T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOEBE FONKSİYONUNUN KISMİ TOPLAMLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Erkan YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019

KARS

T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOEBE FONKSİYONUNUN KISMİ TOPLAMLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Erkan YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Erkan YALÇIN'ın Prof. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Koebe Fonksiyonunun Kısmi Toplamlarının Geometrik Özellikleri'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği.....ile kabul edilmiştir.

22/08/2019

	Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**:Prof. Dr. İsa YILDIRIM**	....
Üye	**:Prof. Dr. Erhan DENİZ**	....
Üye	**: Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR**	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . . . . . /. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Erkan YALÇIN
22.08.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Genelleştirilmiş Koebe Fonksiyonunun Kismi Toplamlarının Geometrik Özellikleri

Erkan YALÇIN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, $f(c;z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right]$ genelleştirilmiş Koebe fonksiyonunun ilk üç ve ilk dört terime sahip kısmi toplamlarının verilen bir mertebeden yıldızıllık ve konvekslik ve konvekse yakınlık yarıçapı bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Koebe fonksiyon, Yıldızıl fonksiyon, Konveks fonksiyon, Konvekse yakın fonksiyon, Kısmi toplamlar, Yarıçap.

2019, 76 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Geometric Properties of Partial Sums of Generalized Koebe Functions

Erkan YALÇIN

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, radii of the starlikeness, convexity and close-to-convexity of third and fourth partial sums of the generalized Koebe function $f(c;z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{c} - 1\right]$ are determined.

Keywords : Analytic function, Univalent function, Koebe function, Starlike function, Convex function, Close-to-convex function, Partial sums, Radius.

2019, 76 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş Koebe fonksiyonunun kısmi toplamlarının geometrik özellikleri ele alınmıştır. Bu çalışmada büyük emeği geçen, bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ’ e en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bugüne gelmemde en büyük destekçilerim olan ve her zaman yanımda bulunan sevgili aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Erkan YALÇIN

Kars-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{U}_r$	Orijin merkezli r yarıçaplı açık disk
$\mathbb{U}$	Orijin merkezli açık birim disk
$\mathcal{S}$	Ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{A}$	Analitik fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*$	$\mathcal{S}$ sınıfına ait yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	α −mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	$\mathcal{S}$ sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\mathcal{S}$ sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	$\mathcal{S}$ sınıfına ait konvekse-yakın fonksiyonların sınıfı
f_n	$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonunun n. kısmi toplamı
$clco\ \mathcal{S}$	Kapalı konveks zarf
$\mathcal{U}$	$\left\|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1\right\| < 1$ şartını sağlayan ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\tilde{f}$	Genelleştirilmiş kısmi toplam fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Ünivalent fonksiyonlarla ilgili çalışmalar ilk olarak 1907 yılında Koebe tarafından yapılmış olup bunu 1916 da Bieberbach'ın katsayı tahminleri için yaptığı çalışmaları takip etmiştir [1-3]. Ünivalent fonksiyonlar, özellikle katsayı tahminleri ile 20. yüzyılın başlarında yoğun olarak çalışılmaya başlanmıştır. Bunun için bu fonksiyonların bir takım özellikleri birim disk içerisinde incelenerek ortaya konulmaya çalışılmaktadır. $r > 0$ için, $z = 0$ merkezli r yarıçaplı açık disk $\mathbb{U}_r := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ ve buna göre $\mathbb{U} := \mathbb{U}_1$ açık birim disk olsun. $\mathbb{U}$ birim disk içinde analitik bir fonksiyon olan f, eğer her $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ ise $\mathbb{U}$ içinde ünivalent ("Schlicht" yada "yalınkat") fonksiyondur denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(0) = 0, f'(0) = 1$ şartını sağlayan

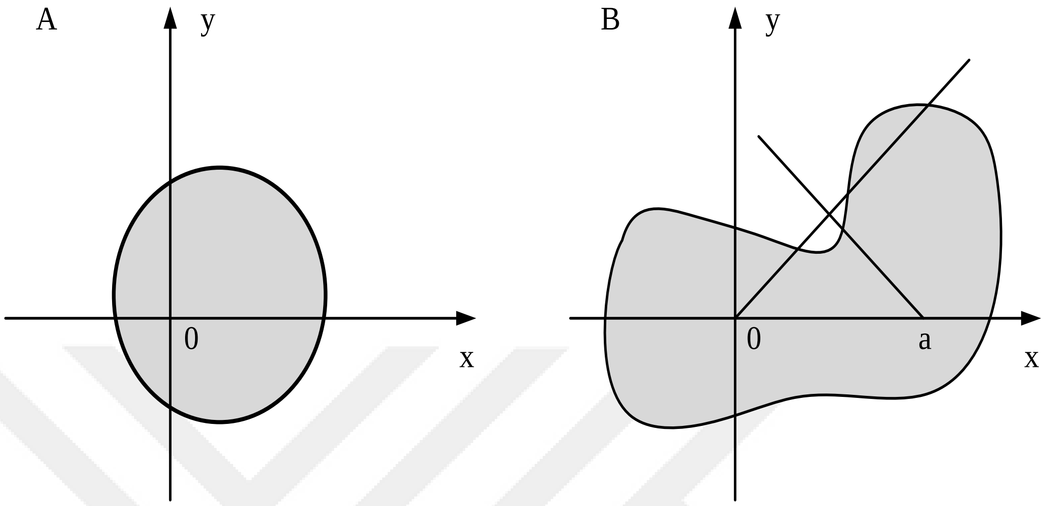
$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \tag{1.1.1}$$

biçimdeki analitik fonksiyonlara normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{A}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ sınıfındaki tüm ünivalent fonksiyonların oluşturduğu sınıf da $\mathcal{S}$ ile gösterilsin. $\mathcal{S}$ sınıfına ait,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{1.1.2}$$

biçiminde gösterilen ünivalent fonksiyona Koebe fonksiyonu denir [4]. Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ düzlemine birebir taşır. Bir D bölgesinin her noktası sabit bir $a \in D$ noktasına, tamamı D bölgesinin içinde kalacak bir doğru parçasıyla birleştirilebiliyorsa D bölgesine a noktasına göre yıldızıl (starlike) bölge, orijine göre yıldızıl olan bir bölgeye ise sadece yıldızıl bölge denilir [3]. Diğer bir ifadeyle a noktasına göre yıldızıl olan bölgenin her noktası a noktasından görülebilir. Her bir noktasına göre yıldızıl olan bölgeye ise konveks bölge denir. Yani D

bölgesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine bu bölgenin içinde kalıyorsa D ye konveks (convex) bölge denir [3].



Şekil 1 (A) Konveks ve (B) yıldızıl bölgeler

Şekil 1 de konveks ve yıldızıl bölgeler sırasıyla gösterilmektedir. Şekil 1A da taralı bölgedeki her nokta yıldızıl olduğundan bu bölge konvekstir. Aksine Şekil 1B de görüldüğü gibi taralı bölge a noktasına göre yıldızıl iken orijine göre yıldızıl değildir.

Bir D bölgesinde ünivalent olan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu birim diski ($f(\mathbb{U})$) orijine göre yıldızıl bir bölgeye konform olarak dönüştürüyorsa yıldızıl fonksiyon, konveks bir bölgeye konform olarak dönüştürüyorsa konveks fonksiyon olarak isimlendirilir [4]. $\mathcal{S}$ ye ait tüm yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları sırasıyla $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ ile gösterilir. $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıfları için gerekli ve yeter şart aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$f \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

ve

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

Daha genel bir ifadeyle, $0 \leq \alpha < 1$ için $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ mertebesi α olan sırasıyla yıldızıl ve konveks fonksiyonlar içeren $\mathcal{S}$ nin altsınıfları olsunlar. Bu sınıflar analitik olarak aşağıdaki gerektirmelerle ifade edilirler:

$$f \in \mathcal{S}^*(\alpha) \iff Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ve

$$f \in \mathcal{C}(\alpha) \iff Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha.$$

$\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ arasındaki ilişki gereği, $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $zf^{'}(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır. Bir diğer ilişkili sınıf konvekse yakın fonksiyonlar sınıfıdır. $g(z)$ birim diskte konveks bir fonksiyon olmak üzere,

$$Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

şartını sağlayan bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna, α mertebeden konvekse yakın ($g(z)$ fonksiyonuna göre) fonksiyon denir [3]. Tüm bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{K}(\alpha)$ olarak ifade edilir. Genel olarak mertebesi $\alpha = 0$ olan konvekse yakın fonksiyonlar $\mathcal{K}$ ile ifade edilir. Bu gerçeğe dayanarak bir fonksiyon ($f \in \mathcal{A}$)

$$Re\big(f'(z)\big) > 0$$

şartı ile konvekse yakın fonksiyonların ünivalent olduğunu gösterir. Yukarıdaki tanımlardan da anlaşıldığı gibi $\mathcal{S}$ sınıfının alt sınıfları arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K}$ biçiminde bir kapsam bağıntısı bulunmaktadır.

f fonksiyonunun n. kısmi (yada diğer bir ifadeyle bir bölümünün) toplamı (f_n) aşağıdaki gibi bir çokterimli (polinom) ile ifade edilmektedir:

$$f_n(z) = z + \textstyle\sum_{k=2}^{n} a_k z^k.$$

Burada şu iyi bilinmelidir ki; bir fonksiyon ile onun kısmi toplamları aynı geometrik özelliklere sahip olması gerekmez. Örneğin, Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent olmasına rağmen ikinci kısmi toplamı

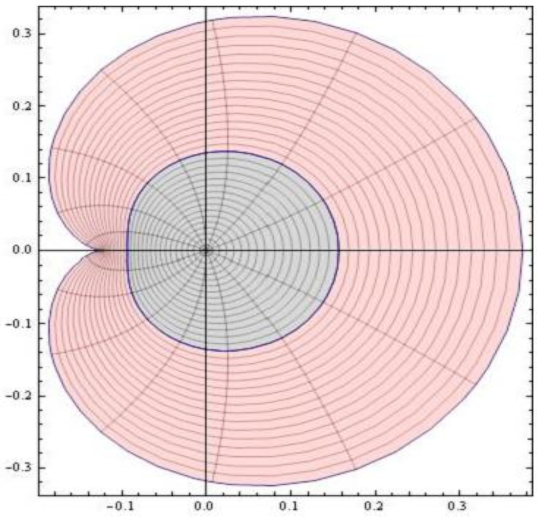
$$f_2(z) = z + 2z^2 \quad (z \in \mathbb{U})$$

$\mathbb{U}_{1/4}$ diski içinde univalent olduğu doğrudan (yada $|z| < 1/4$ için $|f_2{}'(z) - 1| < 1$ gerçeğinden) söylenebilirken, aksine $f_2{}'(-1/4) = 0$ olduğundan daha büyük diskler için bu doğru değildir. Bu örnekte görüldüğü gibi ünivalent fonksiyonların kısmi toplamları için $\mathbb{U}$ da ünivalent olma şartı bulunmamaktadır.

Diğer bir taraftan, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonunun ikinci kısmi toplam fonksiyonu $f_2(z) = z + a_2 z^2$ dir. Eğer $a_2 = 0$ olursa $f_2(z) = z$ olur ve bu fonksiyonun özellikleri açıktır. Varsayalım $a_2 \neq 0$ olsun, bu durumda $|z| \leq r$ için $r < 1/(2|a_2|)$ şartıyla f_2 aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$Re\left(\frac{zf_2{}'(z)}{f_2(z)}\right) = Re\left(1 + \frac{a_2 z}{1 + a_2 z}\right) \geq 1 - \frac{|a_2|r}{1 - |a_2|r} > 0.$$

Bu nedenle f_2 fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapı $1/(2|a_2|)$ dir. $|z| < r$ içinde f_2 nin konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < r$ içinde $zf_2{}'$ nin yıldızıl olmasıdır. Bu nedenle f_2 nin konvekslik yarıçapı $1/(4|a_2|)$ dir. Eğer f ünivalent ya da yıldızıl ünivalent ise bu durumda $|a_2| \leq 2$ ve buna bağlı olarak f_2 nin ünivalentlilik ve konvekslik yarıçapları sırasıyla $1/4$ ve $1/8$ olur. $\mathbb{U}_{1/4}$ ve $\mathbb{U}_{1/8}$ disklerinin $z + 2z^2$ fonksiyonu altında eşlenmiş görüntüleri için Şekil 2 ye bakınız. Konveks fonksiyon f ve ayrıca $\mathbb{U}$ içinde türevlerinin reel kısımları pozitif olan tüm fonksiyonlar için $|a_2| \leq 1$ dir ve bu fonksiyonların ikinci kısmi toplamlarının f_2 ünivalentlik ve konvekslik yarıçapları sırasıyla $1/2$ ve $1/4$ tür.



Şekil 2 $\mathbb{U}_{1/4}$ ve $\mathbb{U}_{1/8}$ disklerinin $\omega = z + 2z^2$ altındaki görüntüleri

Bu nedenle daha büyük disklerin $\mathbb{U}_\rho$ ünivalent fonksiyonlarının kısmi toplamlarının ünivalentliliğini incelemek ilgi çekici bir konudur. Szegö [5] kısmi toplamlarla ilgili bir inceleme kaleme almıştır. Burada sunulan çalışmada, ünivalent fonksiyonların alt sınıflarının kısmi toplamlarıyla ilgili çeşitli sonuçlar sunulmuştur.

Owa [6] 2001 yılındaki çalışmasında yıldızıl fonksiyonlar için extremal fonksiyon olan Koebe fonksiyonu $k(z) = z/(1-z)^2$ ve konveks fonksiyonlar için extremal fonksiyon olan $l(z) = z/(1-z)$ fonksiyonlarının ilk üç terimini içeren kısmi toplamlarının yıldızıllık ve konvekslik yarıçapını incelemiştir. 2004 yılında Owa, Srivastava ve Saito [7] yaptıkları çalışmada, bu fonksiyonların ilk üç ve ilk dört terimlerini içeren kısmi toplamlarının mertebesine göre yıldızıllık ve konvekslik yarıçapını çalışmışlardır. Son olarak 2012 yılında Hayami ve arkadaşları [8] $k(z) = z/(1-z)^2$ fonksiyonunun üçüncü kısmi toplamın yıldızıllık, konvekslik ve konvekse yakınlık yarıçaplarını mertebelerine bağlı olarak incelemişlerdir.

Bir önceki paragrafta belirtilen çalışmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere,

$$f(c;z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right] = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4 + \cdots$$

şeklindeki genelleştirilmiş Koebe fonksiyonunun mertebelerine bağlı olarak yıldızıllık, konvekslik ve konvekse yakınlık yarıçapları çalışıldı.

1.2. Kuramsal Temeller

1.2.1. Genel Kavramlar

Aşağıda verilen temel bilgiler Ponnusamy ve Silverman'ın [9] kitabından alınmıştır.

Tanım 1.2.1.1 (Diferensiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f\colon A \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.1.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.2.1.1 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

dir.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{1.2.1.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{3/2}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 1.2.1.3 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 1.2.1.2 (Laurent Teoremi): c_0 ve c_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere c_0, r_0 yarıçaplı ve c_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu c_0 ile c_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (1.2.1.2)$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 1.2.1.4 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir.

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

1.2.2. Ünivalent Fonksiyonların Temel Sınıfları

Analitik olarak düşünüldüğünde, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken, geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı $f(z)$ analitik fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ da tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılmaktadır. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{U}$$

biçimindeki fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left\{ f : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,\, a_n \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{U} \right\}$$

şeklinde yazılır. Bir $f \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ fonksiyonun *n*. kısmi toplamı da

$$f_n(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k$$

şeklinde verilir.

