorem 3.15</u> Kabul edilsin ki $C \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ bir bkkk, $T: C \to C$ bir afin sabit noktasız genişlemeyen fonksiyon, $(x_n)_n \subset C$ dizisi $x_n \underset{z}{\to} 0$ olacak şekilde bir ysnd öyle ki $D = \left\{x:\ \limsup\limits_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - x\right\|_\infty \le d\right\}$ boştan farklı bir küme olsun.

Bu durumda eğer

$$c = \inf\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|:\ (y_n)_n \subset D,\ y_n \underset{z}{\to} y\ \textit{şeklinde}\ (y_n)_n \text{bir ysnd}\right\}$$

ise

$$\inf\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - z\right\|:\ z \in D, (y_n)_n \subset D \text{ bir ysnd } \ni\ y_n \underset{z}{\to} y\right\} \ge 2c$$

dir.

İspat. Olmayana ergi metodu ile kabul edilsin ki en az bir $z \in D$ var ve $y_n \underset{z}{\to} y$ olacak şekilde bir $(y_n)_n \subset D$ ysnd var öyle ki $a = \lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z \right\| < 2c$ dir. Bu durumda hipotez gereğince $\limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\| \geq c$ ve

$$z \in D_1 = \left\{ u \in D \colon \limsup_m \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - u \leq a \right\} \neq \emptyset$$

olup Lemma 2.9 gereğince D_1 bir T-görüntüsünü içeren bkkk'dır. $(u_n)_n \subset D_1$ dizisi u noktasına zayıf yakınsayan bir ysnd olsun. Bu durumda Lemma 3.14 gereğince

$$\limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} u_n - u \right\| \leq a - \lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\| < 2c - c = c$$

olup bu bir çelişkidir.

<u>Teorem 3.16</u> c_0 üzerinde Tanım 2.14 ile verilen $\|\cdot\|_\infty$ normuna eşdeğer olan $\|.\|$ normu ile $(c_0, \|.\|)$ Banach uzayı afin $\|.\|$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\|x\|_{(k)} := \gamma_k \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x\|_k$ dır. Olmayana ergi yöntemiyle kabul edilsin ki $C \subset (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ bir bkkk, $T \colon C \to C$ bir sabit noktasız afin genişlemeyen fonksiyon ve C kümesi Sonuç 2.13'ün koşullarını sağlasın. Bu sebeple,

$$b = \inf\left\{ \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\| : (y_n)_n \subset C \text{ dizisi } y_n \underset{z}{\to} y \text{ şeklinde bir ysnd} \right\} > 0.$$

$\alpha = 4\gamma_1 - 8,\ \varepsilon_1 = \frac{\alpha}{12}$ olsun ve $(x_n)_n \subset C$ dizisi $x_n \underset{z}{\to} x_0$ olacak şekilde bir dizi olsun öyle ki

$$b \leq \lim_n \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 \right\| < (1 + \varepsilon_1) b$$

koşulu sağlansın. Genelliği bozmadan $x_0 = 0$ kabul edebiliriz. Lemma 3.12 gereğince, uygun alt diziye geçilirse, $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$ mevcut olup

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = 2\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| < 2(1+\varepsilon_1)b$$

dir.

$$D = \left\{z \in C:\ \limsup_{n}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - z\right\| \leq 2(1+\varepsilon_1)b\right\}$$

şeklinde tanımlsansın. Bu durumda D'nin bir bkkk olduğu görülebilir. Şimdi

$$c = \inf\left\{\limsup_{m}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|:\ (y_n)_n \subset D \text{ dizisi } y_n \underset{z}{\rightarrow} y\ \textit{şeklinde bir ysnd}\right\}$$

olarak tanımlansın. Not edilebilir ki $c \geq b$ dir ve eğer $(y_n)_n \subset D$ dizisi $y_n \underset{z}{\rightarrow} y$ olacak şekilde bir ysnd ise $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - y\right\|$ mevcut olup Lemma 3.12 gereğince

