T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKTİSADİ EKOLOJİ SİSTEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN ÇÖZÜMÜ İÇİN GEREK ŞARTLAR

Merve GÜN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

NİSAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKTİSADİ EKOLOJİ SİSTEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN ÇÖZÜMÜ İÇİN GEREK ŞARTLAR

Merve GÜN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUB

NİSAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve Gün'ün Prof. Dr. Gabil YAGUB danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "İktisadi Ekoloji Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Çözümü İçin Gerek Şartlar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ..birliği..... ile kabul edilmiştir.

18 / 04 / 2019

		Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	:	Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye	:	Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Gökçe Dilek KÜÇÜK	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ... .../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Merve GÜN

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

İKTİSADİ EKOLOJİ SİSTEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN ÇÖZÜMÜ İÇİN GEREK ŞARTLAR

Merve GÜN

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUB

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, optimal kontrol problemleriyle ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve tez konusunun güncelliğine ait açıklamalar yapılmıştır. Bunların yanı sıra tezde kullanılan bazı tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde, incelenen problemlerin çözümlerinin tanımı verilmiş ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin varlığı ve tekliğine ait teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremler ispatlanmış, çözüm için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart gösterilmiştir. Bunların yanı sıra ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için Pontryagin'in maksimum prensibi şeklinde gerek şart ifade edilmiş ve bu prensibin kısa ispatı verilmiştir. Son bölümde ise ele alınan sonuçların güncel olduğu ve bir önceki sonuçlarla örtüşmediği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İktisadi Ekoloji Sistemler, Optimal Kontrol Problemi, Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart, Pontryagin'in Maksimum Prensibi

2019, 64 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR ECONOMIC-ECOLOGICAL SYSTEMS AND NECESSARY CONDITIONS FOR ITS SOLUTION

Merve GÜN

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUB

This thesis consists of four parts. In the first part, some information is provided about the studies done on the optimal control problem and explanations are made regarding the currency of the thesis subject. In addition to these, some definitions used in the thesis are given. In the second part, definitions of the solutions for the analysed problems are given and some theorems are made about the existence and uniqueness of the boundary value problems for ordinary differential equations of second order. In the third part, the theorems relating to the existence and uniqueness of the solution of the considered optimal control problem are proven and a necessary condition in the form of variational inequality is shown for the solution. Additionally, a necessary condition in the form of Pontryagin's maximum principle is expressed for the solution of the considered optimal control problem and a short proof of this principle is given. In the last part, it is shown that the considered results are current and that they do not coincide with previous results.

Keywords: Economic Ecological Systems, Optimal Control Problem, Necessary Condition in the Form of Variational Inequality, Pontryagin's Maximum Principle

2019, 64 page

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez çalışması sırasında her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a, Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a ve Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN'e, eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları fedakarlıktan dolayı aileme ve Aksu Vital Yönetim Kurulu Başkanı Yunus AKSU' ya teşekkürlerimi borç bilirim.

Merve GÜN

KARS-2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER DİZİNİ

$\forall$	: Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	: Hemen hemen
B	:Banach Uzayı
H	:Hilbert Uzayı
$\{v^m\} \in \mathrm{V}$	:Minimalleştirici dizi
$\varepsilon - Cauchy$	: $\varepsilon -$ Cauchy Eşitsizliği
V	:Kapalı sınırlı küme
$\tilde{X}$	:Düzgün konveks uzay

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Günümüzün evrensel problemleri içerisinde iktisadi-ekoloji problemler önem arz etmektedir. Ekoloji krizler toplumla çevre arasında dinamik dengenin bozulduğu yerlerde çıkmaktadır. Çevrenin korunması, doğal kaynakların faydalı kullanışı enerji ve demografi v.s. problemlerin çözümü dünya ülkelerinin birlikte çabasını talep etmektedir. Ekolojik problemler toplumla doğa arasındaki çelişkilerin artmasıyla sıkı bağlıdır. Bu nedenle de evrensel, iktisadi ve ekolojik problemlerin araştırmasına sistemli yaklaşımla bu problemlerde ana yönleri belirlemek ve bu yönler arasında karşılıklı ilişki ve bağları tam biçimde belirleyip, optimal evrensel, ekoloji stratejinin işlenip hazırlanması günümüzün önemli talepleri arasındadır.

İktisadi ve ekoloji sistemlerin her biri kendine göre yeteri kadar karmaşık ve çok parametreli sistemlerdir. Onların birlikte faaliyet gösterdiği iktisadi-ekoloji sistemler ise daha karmaşık ve beklenilmez özelliklere sahiptirler. Böyle sistemlerin analizi için, matematiksel modelleme ve optimal kontrol yöntemlerinin uygulanmasıyla gerçekleştirilen analizler önem arz etmektedir. Karmaşık sistemlere matematiksel modelleştirme yönteminin uygulanma tecrübeleri, incelenen sistemlerin karakteristik özelliklerinin mümkün mertebe tipik modellerde belirlenerek analiz yoluyla alınan sonuçlar daha içerikli ve daha faydalı olur. Lineer olmayan iktisadi-ekoloji sistemlerin analizinde optimal kontrolün matematiksel yöntemlerini özellikle L.S. Pontryagin ve onun öğrencileri tarafından elde edilen gerek şart olan maksimum prensibi büyük rol oynamaktadır. Bu yüzden de Pontryagin'in maksimum prensibi çözüm için gerek şartı belirleyecek prensiptir. Bu prensip iktisadi-ekoloji sistemlerin optimal kontrolünde en az bir olası kontrolün varlığı hakkında soruya cevap vermemektedir. Bu açıdan iktisadi-ekoloji süreçlerin optimal kontrolü, gerekse teorik, gerekse de pratik açıdan önem arz etmektedir.