<u>Tanım 1.2.2.1</u> ($\boldsymbol{\mathcal{S}}$ Sınıfı): $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{ f \in \boldsymbol{\mathcal{A}} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \}$$

biçiminde gösterilir [3,4].

Örneğin; $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ dir.

Aşağıda $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sınıfının önemli bazı alt sınıfları tanımlanacaktır.

<u>Tanım 1.2.2.2</u> ($\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ Sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna kısaca yıldızıl fonksiyon denir. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\boldsymbol{\mathcal{S}}^*$ ile gösterilir [3,4].

Teorem 1.2.2.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

dır [3,4].

Kısaca yıldızıl fonksiyonlar için

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

yazılabilir.

Örneğin; $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere Koebe fonksiyonu $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ dır.

Tanım 1.2.2.3 ($\alpha-$Mertebeden Yıldızıl Fonksiyon): $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $0 \le \alpha < 1$ olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ ye $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa ise $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir [4].

Kısaca $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \right\}$$

ile gösterilir. Ayrıca

$$\mathcal{S}_1^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1-\alpha,\ z \in \mathbb{U} \right\}$$

ile tanımlanan bu sınıf $\mathcal{S}^*(\alpha)$ nın bir alt kümesidir. Yani $\mathcal{S}_1^*(\alpha) \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğu açıktır.

Tanım 1.2.2.4 ($\mathcal{C}$ Sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa (yani B, her noktasına göre yıldızıl ise) B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir [3,4].

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.2.2: $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

dır [3,4].

Bu teoreme göre $\mathcal{C}$ sınıfı

$$\mathcal{C}=\left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \right\}$$

biçiminde yazılabilir. Örneğin; $f(z)=\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \mathcal{C}$ dir.

Tanım 1.2.2.5 ($\alpha-$Mertebeden Konveks Fonksiyon): Her $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa ise $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir [4].

Kısaca $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$\mathcal{C}(\alpha)=\left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır [3,4].

Tanım 1.2.2.6 ($\mathcal{K}$ Sınıfı): $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde bir $g \in \mathcal{C}$ varsa f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir [3,4].

Her konveks fonksiyon yıldızıldır, her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır. Daha genel olarak her konvekse yakın fonksiyon ünivalenttir. Yani,

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

dır. Bu bağıntının tersi genelde doğru değildir. Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2}\right) \in \mathcal{K}$ olmasına rağmen yıldızıl değildir. Yine $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ dır fakat konveks değildir.

Tanım 1.2.2.7 ($\alpha-$Mertebeden Konvekse Yakın Fonksiyon): $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha$$

olacak biçimde $\mathbb{U}$ da konveks bir g fonksiyonu varsa f ye $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon (veya g ye göre $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon) denir. $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir [4].

Kısaca $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha,\ g \in \mathcal{C} \right\}$$

biçiminde yazılabilir. Özel olarak $g(z) = z \in \mathcal{C}$ alınması durumunda $\mathcal{K}(\alpha)$ sınıfını

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} f'(z) > \alpha \right\}$$

ile göstereceğiz.

Teorem 1.2.2.4: f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ konveks bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir [3].

Tanım 1.2.2.8 (Koebe Fonksiyonu): $\mathcal{S}$ sınıfında olan,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

şeklindeki fonksiyona Koebe fonksiyonu denir [3,4].

Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -\frac{1}{4}]$ bölgesi üzerine birebir olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonu univalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Çünkü hem $\mathcal{S}$ hemde $\mathcal{S}^*$ sınıfları için bir extremal fonksiyondur.

Tanım 1.2.2.9 (Genelleştirilmiş Koebe Fonksiyonu): $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere,

$$f(c;z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right] = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4 + \cdots$$

şeklinde gösterilen fonksiyona genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu denir [10].

Dikkat edilirse $f(2;z)$ fonksiyonu klasik Koebe fonsiyonu $f(1;z)$ fonksiyonu da konveks fonksiyonlar için ekstremal fonksiyonudur. Dolayısıyla c nin özel değerlerinde farklı türden bir çok fonksiyon elde edilebilir. 1949 yılında Hille [10] c sabitinin $\{|z+1| \leq 1\}$ ve $\{|z-1| \leq 1\}$ kapalı disklerinde olmaması durumunda $f(c;z)$ nin ünivalent olmayacağını ispatlamıştır. Bu sonucun aksine 2003 yılında Yamashita [11] $\Delta(z,w) = \left\{w : \frac{|w-z|}{|1-\bar{z}w|} < r,\ z \in \mathbb{U}\right\}$ Euclidean olmayan diskte ünivalentlik yarıçapını elde etmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ünivalent, yıldızıl ve konveks fonksiyonların kısmi toplamları ve kısmi toplamları ile verilen bu fonksiyonların yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları hakkında geniş bir şekilde araştırma yapılmış ve yapılan çalışmalar sunulmuştur.

2.1 Bazı Katsayı Eşitsizliklerini Sağlayan Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Silverman [12] çalışmasında $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-\alpha)|a_k| \leq 1-\alpha \text{ ya da } \sum_{k=2}^{\infty} k(k-\alpha)|a_k| \leq 1-\alpha$$

koşullarının f fonksiyonunun α mertebeden yıldızıl yada konveks olması için yeterli olduğunu ispatlamıştır. Eğer f fonksiyonu yukarıdaki eşitsizliklerin her ikisini sağlıyorsa f_n kısmi toplamları da aynı eşitsizlikleri sağlar.

Silverman [12], yukarıdaki eşitsizlikleri sağlayan f fonksiyonları için Re$\{f(z)/f_n(z)\}$, Re$\{f_n(z)/f(z)\}$, Re$\{f'(z)/f_n{}'(z)\}$ ve Re$\{f_n{}'(z)/f'(z)\}$ ifadelerinin kesin alt sınırlarını elde etmiştir. Bununla ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.1: Eğer f analitik fonksiyonu $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-\alpha)|a_k| \leq 1-\alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{f_n(z)}\right\} \geq \frac{n}{n+1-\alpha},$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f_n(z)}{f(z)}\right\} \geq \frac{n+1-\alpha}{n+2-2\alpha},$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{f_n'(z)}\right\} \geq \frac{\alpha n}{n+1-\alpha},$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f_n'(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{n+1-\alpha}{(n+1)(2-\alpha)-\alpha}$$

eşitsizlileri sağlanır. Eşitsizlikler

$$f(z) = z + \frac{1-\alpha}{n+1-\alpha} z^{n+1}$$

fonksiyon için kesindir [44].

Silverman aynı çalışmasında benzer sonuçları $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-\alpha)|a_k| \leq 1-\alpha$ eşitsizlik koşulunu sağlayan fonksiyonlar içinde ispatlamıştır. Bu sonuçları Frasin [13] çalışmasında $\sum c_k |a_k| \leq \delta$ koşulunu sağlayan fonksiyon sınıfları için genişletmiştir.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olduğu bilinmektedir. Tüm katsayıları $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizlik koşulunu sağlayan bir fonksiyon $\mathbb{U}$ da analitiktir ve bu nedenle $\mathcal{A}$ nın elemanıdır. Bununla birlikte bu eşitsizliği sağlayan bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin,

$$f(z) = z - 2z^2 - 3z^3 - 4z^4 - \cdots = 2z - \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar fakat türevi

$$z = 1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{\sqrt{8}+4}} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}+4} - \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{8}+4}}\right) i \in \mathbb{U}$$

için sıfır olduğundan $\mathbb{U}$ birim diskinde f ünivalent değildir. Gavrilov [14] $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının ve f_n kısmi toplamlarının ünivalentlik yarıçapının $2(1-r)^3 - (1+r) = 0$ denkleminin reel kökü olduğunu, bununla birlikte katsayıları $|a_n| \leq M$ koşulunu sağlayan fonksiyonların ünivalentlilik yarıçapının $1 - \sqrt{M/(1+M)}$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra 1982 yılında Yamashita [15] Gavrilov'un bulduğu ünivalentlilik yarıçapları aynı fonksiyonların yıldızıllık yarıçapı olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu fonksiyonların konvekslilik yarıçapının alt sınırını da bulmuştur. Kalaj, Ponnusamy ve Vourinen [16] aynı problemi harmonik fonksiyonlar için araştırmıştır. Ravichandran [17] çalışmasında $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ formundaki fonksiyonlar için a_n Taylor katsayıları $n \geq 3$ için $|a_n| \leq n$, M yada M/n $(M > 0)$ koşullarını ve $0 \leq b \leq 1$ için $|a_2| = 2b$ alınması durumunda α mertebeden yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları için kesin sınırlar elde etmiştir.

Teorem 2.1.2: $f \in \mathcal{A}$, $|a_2| = 2b$, $0 \leq b \leq 1$ ve $n \geq 3$ için $|a_n| \leq n$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu $|z| \leq r_0$ diskinde

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq 1 - \alpha$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $r_0 = r_0(\alpha)$

$$1 - \alpha + (1 + \alpha)r = 2(1 - \alpha + (2 - \alpha)(1 - b)r)(1 - r)^3$$

denklemin (0,1) aralığındaki reel köküdür. Ayrıca $r_0(\alpha)$ aynı zamanda α mertebeden yıldızıllık yarıçapıdır. Bunların yanısıra $r_0(1/2)$, verilen fonksiyonun parabolik yıldızıllık yarıçapıdır. Tüm sonuçlar kesindir [17].

2.2 Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Toplamları

$f \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\left| f'(z) \left(\frac{z}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{U}$ sınıfı denir. $\mathcal{U}$ sınıfının $\mathcal{S}$ nin bir alt sınıfı olduğu iyi bilinmektedir. Bu bölümde $\mathcal{U}$ sınıfına ait fonksiyonların kısmi toplamları göz önüne alınacaktır. Obradović ve Ponnusamy [18] çalışmasında $\mathcal{U}$ sınıfına ait fonksiyonların kısmi toplamları için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 2.2.1: Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $k \geq 2$ için b_k katsayıları reel ve negatif olmamak üzere

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (2.2.1)$$

şeklinde olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ için,

$$\left|\frac{f_n(z)}{f(z)} - 1\right| < |z|^n (n + 1 - n \log(1 - |z|)) \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle $|z| < r$ diskinde,

$$\left|\frac{f_n(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

olur. Burada r

$$1 - r^n (n + 1 - n \log(1 - r)) = 0 \qquad (2.2.2)$$

denkleminin tek pozitif köküdür. Ayrıca $n \geq 3$ için

$$r \geq r_n = 1 - \frac{2 \log n}{n}$$

dir [18].

(2.2.2) eşitliğinde $n = 2, 3, 4, 5$ alınırsa r değerleri sırasıyla $r = 0.481484$, $r = 0.540505$, $r = 0.585302$ ve $r = 0.620769$ olur.

Teorem 2.2.2: Eğer $f \in \mathcal{U}$ fonksiyonu (2.2.1) formuna sahipse, bu durumda

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 \, |b_n|^2 \leq 1$$

dir. Özellikle $n > 2$ için $|b_1| \leq 2$ ve $|b_n| \leq \frac{1}{n-1}$ olur. Sonuçlar kesindir [18].

Teorem 2.2.3: $f \in \mathcal{U}$ ve $f_n(z)$ onun kısmi toplamı olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ için,

$$\left|\frac{f_n(z)}{f(z)} - 1\right| < |z|^n(\mathrm{n}+1)\left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{|z|}{1-|z|}\right) \quad (z \in \mathbb{U})$$

dir [18].

Sonuç 2.2.4: $f \in \mathcal{U}$ olsun. O halde $n \geq 3$ için,

$$\left|\frac{f_n(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2}, \quad |z| < \mathrm{r}_n := 1 - \frac{2\log n}{n}$$

ya da diğer bir ifadeyle

$$\left|\frac{f_n(z)}{f(z)} - \frac{4}{3}\right| < \frac{2}{3}, \quad |z| < \mathrm{r}_n$$

dir [18].

Özellikle $f \in \mathcal{U}$ olmak üzere Sonuç 2.2.4 den $n \geq 3$ ve $|z| < \mathrm{r}_n$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f_n(z)}{f(z)}\right\} > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{f_n(z)}\right\} > \frac{2}{3}$$

yazılır.

f fonksiyonunun ikinci Taylor katsayısı sıfır olduğunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.2.5: Eğer $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ (yani $a_2 = 0$) fonksiyonu $\mathcal{U}$ sınıfına ait ise, Bu durumda $|z| < r$ diskinde f_n n. kısmi toplam $\mathcal{U}$ sınıfındadır. Burada r, aşağıdaki denklemin pozitif köküdür

$$(1-r)^3(1+r)^2 - r^n(1+r^2)^2[5 + r + n(1-r^2)] = 0. \qquad (2.2.3)$$

Özellikle $n \geq 5$ için $r \geq r_n = 1 - \frac{3\log n - \log(\log n)}{n}$ dir [18].

(2.2.3) eşitliğinde $n = 3, 4, 5$ alınırsa sırasıyla $r = 0{,}361697$, $r = 0{,}423274$, $r = 0{,}470298$ yarıçapları elde edilir.

Teorem 2.2.6: $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ (yani $a_2 = 0$) fonksiyonu $\mathcal{U}$ sınıfına ait olsun. O halde her bir $n \geq 2$ tamsayı değeri için, $|z| < \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ diskinde

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{f_n(z)}\right) > \frac{1}{2}$$

dir [18].

2.3 Ünivalent Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Koebe fonksiyonunun ikinci kısmi toplamı, ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının yarıçapının $1/4$ ten büyük bir diskte ünivalent olamayacağını gösterir. Szegö [19] ünivalent fonksiyonlar teorisinden çok bilinen Distorsiyon teoremi ve Löewner teorisinden yararlanarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.3.1: (Szegö teoremi) $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının kısmi toplamları $\mathbb{U}_{1/4}$ diskinde ünivalenttir. Buradaki $1/4$ yarıçapı kesindir [19].

Jenkins [20] (ayrıca bakınız [3]), Goluzin eşitsizliğini kullanarak bu sonucun basit bir kanıtını bulmuş ve tek ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının $\mathbb{U}_{1/\sqrt{3}}$ diskinde ünivalent olduklarını göstermiştir. Burada $1/\sqrt{3}$ sayısı ayrıca tek ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının yıldızıllık yarıçapını göstermektedir [21]. Iliev [22], $f_k(z) = z + c_1^{(k)} z^{k+1} + \cdots$ formundaki ünivalent fonksiyonların kısmi toplamı olan $\sigma_n^{(k)}(z) = z + c_1^{(k)} z^{k+1} + \cdots + c_n^{(k)} z^{nk+1}, n = 1,2,\ldots,$ fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapını araştırmıştır. Örneğin; tüm $n = 1, 2, \ldots$ için, $|z| < 1/\sqrt{3}$ diskinde $\sigma_n^{(2)}$ nin ve $|z| < \sqrt[3]{3}/2$ diskinde ise $\sigma_n^{(3)}$ in ünivalent olduğunu göstermiştir. Iliev bunlarla birlikte

$n \geq 15$ için, $|z| < 1 - 4(\ln n)/n$ diskinde $\sigma_n^{(1)}$ in ünivalent olduğunu göstermiştir. Ayrıca $\sigma_n^{(2)}$ ve $\sigma_n^{(3)}$ için n'nin fonksiyonları gibi ve $\sigma_1^{(k)}$ için k'nın fonksiyonları gibi düşünerek ünivalentlik yarıçapları belirlenmiştir.