$b \leq c \leq \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - y\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - y\right\|_\infty$ dir ve

$b \leq \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_\infty$ olacaktır; dolayısıyla,

$$\frac{1}{\gamma_1}\| y \|_{(1)} = \| y \|_\infty = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_\infty + \| y \|_\infty - \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_\infty \tag{2}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(2\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - y\right\|_\infty - \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_\infty\right)$$

$$\leq \frac{4}{\gamma_1}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right\| - \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_\infty - 2\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i - y\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{8}{\gamma_1}(1+\varepsilon_1)b - 3b = b\left(\frac{8}{\gamma_1} - 3 + \frac{8}{\gamma_1}\varepsilon_1\right)$$

olacaktır. Şimdi $x \in D$ noktasının aşağıdaki koşulu sağladığı göz önüne alınabilir.

$$\| x \|_{(1)} \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon_1)b \leq (1+\varepsilon_1)c \tag{3}$$

Gerçektende $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| < (1+\varepsilon_1)b$ olduğundan böyle bir nokta mevcuttur ve dolayısıyla yeterince büyük n için $\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| < (1+\varepsilon_1)$ dir.

Şimdi $\varepsilon_2 = \frac{\alpha}{3(8+\alpha)}$ olarak seçilsin ve yeterince büyük m için

$$\frac{1}{\gamma_1} \| (I - P_m)x \|_{(1)} = \| (I - P_m)x \|_\infty < c\varepsilon_2 \tag{4}$$

eşitsizliğinin mevcut olduğu kabul edilebilir. Şimdi ise $\varepsilon_3 = \frac{\alpha\Phi_m}{4(8+\alpha)(1-\Phi_m)}$ olarak alınsın öyle ki burada $\Phi_m = 1 - \gamma_m$ olup $y_n \underset{z}{\to} y$ ve $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y \right\|$ limiti mevcut olacak şekilde $(y_n)_n \subset D$ ysnd için

$$\frac{1}{\gamma_1} \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y \right\|_{(1)} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y \right\|_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - y \right\| < (1 + \varepsilon_3)c$$

dir. Bu sebeple en az bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $k \geq N$ için

$$\frac{1}{\gamma_1} \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y_i - y \right\|_{\infty} \leq (1 + \varepsilon_3)c \tag{5}$$

dir. Şimdi $\lambda = \frac{\Phi_m}{2(1-\Phi_m)}$ ve D'nin konveksliğinden yararlanarak $z = \lambda x + (1 - \lambda) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \in D$ alınsın, sonra ise $j > N$ keyfi seçilsin.

Şimdi not edilebilir ki eğer $k > m$ ise $\forall u \in c_0$ için $\|u\|_{(k)} \leq \frac{\gamma_k}{\gamma_1} \|u\|_{(1)}$ olup 2, 4 ve 5 eşitsizlikleri gereğince

$$\left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{z} \right\|_{(k)} = \left\| (I - P_m) \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{z} \right\|_{(k)} = \left\| (I - P_m) \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - y + y - \mathrm{z} \right\|_{(k)}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{z} \right\|_{(k)} + \left\| (1 - \lambda) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i - \mathrm{y} \right\|_{(k)} + \lambda \left[\|(I - P_m)\mathrm{x}\|_{(k)} + \|\mathrm{y}\|_{(k)} \right]$$

$$\leq \left[\gamma_k (1 + \varepsilon_3)(2 - \lambda) + \lambda \gamma_k \varepsilon_2 + \lambda \gamma_k \left(\frac{8}{\gamma_1} - 3 + \frac{8}{\gamma_1} \varepsilon_1 \right) \right] c$$

$$\leq \left[2 + 2\varepsilon_3 + \lambda \left(\varepsilon_2 - 4 + \frac{8}{\gamma_1} + \frac{8}{\gamma_1} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right) \right] c$$