Bilindiği üzere çoğunlukla iktisadi-ekoloji süreçler birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin yanısıra kısmi türevli diferansiyel denklemlerle de gösterilmektedir $[29]$.

Bu nedenle de söyleyebiliriz ki iktisadi-ekoloji sistemlerin optimal kontrol teorisi gerek toplanmış, gerekse de dağılmış parametreli sistemlerin optimal kontrol teorisinin bir alt kısmıdır. Toplanmış ve dağılmış parametreli sistemlerin optimal kontrol teorisinin oluşturulması ve geliştirilmesinde $[1-18, 20, 22-28, 30-41, 43-55]$ çalışmaları v.s. önemli yer tutmaktadır. Bu tez çalışmasında ele alınan optimal kontrol problemleri, bu problemin tanımında özellikli yeri olan nitelik kriteri, verilerin yer aldığı fonksiyonlar uzayı açısından bir önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır. Bu çalışmadan nitelik kriteri olarak ilk kez Fransız matematikçisi Lions tarafından dağılmış parametreli sistemler için kullanılan fonksiyonel biçiminde bir fonksiyonel kullanılmaktadır $[22]$. Dağılmış parametreli sistemlerin, katsayılarla kontrolünde modelleme yöntemi gibi bu tür nitelik kriteri matematiksel fiziğin denklemlerinin katsayılarının bulunmasıyla ilgili olan ters problemlerin varyasyon tanımlanmasında ilk kez A.D. İskenderov tarafından $[15]$ çalışmasında analiz edilmiştir. Bu biçimde nitelik kriterlerinin yardımıyla daha sonra kısmi türevli diferansiyel denklemler için çeşitli identifikasyon problemleri $[3,16]$ çalışmalarında incelenmiş ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Adi diferansiyel denklemlerle gösterilen iktisadi-ekoloji sistemlerin optimal kontrol problemleri başka sistemlere nazaran daha az incelendiğini söyleyebiliriz. Bu açıdan sunulan tez çalışmasında Lions fonksiyonelli ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerle gösterilen iktisadi-ekoloji sistemlerin optimal kontrol problemleri öğrenilmektedir. Bu nedenle tez konusu günceldir gerekse teori gerekse de pratik önem arz etmektedir.

Bu tez çalışması genel bilgiler, materyal ve yöntem, bulgular, sonuçlar ve tartışma ve kaynaklar bölümünden oluşmaktadır. Genel bilgilerde, incelenen optimal kontrol problemleriyle ilgili çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve tez konusunun güncelliğine ait açıklamalar yapılmıştır. Materyal ve yöntemde incelenen problemin tanımı verilmiş ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin varlığı ve tekliğine ait hükümler getirilmiştir.

Bulguları bölümü, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, ekoloji sistemler için optimal kontrol probleminin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde amaç fonsiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş ve problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edilmiştir. Üçüncü alt bölümde ele alınan problemin çözümü için gerek şart olan Pontryigin'in maksimum prensibi ifade edilmiş ve kısa biçimde ispatlanmıştır. Sonuçlar ve tartışma bölümünde elde edilen sonuçların daha önceki çalışmalardan farklı olduğu ve sonuçların örtüşmediği gösterilmiştir. Kaynaklar bölümünde ise tez çalışmasında kullanılan kaynaklar verilmiştir.

1.2 Kuramsal Temeller

Tanım 1.2.1. $L_2(a,b)$ uzayı (a,b) uzayında tanımlanmış, ölçülebilir ve sonlu $\|u\|_{L_2(a,b)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(a,b)}}$ normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.2. $L_\infty(a,b)$ uzayı (a,b) uzayında tanımlanmış ölçülebilen ve sonlu $\|u\|_{L_\infty(a,b)} = vrai \max\limits_{x\in(a,b)} |u(x)| = \inf \sup\limits_{u\in(a,b)} |u(x)|$ normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarından oluşan Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.3. $W_2^1(a,b)$ uzayı $L_2(a,b)$ uzayından olan ve (a,b) aralığında karesel integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(a,b)} = \int_a^b \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \right) dx, \quad \|u\|_{W_2^1(a,b)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1(a,b)}}, < +\infty$$

Tanım 1.2.4. $\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ uzayı $W_2^1(a,b)$ uzayının alt uzayıdır, $x=a$ ve $x=b$ sınır noktalarının etrafında sıfıra yakın olan bütün düzgün fonksiyonlar kümesi bu uzayda her yerde yoğun kümedir.

Tanım 1.2.5. $W_2^2(a,b)$ uzayı kendisi ve ikinci mertebeden genelleşmiş türevleri (a,b) aralığında karesel integrallenebilir fonksiyonların, başka bir deyişle $L_2(a,b)$ uzayından olan fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ne norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(a,b)} = \int_a^b \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|u\|_{W_2^2(a,b)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^2(a,b)}} < +\infty$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(a,b) \equiv W_2^2(a,b) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$$

Tanım 1.2.6. $C^k[a,b]-[a,b]$-de tanımlanmış $k \geq 0$ mertebeden sürekli diferansiyellenebilir $u(x)$ fonksiyonlarının Banach uzayıdır. Bu uzayda norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{C^k[a,b]} = \sum_{m=0}^{k} \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{d^m u(x)}{dx^m} \right| < +\infty$$

Tanım 1.2.7. Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in \mathrm{B}^*$, $\lim\limits_{x\to\infty}\langle c,u_k\rangle = \langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in \mathrm{B}$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B ‘nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 1.2.8. Eğer B Banach uzayının eşleniği olan B^* uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için ve $\forall c \in \mathrm{B}$ için $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle = \langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in \mathrm{B}^*$ noktasına * - zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 1.2.9. $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim\limits_{x\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 1.2.10. Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{0(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

Olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle_B + 0\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in \mathrm{B}^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilir demektir. Burada B^* uzayı B ‘nin eşlenik uzayıdır.