Szegö teoremi ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının $\mathbb{U}_{1/4}$ diskinde ünivalent olduğunu ve Ke ve Yifei [23] ise aynı diskete yıldızıllığını ispatlamışlardır. Ye [24] ünivalent fonksiyonların kısmi toplamlarının $\mathbb{U}_{1/8}$ diskinde konveks olduğunu ve $1/8$ değerinin kesin olduğunu göstermiştir. Ye, aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ ve

$$f^{\frac{1}{k}}(z^k) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} b_\upsilon^{(k)} z^{\upsilon k+1}, \quad (k = 2, 3, \dots, b_0^{(k)} = 1)$$

olsun. Bu durumda $\mathbb{U}_{\sqrt[k]{k/(2(k+1)^2)}}$ diskinde $\sum_{\upsilon=0}^{n} b_\upsilon^{(k)} z^{\upsilon k+1}$ konvekstir. Bu konvekslik yarıçapı kesindir [24].

Ruscheweyh [25], $\mathcal{S}$ ile birlikte $\mathcal{S}$ in kapalı konveks kabuğununa ait fonksiyonların da $\mathbb{U}_{1/4}$ içinde f_n n. kısmi toplamların yıldızıl olduğunu göstererek Szegö teoremini genişletmiştir.

$\mathcal{F} = clco\{\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} z^k : |x| \leq 1\}$ olsun. Burada clco kapalı konveks kabuk anlamına gelmektedir. Analitik $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$ fonksiyonlarının konvulasyonu (Hadamard çarpımı) $f * g$

$$(f * g)(z) := z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k$$

şeklinde tanımlanır.

Ruscheweyh [25] $\mathcal{F}$ sınıfı ile alakalı aşağıdaki teoremi ortaya koymuştur.

Teorem 2.3.3: Eğer $f \in clco\,\mathcal{S}$ ve $g \in \mathcal{F}$ ise, bu durumda $f * g$ fonksiyonu $\mathbb{U}_{1/4}$ diskinde yıldızıldır. $1/4$ sabiti en uygun değerdir [25].

Özellikle $g(z) = z + z^2 + \cdots + z^n$ için Teorem 2.3.3 aşağıdaki sonuca indirgenir.

Sonuç 2.3.1: Eğer $f \in clco\,\mathcal{S}$ ise ya da özellikle normalize edilmiş tipik reel fonksiyon ise, bu durumda $\mathbb{U}_{1/4}$ içinde n. kısmi toplam f_n yıldızıldır. $1/4$ en uygun değerdir [25].

$\mathcal{F}$ sınıfı aşağıdaki iki altkümeyi içerir:

$$\mathcal{R}_{1/2} := \{f \in \mathcal{A}: Re(f(z)/z) > 1/2,\ z \in \mathbb{U}\} \subset \mathcal{F},$$

$$\mathcal{D} := \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k z^k \in \mathcal{A} : 0 \leq a_{k+1} \leq a_k\right\} \subset \mathcal{F}.$$

Dolayısıyla konveks fonksiyonlar sınıfı ($\mathcal{C}$) $\mathcal{R}_{1/2}$ nin alt kümesidir.

Sonuç 2.3.2: Eğer f fonksiyonu $\mathcal{F}$ sınıfına aitse, bu durumda $\mathbb{U}_{1/4}$ içinde f fonksiyonu ve özellikle n. kısmi toplam f_n konvekstir. $1/4$ sabiti en uygun değerdir [25].

Suffridge [26] e^{1+z} fonksiyonunun tüm kısmi toplamlarının konveks olduğunu göstermiştir. Ruscheweyh ve Salinas [27] $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(1+z)^k/k!$, $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq 0$ biçimindeki fonksiyonların $\mathbb{U}$ diski içinde ya sabit yada konveks ünivalent olduklarını göstermişlerdir. $|z| > 1$ için $F(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$ analitik olsun. Reade [28] F ünivalent ya da $|z| > 1$ için $\mathrm{Re}F'(z) > 0$ olduğunda, kısmi toplamlarının $F_n(z) = z + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}$ ünivalentlilik yarıçapını elde etmiştir.

2.4 Yıldızıl Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Szegö [19] $\mathbb{U}_{1/4}$ diski içinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların kısmi toplamlarının yine yıldızıl ve konveks olduğunu ve $1/4$ ten daha büyük değerleri için bunun mümkün olmadığını göstermiştir. Eğer n sabit ise, bu durumda f_n'nin n'ye bağlı yıldızıllık yarıçapı gösterilebilir. Von Victor Levin'in [29] sonucuna göre, ünivalent fonksiyonların $n.$ kısmi toplamları $\mathbb{U}_\rho$ diskinde (burada $n \geq 17$ için $\rho = 1 - 6(\ln n)/n$) ünivalenttirler. Robertson [30] $\mathbb{U}$ içinde bir P özelliğine sahip f fonksiyonunun $n.$ kısmi toplamı f_n'nin, $\mathbb{U}_{R_n}$ diski içinde P özelliğine sahip olacağı R_n yarıçapını belirlemiştir. Robertson çalışmasında f yıldızıldır, $f(z)/z$ pozitif reel kısıma sahiptir, f konvekstir, f tipik-reel yada f sanal eksen yönünde konveks ve reel eksen yönünde reel gibi özelliklere sahip fonksiyonu gözönüne almıştır. Robertson [31] daha sonra, R_n ifadesinde yapmış olduğu bir hatayı düzelterek sonuçlarını multivalent yıldızıl fonksiyonlara genişletmiştir.

Yıldızıl fonksiyonların $n.$ kısmi toplamlarının yıldızıllık yarıçapı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>Teorem 2.4.1</u>: Eğer $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ yıldızıl, konveks, tipik-reel ya da sanal eksen yönünde konveks özelliklerinden birine sahipse, bu durumda $n \geq n_0$ için $\mathbb{U}_\rho$ içinde (burada $\rho \geq 1 - 3\, log\, n\,/n$) $f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k$ kısmı toplamı f ile aynı özelliklere sahip olacak şekilde bir n_0 vardır [31, 32].

Analitik fonksiyon $f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$, eğer p den fazla değeri olmadığı, en az bir değeri p defada alıyor ve

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \ \ (z \in \mathbb{U})$$

ise p-valent yıldızıldır [31].

Robertson, p-valent yıldızıl fonksiyonlar için, n. kısmi toplam $f_n(z) = z^p + \sum_{k=1}^{n} a_{p+k} z^{p+k}$ fonksiyonunun p-valent yıldızıllık yarıçapının en kötü $1 - (2p + 2)\log n / n$ olduğunu göstermiştir. Ruscheweyh [33] $|z| < 1/(2p + 2)$ içinde p-valent yıldızıl (veya konvekse yakın) fonksiyonun kısmi toplamı f_n'nin p-valent yıldızıl (veya konvekse yakın) olduğunu basit bir kanıt sunarak göstermiştir.

Kobori [34] aşağıdaki teoremi vermiş ve Ogawa [35] bu sonucu farklı bir yöntemle ispatlamıştır.

Teorem 2.4.2: Eğer f yıldızıl fonksiyon ise, bu durumda $|z| < 1/8$ içinde tüm kısmi toplamları f_n konvekstir. Burada $1/8$ değeri kesindir [34,35].

Yukarıdaki teoreme göre $|z| < 1/8$ içinde Koebe fonksiyonu $z/(1 - z)^2$ konvekstir. Bu gerçeği doğrulamak için bir diğer kanıt olarak, iki konveks fonksiyonun konvulasyonu yine bir konveks fonksiyondur gerçeği verilebilir [36]. Ayrıca yıldızıl mertebesi $1/2$ olan bir f fonksiyonu için $Re(f(z)/f_n(z)) > 1/2$ olduğu bilinmektedir. Bu sonuç Singh ve Paul [37] tarafından belli parametrelere göre aşağıdaki teoremle genişletilmiştir.

Teorem 2.4.3: λ ve μ en az biri sıfır olmamak şartıyla negatif olmayan sayılar ya da $|\lambda| > 4|\mu|$ olmak şartıyla μ bir kompleks sayı olsun. Eğer $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ ise, bu durumda $z \in \mathbb{U}$ için

$$Re\left(\lambda \frac{zf'(z)}{f(z)} + \mu \frac{f_n(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olur. Sonuç kesindir [37].

2.5 Konveks Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Bir konveks fonksiyon $f \in \mathcal{C}$ için, $Re(f(z)/z) > 1/2$ olduğu iyi bilinmektedir. Sheil-Small [38] bu sonucu genişleten aşağıdaki teoremi ortaya koymuştur.

Teorem 2.5.1: Eğer $f \in \mathcal{C}$ ise, f'nin n. kısmi toplamı f_n için

$$\left|1 - \frac{f_n(z)}{f(z)}\right| \leq |z|^n < 1 \quad (z \in \mathbb{U}, n \geq 1) \tag{2.5.1}$$

ve böylece

$$Re\left\{\frac{f_n(z)}{f(z)}\right\} > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{U}, n \geq 1) \tag{2.5.2}$$

dir [38].

Bu teoremin bir sonucu olarak aynı çalışmada $Q_n = \int_0^z (f_n(\eta)/\eta) d\eta$ nin konvekse yakın bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir. Aslında (2.5.2) eşitsizliği Ruscheweyh ve Sheil-Small [36] tarafından $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$ içinde ispatlanmıştır. Ayrıca (2.5.2) eşitsizliği, tek yıldızıl fonksiyonlar ve türevlerinin reel kısmı $1/2$ den büyük olan fonksiyonlar içinde geçerlidir [39].

Bir kez daha, konveks bir fonksiyonun kısmi toplamları $\mathbb{U}_{1/4}$ diski içinde konvekstir ve $1/4$ değeri daha büyük bir değerler değiştirilemez olduğunu hatırlatalım [19]. Bu sonucun farklı bir diğer kanıtı konveks fonksiyonların konvulasyonu kullanılarak gösterilebilir. 1973 de Ruscheweyh ve Shiel-Small [36], Pólya ve Schoenberg [40] ın 1958 yılında ortaya attıkları "iki konveks ünivalent fonksiyonun konvulasyonu yine bir konveks ünivalenttir" varsayımını ispatlamışlardır. Bu sonucu kullanarak Goodman ve Schoenberg [41] Szegö'nün [19] aşağıdaki sonucunun bir başka ispatını vermiştir.

Teorem 2.5.2: Eğer f konveks fonksiyon ise, bu durumda $|z| < 1/4$ içinde f'nin her bir kısmi toplamı f_n konvekstir [19, 41].

Bernardi [42] çalışmasında fonksiyon ve kısmi toplamı arasında

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{zf_n'(z)}{f_n(z)}\right| \leq \frac{nr^n}{1-r^n} \tag{2.5.3}$$

kesin eşitsizliğini ispatlamıştır. Aynı çalışmada (2.5.3) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.5.3: Eğer f konveks ise, bu durumda $|z| < r_n$ içinde n. kısmi toplam f_n yıldızıldır. Burada r_n, $1-(n+1)r^n - nr^{n+1} = 0$ denkleminin pozitif köküdür. $f(z) = z/(1-z)$ için, n nin çift değerlerinde sonuç kesindir [43].

Yukarıdaki teorem, f_n'nin ünivalent olduğu zayıf yargısı ile daha önce Ruscheweyh [43] tarafından elde edilmiştir. Singh [44] mertebesi $1/2$ olan yıldızıl bir fonksiyonun $|z| < r_n$ (r_n Teorem 2.5.3 te verildi) içinde n. kısmi toplamı f_n'nin yıldızıl olduğunu göstermiştir. Ayrıca eğer f'nin mertebesi $1/2$ olan konveks bir fonksiyon olduğu varsayılırsa Teorem 2.5.3'ün konveksliği güçlendirebileceğini göstermiştir. Buna ek olarak, mertebesi $1/2$ olan konveks bir fonksiyon f için $\mathrm{Re}(f_n(z)/z) > 1/2$ olduğunu ve $1/2$ değerinin kesin olduğunu göstermiştir. Mertebesi $1/2$ olan konveks fonksiyon f'nin tüm kısmi toplamları f'ye göre konvekse yakındır ve burada kısmi toplamları ünivalent olmayan mertebesi $\alpha < 1/2$ olan konveks fonksiyonlar bulunmaktadır [45]. Bununla birlikte Singh ve Puri [39] tek konveks fonksiyon f'nin her bir kısmi toplamının f'ye göre konvekse yakın olduğunu göstermiştir.

Silverman [32] Teorem 2.5.3'ü, $z/(1-z)$ fonksiyonun n. kısmi toplamlarının α −mertebeden yıldızıllık yarıçapını bulurken kanıtlamıştır.

Teorem 2.5.4: $|z| < r_n$ diskinde $g_n(z) = \frac{z(1-z^n)}{1-z}$ fonksiyonu α −mertebeden yıldızıldır. Burada r_n, $1-\alpha-\alpha r+(\alpha-1-n)r^n+(\alpha-n)r^{n+1}=0$ denkleminin en küçük pozitif köküdür. n'nin çift değerleri için sonuç kesindir [32].

İspat: Bi-lineer dönüşüm $\omega = 1/(1-z)$, $|z| < r$ dairesel bölgesini

$$\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-r^2}\right| \leq \frac{r}{1-r^2}$$

dairesine taşır. Benzer şekilde

$$\left|\frac{z}{1-z}-\frac{r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{r}{1-r^2}$$

dir. Böylece

$$\frac{zg_n'(z)}{g_n(z)} = \frac{1}{1-z}-\frac{nz^n}{1-z^n}$$

olduğundan $|z| \leq r_n < 1$ için

$$\left|\frac{zg_n'(z)}{g_n(z)}-\frac{1}{1-r^2}+\frac{nr^{2n}}{1-r^{2n}}\right| \leq \frac{r}{1-r^2}+\frac{nr^n}{1-r^{2n}}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlik $1-\alpha-\alpha r+(\alpha-1-n)r^n+(\alpha-n)r^{n+1} \geq 0$ olması koşuluyla

$$\mathrm{Re}\,\frac{zg_n'(z)}{g_n(z)} \geq \frac{1}{1+r}-\frac{nr^n}{1-r^n} \geq \alpha$$

olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.5.5: Eğer f konveks ise, bu durumda tüm n değerleri için $|z| < \left(1/(2n)\right)^{1/n}$ diskinde n. kısmi toplam f_n yıldızıldır. Özellikle $|z| < 1/2$ diskinde f_n yıldızıldır ve $1/2$ yarıçapı kesindir [32].

İspat: Teorem 2.5.4 den $0 \leq r \leq \left(1/(2n)\right)^{1/n}$ için $1-(n+1)r^n - nr^{n+1} \geq 0$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. Yukarıdaki eşitsizlik $n > 2$ için

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{(2n)^{1/n}} \leq 1$$

ifadesine eşittir. İkinci sonuç, $1/(2n)^{1/n}$ nin, n'ye bağlı artan bir fonksiyonu ve $g_2(z) = z + z^2$ için $g_2'(-1/2) = 0$ gerçeğinden kolayca görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Silverman [32] ayrıca konveks fonksiyon f'nin $n.$ kısmi toplamı f_n'nin $n \geq 3$ için $|z| < \sqrt{23/71} \approx 0{,}569$ içinde yıldızıl olduğunu ve $\sqrt{23/71}$ yarıçapının kesin olduğunu ve konveks bir f fonksiyonunun, $n.$ kısmi toplamı f_n'nin $|z| < (1-\alpha)/(2-\alpha)$ içinde α mertebeden yıldızıl, $|z| < (1-\alpha)/\left(2(2-\alpha)\right)$ içinde α mertebeden konveks olduğunu ve yarıçapın kesin olduğu göstermiştir.

Yine Silverman [32] çalışmasında $|z| < r_n \to 1$ diski içinde f_n kısmi toplamının α mertebeden yıldızıl olabilmesi ancak ve ancak $\alpha \leq \frac{1}{2}$ olmasıyla mümkün olduğunu göstermiştir. Bunula ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.5.6: $f \in C$ olmak üzere

(i) Eğer $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ise bu durumda f_n kısmi toplamı tüm n değerleri için $|z| < ((1-2\alpha)/2n)^{1/n}$ diskinde α- mertebeden yıldızıldır.