$$\leq \left[2 - \frac{\alpha \Phi_m^2}{8(8 + \alpha)(1 - \Phi_m)^2} \right] c$$

dir. Fakat eğer $k \leq m$ ise

$$\left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{z} \right\|_{(k)} \leq \frac{\gamma_k}{\gamma_1} \left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - y + y - \mathrm{z} \right\|_{(1)}$$

$$\leq \gamma_m \left[\frac{\lambda}{\gamma_1} \left(\| x \|_{(1)} + \| y \|_{(1)} \right) + \frac{1}{\gamma_1} \left(\left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{y} \right\|_{(1)} + (1-\lambda) \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i - \mathrm{y} \right\|_{(1)} \right) \right]$$

$$\leq \left[2 - 2\Phi_m + (1-\Phi_m) \left\{ \lambda \left(\frac{9}{\gamma_1} - 3 + \frac{9}{\gamma_1} \varepsilon_1 \right) + 2\varepsilon_3 \right\} \right] c$$

$$\leq \left[2 - \frac{\Phi_m (20 + 3\alpha)}{2(8+\alpha)} \right] c$$

dir. Bu yüzden,

$$\lim_j \left\| \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} y_i - \mathrm{z} \right\| \leq \max \left\{ \left[2 - \frac{\alpha \Phi_m^2}{8(8+\alpha)(1-\Phi_m)^2} \right] c, \left[2 - \frac{\Phi_m (20+3\alpha)}{2(8+\alpha)} \right] c \right\} < 2c$$

olup bu Teorem 3.15 ile çelişir.

Dolayısıyla ispat tamamdır.

3.3 c_0’ın eşdeğer norm aileleri ile afin genişlemeyen fonksiyonlar için SNT’yi sağlayacak şekilde yeniden normlanması

Bu bölümde Nezir ve Mustafa [22] çalışmasında olduğu gibi bir önceki bölümün sonuçları genelleştirilmiştir. Not edilmelidir ki bu başlıkta sunulan sonuçlar [22] çalışmasında da olduğu gibi Carlos A. Hernández-Linares, María A. Japón ve Enrique Llorens-Fuster [15] teoremlerinin ispatlarında uygulanan yöntemler kullanılmış olup [15] çalışması ise Lin’in [19] çalışmasını genelleştirmektedir. Çalışmada bahsi geçen makalelerin sonuçları ve teknikleri harmanlanarak arzu edilen sonuca ulaşılmıştır. Not edilmelidir ki Lemma 1.4 aşağıda sunulmuş olan teoremin hipotezinin kabul edilebilirliğini göstermektedir. Şimdi tez çalışmasının en genel sonucu aşağıdaki teoremle ve ispatı ile verilecektir.

Teorem 3.17 $\rho(\cdot)$ normu c_0 üzerinde aşağıdaki koşulu sağlayan bir eşdeğer norm olsun: Sıfıra zayıf yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi ve her $x \in c_0$ için

$$\limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m + x\right) = \limsup_n \rho\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m\right) + \rho(x)$$

dir. Bu durumda her $\lambda > 0$ için c_0 üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_\rho = \rho(\cdot) + \lambda \|\cdot\|$ eşdeğer norm ailesine göre c_0 Banach uzayı afin $\|\cdot\|_\rho$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT’ye sahiptir.

İspat. Öncelikle her $k \in \mathbb{N}$ ve her $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ için

$$S_k(x) := \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|\xi_j|^p}{j^2}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ ve } \rho_k(x) := \rho(x) + \lambda\gamma_k S_k(x) \qquad (6)$$

şeklinde tanımlansın.