Teorem 1.2.11. Diyelim ki U,B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. Mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_* = \inf\limits_u J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u^* \in U_*$ için $\left\langle J'(u^*), u-u^*\right\rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 1.2.12. (Weierstrass Teoremi): U,B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu takdirde $J_* = \inf\limits_u J(u) > -\infty,\ U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 1.2.13. (Goebel M $[14]$). Farzedelim ki $\tilde{X}$ uzayı düzgün konveks uzay, V kümesi ise $\tilde{X}$ uzayında kapalı sınırlı küme olsun. $I(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde alttan yarı sürekli ve alttan sınırlı fonksiyoneldir. $\alpha > 0$ $\beta \geq 1-$verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\widetilde{X}$ konveks uzayında öyle bir hemen hemen her yerde yoğun G alt kümesi var ki $\omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\widetilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli V kümesi üzerinde en küçük değerine sahiptir. Eğer $\beta > 1$ ise, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli kendisinin en küçük değerine tek bir noktada sahip olur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. İktisadi Ekoloji Sistemlerin Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde ekoloji sistemlerin öğrenilmesi ve kontrolünde çok rastlanan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyoneli kriterli optimal kontrol problemini tanımlayarak ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin çözümleri hakkında ön bilgiler vereceğiz.

2.1.1. Optimal Kontrol Probleminin Konulması

İktisadi-ekoloji sistemleri incelediğimizde sistemin durumu aşağıdaki ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem ile gösterilmektedir

$$\rho(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}v_1(x)\frac{du}{dx}-v_0(x)u=w(x) \tag{1.1}$$

Burada $a < x < b;\, a > 0,\, b > 0 -$ verilen sayılar, $\rho(x)-$maddenin yoğunluğu, $v_0(x)-$ maddenin transfer katsayısı $v_1(x)-$ekoloji aktif maddenin yoğunluğu $w(x)-$ekoloji aktif kaynakların yoğunluğudur$[29]$. Bu çalışmadan bildiğimiz üzere (1.1) biçiminde denklem çoğu zaman durgun ekoloji süreçlerin öğrenilmesinde ortaya çıkar. Gaz veya sıvı akışını ifade eder. Görüldüğü gibi $v_0(x), v_1(x), w(x)$ fonksiyonlarını değiştirmekle (1.1) denklemiyle ifade edilen süreçleri veya sistemleri etkileyerek onları kontrol etmek mümkündür.

Kontrol fonksiyonları olarak $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x), w(x))$ vektör fonksiyonu seçebiliriz. Olası kontroller kümesini seçelim

$$V \equiv \{v = v(x) = (v_0(x), v_1(x), w(x)),\ v_m \in L_2(a,b), m = 0,1$$

$$b_0 \le v_0(x) \le \tilde{b}_0,\ 0 \le v_1(x) \le b_1,\ \forall\, x \in (a,b), \|w\|_{L_2(a.b)} \le b_2$$

Burada $\tilde{b}_0 > 0, b_m \ge 0,\ m = \overline{0,2} -$ verilen sayılardır.

Her bir $v \in V$ için (1.1) denkleminin

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{1.2}$$

sınır değer şartlarına karşılık gelen çözümünü $u_1 = u_1(x)$ ile

$$\frac{du(a)}{dx} = \frac{du(b)}{dx} = 0 \tag{1.3}$$

şartlarına karşılık gelen çözümünü $u_2 = u_2(x) -$ ile gösterelim.

Görüldüğü üzere $u_1 = u_1(x)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denklemi için birinci çeşit sınır değer probleminin çözümü, yani (1.1)-(1.2) sınır değer probleminin çözümüdür. $u_2 = u_2(x) -$ fonksiyonu ise (1.1) denklemi için ikinci çeşit sınır değer probleminin yani (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin çözümüdür.

Bu çalışmada göz önüne alınan optimal kontrol problemini

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a.b)} + \alpha \|v - \omega\|^2_H \tag{1.4}$$

fonksiyonelinin (1.1)-(1.3) şartları altında V kümesi üzerinde minimumunun bulunması problemi olarak ifade ederiz. Bu problemi ileride (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemi diye adlandıracağız. Burada $\alpha \ge 0$ verilen sayı, $H = (L_2(a,b))^3$, $\omega \in H -$verilmiş elemandır. $\rho = \rho(x)$ verilmiş ölçülebilen fonksiyon olup aşağıdaki şartı sağlar:

$$\rho_0 \le \rho(x) \le \rho_1, \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b),\ \rho_0, \rho_1 = const > 0 \tag{1.5}$$

Her bir $v \in V$ için (1.1)-(1.3) şartlarından $u_k = u_k \equiv u_k(x;v),\ k = 1,2$ fonksiyonlarının bulunması birinci ve ikinci çeşit sınır değer problemlerinden oluşan bir problemdir.