(ii) f_n kısmi toplamı tüm n değerleri için $|z| < (4/9n^2)^{1/n}$ diskinde 1/2 mertebeden yıldızıldır.

(iii) Eğer $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ise bu durumda $g_{2n}(z) = \frac{z(1-z^{2n})}{1-z}$ fonksiyonu tüm n değerleri için $|z| < (1-\alpha)/\alpha < 1$ diskinde yıldızıl değildir [32].

2.6 Konvekse Yakın Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Bu başlık altında konvekse yakın fonksiyonların kısmi toplamlarının bazı özelliklerini vereceğiz. Bu konuyla alakalı ilk defa Miki 1956 (bkz [29]) yılında bir çalışma yapmıştır. O çalışmasında aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 2.6.1: $f \in \mathcal{A}$ ve $g \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{K}$ yani $\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$ ise bu durumda $|z| < \frac{1}{4}$ diskinde $\operatorname{Re}\left(\frac{f_n'(z)}{g_n'(z)}\right) > 0$ dır. Burada $\frac{1}{4}$ sınırı kesindir [29].

Bu teorem f_n kısmi toplamının $|z| < \frac{1}{4}$ diskinde konvekse yakın olduğunu söyler. Dolayısıyla Szegö teoreminin bir genelleştirilmişi olarak görülebilir. Daha sonra Ogawa [46] 1960 yılında aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Teorem 2.6.2: $f \in \mathcal{A}$ ve $g \in \mathcal{S}^*$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{K}$ yani $\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0$ ise bu durumda $|z| < \frac{1}{8}$ diskinde $\operatorname{Re}\left(\frac{(zf_n(z))'}{g_n'(z)}\right) > 0$ dır. Burada $\frac{1}{8}$ sınırı kesindir [46].

Teorem 2.6.3: $f \in \mathcal{A}$ ve $g \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{K}$ yani $\operatorname{Re}\left(\frac{(zf(z))'}{g'(z)}\right) > 0$ ise bu durumda $|z| < \frac{1}{2}$ diskinde $\operatorname{Re}\left(\frac{zf_n{}'(z)}{g_n(z)}\right) > 0$ dır. Burada $\frac{1}{2}$ sınırı kesindir [46].

Goel [47] 1965 yılında Ogawa'nın yukarıdaki sonuçlarından yola çıkarak aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 2.6.4: $f \in \mathcal{A}$ ve $g \in \mathcal{S}^*$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{K}$ yani $\operatorname{Re}\left(\frac{\left(zf'(z)\right)'}{g'(z)}\right) > 0$ ise bu durumda $|z| < \frac{1}{6}$ diskinde $\operatorname{Re}\left(\frac{(zf_n(z))'}{g_n'(z)}\right) > 0$ dır. Burada $\frac{1}{6}$ sınırı kesindir [47].

2.7 Genelleştirilmiş Kısmi Toplam

$n_k \geq k$ olmak üzere $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ artan tam sayı dizisi (sonlu yada sonsuz) ve bir $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu verilsin. $\tilde{f}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k} = f(z) * (z + \sum_{k=2}^{\infty} z^{n_k})$ fonksiyonu f fonksiyonunun genelleştirilmiş kısmi toplamı olarak isimlendirilir. Silverman [32] yıldızıl bir fonksiyonun konveks bir fonksiyonla konvulasyonu yine yıldızıl bir fonksiyondur gerçeğinden yararlanarak aşağıdaki sonucu ispatladı.

Teorem 2.7.1: Eğer $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu konveks ise, bu durumda $|z| < \left(1/(k-1)\right)^{1/k}$ içinde $F_k(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk+1} z^{jk+1}$, $k = 2, 3, \ldots$ yıldızıldır. Her bir k değeri için sınırlar kesindir [32].

Konveks fonksiyonların genelleştirilmiş kısmi toplamı için Fournier ve Silverman [48] aşağıdaki sonuçları ispatlamıştır.

Teorem 2.7.2: Eğer f konveks ise, bu durumda f'nin genelleştirilmiş kısmi toplamı $\tilde{f}$,

i. $|z| < c$ içinde konveksdir. Burada $c \approx 0{,}20936$, $x(1 + x^2)/(1 - x^2)^3 = 1/4$ denkleminin $(0, 1)$ de tek köküdür.

ii. $|z| < b$ içinde yıldızıldır. Burada $b \approx 0{,}3715$, $x/(1-x^2)^2 = 1/2$ denkleminin $(0,1)$ de tek köküdür.

Konveks $z + \sum_{k=2}^{\infty} z^k = z/(1-z)$ fonksiyonu ile ilişkili olan $z + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} = z + z^2/(1-z^2)$ fonksiyonu konvekslik ve yıldızıllık yarıçapı için ekstremaldır [48].

Bu sonuçlar konveks fonksiyonların komşulukları hakkında bilgiler kullanılarak kanıtlanmıştır. Fournier ve Silverman [48] ayrıca $|z| < c$ de yıldızıl bir f fonksiyonu için genelleştirilmiş kısmi toplam $\tilde{f}$'nin yıldızıl olduğunu ispatlamışlardır. Burada c yukarıda belirtildiği gibidir. Aynı durum konveks fonksiyonlar, konvekse yakın fonksiyonlar ve $g \in \mathcal{S}^*$ için $(f * g)(z)/z \neq 0$ şartını sağlayan fonksiyonlar için de geçerlidir. Bir başka çalışmasında Fournier ve Silverman [49] aynı durumun $\mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonlar sınıfı içinde geçerli olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

<u>Teorem 2.7.3</u>: Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise, o halde f fonksiyonunun $\tilde{f}$ genelleştirilmiş kısmi toplamı tüm $z \in \mathbb{U}$ için Re $\tilde{f}'(cz) > 0$ koşulunu sağlar. Burada c Teorem 2.7.2 de belirtildiği gibidir. $f(z) = z/(1-z)^2$ ve $\{n_k\}_{k=2}^{\infty} = \{2k-2\}_{k=2}^{\infty}$ için sonuçlar kesindir [49].

Fournier ve Silverman [49] ayrıca eğer f analitik ve Re$\{f(z)/z\} > 1/2$ ise, o halde herhangi bir $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ için

$$\left|z\tilde{f}''(z)\right| \leq \mathrm{Re}\tilde{f}'(z) \qquad (|z| < c)$$

olduğunu ispatlamışlardır.

Silverman [50] aşağıdaki sonucu ispatlamıştır. Benzer sonuçlar Silverman'ın [51] çalışmasında da bulunabilir.

Teorem 2.7.4: r_0, $r + log(1-r^2) = 0$ denkleminin pozitif kökü olsun. Eğer $\mathrm{Re}\big(f'(z) + zf''(z)\big) > 0$ ise, o halde $|z| \leq r_0 \approx 0{,}71455$ için $\mathrm{Re}\tilde{f}'(z) \geq 0$ dır. Sonuç $\tilde{f}(z) = z + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}/(2n)^2$ fonksiyonu ile kesindir [50].

$\mathrm{Re}\big(f'(z) + zf''(z)\big) > 0$ şartını sağlayan fonksiyonlar için ayrıca f'nin f_n n. kısmi toplamının $\mathrm{Re}f_n'(z) > 0$ koşulunu sağladığı ve bundan dolayı univalent olduğu da bilinmektedir. Ayrıca $\mathrm{Re}(f_n(z)/z) > 1/3$ dür.

2.8 Bazı Özel Ünivalent Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Buraya kadar anlatılanlarda görülüyor ki; bir analitik fonksiyonun geometrik özelliği (ünivalentliği, yıldızıllığı, α-mertebeden yıldızıllığı, konveksliği, α-mertebeden konveksliği, konvekse yakınlığı v.s) bilindiğinde belli bir $|z| \leq r_n$ diskinde o fonksiyonun kısmi toplamının ünivalentliği, yıldızıllığı, α-mertebeden yıldızıllığı, konveksliği, α-mertebeden konveksliği, konvekse yakınlığı v.s. gibi geometrik özellikleri için en kesin r_n yi bulma problemi ele alınmıştır. Yalnız kısmi toplamların hangi yarıçaplı disklerde yıldızıl ve konveks veya konvekse yakın (mertebeleriyle) olması için mertebelerinin ne olacağıyla ilgili herhangi bir çalışma yoktur.

Bu bölümde Shigeyoshi Owa ve arkadaşlarının 2001, 2004 ve 2012 yıllarındaki univalent fonksiyonlar teorisinde önemli yere sahip bazı ektremal fonksiyonların kısmi toplamlarının geometrik sonuçları verilmiştir.

Bununla ilgili ilk çalışma 2001 yılında Owa [6] tarafından verilmiştir. O çalışmasında $f(z) = \frac{z}{(1-z)^k}$ formunda olan Koebe tipli fonksiyonların $k = 1{,}2$ olması durumunda üç terimli kısmi toplamının yıldızıllığını ve konveksliğini araştırmıştır.

Teorem 2.8.1: $\mathcal{C}$ sınıfı için ekstremal bir fonksiyon olan $f(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun $f_3(z)=z+z^2+z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda $0\leq r<\beta$ $(\frac{1}{7}<\beta<\frac{1}{6})$ olmak üzere $f_3\in\mathcal{S}^*\left(\frac{626}{961}\right)$ dir. Burada β

$$x^4-8x^3+9x^2+1=0 \quad \left(0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

denkleminin pozitif köküdür [6].

Teorem 2.8.2: $\mathcal{S}^*$ sınıfı için ekstremal bir fonksiyon olan $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun $f_3(z)=z+2z^2+3z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda 0$\leq r<\beta$ $(1/14<\beta<1/13)$ olmak üzere $f_3(z)\in\mathcal{C}\left(\frac{3191}{15876}\right)$ dır. Burada β

$$81x^4-162x^3+72x^2-18x+1=0 \quad \left(0\leq x<\frac{1}{3}\right)$$

denkleminin pozitif köküdür [6].

Owa aynı çalışmada $F_n(z)=z+a_nz^n$ kısmi toplamının α-mertebeden yıldızıllığı ve konveksliği için yarıçap problemini de çalışmıştır. Elde ettiği sonuçlar aşağıdadır.

Teorem 2.8.3: $F_n(z)$ kısmi toplamı $0\leq r<\sqrt[n-1]{1/|a_n|}\leq 1$ için

$$\frac{1-n|a_n|r^{n-1}}{1-|a_n|r^{n-1}}\leq Re\left(\frac{zF_n'(z)}{F_n(z)}\right)\leq\frac{1+n|a_n|r^{n-1}}{1+|a_n|r^{n-1}}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $0\leq r<\sqrt[n-1]{(1-\alpha)/(n-\alpha)|a_n|}\leq 1$ için $F_n(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır [6].

Teorem 2.8.4: $F_n(z)$ kısmi toplamı $0 \le r < \sqrt[n-1]{1/n|a_n|} \le 1$ için

$$\frac{1-n^2|a_n|r^{n-1}}{1-n|a_n|r^{n-1}} \le Re\left(1+\frac{zF_n''(z)}{F_n'(z)}\right) \le \frac{1+n^2|a_n|r^{n-1}}{1+n|a_n|r^{n-1}}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $0 \le r < \sqrt[n-1]{(1-\alpha)/n(n-\alpha)|a_n|} \le 1$ için $F_n(z) \in \mathcal{C}$ dır [6].

Aynı yıl Eguchi ve Owa [52] yine aynı Koebe tipli $f(z) = \frac{z}{(1-z)^k}$ $(k \in \mathbb{R})$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları için yarıçap problemini çalışmıştır. Onlar aşağıdaki sonuçları bulmuşlardır.

Teorem 2.8.5: $f(z) = \frac{z}{(1-z)^k}$ Koebe tipli fonksiyonu için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

(1) $k > 2(1-\alpha) \Longrightarrow 0 \le r < \frac{1-\alpha}{k-(1-\alpha)}$, $(|z| = r)$ için $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır,

(2) $0 \le k \le 2(1-\alpha) \Longrightarrow 0 \le r < 1$, $(|z| = r)$ için $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır,

(3) $k < 0 \Longrightarrow 0 \le r < \frac{1-\alpha}{1-\alpha-k}$ için $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır [52].

Aşağıda Teorem 2.8.5 de k nın bazı özel değerleri için $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ durumunu sağlayan bazı örnekler verilmiştir.

Örnek:

(1) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\frac{3}{4}}} \in \mathcal{S}^*\left(\frac{2}{3}\right)$ $\quad (0 \le r < \frac{4}{5})$

(2) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\frac{1}{3}}} \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad (0 \le r < 1)$

(3) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^{-5}} \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{6}\right)$ $\quad \left(0 \le r < \frac{4}{7}\right)$.

Teorem 2.8.6: $f(z)=\frac{z}{(1-z)^k}$ Koebe tipli fonksiyonu için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

(1) $k \geq 1$

$$0 \leq r < \frac{(3-\alpha)k - 2(1-\alpha) - \sqrt{k((5-2\alpha+\alpha^2)k - 4(1-\alpha))}}{2(k-1)(k-(1-\alpha))} \quad (|z| = r)$$

için $f(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır,

(2) $k \leq -1 \Rightarrow$

$$0 \leq r < \frac{2(1-\alpha) - k(3-\alpha) - \sqrt{k((5-2\alpha+\alpha^2)k - 4(1-\alpha))}}{2(1-k)(1-\alpha-k)} \quad (|z| = r)$$

için $f(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır [52].

Aşağıda Teorem 2.8.6 ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnekler:

(1) $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^{10}} \in \mathcal{C}\left(\dfrac{1}{3}\right) \qquad \left(0 \leq r < \dfrac{19-\sqrt{235}}{126} = 0{,}00291293\ldots\right)$

(2) $f(z)=\frac{z}{(1-z)^{-4}} \in \mathcal{C}\left(\frac{1}{7}\right) \qquad \left(0 \leq r < \frac{23-\sqrt{274}}{85} = 0{,}0758477\ldots\right)$.

2004 yılında Owa, Srivastava ve Saito [7] $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun ve $g(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun üçüncü ve dördüncü kısmi toplamlarını $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları için incelemiştir.

Teorem 2.8.7: $g(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun kısmi toplamı $g_3(z)=z+z^2+z^3$ verilsin. Bu durumda

$$0\le r<\frac{7-3\sqrt{5}}{2}=0.1458\ldots$$

için

$$Re\left(\frac{zg_3'(z)}{g_3(z)}\right)>\alpha(r)=3-\frac{2-r}{1-r+r^2}>\frac{4-\sqrt{5}}{2}=0.9919\ldots$$

dir [7].

Teorem 2.8.8: Koebe fonksiyonunun $f_3(z)=z+2z^2+3z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$0\le r<\frac{5-\sqrt{22}}{3}=0.1031\ldots$$

için

$$Re\left(\frac{zf_3'(z)}{f_3(z)}\right)>\alpha(r)=3-\frac{2(1-r)}{1-2r+3r^2}>\frac{3(89-16\sqrt{22})}{137}=0.3055\ldots$$

dir [7].

Teorem 2.8.9: $g(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun kısmi toplamı $g_4(z)=z+z^2+z^3+z^4$ verilsin. Bu durumda

$$r_2=\frac{1}{4}=+\frac{\sqrt[3]{5(9+4\sqrt{6})}}{4\sqrt[3]{9}}-\frac{\sqrt[3]{25}}{4\sqrt[3]{3(9+4\sqrt{6})}}=0.6058\ldots$$

olmak üzere $0\le r\le r_2<1$ için

$$Re\left(\frac{zg_4'(z)}{g_4(z)}\right)>\alpha(r)=4-\frac{3-2r+r^2}{(1-r)(1+r^2)}$$

dir [7].