Açıkça görülebilir ki her $x \in c_0$ için $\| x \| = \sup_k S_k(x)$ olup Lemma 1.4 gereğince 0’a zayıf yakınsayan her $(x_n)_n$ için en az bir alt dizi $\left(x_{n_l}\right)_l$ bulunabilir öyle ki her $x \in c_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\limsup_j \rho_k\left(\frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j} x_{n_l} + x\right) = \limsup_j \rho_k\left(\frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j} x_{n_l}\right) + \rho_k(x) \qquad (7)$$

dir. Şimdi olmayana ergi yöntemiyle kabul edilsin ki $(c_0, \ \|\cdot\|_\rho)$ Banach uzayı afin $\|\cdot\|_\rho$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'yi sağlamaz. Bu durumda T ve D Sonuç 2.13'ün koşullarını sağlayacak şekilde seçilebilir ve τ ise c_0'ın zayıf $(\sigma(l^\infty, \ l^1))$-topolojisi olsun öyle ki bu z ile sembolize edilmektedir.

$$M := \inf\left\{\limsup_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - x\right\|_\rho \ : (x_n)_n \subset D \ \text{dizisi} \ x_n \underset{z}{\rightarrow} x \ şeklinde\ ysnd\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Not edilebilir ki $M > 0$ dir. Kabul edilsin ki $A(D)$ ile sembolize edilen ifade öyle $(x_n)_n \subset D$ dizilerinin kümesi olsun ki $(x_n)_n$ dizisi bir $x \in c_0$ noktasına zayıf yakınsayan ysnd olmak üzere her $u \in c_0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_j \rho\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k - u\right)$, $\lim_j \left\|\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k - u\right\|$ ve $\lim_j S_k\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k - u\right)$ mevcut olsun.

c_0'ın ayrılabilirliği dolayısıyla, aşağıdaki eşitlik vardır.

$$M = \inf\left\{\lim_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - x\right\|_\rho \ : (x_n)_n \subset A(D) \ , \ x_n \underset{w}{\rightarrow} x\right\}.$$

Genelliği bozmadan gerekli orantılama yapılabileceği düşünelerek yukarıdaki eşitlik içindeki tüm ifadelerin orantılanmış halleri ispat başındaki halleri ile değiştirildiğinde $M = 1$ olduğu kabul edilebilir ve buradan normların eşdeğerliliği dolayısıyla

$$c := \inf\{x \ : \ \rho(x) = \lambda\} > 0 \ \ ve \ \ d := \inf\{x \ : \ \| x \|_\rho = \lambda\} > 0 \quad (8)$$

dir. $\delta_1 > 0$ öyle skaler olsun ki $\frac{1+\delta_1}{1+c} + 2\delta_1 < 1$ koşulunu sağlamak üzere zayıf-$\lim_n x_n = x$ olan bir ysnd $(x_n)_n \subset A(D)$ için $\lim_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - x\right\|_\rho < 1 + \delta_1$ koşulu da sağlansın. Şimdi yine genelliği bozmadan $x = 0$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda $K := \left\{z \in D: \ \lim_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - z\right\|_\rho \le 2 + 2\delta_1 \right\}$ bir bkkk T-görüntüsünü içeren küme olup en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki her $n \ge n_0$ için $x_n \in K$ dir.

Şimdi

$$Q := \inf\left\{\lim_{m}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|_{\rho} \ : (y_n)_n \subset K \cap A(D)\ ,\ y_n \underset{z}{\to} y\right\}$$

ile tanımlansın ve bu durumda not edilsin ki

$$1 \leq Q \leq \lim_{m}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right\|_{\rho} \leq 1 + \delta_1 \qquad (9)$$

dir.