2.1.2. İkinci mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin Sınır Değer Probleminin Çözümü Hakkında

Bir önceki alt bölümde söylediğimiz gibi (1.1)-(1.3) problemi iki tane (1.1)-(1.2) ve (1.1)-(1.3) sınır değer problemlerinden oluşan bir problemdir. (1.1)-(1.2) problemi ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için birinci çeşit sınır değer problemi, (1.1)-(1.3) ise ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için ikinci çeşit sınır değer problemidir. Bildiğimiz gibi, (1.1)-(1.3) sınır değer problemi $[21]$ çalışmasında incelenen eliptik denklem için birinci ve ikinci çeşit sınır değer problemlerinin bir boyutlu özel durumlarıdır. Bu nedenle de bu çalışmalardan yararlanarak her bir $v \in V$ için (1.1)-(1.2) ve (1.1)-(1.3) sınır değer problemlerinin bir tek çözümü olduğunu gösterebiliriz.

(1.1) denkleminin her iki tarafını:

$$\mu(x) = e^{\int_a^x \frac{v_1(x)}{\tau\rho(\tau)} d\tau},\ \forall x \in [a,b] \tag{1.6}$$

fonksiyonuna çarparsak aşağıdaki denklemi kolaylıkla elde ederiz:

$$\frac{d}{dx}\left(a_0(x)\frac{du}{dx}\right) - a_1(x)u = f(x),\ x \in (a,b) \tag{1.7}$$

Burada $a_0(x) = \mu(x),\ a_1(x) = \dfrac{v_0(x)}{\rho(x)}\mu(x),\quad f(x) = \dfrac{w(x)}{\rho(x)}\mu(x).$' dir. Bu şartlar altında her bir $v \in V$ için $a_0(x), a_1(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları

$$1 \leq a_0(x) \leq e^{\frac{b_1}{a\rho_0}(b-a)}, \left|\frac{da_0(x)}{dx}\right| \leq \frac{b_1}{a\rho_0} e^{\frac{b_1(b-a)}{a\rho_0}}, \forall x \in \overset{0}{(a,b)} \tag{1.8}$$

$$\frac{b_0}{\rho_1} \leq a_1(x) \leq \frac{\tilde{b}_0}{\rho_0} e^{\frac{b_1(b-a)}{a\rho_0}}, \forall x \in \overset{0}{(a,b)} \tag{1.9}$$

$$f \in L_2(a,b) \tag{1.10}$$

şeklinde verilir.

Şimdi (1.7),(1.2) şartlarından $u_1 = u_1(x)$ fonksiyonunun (1.7),(1.3) şartlarından $u_2 = u_2(x)$ fonksiyonlarının bulunması için optimal problemlerini ele alalım. $[21]$ çalışmasından bilinen eliptik denklemler için birinci ve ikinci çeşit sınır değer problemlerinin çözümleri hakkındaki sonuçlardan yararlanarak (1.7),(1.2) ve (1.7),(1.3) sınır değer problemlerinin bir tek $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b)$, $u_2 \in W_2^2(a,b)$ çözümü vardır. Ve çözümler için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(a,b)} \leq c_1 \|f\|_{L_2(a,b)} \tag{1.11}$$

$$\|u_2\|_{W_2^2(a,b)} \leq c_2 \|f\|_{L_2(a,b)} \tag{1.12}$$

Burada $c_1 > 0, c_2 > 0$ sabitleri f ’ dan bağımsız olan sayılardır.

Teorem 2.1.2.1 Farzedelim ki $a > 0$ olsun ve (1.5) şartı sağlansın. Bu takdirde her bir $v \in V$ için (1.1)-(1.3) probleminin $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b)$, $u_2 \in W_2^2(a,b)$ biçimde bir tek çözümü vardır ve aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(a,b)} \leq c_3 \|w\|_{L_2(a,b)} \tag{1.13}$$

$$\|u_2\|_{W_2^2(a,b)} \le c_4 \|w\|_{L_2(a,b)} \tag{1.14}$$

Burada $c_3 > 0, c_4 > 0$ sabitleri w - den bağımsız sabitlerdir.

3. BULGULAR

3.1. İktisadi Ekoloji Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Bu alt bölümde iktisadi-ekoloji sistemler için optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili soruları, başka bir deyişle problemin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili olan sorulara cevap vereceğiz . İlk olarak $\alpha \geq 0-$ olduğunda, optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu, sonra ise $\alpha > 0$ olduğundan bir tek çözüme sahip olduğunu göstereceğiz.

3.1.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı

Bu alt bölümde herhangi $\omega \in H$ için (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahip olduğunu göstereceğiz. Bildiğimiz gibi optimal kontrol problemleri genelde kararsız problemlerdendir $[42, 45]$.

Teorem 3.1.1.1 Farzedelim ki teorem 2.1.2.1'in şartları sağlansın ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu takdirde (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemi herhangi $\omega \in H$ için en az bir çözüme sahiptir.

İspat: Farzedelim ki, $\{v^m\} \in V$ dizisi (1.1)-(1.4) optimal kontrol probleminde herhangi minimalleştirici dizi olsun. Yani,

$$\lim_{m \to \infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_{\alpha*} = \inf_{v \in V} J_\alpha\left(v\right)$$

şartını sağlayan dizi olsun.

V kümesinin yapısından gördüğümüz gibi bu küme, $B = \left(L_\infty\left(a,b\right)\right)^2 \times L_2\left(a,b\right)$ Banach uzayının bir sınırlı kümesidir. Bu takdirde $\{v^m\} \in V$ dizisinden $\{v^m\}$ alt dizisi seçebiliriz.