Teorem 2.8.10: Koebe fonksiyonunun kısmi toplamı $f_4(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4$ verilsin. Bu durumda

$$r_0 = \frac{3}{16} + \frac{\sqrt[3]{531 + 16\sqrt{1695}}}{16\sqrt[3]{9}} - \frac{37}{16\sqrt[3]{3\left(531 + 16\sqrt{1695}\right)}} = 0.3545 \ldots$$

olmak üzere $0 \leq r \leq r_0 < 1$ için

$$Re\left(\frac{zf_4'(z)}{f_4(z)}\right) > \alpha(r) = 4 - \frac{3 - 4r + 3r^2}{1 - 2r + 3r^2 - 4r^3}$$

dür [7].

Teorem 2.8.11: $g(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun kısmi toplamı $g_3(z) = z + z^2 + z^3$ verilsin. Bu durumda

$$0 \leq r < \frac{5 - \sqrt{22}}{3} = 0.1031 \ldots$$

için

$$Re\left(1 + \frac{zg_3''(z)}{g_3'(z)}\right) > \alpha(r) = 3 - \frac{2(1 - r)}{1 - 2r + 3r^2} > \frac{3\left(89 - 16\sqrt{22}\right)}{137} = 0.3055 \ldots$$

dir [7].

Teorem 2.8.12: Koebe fonksiyonunun kısmi toplamı $f_3(z) = z + 2z^2 + 3z^3$ verilsin. Bu durumda

$$0 \leq r < \frac{7 - 2\sqrt{10}}{9} = 0{,}0750 \ldots$$

için

$$Re\left(1 + \frac{zf_3''(z)}{f_3'(z)}\right) > \alpha(r) = 3 - \frac{2(1 - 2r)}{1 - 4r + 9r^2} > 2\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = 0{,}7350 \ldots$$

dir [7].

Teorem 2.8.13: $g(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun kısmi toplamı $g_4(z)=z+z^2+z^3+z^4$ verilsin. Bu durumda

$$r_0=\frac{3}{16}+\frac{\sqrt[3]{531+16\sqrt{1695}}}{16\sqrt[3]{9}}-\frac{37}{16\sqrt[3]{3\left(531+16\sqrt{1695}\right)}}=0.3545\ldots$$

olmak üzere $0\le r\le r_0<1$ için

$$Re\left(1+\frac{zg_3''(z)}{g_3'(z)}\right)>\alpha(r)=4-\frac{3-4r+3r^2}{1-2r+3r^2-4r^3}$$

dür [7].

Teorem 2.8.14: Koebe fonksiyonunun kısmi toplamı $f_4(z)=z+2z^2+3z^3+4z^4$ verilsin. Bu durumda

$$r_1=\frac{9}{64}+\frac{\sqrt[3]{4257+64\sqrt{18681}}}{64\sqrt[3]{9}}-\frac{269}{64\sqrt[3]{4257+64\sqrt{18681}}}=0.1933\ldots$$

olmak üzere $0\le r\le r_1<1$ için

$$Re\left(1+\frac{zf_4''(z)}{f_4'(z)}\right)>\alpha(r)=4-\frac{3-8r+9r^2}{1-4r+9r^2-16r^3}$$

dür [7].

2012 yılında Hayami, Kuroki, Duman ve Owa [8] yaptıkları çalışmada hem Teorem 2.8.7, 2.8.8, 2.8.11 ve 2.8.12 deki sonuçları daha kapsamlı araştırıp hemde farklı türden bazı fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları için yarıçap problemini ele almışlardır. Bulunan sonuçlar daha önceden bulunan sonuçlardan daha genel ve daha iyidir. Elde ettikleri sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.8.15: $f(z) = \frac{z}{1-z} \in \mathcal{C}$ fonksiyonunun $f_3(z) = z + z^2 + z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} 1 - 2r + 3r^2; & 0 < r \leq \frac{1}{6} = 0.16666 \\ \frac{5}{6} - 3r^2; & \frac{1}{6} < r \leq \frac{\sqrt{10}}{6} = 0.52704 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq \frac{\sqrt{10}}{6}\}$ diskinde $f_3(z) \in \mathcal{R}$ dir [8].

Teorem 2.8.16: $g(z) = \frac{z}{1-z^2} \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonunun $g_3(z) = z + z^3 + z^5$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} 1 - 3r^2 + 5r^4; & 0 < r \leq \frac{\sqrt{15}}{10} = 0.38729 \\ \frac{31}{40} - 5r^4; & \frac{\sqrt{15}}{10} < r \leq \frac{\sqrt[4]{1550}}{10} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $g_3(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq \frac{\sqrt[4]{1550}}{10}\}$ diskinde $g_3(z) \in \mathcal{R}$ dir [8].

Teorem 2.8.17: $h(z) = -z - 2\log(1-z) \in \mathcal{R}$ fonksiyonunun $h_3(z) = z + z^2 + \frac{2}{3}z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} 1 - 2r + 2r^2; & 0 < r \leq \frac{1}{4} = 0.25 \\ \frac{3}{4} - 2r^2; & \frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{6}}{4} = 0.61237 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $h_3(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq \frac{\sqrt{6}}{4}\}$ diskinde $h_3(z) \in \mathcal{R}$ dir [8].

Teorem 2.8.18: $f(z)=\frac{z}{1-z}\in\mathcal{C}$ fonksiyonunun $f_3(z)=z+z^2+z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{1-2r+3r^2}{1-r+r^2}; & 0<r\le\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}=0{,}14589\ldots\\[2ex] \dfrac{24(1+r^2+r^4)-(13+11r^2)\sqrt{3(1+r^2+r^4)}}{12(1+r^2+r^4)-6(1+r^2)\sqrt{3(1+r^2+r^4)}}; & \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}<r\le\sqrt{\dfrac{23}{71}}=0{,}56916\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt{\frac{23}{71}}\}$ diskinde $f_3(z)\in\mathcal{S}^*$ dır [8].

Teorem 2.8.19: $g(z)=\frac{z}{1-z^2}\in\mathcal{S}^*$ fonksiyonunun $g_3(z)=z+z^3+z^5$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{1-3r^2+5r^4}{1-r^2+r^4}; & 0<r\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=0{,}38196\ldots\\[2ex] \dfrac{36(1+r^4+r^8)-4(5+4r^4)\sqrt{3(1+r^4+r^8)}}{12(1+r^4+r^8)-6(1+r^4)\sqrt{3(1+r^4+r^8)}}; & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<r\le\sqrt[4]{\dfrac{2}{11}}=0{,}65299\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $g_3(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt[4]{\frac{2}{11}}\}$ diskinde $g_3(z)\in\mathcal{S}^*$ dır [8].

Teorem 2.8.20: $h(z)=-z-2\log(1-z)\in\mathcal{R}$ fonksiyonunun $h_3(z)=z+z^2+\frac{2}{3}z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{3(1-2r+2r^2)}{3-3r+2r^2}; & 0<r\le\dfrac{13-\sqrt{145}}{4}=0{,}23960\ldots\\[2ex] \dfrac{80(9+3r^2+4r^4)-(69+34r^2)\sqrt{10(9+3r^2+4r^4)}}{40(9+3r^2+4r^4)-10(3+2r^2)\sqrt{10(9+3r^2+4r^4)}}; & \dfrac{13-\sqrt{145}}{4}<r\le\sqrt{\dfrac{37}{78}}=0{,}68873\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $h_3(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt{\frac{37}{78}}\}$ diskinde $h_3(z)\in\mathcal{S}^*$ dır [8].

Teorem 3.8.21: $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\in\mathcal{S}^*$ fonksiyonunun $k_3(z)=z+2z^2+3z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{1-4r+9r^2}{1-2r+3r^2}; & 0<r\le\dfrac{5-\sqrt{22}}{3}=0{,}10319\ldots\\ \dfrac{24(1+2r^2+9r^4)-3(3+7r^2)\sqrt{6(1+2r^2+9r^4)}}{12(1+2r^2+9r^4)-4(1+3r^2)\sqrt{6(1+2r^2+9r^4)}}; & \dfrac{5-\sqrt{22}}{3}<r\le\sqrt{\dfrac{5}{47}}=0{,}32616\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $k_3(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt{\frac{5}{47}}\}$ diskinde $k_3(z)\in\mathcal{S}^*$ dır [8].

Teorem 2.8.22: $f(z)=\frac{z}{1-z}\in\mathcal{C}$ fonksiyonunun $f_3(z)=z+z^2+z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)=\begin{cases}\dfrac{1-4r+9r^2}{1-2r+3r^2}; & 0<r\le\dfrac{5-\sqrt{22}}{3}=0{,}10319\ldots\\ \dfrac{24(1+2r^2+9r^4)-3(3+7r^2)\sqrt{6(1+2r^2+9r^4)}}{12(1+2r^2+9r^4)-4(1+3r^2)\sqrt{6(1+2r^2+9r^4)}}; & \dfrac{5-\sqrt{22}}{3}<r\le\sqrt{\dfrac{5}{47}}=0{,}32616\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(z)\in\mathcal{C}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt{\frac{5}{47}}\}$ diskinde $f_3(z)\in\mathcal{C}$ dir [8].

Teorem 2.8.23: $g(z)=\frac{z}{1-z^2}\in\mathcal{S}^*$ fonksiyonunun $g_3(z)=z+z^3+z^5$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha\coloneqq\alpha(r)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1-9r^2+25r^4}{1-3r^2+5r^4}; & 0<r\le\sqrt{\dfrac{31-\sqrt{781}}{30}}=0{,}31904\ldots\\ \dfrac{660(1+r^4+25r^8)-6(7+20r^4)\sqrt{220(1+r^4+25r^8)}}{220(1+r^4+25r^8)-11(1+5r^4)\sqrt{220(1+r^4+25r^8)}}; & \sqrt{\dfrac{31-\sqrt{781}}{30}}<r\le\sqrt[4]{\dfrac{2}{65}}=0{,}41882\ldots\end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $g_3(z)\in\mathcal{C}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r=\{z:|z|<r,\ 0<r\le\sqrt[4]{\frac{2}{65}}\}$ diskinde $g_3(z)\in\mathcal{C}$ dir [8].

Teorem 2.8.24: $h(z) = -z - 2\log(1-z) \in \mathcal{R}$ fonksiyonunun $h_3(z) = z + z^2 + \frac{2}{3}z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} \dfrac{1-4r+6r^2}{1-2r+2r^2}; & 0 < r \leq \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} = 0{,}17712\ldots \\ \dfrac{8(1+4r^4)-(5+6r^2)\sqrt{2(1+4r^4)}}{4(1+4r^4)-2(1+2r^2)\sqrt{2(1+4r^4)}}; & \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} < r \leq \sqrt{\dfrac{7}{46}} = 0{,}68873\ldots \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $h_3(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq \sqrt{\frac{7}{46}}\}$ diskinde $h_3(z) \in \mathcal{C}$ dir [8].

Teorem 2.8.25: $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonunun $k_3(z) = z + 2z^2 + 3z^3$ kısmi toplamı verilsin. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} \dfrac{1-8r+27r^2}{1-4r+9r^2}; & 0 < r \leq \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9} = 0{,}07504\ldots \\ \dfrac{30(1+2r^2+81r^4)-12(1+6r^2)\sqrt{5(1+2r^2+81r^4)}}{15(1+2r^2+81r^4)-5(1+9r^2)\sqrt{5(1+2r^2+81r^4)}}; & \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9} < r \leq \sqrt{\dfrac{1}{29}} = 0{,}18569\ldots \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $k_3(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır. Ayrıca $\mathbb{U}_r = \{z: |z| < r,\ 0 < r \leq \sqrt{\frac{1}{29}}\}$ diskinde $k_3(z) \in \mathcal{C}$ dir [8].

3. BULGULAR

Bu başlık altında

$$f(c,z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{c} - 1\right] = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4 + \cdots$$

genelleştirilmiş Koebe fonksiyonunun sırasıyla üçüncü ve dördüncü kısmi toplamları olan

$$f_3(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3$$

ve

$$f_4(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4$$

fonksiyonlarının hangi yarıçaplı disklerde $\mathcal{R}(\alpha)$, $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıflarından olması üzerine yeter şartlar verilecektir.

3.1. $\mathcal{R}(\alpha)$ Sınıfı için $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ Kısmi Toplamlarının Yarıçap Problemi

Bu alt bölümde $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ kısmi toplamlar fonksiyonlarının $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfına ait olabilmeleri için hangi yarı çaplı diskte tanımlı olabilmeleri üzerine yeter koşulları içeren sonuçlar verilmiştir.

İlk sonuç $f_3(c;z)$ kısmi toplamının $\mathbb{U}_r$ diskinde $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfına ait olması için r nin ne olmasıyla ilgilidir.

Teorem 3.1.1**:** $c > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha \coloneqq \alpha(r) = \begin{cases} 1 - 2cr + (2c^2+1)r^2; & 0 < r \leq \dfrac{c}{2(2c^2+1)} \\[2ex] \dfrac{3c^2+2}{2(2c^2+1)} - (2c^2+1)r^2; & \dfrac{c}{2(2c^2+1)} < r \leq \dfrac{1}{(2c^2+1)}\sqrt{\dfrac{3c^2+2}{2}} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(c;z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır [53].

İspat: İspat için fonksiyonların ekstremumluğundan faydalanacağız. Bunun için $f_3(c;z)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi alınırsa

$$f_3'(c;z) = 1 + 2cz + (2c^2+1)z^2$$

bulunur. Bu türevde $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$f_3'(c;z) = 1 + 2cre^{i\theta} + (2c^2+1)r^2e^{i2\theta}$$

ve dolayısıyla

$$Re(f_3'(c;z)) = 1 - (2c^2+1)r^2 + 2cr\cos\theta + 2(2c^2+1)r^2\cos^2\theta$$

yazılır. Son eşitliğin sağ tarafında $\mathrm{t} = \cos\theta$ alarak $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = 1 - (2c^2+1)r^2 + 2crt + 2(2c^2+1)r^2t^2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi bu fonksiyonun ekstremumluğunu araştıralım. Bunun için

$$g'(t) = 2cr + 4(2c^2+1)r^2t = 0$$

eşitliğinden $t_1 = \frac{-c}{2r(2c^2+1)} < 0$ bulunur. Burada iki durum vardır:

1. Durum: $0 < r \le \frac{c}{2(2c^2+1)}$ olsun. Bu durumda $t_1 = \frac{-c}{2r(2c^2+1)} \le -1$ olur. Dolayısıyla her $t \in [-1,1]$ için $g'(t) > 0$ olduğundan g fonksiyonu minimum değerini -1 noktasında alır. Yani

$$g(t) \ge g(-1) = 1 - 2cr + (2c^2+1)r^2 =: \alpha(r)$$

$$\ge \alpha\left(\frac{c}{2(2c^2+1)}\right) = \frac{5c^2+4}{4(2c^2+1)}$$

olur.

2. Durum: $\frac{c}{2(2c^2+1)} < r \le \frac{1}{2c^2+1}\sqrt{\frac{3c^2+2}{2}}$ olsun. Bu durumda $-1 < t_1 \le 1$ olur. Dolayısıyla $g''(t_1) = 4(2c^2+1)r^2 > 0$ olduğundan g fonksiyonu minimum değerini t_1 noktasında alır. Yani $\frac{c}{2(2c^2+1)} < r \le \frac{1}{2c^2+1}\sqrt{\frac{3c^2+2}{2}}$ için

$$g(t) \geq g(t_1) = \frac{3c^2+2}{2(2c^2+1)} - (2c^2+1)r^2 =: \alpha(r)$$

$$\geq \alpha\left(\frac{1}{2c^2+1}\sqrt{\frac{3c^2+2}{2}}\right) = 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki iki durumdan ispat tamamlanmış olur.