Buradan da $A(K) := \{(y_n)_n \subset A(D) \colon y_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}\ \}$ olarak tanımlansın ve $y_n \underset{z}{\to} y$ koşulunu sağlayan keyfi bir ysnd $(y_n)_n \subset A(K)$ seçilsin. Bu durumda, her $k \in \mathbb{N}$ için genelliği bozmadan gerekirse $(x_n)_n$ dizisinin uygun bir alt dizisine geçiş yapılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilecektir.

$$2 + 2\delta_1 \geq \limsup_{s}\lim_{m}\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right\|_{\rho}$$

$$\geq \limsup_{s}\lim_{m}\rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n - \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right)$$

$$= \limsup_{s}\left[\limsup_{m}\rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) + \rho_k\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n\right)\right] \quad [\ (7)'\text{den dolayı}]$$

$$= \limsup_{m}\rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) + \limsup_{s}\rho_k\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - y\right) + \rho_k(y) \quad [\ (7)'\text{den dolayı}]$$

$$= \lim_{m}\rho\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) + \lambda\gamma_k\lim_{m}S_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) + \lim_{s}\rho\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - y\right)$$

$$+ \lambda\gamma_k\lim_{s}S_k\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - y\right) + \rho_k(y)$$

$$= \lim_{m}\rho\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) + \lambda\gamma_k\lim_{m}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n + \lim_{s}\rho\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - y\right)$$

$$+ \lambda\gamma_k\lim_{s}\left\|\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s} y_n - y\right\| + \rho_k(y)$$

$$\geq \gamma_k \left[\lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n \right\|_\rho + \lim_s \left\| \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} y_n - y \right\|_\rho \right] + \rho_k(y)$$

$$\geq 2\gamma_k + \rho_k(y)$$

dir. Bu sebeple, eğer $(y_n)_n \subset A(K)$ dizisi $y_n \underset{z}{\to} y$ olacak şekilde bir ysnd ise

$$\rho_k(y) \leq 2(1-\gamma_k) + 2\delta_1 < 2 + 2\delta_1 \qquad (10)$$

dir. Şimdi s skaleri öyle seçilebilir ki $\frac{1+\delta_1}{1+c} < 2\delta_1 < s < 1$ eşitsizliği sağlanır ve (8) gereğince her $u \in c_0$ için $\rho(u) \leq \frac{\|u\|_\rho}{1+c}$ dır. Dolayısıyla,

$$\lim_m \rho\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} x_n\right) \leq \frac{\lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n \right\|_\rho}{1+c} < \frac{1+\delta_1}{1+c}$$

olup buradan en az bir $n_0 \in N$ bulunabilir öyle ki

$$\rho\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) < \frac{\lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} x_n \right\|_\rho}{1+c} < \frac{1+\delta_1}{1+c}$$

dir. Fakat $x = 0$ kabulü hatırlanırarak,

$$\limsup_k \rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) = \rho\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) + \lambda \limsup_k \gamma_k S_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right)$$

$$= \rho\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right)$$

olacaktır. Bu sebeple, en az bir $k_0 \in N$ bulunabilir öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) < \frac{1+\delta_1}{1+c} \qquad (11)$$

ve

$$q_k := \frac{1+\delta_1}{1+c} + 2(1-\gamma_k) + 2\delta_1 < s < 1 \leq Q \qquad (12)$$

dir. K bir sınırlı küme olduğundan, $\exists H > 0$ vardır öyle ki $x \in K$ için $\rho(x) < H$ dir. Bu sebeple,

$$\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) < H, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad (13)$$

dir. Şimdi $s_0 := 1 - M(1 - \gamma_{k_0})$ olarak tanımlansın. Not edilebilir ki $s_0 < 1$ dir.

Ayrıca,

$h := H + 2 + 2\delta_1$ olarak tanımlansın ve buradan (9) gereğince $h > Q > s_0$ (14)

Şimdi $\alpha \in (0,1)$ seçilsin öyle ki $\alpha < \frac{2Q(1-s_0)}{h-s_0Q}$ eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin; bu durumda, $(2-\alpha)Q + \alpha s = 2Q - \alpha(Q - s) < 2Q$ ve

$$(2-\alpha)s_0Q + \alpha h = 2s_0Q + \alpha(h - s_0Q) < 2s_0Q + 2Q(1 - s_0) = 2Q$$

dir.