Bu dizi B uzayında *- zayıf yakınsar. Basite indirgeyerek bu yakınsayan alt diziyi yeniden $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde bu alt dizi için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz: $m \to \infty$ olduğunda $p = 0,1$ için

$$v_p^m \xrightarrow{*-zayıf} v_p,\ L_\infty(a,b) \text{ de} \tag{1.15}$$

$$w^m \xrightarrow{zayıf} w,\ L_2(a,b) \text{ de} \tag{1.16}$$

olur.

V kümesi B banach uzayında kapalı sınırlı konveks küme olduğundan V kümesinin zayıf kapalı küme olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Bu durumda $v \in V$ olur. Bu takdirde herhangi $q \in L_1(a,b),\quad g \in L_2(a,b)$ fonksiyonları için integral bağıntılarını yazalım

$$\int_a^b v_p^m(x)q(x)dx \to \int_a^b v_p(x)q(x)dx,\ p = 0,1, \tag{1.17}$$

$$\int_a^b w^m(x)g(x)dx \to \int_a^b w(x)g(x)dx \tag{1.18}$$

Her bir $v^m \in V, m = 1,2,...$ için (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda teorem 2.1.2.1'e göre (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin her bir $v^m \in V, m = 1,2...$ için $u_{1m} \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b),\ u_{2m} \in W_2^2(a,b)$ şartlarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve çözüm için

$$\|u_{1m}\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(a,b)} \le c_3 \|w^m\|_{L_2(a,b)} \le c_5, m = 1,2,..., \tag{1.19}$$

$$\|u_{2m}\|_{W_2^2(a,b)} \le c_4 \|w^m\|_{L_2(a,b)} \le c_6, m = 1,2,...., \tag{1.20}$$

kestirimleri geçerlidir.

Burada $c_5 = c_3 b_2, c_6 = c_4 b_2$, m.- den bağımsızdır. Bu kestirimlerden $\{u_{km}(x)\}, k=1,2$ dizilerinin $W_2^2(a,b)$ uzayında düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu nedenle bu dizilerden $u_k(x),\ k=1,2$ fonksiyonlarına $W_2^2(a,b)$'de zayıf yakınsayan alt dizileri seçebiliriz. Kolay olsun diye bu alt dizileri $\{u_{km}(x)\}, k=1,2$ şeklinde gösterelim. Böyle olduğu takdirde bu alt dizileri için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ olduğunda

$$u_{km} \to u_k\ ,\ k=1,2\ ,\ L_2(a,b) \tag{1.21}$$

$$\frac{du_{km}}{dx} \to \frac{du_k}{dx}\ ,\ k=1,2\ ,\ L_2(a,b) \tag{1.22}$$

$$\frac{d^2u_{km}}{dx^2} \to \frac{d^2u_k}{dx^2}\ ,\ k=1,2\ ,\ L_2(a,b) \tag{1.23}$$

limit bağıntıları geçerlidir. $W_2^2(a,b)$ uzayı $W_2^1(a,b)$ uzayına kompakt gömüldüğünden: $m \to \infty$ olduğunda

$$u_{km} \to u_k \text{ güçlü } k=1,2\ ,\ L_2(a,b) \tag{1.24}$$

$$\frac{du_{km}}{dx} \to \frac{du_k}{dx} \text{ güçlü } k=1,2\ ,\ L_2(a,b) \tag{1.25}$$

limit bağıntılarını yazabiliriz.

limit bağıntıları geçerlidir. Her bir $m=1,2,\ldots$ için $\left\{u_{km}^{(x)}\right\}, k=1,2$ dizilerinin $L_2(a,b)$ uzayından olan herhangi $\eta_k = \eta_k(x)$ k=1,2,...fonksiyonları için

$$\int_a^b \left(\rho(x)\frac{d^2u_{km}}{dx^2} + \frac{1}{x}v_1^m(x)\frac{du_{km}}{dx} - v_0^m(x)u_{km} - w^m(x) \right)\eta_k(x)dx = 0, k = 1,2 \qquad (1.26)$$

integral özdeşliğini ve

$$u_{1m}(a) = u_{1m}(b) = 0, \quad m = 1,2,..., \qquad (1.27)$$

$$\frac{du_{2m}(a)}{dx} = \frac{du_{2m}(b)}{dx} = 0. \quad m = 1,2,\ldots \qquad (1.28)$$

sınır değer şartlarını sağladığı açıktır.

(1.23) limit bağıntısına dayanarak $m \to \infty$ olduğunda herhangi $\eta_k \in L_2(a,b)\ k = 1,2$ fonksiyonları için

$$\int_a^b \rho(x)\frac{d^2u_{km}}{dx^2}\eta_k(x)dx \to \int_a^b \rho(x)\frac{d^2u_k}{dx^2}\eta_k(x)dx, k = 1,2 \qquad (1.29)$$

limit bağıntılarını yazabiliriz

Şimdi $m \to \infty$ olduğunda herhangi $\eta_k \in L_2(a,b)\ k = 1,2$ için

$$\int_a^b \frac{1}{x}v_1^m(x)\frac{du_{km}}{dx}\eta_k(x)dx \to \int_a^b \frac{1}{x}v_1(x)\frac{du_k}{dx}\eta_k(x)dx \qquad (1.30)$$

$$\int_a^b v_0^m(x)u_{km}(x)\eta_k(x)dx \to \int_a^b v_0(x)u_k(x)\eta_k(x)dx, k = 1,2 \qquad (1.31)$$

limit bağıntılarının doğru olduğunu gösterelim.