İkinci sonuç $f_4(c;z)$ kısmi toplamının hangi r yarıçaplı $\mathbb{U}_r$ diskinde $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfına ait olmasıyla ilgilidir.

<u>Teorem 3.1.2</u>**:** $0 < c \leq \sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{2}} = 0.34831$ olsun. Bu durumda

$$\alpha := \alpha(r) = 1 - (2c^2+1)r^2 - 2cr(1 - 2(2+c^2)r^2) + 2(2c^2+1)r^2 - \frac{16cr^3(2+c^2)}{3}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r = \left\{r: 0 < r \leq \frac{2c^2+1-\sqrt{1-8c^2-2c^4}}{6c(c^2+2)}\right\}$ diskinde $f_4(c;z) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır [53].

<u>İspat</u>: Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.1 dekine benzer şekilde yapılacaktır. Bunun için $f_4(c;z)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi alınırsa

$$f_4'(c;z) = 1 + 2cz + (2c^2+1)z^2 + \frac{4c(2+c^2)}{3}z^3$$

bulunur. Bu türevde $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$f_4'(c;z) = 1 + 2cre^{i\theta} + (2c^2+1)r^2e^{i2\theta} + \frac{4c(2+c^2)}{3}r^3e^{i3\theta}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$Re(f_4'(c;z)) = 1 - (2c^2+1)r^2 + 2cr\,(1 - 2(2+c^2)r^2)\cos\theta$$
$$+ 2(2c^2+1)r^2\cos^2\theta + \frac{16cr^3(2+c^2)}{3}\cos^3\theta$$

bulunur. Son eşitliğin sağ tarafında $\mathrm{t} = \cos\theta$ alarak $h: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = 1 - (2c^2 + 1)r^2 + 2cr(1 - 2(2 + c^2)r^2)t$$
$$+ 2(2c^2 + 1)r^2t^2 + \frac{16cr^3(2 + c^2)}{3}t^3$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi bu fonksiyonun ekstremumluğunu araştıralım. Bunun için

$$h'(t) = 2cr(1 - 2(2 + c^2)r^2) + 4(2c^2 + 1)r^2t + 16cr^3(2 + c^2)t^2 = 0$$

denkleminden $t = t_1$ ve $t = t_2$ $(t_1 > t_2)$ olsun. Bu köklerden

$$t_1 = \frac{-(2c^2 + 1) + \sqrt{16c^2(2 + c^2)^2r^2 + (1 - 12c^2 - 4c^4)}}{8c(2 + c^2)r}$$

göz önüne alalım. Hipotezden

$$0 < r \leq \frac{2c^2 + 1 - \sqrt{1 - 8c^2 - 2c^4}}{6c(c^2 + 2)}$$

olduğundan $t_1 \leq -1$ olur. Dolayısıyla her $t \in [-1,1]$ için $h'(t) > 0$ olduğundan h fonksiyonu minimum değerini -1 noktasında alır. Yani

$$h(t) \geq h(-1) = 1 - (2c^2 + 1)r^2 - 2cr(1 - 2(2 + c^2)r^2)$$
$$+2(2c^2 + 1)r^2 - \frac{16cr^3(2 + c^2)}{3} =: \alpha(r)$$

olur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2. $\mathcal{S}^*(\boldsymbol{\alpha})$ Sınıfı için $\boldsymbol{f_3(c; z)}$ ve $\boldsymbol{f_4(c; z)}$ Kısmi Toplamlarının Yarıçap Problemi

Bu alt bölümde $f_3(c; z)$ ve $f_4(c; z)$ kısmi toplamlar fonksiyonlarının $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfına ait olabilmeleri için hangi yarıçaplı diskte tanımlı olabilmeleri üzerine yeter koşulları içeren sonuçlar verilmiştir.

İlk sonuç $f_3(c; z)$ kısmi toplamının $\mathbb{U}_r$ diskinde $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfına ait olması için r nin ne olmasıyla ilgilidir.

Teorem 3.2.1: $c > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{cases} 3 - \dfrac{2 - cr}{1 - cr + \dfrac{2c^2+1}{3} r^2}; & 0 \leq r < r_0 \\ 2 - \dfrac{12 + 15c^2 + (4 + (13 + 10c^2)c^2)r^2 + 2(1 + 2c^2)R(c,r)}{2(4 + 5c^2)(3 - (1 + 2c^2)r^2)}; & r_0 < r < r_1 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(c;z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır. Burada

$$r_0 = \frac{8 + 13c^2 - \sqrt{64 + 196c^2 + 145c^4}}{2c(2c^2 + 1)},$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{32 + 37c^2}{32 + 103c^2 + 78c^4}},$$

$$R(c,r) = \sqrt{\frac{5c^2 + 4}{2c^2 + 1}(9 + 3(c^2 + 2)r^2 + (2c^2 + 1)^2 r^4)}$$

dür [53].

İspat: $f_3(c;z)$ kısmi toplamı için α-mertebeden yıldızıl olma koşulu

$$\mathbb{U}_r = \left\{ r : 0 \leq r < \frac{8 + 13c^2 - \sqrt{64 + 196c^2 + 145c^4}}{2c(2c^2 + 1)} \right\}$$

diskinde

$$Re\left(\frac{z f_3'(c;z)}{f_3(c;z)}\right) = Re\left(3 - \frac{cz + 2}{1 + cz + \dfrac{2c^2+1}{3} z^2}\right) > \alpha$$

dır. Dolayısıyla bu $\mathbb{U}_r$ diskinde

$$Re\left(\frac{cz + 2}{1 + cz + \dfrac{2c^2+1}{3} z^2}\right) < 3 - \alpha$$

olacak şekilde α yı bulalım.

Bunun için $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$Re\left(\frac{cz+2}{1+cz+\frac{2c^2+1}{3}z^2}\right)=1+\frac{\left(1-\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2+cr\cos\theta\right)}{1-\frac{c^2+2}{3}r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+2cr\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\cos\theta+4r^2\frac{2c^2+1}{3}\cos^2\theta}$$

$$<3-\alpha$$

veya

$$\frac{\left(1-\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2+cr\cos\theta\right)}{1-\frac{c^2+2}{3}r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+2cr\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\cos\theta+4r^2\frac{2c^2+1}{3}\cos^2\theta}<2-\alpha$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki son ifadede $\cos\theta=t$ alarak $g_c\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$g_c(t)=\frac{\left(1-\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2+crt\right)}{1-\frac{c^2+2}{3}r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+2cr\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)t+4r^2\frac{2c^2+1}{3}t^2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g_c(t)$ fonksiyonunun ekstremumluğunu araştıralım. Bunun için $g_c(t)$ nin türevi alınırsa

$$g_c'(t)=cr\left[\frac{2c^2+1}{3}r^2-1\right]\frac{\left[1+(3c^2+2)r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+\frac{8}{c}\frac{2c^2+1}{3}r\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)t+4r^2\frac{2c^2+1}{3}t^2\right]}{\left[1-\frac{c^2+2}{3}r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+2cr\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)t+4r^2\frac{2c^2+1}{3}t^2\right]^2}$$

elde edilir. Burada hipotezde $c>0$ ve r nin aralığından dolayı $\frac{2c^2+1}{3}r^2-1<0$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $h_c\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$h_c(t)=1+(3c^2+2)r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2r^4+\frac{8}{c}\frac{2c^2+1}{3}r\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)t+4r^2\frac{2c^2+1}{3}t^2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g_c'(t)$ nin işareti $h_c(t)$ nin işaretine bağlı olduğundan bununla ilgili

(i) $h_c(t)<0\Longrightarrow g_c'(t)>0$,

(ii) $h_c(t)>0\Longrightarrow g_c'(t)<0$,

(iii) $h_c(t)=0\Longrightarrow g_c'(t)=0$,

değerlendirmeler doğrudur.

Dolayısıyla $h_c(t)$ nin işaretine bakılacak olunursa $h_c(t)=0$ dan $t=t_1$ ve $t=t_2$ $(t_1>t_2)$ bulunur.

Burada $c>0$ ve r nin aralığından dolayı $t_2<-1$ dir. Diğer taraftan

$$t_1 = \frac{-2\left(1+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)+\sqrt{\frac{5c^2+4}{2c^2+1}\left(1+\frac{c^2+2}{3}r^2+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2 r^4\right)}}{2cr} < 0$$

dır. Burada t_1 için $t_1 \leq -1$ ve $-1 < t_1 < 1$ iki durumu vardır.

Durum I: Eğer

$$0 \leq r \leq \frac{8+13c^2-\sqrt{64+196c^2+145c^4}}{2c(2c^2+1)}$$

ise bu durumda $t_1 \leq -1$ olur. Buda her $t \in [-1,1]$ için $h(t) \geq 0$ olması demektir. Böylece her $t \in [-1,1]$ için $g_c'(t) < 0$ olur. Dolayısıyla

$$g_c(t) \leq g_c(-1) = \frac{\left(1-\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\left(1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)}{1-2cr+\frac{7c^2+2}{3}r^2-2c\frac{2c^2+1}{3}r^3+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)^2 r^4}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)\left(1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)}{\left(1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2\right)^2} = \frac{1-\frac{2c^2+1}{3}r^2}{1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2} \leq 2-\alpha$$

elde edilir. Buna göre

$$\alpha = 2-\frac{1-\frac{2c^2+1}{3}r^2}{1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2} = 3-\frac{2-cr}{1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2}$$

olur. Böylece

$$Re\left(\frac{zf_3'(c;z)}{f_3(c;z)}\right) > \alpha(r)$$

ve

$$\alpha(r) = 3-\frac{2-cr}{1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2} \quad \left(0 \leq r < \frac{8+13c^2-\sqrt{64+196c^2+145c^4}}{2c(2c^2+1)}\right)$$

elde edilir.

Durum II: Eğer

$$\frac{8+13c^2-\sqrt{64+196c^2+145c^4}}{2c(2c^2+1)} < r < \sqrt{\frac{32+37c^2}{32+103c^2+78c^4}}$$

ise bu durumda $-1 < t_1 < 1$ olur. Buda $t \in (-1, t_1)$ için $h(t) < 0$ ve $t \in (t_1, 1)$ için $h(t) > 0$ olması demektir. Dolayısıyla $\max_{t\in(-1,1)} g_c(t) = g_c(t_1)$ yani

$$g_c(t) \le g_c(t_1) = \frac{12+15c^2+(4+(13+10c^2)c^2)r^2+2(1+2c^2)R(c,r)}{2(4+5c^2)(3-(1+2c^2)r^2)}$$

elde edilir. Buna göre $\frac{8+13c^2-\sqrt{64+196c^2+145c^4}}{2c(2c^2+1)} < r < \sqrt{\frac{32+37c^2}{32+103c^2+78c^4}}$ için

$$\alpha = 2 - \frac{12+15c^2+(4+(13+10c^2)c^2)r^2+2(1+2c^2)R(c,r)}{2(4+5c^2)(3-(1+2c^2)r^2)} > 0$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, genelleştirilmiş $f_c(z)$ Koebe fonksiyonunun

$$f_4(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4$$

kısmi toplamının yıldızıllık yarıçapı üzerinedir.

<u>Teorem 3.2.2</u>**:** $c > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha := \alpha(r) = 4 - \frac{3-2cr+\left(\frac{2c^2+1}{3}\right)r^2}{1-cr+\frac{2c^2+1}{3}r^2-\frac{2c+c^3}{3}r^3}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r = \left\{ r: 0 \le r \le \frac{1+2c^2+T(c)+\frac{1-4c^2(3+c^2)}{T(c)}}{4c(2+c^2)} < 1 \right\}$ diskinde $f_4(c;z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$

dır. Burada

$$T(c) = \sqrt[3]{1+78c^2+48c^4+8c^6+4c(2+c^2)\sqrt{8c^6+52c^4+87c^2+3}}$$

dür [53].

<u>İspat</u>: $f_4(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4$ fonksiyonu için $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$Re\left(\frac{zf_4'(c;z)}{f_4(c;z)}\right) = Re\left(\frac{1 + 2cz + (2c^2+1)z^2 + \frac{4(2c+c^3)}{3}z^3}{1 + cz + \frac{2c^2+1}{3}z^2 + \frac{2c+c^3}{3}z^3}\right)$$

$$= 4 - Re\left(\frac{3 + 2cz + \frac{(2c^2+1)}{3}z^2}{1 + cz + \frac{2c^2+1}{3}z^2 + \frac{2c+c^3}{3}z^3}\right)$$

$$= 4 - Re\left(\frac{3 + 2cre^{i\theta} + \frac{(2c^2+1)}{3}r^2e^{2i\theta}}{1 + cre^{i\theta} + \frac{2c^2+1}{3}r^2e^{2i\theta} + \frac{2c+c^3}{3}r^3e^{3i\theta}}\right)$$

yazılır. *Mathematica* (Version 8.0) programını kullanarak, yukarıda son bulduğumuz ifadenin minimum değerini $\theta = \pi$ noktasında aldığı görülür. Böylece

$$Re\left(\frac{zf_4'(c;z)}{f_4(c;z)}\right) \geq 4 - \frac{3 - 2cr + \frac{(2c^2+1)}{3}r^2}{1 - cr + \frac{2c^2+1}{3}r^2 - \frac{2c+c^3}{3}r^3} \quad (0 \leq r \leq r_0)$$

bulunur. Kolaylık açısından, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafını

$$h(r) = 4 - \frac{3 - 2cr + \frac{(2c^2+1)}{3}r^2}{1 - cr + \frac{2c^2+1}{3}r^2 - \frac{2c+c^3}{3}r^3} \quad (0 \leq r \leq r_0)$$

ile gösterelim. Buradan

$$r_0 = \frac{1 + 2c^2 + T(c) + \frac{1 - 4c^2(3+c^2)}{T(c)}}{4c(2+c^2)}$$

için $0 = h(r_0) \leq h(r) \leq 1$ olduğundan

$$Re\left(\frac{zf_4'(c;z)}{f_4(c;z)}\right) > \alpha(r) = 4 - \frac{3 - 2cr + \left(\frac{2c^2+1}{3}\right)r^2}{1 - cr + \frac{2c^2+1}{3}r^2 - \frac{2c+c^3}{3}r^3}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.3. $\mathcal{C}(\alpha)$ Sınıfı için $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ Kısmi Toplamlarının Yarıçap Problemi

Bu alt bölümde $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ kısmi toplamlar fonksiyonlarının $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olabilmeleri için hangi yarıçaplı diskte tanımlı olabilmeleri üzerine yeter koşulları içeren sonuçlar verilmiştir.

İlk sonuç $f_3(c;z)$ kısmi toplamının $\mathbb{U}_r$ diskinde $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfına ait olması için r nin ne olmasıyla ilgilidir.

Teorem 3.3.1**:** $c > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{cases} 3 - \dfrac{2-2cr}{1-2cr\ +(2c^2+1)r^2}; & 0 \leq r < r_2 \\ 2 - \dfrac{1+c^2+(1+(3+2c^2)c^2)r^2+(1+2c^2)P(c,r)}{2(1+c^2)(1-(1+2c^2)r^2)}; & r_2 < r < r_3 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r$ diskinde $f_3(c;z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır. Burada

$$r_2 = \frac{2+3c^2-\sqrt{4+11c^2+7c^4}}{c(2c^2+1)}, \qquad r_3 = \sqrt{\frac{8+7c^2}{24+71c^2+46c^4}}$$

$$P(c,r) = \sqrt{\frac{c^2+1}{2c^2+1}(1+2r^2+(2c^2+1)^2r^4)}$$

dür [53].