Dolayısıyla $\delta_2 > 0$ bulunabilir öyle ki

$$(2-\alpha)(Q + \delta_2) + \alpha s < 2Q \quad (15)$$

ve

$$(2-\alpha)s_0(Q + \delta_2) + \alpha h < 2Q \quad (16)$$

dir. Buradan not edilebilir ki

$$W := \max\{(2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha s, \quad (2-\alpha)s_0(Q+\delta_2) + \alpha h\}$$

için

$$W < 2Q \quad (17)$$

eşitsizliği gerçekleşecektir.

Şimdi $(y_n)_n \subset A(K)$ dizisi $y_n \underset{z}{\rightarrow} y$ olacak şekilde bir ysnd olsun ve $\lim\limits_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^m y_n - y\right\|_\rho < Q + \delta_2$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m \geq N_0$ için

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|_\rho < Q + \delta_2 \quad (18)$$

dir. Ayrıca,

$$\lim_m \rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right) = \lim_m \rho\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right) + \lambda\gamma_k \lim_m S_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right)$$

$$= \lim_m \rho\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right) + \lambda\gamma_k \lim_m \left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|$$

$$= \lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_\rho - (1-\gamma_k)\lambda \lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|$$

$$\leq [1-(1-\gamma_k)d] \lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_\rho \ (8) eşitsizliğinde\ yer\ alan\ d\ skalerinden$$

$$< [1-(1-\gamma_k)d](Q+\delta_2)$$

ve buradan öyle bir $N_1 \geq N_0$ bulunabilir ki her $m \geq N_1$ ve her $k \leq k_0$ için

$$\rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right) < [1-(1-\gamma_k)d](Q+\delta_2) \leq s_0(Q+\delta_2) \quad (19)$$

dir. Şimdi $z_0 := \alpha \frac{1}{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} x_n + (1-\alpha) \frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} y_n$ olarak tanımlansın ve K kümesinin konveks olduğu göz önüne alınırsa $z_0 \in K$ dır. Şimdi $\lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z_0 \right\|_\rho \leq W$ olduğu gözlemlenecektir ve bunun ispatı için her $k \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq N_1$ için $\rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z_0 \right) \leq W$ olduğu gösterilecektir.

Öncelikle aşağıdaki eşitlik göz önüne alınmalıdır.

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z_0 = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y - (1-\alpha) \left(\frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} y_n - y \right) - \alpha \left(\frac{1}{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} x_n - y \right).$$

Bunu görmek için her $m \geq N_1$ için iki ayrı durum ele alınacaktır.

Durum 1: $k > k_0$ olsun.

Bu durumda,

$$\rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z_0 \right) \leq \rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right) + (1-\alpha) \rho_k \left(\frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} y_n - y \right)$$
$$+ \alpha \left[\rho_k \left(\frac{1}{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} x_n \right) + \rho_k(y) \right]$$

$$\leq \left\| \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_\rho + (1-\alpha)\left\| \frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} y_n - y \right\|_\rho + \alpha\left[\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) + \rho_k(y)\right]$$

$$< (2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha\left[\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) + \rho_k(y)\right] \quad [\ (18) \text{ gereğince}]$$

$$< (2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha\left[\frac{1+\delta_1}{1+c} + 2(1-\gamma_k) + 2\delta_1\right] \quad [\ (10) \text{ ve } (11) \text{gereğince}]$$

$$= (2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha q_k < (2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha s \quad [\ (12) \text{ gereğince}]$$

$$\leq W \quad [\ (17) \text{ gereğince}]$$

Durum 2: $k \leq k_0$ olsun.