Herhangi $\eta_k = ...\ \eta_k \in L_2(a,b),\ k = 1,2$ için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_a^b \frac{1}{x} v_1^m(x)\frac{du_{km}}{dx}\eta_k(x)dx = \int_a^b \frac{1}{x} v_1^m(x)\left(\frac{du_k}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)\eta_k(x)dx +$$
$$+\int_a^b \frac{1}{x}\left(v_1^m(x) - v_1(x)\right)\frac{du_k}{dx}\eta_k(x)dx + \int_a^b \frac{1}{x} v_1(x)\frac{du_k}{dx}\eta_k(x)dx,\ k=1,2,\ m=1,2,\ldots; \tag{1.32}$$

$$\int_a^b v_0^m(x)u_{km}(x)\eta_k(x)dx = \int_a^b v_0^m(x)\left(u_{km}(x) - u_k(x)\right)\eta_k(x)dx +$$
$$+\int_a^b \left(v_0^m(x) - v_0(x)\right)u_k(x)\eta_k(x)dx + \int_a^b v_0(x)u_k(x)\eta_k(x)dx,\ k=1,2,\ m=1,2,\ldots \tag{1.33}$$

Eğer $q(x) = u_k(x)\eta_k(x),\ k=1,2$ gösterirsek bu durumda (1.17) limit bağıntısında $p=0$ alırsak

$$\int_a^b \left(v_0^m(x) - v_0(x)\right)u_k(x)\eta_k(x)dx \to 0, k=1,2 \tag{1.34}$$

limit bağıntısını yazabiliriz.

Diğer taraftan (1.33) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim için

$$\left|\int_a^b v_0^m(x)\left(u_{km}(x) - u_k(x)\right)u_k(x)\eta_k(x)dx\right| \le$$
$$\le \tilde{b}_0 \left\|\eta_k\right\|_{L_2(a,b)} \left\|u_{km} - u_k\right\|_{L_2(a,b)}, k=1,2$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafından $m \to \infty$ için limite geçersek ve (1.24) limit bağıntısını kullanırsak

$$\int_a^b v_0^m(x)\left(u_{km}(x) - u_k(x)\right)\eta_k(x)dx \to 0, k=1,2 \tag{1.35}$$

limit bağıntısını elde ederiz.

Bu takdirde (1.34)-(1.35) limit bağıntılarını göz önüne alıp (1.33)'ün her iki tarafında $m \to \infty$ olduğunda limite geçersek (1.31) limit bağıntılarının geçerli olduğunu elde edebiliriz. Şimdi (1.30) limit bağıntısını ispatlamaya çalışalım. Bu amaçla önce

$$\int_a^b \left| \frac{1}{x} \frac{du_k}{dx} \eta_k(x) \right| dx, k = 1,2$$

integraline bakalım.

Bu integrallerin $u_k \in W_2^2(a,b),\ \eta_k \in L_2(a,b), k = 1,2,$ şartları sağlandığında sınırlı olduğunu gösterelim. $0 < a \le x \le b$ Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_a^b \left| \frac{1}{x} \frac{du_k}{dx} \eta_k \right| dx \le \frac{1}{a} \left\| \frac{du_k}{dx} \right\|_{L_2(a,b)} \left\| \eta_k \right\|_{L_2(a,b)},\ k = 1,2$$

eşitliğini elde ederiz.

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu gösterebiliriz:

$$\int_a^b \left| \frac{1}{x} \frac{du_k}{dx} \eta_k \right| dx < +\infty,\ k = 1,2 \tag{1.36}$$

Sonuncu eşitsizlik, $\frac{1}{x} \frac{du_k^{(x)}}{dx} \eta_k(x),\ k = 1,2$ fonksiyonlarının $L_1(a,b)$ uzayına ait olduğunu gösterir. Bu nedenle p=1 için (1.17) limit bağıntısından yararlanarak ve $q(x) = \frac{1}{x} \frac{du_k(x)}{dx} \eta_k(x),\ k = 1,2$ göstererek (1.32)'nin sağ tarafındaki ikinci terim için $m \to \infty$ olduğunda:

$$\int_a^b \frac{1}{x} (v_1^m(x) - v_1(x)) \frac{du_k(x)}{dx} \eta_k(x) dx \to 0, k = 1,2 \tag{1.37}$$

limit bağıntısını elde ederiz.

Şimdi:

$$\int_a^b \frac{1}{x} v_1^m(x)\left(\frac{du_{km}(x)}{dx} - \frac{du_k(x)}{dx}\right)\eta_k(x)dx, \quad k = 1,2$$

integraline bakalım.

Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini ve $0 < a \leq x \leq b$ şartını uygularsak:

$$\left|\int_a^b \frac{1}{x} v_1^m(x)\left(\frac{du_{km}(x)}{dx} - \frac{du_k(x)}{dx}\right)\eta_k(x)dx\right| \leq \frac{1}{a} b_1 \|\eta_k\|_{L_2(a,b)} \left\|\frac{du_{km}}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(a,b)}, k = 1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer bu eşitsizliğin her iki tarafında limite geçersek ve (1.25) limit bağıntısından yararlanırsak $m \to \infty$ olduğunda:

$$\int_a^b \frac{1}{x} v_1^m(x)\left(\frac{du_{km}(x)}{dx} - \frac{du_k(x)}{dx}\right)\eta_k(x)dx \to 0, \quad k = 1,2 \tag{1.38}$$

limit bağıntılarının geçerli olduğunu elde ederiz.