İspat: $f_3(c;z)$ kısmi toplamı için α-mertebeden konveks olma koşulu

$$\mathbb{U}_r = \left\{ r: 0 \leq r \leq \frac{2+3c^2-\sqrt{4+11c^2+7c^4}}{c(2c^2+1)} \right\}$$

diskinde

$$Re\left(1+\frac{zf_3''(c;z)}{f_3'(c;z)}\right) = Re\left(3-\frac{2cz+2}{1+2cz+(2c^2+1)z^2}\right) > \alpha$$

dır. Dolayısıyla bu $\mathbb{U}_r$ diskinde

$$Re\left(\frac{cz+1}{1+cz+(2c^2+1)z^2}\right) < \frac{3-\alpha}{2}$$

olacak şekilde α yı bulalım.

Bunun için $z = re^{i\theta}$ alınırsa

$$Re\left(\frac{cz+1}{1+cz+(2c^2+1)z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(1-(2c^2+1)r^2)(1+(2c^2+1)r^2+2cr\ \cos\theta)}{1-2r^2+(2c^2+1)^2r^4+4cr(1+(2c^2+1)r^2)\cos\theta+4r^2(2c^2+1)\cos^2\theta} < \frac{3-\alpha}{2}$$

veya

$$\frac{(1-(2c^2+1)r^2)(1+(2c^2+1)r^2+2cr\ \cos\theta)}{1-2r^2+(2c^2+1)^2r^4+4cr(1+(2c^2+1)r^2)\cos\theta+4r^2(2c^2+1)\cos^2\theta} < 2-\alpha$$

elde edilir. Yukarıdaki son ifadede $\cos\theta = t$ alarak $g_c\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_c(t) = \frac{(1-(2c^2+1)r^2)(1+(2c^2+1)r^2+2cr\,t)}{1-2r^2+(2c^2+1)^2r^4+4cr(1+(2c^2+1)r^2)t+4r^2(2c^2+1)t^2}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi $g_c(t)$ fonksiyonunun ekstremumluğunu araştıralım. Bunun için $g_c(t)$ nin türevi alınırsa

$$g_c'(t) = 2r[(2c^2+1)r^2-1]$$
$$\times \frac{\left[c+2c(4c^2+3)r^2+c(2c^2+1)^2r^4+4r(2c^2+1)(1+(2c^2+1)r^2)t+4cr^2(2c^2+1)t^2\right]}{[1-2r^2+(2c^2+1)^2r^4+4cr(1+(2c^2+1)r^2)t+4r^2(2c^2+1)t^2]^2}$$

elde edilir. Burada hipotezde $c > 0$ ve r nin aralığından dolayı $(2c^2+1)r^2-1 < 0$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $h_c\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$h_c(t) = c+2c(4c^2+3)r^2+c(2c^2+1)^2r^4+4r(2c^2+1)(1+(2c^2+1)r^2)$$
$$+4cr^2(2c^2+1)t^2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g_c'(t)$ nin işareti $h_c(t)$ nin işaretine bağlı olduğundan bununla ilgili

(i) $h_c(t) < 0 \Longrightarrow g_c'(t) > 0$,

(ii) $h_c(t) > 0 \Longrightarrow g_c'(t) < 0$,

(iii) $h_c(t) = 0 \Longrightarrow g_c'(t) = 0$,

değerlendirmeleri doğrudur.

Dolayısıyla $h_c(t)$ nin işaretine bakılacak olunursa $h_c(t) = 0$ dan $t = t_1$ ve $t = t_2$ $(t_1 > t_2)$ bulunur.

Burada $c > 0$ ve r nin aralığından dolayı $t_2 < -1$ dir. Diğer taraftan

$$t_1 = \frac{-(1 + (2c^2 + 1)r^2) + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{2c^2 + 1}(1 + 2r^2 + (2c^2 + 1)^2 r^4)}}{2cr} < 0$$

dır. Burada t_1 için $t_1 \leq -1$ ve $-1 < t_1 < 1$ iki durumu vardır.

Durum I: Eğer

$$0 \leq r \leq \frac{2 + 3c^2 - \sqrt{4 + 11c^2 + 7c^4}}{c(2c^2 + 1)}$$

ise $t_1 \leq -1$ olur. Buda $h(t) \geq 0$ olması demektir. Böylece her $t \in [-1,1]$ için $g_c'(t) < 0$ olur. Dolayısıyla

$$g_c(t) \leq g_c(-1) = \frac{(1 - (2c^2 + 1)r^2)(1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2)}{1 - 4cr + 2(4c^2 + 1)r^2 - 4c(2c^2 + 1)r^3 + (2c^2 + 1)^2 r^4}$$

$$= \frac{(1 - (2c^2 + 1)r^2)(1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2)}{(1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2)^2}$$

$$= \frac{(1 - (2c^2 + 1)r^2)}{1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2} \leq 2 - \alpha$$

elde edilir. Buna göre

$$\alpha = 2 - \frac{(1 - (2c^2 + 1)r^2)}{1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2} = 3 - \frac{2 - 2cr}{1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2}$$

olur. Böylece

$$Re\left(1 + \frac{zf_3''(c;z)}{f_3'(c;z)}\right) > \alpha(r)$$

ve

$$\alpha(r) = 3 - \frac{2 - 2cr}{1 - 2cr + (2c^2 + 1)r^2} \quad \left(0 \leq r \leq \frac{2 + 3c^2 - \sqrt{4 + 11c^2 + 7c^4}}{c(2c^2 + 1)}\right)$$

elde edilir.

Durum II: Eğer

$$\frac{2+3c^2-\sqrt{4+11c^2+7c^4}}{c(2c^2+1)}<r<\sqrt{\frac{8+7c^2}{24+71c^2+46c^4}}$$

ise bu durumda $-1<t_1<1$ olur. Buda $t\in(-1,t_1)$ için $h(t)<0$ ve $t\in(t_1,1)$ için $h(t)>0$ olması demektir. Dolayısıyla $\max_{t\in(-1,1)} g_c(t)=g_c(t_1)$ yani

$$g_c(t)\leq g_c(t_1)=\frac{1+c^2+(1+(3+2c^2)c^2)r^2+(1+2c^2)P(c,r)}{2(1+c^2)(1-(1+2c^2)r^2)}$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{8+13c^2-\sqrt{64+196c^2+145c^4}}{2c(2c^2+1)}<r<\sqrt{\frac{8+7c^2}{24+71c^2+46c^4}}$$

için

$$\alpha=2-\frac{1+c^2+(1+(3+2c^2)c^2)r^2+(1+2c^2)P(c,r)}{2(1+c^2)(1-(1+2c^2)r^2)}>0$$

elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

<u>Teorem 3.3.2</u>**:** $c>0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha:=\alpha(r)=4-\frac{3-4cr+(2c^2+1)r^2}{1-2cr+(2c^2+1)r^2-\frac{4(2c+c^3)}{3}r^3}$$

olmak üzere $\mathbb{U}_r=\left\{r: 0\leq r\leq r_0=\frac{3+6c^2+M(c)+\frac{9-4c^2(23+7c^2)}{M(c)}}{16c(2+c^2)}<1\right\}$ diskinde $f_4(c;z)\in \mathcal{C}(\alpha)$ dır. Burada

$$M(c)=\sqrt[3]{27+6c^2(187+70c^2+4c^4)+16c(2+c^2)\sqrt{88c^6+572c^4+954c^2+81}}$$

dir [53].

İspat: İlk olarak $f_4(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4$ kısmi toplamı için $z = re^{i\theta}$ Euler formunda

$$Re\left(1+\frac{zf_4''(c;z)}{f_4'(c;z)}\right) = Re\left(1+\frac{2cz+2(2c^2+1)z^2+4(2c+c^3)z^3}{1+2cz+(2c^2+1)z^2+\frac{4(2c+c^3)}{3}z^3}\right)$$

$$= 4 - Re\left(\frac{3+4cz+(2c^2+1)z^2}{1+2cz+(2c^2+1)z^2+\frac{4(2c+c^3)}{3}z^3}\right)$$

$$= 4 - Re\left(\frac{3+4cre^{i\theta}+(2c^2+1)r^2e^{2i\theta}}{1+2ce^{i\theta}+(2c^2+1)r^2e^{2i\theta}+\frac{4(2c+c^3)}{3}r^3e^{3i\theta}}\right)$$

şeklinde yazılır. *Mathematica* (Version 8.0) programını kullanarak, yukarıda son bulduğumuz ifade minimum değerini $\theta = \pi$ noktasında alır. Dolayısıyla

$$Re\left(1+\frac{zf_4''(c;z)}{f_4'(c;z)}\right) \geq 4 - \frac{3-4cr+(2c^2+1)r^2}{1-2cr+(2c^2+1)r^2-\frac{4(2c+c^3)}{3}r^3} \quad (0 \leq r \leq r_0)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $h(r)$ ile

$$h(r) = 4 - \frac{3-4cr+(2c^2+1)r^2}{1-2cr+(2c^2+1)r^2-\frac{4(2c+c^3)}{3}r^3} \quad (0 \leq r \leq r_0)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Dolayısıyla

$$M(c) = \sqrt[3]{27+6c^2(187+70c^2+4c^4)+16c(2+c^2)\sqrt{88c^6+572c^4+954c^2+81}}$$

olmak üzere

$$r_0 = \frac{3+6c^2+M(c)+\frac{9-4c^2(23+7c^2)}{M(c)}}{16c(2+c^2)}$$

için $0 \leq h(r_0) \leq h(r) \leq 1$ bulunur. Buda $0 \leq r \leq r_0$ için

$$Re\left(1+\frac{zf_4''(c;z)}{f_4'(c;z)}\right) > \alpha(r) = 4 - \frac{3-4cr+(2c^2+1)r^2}{1-2cr+(2c^2+1)r^2-\frac{4(2c+c^3)}{3}r^3}$$

demektir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.4. Bazı Özel Sonuçlar ve Bölge Dönüşümleri

Bu başlık altında 3.1, 3.2 ve 3.3 alt bölümlerinde bulunan sonuçların bazı özel durumları verilmiştir. Bulunan sonuçlar tablolarla desteklenmiştir. Özellikle Teorem 3.1.1 de $c = 1$ ve $c = 2$ alındığında Hayami ve arkadaşlarının [8] çalışmasındaki sonuçları, Teorem 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1 ve 3.3.2 de $c = 1$ ve $c = 2$ alındığında ise Owa ve arkadaşlarının [7] çalışmasındaki sonuçları elde edilir. Bizde farklı c değerleri ($c \neq 1$ ve $c \neq 2$) alarak bazı özel sonuçları aşağıda verdik. Örneğin

$$f_3(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3,$$

$$f_4(c;z) = z + cz^2 + \frac{2c^2+1}{3}z^3 + \frac{2c+c^3}{3}z^4$$

fonksiyonlarında c nin bazı özel değerleri için elde edilen fonksiyonlar:

$c = \frac{1}{3}$ için $f_3\left(\frac{1}{3};z\right) = z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{11}{27}z^3$ ve $f_4\left(\frac{1}{3};z\right) = z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{11}{27}z^3 + \frac{19}{81}z^4$

$c = 1$ için $f_3(1;z) = z + z^2 + z^3$ ve $f_4(1;z) = z + z^2 + z^3 + z^4$

$c = \sqrt{2}$ için $f_3(\sqrt{2};z) = z + \sqrt{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3$ ve $f_4(\sqrt{2};z) = z + \sqrt{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 + \frac{4\sqrt{2}}{3}z^4$

$c = 2$ için $f_3(2;z) = z + 2z^2 + 3z^3$ ve $f_4(2;z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4$

$c = e$ için $f_3(e;z) = z + ez^2 + \frac{2e^2+1}{3}z^3$ ve $f_4(e;z) = z + ez^2 + \frac{2e^2+1}{3}z^3 + \frac{2e+e^3}{3}z^4$

$c = 3$ için $f_3(3;z) = z + 3z^2 + \frac{19}{3}z^3$ ve $f_4(3;z) = z + 3z^2 + \frac{19}{3}z^3 + 11z^4$

$c = 4$ için $f_3(4;z) = z + 4z^2 + 11z^3$ ve $f_4(4;z) = z + 4z^2 + 11z^3 + 24z^4$.

<u>Sonuç 3.4.1:</u> $0 < r \leq 0.21985$ için

$$\alpha := \alpha(c,r) = \frac{2}{3}r\left(\frac{38}{9}r^2 - 1\right) + \frac{11}{9}r^2 - \frac{304}{81}r^3 + 1$$

olmak üzere $f_4\left(\frac{1}{3};z\right) \in \mathcal{R}(\alpha)$ dır.

Aşağıdaki tabloda c nin bazı özel değerlerinde $f_3(c;z)$ fonksiyonunun konvekse yakınlık mertebesi ve yarıçapı ile ilgili tablo verilmiştir.

	$f_3(c;z)$	
	α	r
$c = \frac{1}{3}$	$\frac{11}{9}r^2 - \frac{2}{3}r + 1$	$0 < r \leq 0.13636$
	$\frac{21}{22} - \frac{11}{9}r^2$	$0.13636 \leq r \leq 0.88374$
$c = 1$	$3r^2 - 2r + 1$	$0 < r \leq 0.16667$
	$\frac{5}{6} - 3r^2$	$0.16667 \leq r \leq 0.52705$
$c = \sqrt{2}$	$5r^2 - 2\sqrt{2}r + 1$	$0 < r \leq 0.14142$
	$\frac{4}{5} - 5r^2$	$0.14142 \leq r \leq 0.4$
$c = 2$	$9r^2 - 4r + 1$	$0 < r \leq 0.111\ 11$
	$\frac{7}{9} - 9r^2$	$0.11111 \leq r \leq 0.29397$
$c = 3$	$19r^2 - 6r + 1$	$0 < r \leq 0.078947$
	$\frac{29}{38} - 19r^2$	$0.078947 \leq r \leq 0.20042$
$c = \pi$	$(2\pi^2 + 1)r^2 - 2\pi r + 1$	$0 < r \leq 0.07574$
	$\frac{3\pi^2 + 2}{4\pi^2 + 2} - r^2(2\pi^2 + 1)$	$0.07574 \leq r \leq 0.19169$
$c = 4$	$33r^2 - 8r + 1$	$0 < r \leq 0.060606$
	$\frac{25}{33} - 33r^2$	$0.060606 \leq r \leq 0.15152$

Tablo 1. $f_3(c;z)$ fonksiyonunun konvekse yakınlık yarıçapı

Aşağıdaki Tablo 2 de c nin bazı özel değerlerinde $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ fonksiyonlarının yıldızıllık mertebesi ve yıldızıllık yarıçapı ile ilgili tablo verilmiştir.