Bu durumda,

$$\rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - z_0\right) \leq \rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right) + (1-\alpha)\rho_k\left(\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} y_n - y\right)$$

$$+\alpha\left[\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) + \rho_k(y)\right]$$

$$\leq s_0(2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha\left[\rho_k\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} x_n\right) + \rho_k(y)\right] \quad [\ (19) \text{ gereğince}]$$

$$< s_0(2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha[H + 2 + 2\delta_1] \quad [\ (13) \text{ ve } (10) \text{gereğince}]$$

$$\leq s_0(2-\alpha)(Q+\delta_2) + \alpha h \quad [\ (14) \text{ gereğince}]$$

$$\leq W \quad [\ (17) \text{ gereğince}]$$

Dolayısıyla her iki durumdan $k \in \mathbb{N}$ ve her $m \geq N_1$ için $\rho_k\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - z_0\right) \leq W$ dir.

Bu sebeple, her $m \geq N_1$ için $\left\|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y\right\|_\rho \leq W$ ve dolayısıyla

$$\limsup_{m} \left\| \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_\rho \leq W$$

dir. Şimdi denilebilir ki aşağıdaki şekilde tanımlı bir küme

$K_0 := \left\{ z \in K:\ \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - z \right\|_\rho \leq W \right\}$ ve $u_n \underset{z}{\rightarrow} u \in c_0$ olacak şekilde bir $(u_n)_n \subset K_0 \cap A(D)$ ysnd mevcutdur. Bu durumda, her $k \in N$ için

$$W \geq \limsup_s \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n \right\|_\rho$$

$$\geq \limsup_s \limsup_m \rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n \right)$$

$$= \lim_m \rho_k \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right) + \lim_s \rho_k \left(\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n - u \right) + \rho_k(y - u) \quad [(7)\text{gereğince}]$$

$$\geq \lim_m \rho \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right) + \lambda \gamma_k \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y + \lim_s \rho \left(\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n - u \right)$$

$$+ \lambda \gamma_k \lim_s \left\| \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n - u \right\|$$

dir. O halde k sonsuza giderken limit alınırsa,

$$W \geq \lim_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} y_n - y \right\|_\rho + \lim_s \left\| \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{s} u_n - u \right\|_\rho \geq Q + Q = 2Q$$

elde edilir fakat bu W'nun de verilen (17) eşitsizliği sağlaması ile çelişir. Dolayısıyla, $(c_0,\ \|\cdot\|_\rho)$ Banach uzayı afin $\|\cdot\|_\rho$-genişlemeyen fonksiyonlar için SNT'ye sahiptir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında c_0 Banach uzayının eşdeğer normlar vasıtasıyla yeniden normlanması ve sabit nokta teorisine sahip olması konusu çalışılmıştır. Öncelikle kapalı, konveks ve sınırlı kümelerden oluşan geniş bir aile için Nezir tarafından tanımlanmış eşdeğer norm ile sabit nokta teorisinin afin genişlemeyen fonksiyonlar için sağlandığı gösterilmiştir. Bu amaçla tez yazarının da ortak olduğu çalışmada kullanılan eşdeğer norma benzer bir norm ele alınmış olup bahsi geçen ortak çalışmada kullanılan eşdeğer norm için daha genelleştirilmiş sonucu Nezir ve Mustafa vermiştir. Çalışmalarında c_0'ın tamamının afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olabileceği bir yeniden normlamasının hatta bir yeniden normlama ailesini veren eşdeğer norm ailesinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Tez çalışmasında ise başka bir eşdeğer norm ile bu sonuçların verilebileceği gösterilmiştir. Yani öncelikle c_0 'ın afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği; yani, Nezir ve Mustafa çalışmasının bu sonucu veren tek çalışma olmayacağı ve yine Nezir ve Mustafa çalışmasında olduğu gibi ele alınan eşdeğer norm vasıtasıyla öyle eşdeğer norm aileleri elde edilebileceği öyle ki bu eşdeğer norm aileleri ile c_0 yeniden normlandığında afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olacağı gösterilmiştir. Araştırmacılar için halen Lin'in c_0-analoğu olan büyük soru açık bulunmaktadır. Yani tezde elde edilen sonuçlarda afinlik koşulunun kaldırılıp kaldırılamayacağı araştırmacıların inceleyebileceği önemli bir konu olacaktır. Ayrıca başka normlarında tezin sonuçlarını verip vermeyeceği test edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. Fund. Math. 3, 133-181.