Bu durumda (1.37) ve (1.38) limit bağlantılarından yararlanarak (1.32) eşitliklerinin her iki tarafı $m \to \infty$ olduğu için limite geçelim. Böylelikle (1.30) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz.
(1.29)-(1.31),(1.18) limit bağıntılarını kullanarak (1.26) integral özdeşliklerinde $m \to \infty$ olduğu için limite geçersek herhangi $\eta_k \in L_2(a,b), k = 1,2$ için

$$\int_a^b \left(\rho(x)\frac{d^2u_k}{dx^2} + \frac{1}{x} v_1(x)\frac{du_k}{dx} - v_0(x)u_k - w(x)\right)\eta_k(x)dx = 0, \quad k = 1,2 \tag{1.39}$$

integral özdeşliklerinin geçerli olduğunu elde ederiz.

Bu integral özdeşliklerinden $u_k = u_k(x), k = 1,2$ limit fonksiyonlarının hemen hemen $x \in (a,b)$ için (1.1) denklemini sağladıklarını görebiliriz. Şimdi bu fonksiyonların sırasıyla (1.2)-(1.3) sınır değer şartlarını sağladığını gösterelim. Bu amaçla önce $u_1 = u_1(x)$ fonksiyonunun $u_1(a) = u_1(b) = 0$ sınır değer şartlarını sağladığını ispatlayalım. $W_2^{\,2}(a,b)$ uzayı $C[a,b]$ uzayına kompakt gömüldüğünden $u_1 = u_1(x)$ fonksiyonuna $W_2^{\,2}(a,b)$'de zayıf yakınsayan dizinin $C[a,b]$ aralığında düzgün yakınsadığını elde ederiz. Başka bir deyişle, $\forall x \in [a,b]$ için $m \to \infty$ olduğunda:

$$u_{1m}(x) \to u_1(x) \tag{1.40}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Bu takdirde $m \to \infty$ olduğunda:

$$u_{1m}(a) \to u_1(a),\; u_{1m}(b) \to u_1(b) \tag{1.41}$$

limit bağıntılarının geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Bu bağıntıları ve (1.27) sınır değer şartlarını dikkate alırsak $m \to \infty$ olduğunda:

$$|u_1(s)| \le |u_1(s) - u_{1m}(s)| + |u_{1m}(s)|,\; s = a,b$$

eşitsizliklerin her iki tarafında limite geçersek, (1.2) sınır değer şartlarının geçerli olduğunu elde ederiz. Şimdi, $u_2 = u_2(x)$ limit fonksiyonu için (1.3) sınır değer şartlarını gösterelim.Yani ; $\dfrac{du_2(a)}{dx} = \dfrac{du_2(b)}{dx} = 0$ şartlarını sağladığını ispatlayalım. Bildiğimiz gibi $W_2^2(a,b)$ uzayı $C^1[a,b]$ uzayına kompakt gömülür. Bu durumda $u_2(x)$ fonksiyonuna $W_2^2(a,b)$ uzayında zayıf yakınsayan $\{u^m{}_2(x)\}$ dizisi $C^1[a,b]$ uzayında düzgün yakınsamış olacaktır. Yani $\forall x \in [a,b]$ için $m \to \infty$ olduğundan:

$$u_{2m}(x) \to u(x) \tag{1.42}$$

$$\frac{du_{2m}(x)}{dx} \to \frac{du_2(x)}{dx} \tag{1.43}$$

limit bağıntılarını yazabiliriz.

(1.43) limit bağıntısından yararlanırsak ve $m \to \infty$ olduğunda:

$$\frac{du_{2m}(a)}{dx} \to \frac{du_2(a)}{dx}, \ \frac{du_{2m}(b)}{dx} \to \frac{du_2(b)}{dx} \tag{1.44}$$

limit bağıntılarını elde ederiz:

Şimdi bu limit bağıntılarını ve (1.28) sınır değer şartlarını kullanırsak:

$$\left|\frac{du_2(s)}{dx}\right| \le \left|\frac{du_2(s)}{dx} - \frac{du_{2m}(s)}{dx}\right| + \left|\frac{du_{2m}(s)}{dx}\right|, s = a,b$$

eşitsizliklerinin her iki tarafının $m \to \infty$ olduğu için limite geçelim. Bu takdirde $u_2 = u_2(x)$ limit fonksiyonu için (1.3) sınır değer şartlarının doğruluğunu ispatlarız. Böylelikle $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ limit fonksiyonlarının $v \in V$ olduğunda (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin çözümü olduğu ispatlandı. Yani, $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x;v)$, k=1,2 fonksiyonları (1.1)-(1.3) probleminin çözümüdür ve bu çözüm için (1.13)-(1.14) kestirimleri geçerlidir. Bu kestirimler $\{u_{km}(x)\}$, k=1,2, $\{w^m(x)\}$ dizilerinin sırasıyla $u_k(x), k = 1,2$ ve $w(x)$ fonksiyonlarına zayıf yakınsadığını ve $W_2^2(a,b)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alıp, $m \to \infty$ olduğunda limite geçersek (1.13)-(1.14) kestirimlerinin limit fonksiyonları için de geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi $L_2(a,b)$ ve H uzaylarında normların alttan zayıf yarı sürekli ve $a \ge 0$ olduğunu göstererek herhangi $\omega \in H$ için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$J_{\alpha*} \le J_\alpha(v) \le \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{\tilde{v}\in V} J_\alpha(\tilde{v}) = J_{a*}$$

Buradan da $J_{\alpha*} = J_\alpha(v)$ olur. Bu eşitlik $v = v(x)$ fonksiyonunun (1.1)-(1.4) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu ispatlanmış olur. Teorem 3.1.1.1. ispatlandı.