	$f_3(c;z)$		$f_4(c;z)$	
	α	r	α	r
$c=\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{3}r-2}{\frac{11}{27}r^2-\frac{1}{3}r+1}+3$	$0<r \leq 0.1063$	$4-\frac{\frac{11}{27}r^2-\frac{2}{3}r+3}{-\frac{19}{81}r^3+\frac{11}{27}r^2-\frac{1}{3}r+1}$	$0<r \leq 1.3576$
	$\frac{3321-2255r^2-2\sqrt{451}\sqrt{729+513r^2+121r^4}}{2214-902r^2}$	$0.1063<r \leq 0.9017$		
$c=1$	$\frac{r-2}{r^2-r+1}+3$	$0<r \leq 0.1459$	$\frac{r^2-2r+3}{r^3-r^2+r-1}+4$	$0<r \leq 0.6058$
	$\frac{9-15r^2-2\sqrt{3}\sqrt{1+r^2+r^4}}{6(1-r^2)}$	$0.1459<r \leq 0.5691$		
$c=\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}r-2}{\frac{5}{3}r^2-\sqrt{2}r+1}+3$	$0<r \leq 0.1282$	$\frac{\frac{5}{3}r^2-2\sqrt{2}r+3}{\frac{4}{3}\sqrt{2}r^3-\frac{5}{3}r^2+\sqrt{2}r-1}+4$	$0<r \leq 0.4674$
	$\frac{63-175r^2-\sqrt{70}\sqrt{9+12r^2+25r^4}}{42-70r^2}$	$0.1282<r \leq 0.4390$		
$c=2$	$\frac{2r-2}{3r^2-2r+1}+3$	$0<r \leq 0.1031$	$4-\frac{3r^2-4r+3}{-4r^3+3r^2-2r+1}$	$0<r \leq 0.3545$
	$\frac{6-30r^2-\sqrt{6}\sqrt{1+2r^2+9r^4}}{4(1-3r^2)}$	$0.1031<r \leq 0.3261$		
$c=3$	$\frac{3r-2}{\frac{19}{3}r^2-3r+1}+3$	$0<r \leq 0.07453$	$\frac{\frac{19}{3}r^2-6r+3}{11r^3-\frac{19}{3}r^2+3r-1}+4$	$0<r \leq 0.25$
	$\frac{63-665r^2-2\sqrt{19}\sqrt{9+33r^2+361r^4}}{42-266r^2}$	$0.07453<r \leq 0.2239$		

$c=\pi$	$\frac{\pi r-2}{\left(\frac{2\pi^2+1}{3}\right)r^2-\pi r+1}+3$	$0<r$ ≤ 0.07159	$4+\frac{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)r^2-2\pi r+3}{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)r^2(\pi r+1)+\pi r-1}$	$0<r$ ≤ 0.2398
	$\frac{5}{2}+\frac{3}{(2\pi^2+1)r^2-3}$ $+\frac{(2\pi^2+1)\sqrt{9+3(\pi^2+2)r^2+(2\pi^2+1)^2r^4}}{\left((2\pi^2+1)r^2-3\right)\sqrt{4+13\pi^2+10\pi^4}}$	0.07159 $<r$ ≤ 0.21432		
$c=4$	$\frac{4r-2}{11r^2-4r+1}+3$	$0<r$ ≤ 0.05758	$4-\frac{11r^2-8r+3}{-24r^3+11r^2-4r+1}$	$0<r$ ≤ 0.1921
	$\frac{21-385r^2-\sqrt{77}\sqrt{1+6r^2+121r^4}}{14-154r^2}$	0.05758 $<r$ ≤ 0.16978		

Tablo 2. $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ fonksiyonlarının yıldızıllık yarıçapı

Aşağıdaki tabloda c nin bazı özel değerlerinde $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ fonksiyonlarının konvekslik mertebesi ve yıldızıllık yarıçapı ile ilgili tablo verilmiştir.

	$f_3(c;z)$		$f_4(c;z)$	
	α	r	α	r
$c=\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{2}{3}r-2}{\frac{11}{9}r^2-\frac{2}{3}r+1}+3$	$0<r$ ≤ 0.07188	$4-\frac{\frac{11}{9}r^2-\frac{4}{3}r+3}{-\frac{76}{81}r^3+\frac{11}{9}r^2-\frac{2}{3}r+1}$	$0<r$ ≤ 0.90870
	$\frac{270-550r^2-\sqrt{110}\sqrt{81+162r^2+121r^4}}{20(9-11r^2)}$	0.07188 $<r$ ≤ 0.52004		
$c=1$	$\frac{2r-2}{3r^2-2r+1}+3$	$0<r$ ≤ 0.10319	$4-\frac{3r^2-4r+3}{-4r^3+3r^2-2r+1}$	$0<r$ ≤ 0.35456
	$\frac{6-30r^2-\sqrt{6}\sqrt{1+2r^2+9r^4}}{4(1-3r^2)}$	0.10319 $<r$ ≤ 0.32616		

$c = \sqrt{2}$	$\dfrac{2\sqrt{2}r-2}{5r^2-2\sqrt{2}r+1}+3$	$0<r \leq 0.09214$	$4-\dfrac{5r^2-4\sqrt{2}r+3}{-\frac{16}{3}\sqrt{2}r^3+5r^2-2\sqrt{2}r+1}$	$0<r \leq 0.26324$
	$\dfrac{9-75r^2-\sqrt{15}\sqrt{1+2r^2+25r^4}}{6(1-5r^2)}$	$0.09214 < r \leq 0.25071$		
$c=2$	$\dfrac{4r-2}{9r^2-4r+1}+3$	$0<r \leq 0.07504$	$4-\dfrac{9r^2-8r+3}{-16r^3+9r^2-4r+1}$	$0<r \leq 0.19334$
	$\dfrac{15-225r^2-3\sqrt{5}\sqrt{1+2r^2+81r^4}}{10(1-9r^2)}$	$0.07504 < r \leq 0.18569$		
$c=3$	$\dfrac{6r-2}{19r^2-6r+1}+3$	$0<r \leq 0.05466$	$4-\dfrac{19r^2-12r+3}{-44r^3+19r^2-6r+1}$	$0<r \leq 0.13271$
	$\dfrac{30-950r^2-\sqrt{190}\sqrt{1+2r^2+361r^4}}{20-380r^2}$	$0.05466 < r \leq 0.12718$		
$c=\pi$	$\dfrac{2\pi r-2}{(2\pi^2+1)r^2-2\pi r+1}+3$	$0<r \leq 0.05254$	$\dfrac{(2\pi^2+1)r^2-4\pi r+3}{\frac{4\pi}{3}(2+\pi^2)r^3-(2\pi^2+1)r^2+2\pi r-1}+4$	$0<r \leq 0.12703$
	$\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{1-(2\pi^2+1)r^2} + \dfrac{(2\pi^2+1)\sqrt{1+2r^2+(2\pi^2+1)^2r^4}}{2\big((2\pi^2+1)r^2-1\big)\sqrt{1+3\pi^2+2\pi^4}}$	$0.05254 < r \leq 0.12169$		
$c=4$	$\dfrac{8r-2}{33r^2-8r+1}+3$	$0<r \leq 0.04237$	$4-\dfrac{33r^2-16r+3}{-96r^3+33r^2-8r+1}$	$0<r \leq 0.10078$
	$\dfrac{51-2805r^2-\sqrt{561}\sqrt{1+2r^2+1089r^4}}{34(1-33r^2)}$	$0.04237 < r \leq 0.09631$		

Tablo 3. $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ fonksiyonlarının konvekslik yarıçapı

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak ünivalent, yıldızıl ve konveks fonksiyonların kısmi toplamlarının ünivalentlik, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında detaylı bir bilgi sunuldu. Sonra ünivalent fonsiyonlar teorisinde önemli yere sahip bazı ekstremal fonksiyonların 3. ve 4. kısmi toplamlarının $\mathcal{R}(\alpha)$, $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıflarına ait olabilmeleri için tanımlanması gereken disklerin yarıçaplarıyla ilgili bu güne kadar yapılan çalışmalar verildi.

Biz de genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu $f(c;z) = \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right]$ in 3. ve 4. kısmi toplamları olan $f_3(c;z)$ ve $f_4(c;z)$ fonksiyonlarının $\mathcal{R}(\alpha)$, $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları için yarıçap problemini çalıştık. Elde edilen sonuçlar c sabitinin özel değerlerinde daha önceden elde edilen sonuçları vermektedir. Yine c sabitinin farklı değerlerinde farklı türden fonksiyonların yarıçaplarına ulaşılmıştır. Bunlar tablolarla desteklenmektedir.

Bu konu üzerine çalışma yapacak araştırmacılar $f(c;z)$ nin $\alpha -$konveks fonksiyonların, parabolik yıldızıl ve düzgün konveks gibi fonksiyonların oluşturduğu farklı sınıflardaki yarıçap problemini çalışabilirler.

5. KAYNAKLAR

[1] Bieberbach, L. (1916). Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 138, 940-955.

[2] De Branges, L. (1985). A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Mathematica, 154(1), 137–152.

[3] Duren, P. L. (1983). Univalent functions. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. 259, Springer-Verlag, New York.

[4] Goodman, A. W. (1983). Univalent functions (Vol. 1,2). Mancorp Pub.

[5] Szegö, G. (1936). Some recent investigations concerning the sections of power series and related developments. Bulletin of the American Mathematical Society, 42(8), 505–522.

[6] Owa, S. (2001). Partial sums of certain analytic functions. Internat. J. Math. Math. Sci., 25, 771–775.

[7] Owa, S., Srivastava, H. M. and Saito, N. (2004). Partial sums of certain classes of analytic functions. Internat. J. Comput. Math., 81(10), 1239–1256.

[8] Hayami, T., Kuroki, K., Duman, E. Y. and Owa, S. (2012). Partial sums of certain univalent functions. Applied Mathematical Sciences, 6(16), 779-805.

[9] Ponnusamy, S. and Silverman, H. 2006. Complex variables with applications, Birkhäuser. Boston.

[10] Hille, E. (1949). On a paper by Zeev Nehari. Bull. Amer. Math. Soc., 55, 552-553.

[11] Yamashita, S. (2003). Nonunivalent generalized Koebe function. Proc. Japan. Acad. Ser. A., 79, 9-10.

[12] Silverman, H. (1997). Partial sums of starlike and convex functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 209(1), 221–227.

[13] Frasin, B. A. (2008). Generalization of partial sums of certain analytic and univalent functions. Applied Mathematics Letters, 21(7), 735–741.

[14] Gavrilov, V. I. (1970). Radius of univalence of holomorphic functions. Mathematical Notes, 7(3), 179–181.

[15] Yamashita, S. (1982). Radii of univalence, starlikeness, and convexity. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 25(03), 453–457.

[16] Kalaj, D., Ponnusamy, S. and Vuorinen, M. (2014). Radius of close-to-convexity and fully starlikeness of harmonic mappings. Complex Variables and Elliptic Equations, 59(4), 539–552.

[17] Ravichandran, V. (2014). Radii of starlikeness and convexity of analytic functions satisfying certain coefficient inequalities. Mathematica Slovaca, 64(1), 27–38.

[18] Obradović, M. and Ponnusamy, S. (2011). Partial sums and the radius problem for some class of conformal mappings. Siberian Math. J., 52(2), 291–302.

[19] Szegö, G. (1928). Zur theorie der schlichten Abbildungen. Mathematische Annalen, 100(1), 188–211.

[20] Jenkins, J. A. (1951). On an inequality of Golusin. American Journal of Mathematics, 73(1), 181–185.

[21] He, K. and Pan, Y. F. (1984). The sections of odd univalent functions. Chinese Ann. Math. Ser. B, 5(4), 727–730.

[22] Iliev, L. (1979). Classical extremal problems for univalent functions. Complex Analysis. Warsaw: Banach Center Publ, 11, 89–110.

[23] Ke, H. and Yifei, P. (1984). On a theorem of Szego. In Journal of Mathematical Research and Exposition, Vol. 1, pp. 7.

[24] Ye, Z., (2007). The sections of univalent functions. Bulletin-Institute of Mathematics Academia Sinica, 2(1), 83.

[25] Ruscheweyh, S. (1988). Extension of Szegö's theorem on the sections of univalent functions. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 19(6), 1442–1449.

[26] Suffridge, T. J. (1992). On a family of convex polynomials. Journal of Mathematics, 22(1).

[27] Ruscheweyh, S. and Salinas, L. (2005). On convex univalent functions with convex univalent derivatives. Rocky Mountain J. Math. 35(3), 1017-1027.

[28] Reade, M. O. (1963). On the partial sums of certain Laurent expansions. Journal of the Mathematical Society of Japan, 15(1), 66–68.

[29] Ravichandran, V. (2012). Geometric properties of partial sums of univalent functions, arXiv Preprint arXiv:1207.4302.

[30] Robertson, M. I. S. (1936). On the theory of univalent functions. Annals of Mathematics, 374–408.

[31] Robertson, M. S. (1941). The partial sums of multivalently starlike functions. Annals of Mathematics, 829–838.

[32] Silverman, H. (1988). Radii problems for sections of convex functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 104(4), 1191–1196.

[33] Ruscheweyh, S. (1980). On the partial sums of prestarlike and related functions. Indian J. Pure Appl. Math, 11, 1587–1589.

[34] Kobori, A. (1934). Zwei Sätze über die Abschnitte der schlichten Potenzreihen. Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ., A, 17, 171–186.

[35] Ogawa, S. (1959). A note on close-to-convex functions II. J. Nara Gakugei Univ., 8(2), 11-17.

[36] Ruscheweyh, S. and Sheil-Small, T. (1973). Hadamard products of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture. Commentarii Mathematici Helvetici, 48(1), 119–135.

[37] Singh, R. and Paul, S. (1987). Linear sums of certain analytic functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 99(4), 719–725.

[38] Sheil-Small, T. (1970). A note on the partial sums of convex schlicht functions. Bulletin of the London Mathematical Society, 2(2), 165–168.

[39] Singh, R. and Puri, S. (1985). Odd starlike functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 94(1), 77–80.

[40] Pólya, G. and Schoenberg, I. J. (1958). Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle. Pacific J. Math., 8(2), 295–335.

[41] Goodman, A. W. and Schoenberg, I. J. (1984). On a theorem of Szegö on univalent convex maps of the unit circle. Journal d’Analyse Mathématique, 44(1), 200–204.

[42] Bernardi, S. D. (1974). New distortion theorems for functions of positive real part and applications to the partial sums of univalent convex functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 45(1), 113–118.

[43] Ruscheweyh, S. (1972). On the radius of univalence of the partial sums of convex functions. Bulletin of the London Mathematical Society, 4(3), 367–369.

[44] Singh, R. (1988). On the partial sums of convex functions of order 1/2. Proceedings of the American Mathematical Society, 102(3), 541–545.

[45] Robertson, M. S. (1981). Univalent functions starlike with respect to a boundary point. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 81(2), 327–345.

[46] Ogawa, S. (1960). A note on close-to-convex functions. III, J. Nara Gakugei Univ., 9(2), 11-17.

[47] Goel, R. M. (1965). On the partial sums of a class of univalent functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A, 19, 17-23.

[48] Fournier, R. and Silverman, H. (1991). Radii problems for generalized sections of convex functions. Proc. Amer. Math. Soc., 112(1), 101–107.

[49] Fournier, R. and Silverman, H. (1992). On generalized sections of univalent functions. Complex Variables Theory Appl., 17, no. 3-4, 141-147.

[50] Silverman, H. (1994). Generalized sequences for a subfamily of univalent functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 183(2), 326–334.

[51] Silverman, H. (1996). Convolution properties for generalized partial sums. J. Korean Math. Soc., 33(3), 601–607.

[52] Eguchi, A. and Owa, S. (2001). On radius problems for analytic functions of Koebe type. In Study on Inverse Problems in Univalent Function Theory (Kyoto; 17–19, 2000) (S.Owa, Editor), Sürikaisekikenkyüsho Kökyüroku, 1192, 13–42.

[53] Deniz, E. and Yalçın, E. (2019). Geometric properties of partial sums of generalized Koebe function. (yayına gönderildi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erkan Yalçın
Doğum Yeri : Kars
Doğum Tarihi: 09.07.1980
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise: Kazım Karabekir Anadolu Öğretmen Lisesi-1999
Lisans: Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği-2005
Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı (Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı)-2013

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl Yayınları (SCI ve Diğer):
75.Yıl Susuz IMKB YİBO (2005-2007)
Susuz Lisesi (2007-2008)
KKAÖ Lisesi (2008-2009)
75.Yıl Susuz IMKB YİBO (2009-2010)
GAMP Ortaokulu (2010-2017)
Ziya Gökalp Ortaokulu (2017-2019)