[2] Bessaga, C. Pełczynʹski, A. (1958). On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Mathematica 17 (2), 151–164.

[3] Brouwer, L. E. J. (1912). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71(1) , 97–115.

[4] Browder, F. E. (1965). Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 53(6), 1272–1276.

[5] Browder, F. E. (1965). Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (4), 1041-1044.

[6] Diestel, J. (2012). Sequences and series in Banach spaces, Vol. 92, Springer Science & Business Media.

[7] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (1998). Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[8] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (2004). Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1659-1666.

[9] Everest, T. (2013). Fixed Points of Nonexpansive Maps on Closed, Bounded, Convex Sets in l^1 (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[10] Fetter, H. and de Buen, B. G. (2009). Banach spaces with a basis that are hereditarily asymptotically isometric to l^1 and the fixed point property, Nonlinear Analysis 71, 4598–4608.

[11] Goebel, K. and Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In Colloquium Mathematicum (Vol. 2, No. 40, pp. 259-264).

[12] Göhde, D. (1965). Zum prinzip der kontraktiven abbildung. Math. Nachr., 30, 251–258.

[13] Güven, A. (2017). c_0 yeniden normlandığında c_0 içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan bazı kapalı sınırlı konveks kümelerin karakterizasyonu (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

[14] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. (1952). Inequalities. Cambridge University Press.

[15] Hernández-Linares, C. A., Japón, M. A. and Llorens-Fuster, E. (2012). On the structure of the set of equivalent norms on l^1 with the fixed point property. Journal of Mathematical Analysis and Applications 387 (2), 645-654.

[16] Kalton, N. J. and Werner, D. (1995). Property (M), M-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, 461, 137–178.

[17] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer. Math. Monthly, 72(9), 1004–1006.

[18] Lennard, C. and Nezir, V. (2011). The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 381, 678–688.

[19] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[20] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0 -like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[21] Nezir, V. (2017). A new look to the usual norm of c_0 and candidates to renormings of c_0 with. fixed point property, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2), 85-102.

[22] Nezir, V. and Mustafa, N. (2018). c_0 can be renormed to have the fixed point property for affine nonexpansive mappings, Filomat, 32(16), 5645-5663.

[23] Nezir, V., Mustafa, N., Dutta, H. (2018). Renorming c_0 and fixed point property, in: Advanced Topics in Mathematical Analysis. eds. Ruzhansky, M. and Dutta, H., CRC Press.

[24] Nezir, V., Mustafa, N., Sade, S. Ateş, T. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for some renormings of c_0, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

.

[25] Nezir, V. and Sade, S. (2018). Abundance of equivalent norms on c_0 with fixed point property for affine nonexpansive mappings. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A, 1(67), 1-28.

[26] Nuñez, C. (1989). Characterization of Banach spaces of continuous vector valued functions with the weak Banach-Saks property. Illinois Journal of Mathematics, 33, 27–41.

[27] Oran, S. (2017). c_0 yeniden normlandığında c_0 içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan zayıf kompakt olmayan kümelerin geniş bir sınıfı (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

[28] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Studia. Math., 2, 171-180.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tahsin ATEŞ
Doğum Yeri ve Tarihi : ARDAHAN 07/01/1983
Yabancı Dili : Orta derece İngilizce
İletişim (e-posta) : taso_36@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Cumhuriyet lisesi (YDA) 1997_2001
Lisans : İnönü Üniversitesi 2002_2017
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :Final dersanesi 2007 -2008, Özel Çelik Başarı Koleji 2008-2019

Yayınları:

Nezir, V., Mustafa, N., Sade, S. Ateş, T. (2019). Set-based approach to affine fixed point property for some renormings of c_0, Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.