3.1.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemi $\alpha > 0$ olduğu için, çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyeceğiz. Bu amaçla ilk önce $[14]$, çalışmasından bildiğimiz konveks olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili bir hükmü kullanacağız.

Teorem 3.1.2.1. Farzedelim ki (1.5) şartı sağlansın. Bu takdirde $H = (L_2(a,b))^3$ uzayının hemen hemen her yerde yoğun olan G alt kümesi mevcuttur ki istenilen $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (1.1)-(1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: İlk önce

$$J_0(v) = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)} \tag{1.45}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla, herhangi $v \in V$ ve bu elemana $\Delta v \in B \equiv (L_\infty(a,b))^2 \times L_2(a,b)$ artışı verelim ki $v + \Delta v \in V$ olsun. Farzedelim ki, $u_k(x) \equiv u_k(x;v)$, $u_{k\Delta}(x) \equiv u_k(x; v + \Delta v)$, $k = 1,2$ fonksiyonları (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin sırasıyla $v \in V$, $v + \Delta v \in V$ kontrollerine karşılık gelen çözümleri olsun. Bu durumda, $\Delta u_k(x) \equiv u_{k\Delta}(x) - u_k(x) \equiv u_k(x; v + \Delta v) - u_k(x;v), k = 1,2$ fonksiyonlarının aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} &\rho(x)\frac{d^2\Delta u_k}{dx^2} + \frac{1}{x}(v_1(x) + \Delta v_1(x))\frac{d\Delta u_k}{dx} - (v_0(x) + \Delta v_0(x))\Delta u_k = \\ &= \Delta w(x) - \frac{1}{x}\Delta v_1(x)\frac{du_k}{dx} + \Delta v_0(x)u_k, \quad k = 1,2, \quad x \in (a,b) \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\Delta u_1(a) = \Delta u_2(b) = 0, \ \frac{d\Delta u_2(a)}{dx} = \frac{d\Delta u_2(b)}{dx} = 0 \tag{1.47}$$

Şimdi sınır değer probleminin çözümü için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (1.46) denklemini

$$\frac{d}{dx}\left(\tilde{a}_0(x)\frac{d\Delta u_k}{dx}\right)-\tilde{a}_1(x)\Delta u_k = \tilde{f}_k(x), \quad k=1,2, \quad x\in(a,b) \tag{1.48}$$

biçimde yazalım.

Burada: $\tilde{a}_0(x)$, $\tilde{a}_1(x)$, $\tilde{f}_k(x)$ $k=1,2...$ fonksiyonları aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\tilde{a}_0(x)=e^{\int_a^b \frac{v_1(\tau)+\Delta v_1(\tau)}{\tau\rho(\tau)}d\tau} \tag{1.49}$$

$$\tilde{a}_1(x)=\frac{v_0(x)+\Delta v_0(x)}{\rho(x)}\tilde{a}_0(x) \tag{1.50}$$

$$\tilde{f}_k(x)=\tilde{a}_0(x)\left(\Delta w(x)-\frac{1}{x}\Delta v_1(x)\frac{du_k}{dx}+\Delta v_0(x)u_k\right)\Big/\rho(x),\ k=1,2 \tag{1.51}$$

(1.48) denkleminin her iki tarafını $\Delta u_k(x), k=1,2$ fonksiyonlarına çarpıp ve (a,b) aralığı üzerinden integralleyelim. Bu takdirde

$$\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(\tilde{a}_0(x)\frac{d\Delta u_k}{dx}\right)\Delta u_k-\tilde{a}_1(x)(\Delta u_k)^2\right]dx=\int_a^b \tilde{f}_k(x)\Delta u_k(x)dx, \quad k=1,2$$

eşitliğini elde ederiz.

Kısmi integrasyon formülünden yararlanarak ve (1.47) sınır değer şartlarını kullanarak

$$\int_a^b \tilde{a}_0(x)\left(\frac{d\Delta u_k}{dx}\right)^2dx+\int_a^b \tilde{a}_1(x)(\Delta u_k)^2dx=-\int_a^b \tilde{f}_k(x)\Delta u_k(x)dx, k=1,2 \tag{1.52}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ olduğundan kontrollerin bileşenleri için

$$b_0 \le v_0(x) \le \tilde{b}_0,\ 0 \le v_1(x) \le b_1,\ \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b) \tag{1.53}$$

$$b_0 \le v_0(x) + \Delta v_0(x) \le \tilde{b}_0,\ 0 \le v_1(x) + \Delta v_1(x) \le b_1,\ \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b) \tag{1.54}$$

bağıntıları yazabiliriz.

Bu şartlardan ve (1.5) şartından yararlanarak (1.49)-(1.50) formüllerini kullanırsak $\tilde{a}_0(x)$ ve $\tilde{a}_1(x)$ fonksiyonları için

$$1 \le \tilde{a}_0(x) \le e^{\frac{b_1(b-a)}{a\rho_0}},\ \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b) \tag{1.55}$$

$$\frac{b_0}{\rho_1} \le \tilde{a}_1(x) \le \frac{\tilde{b}_0}{\rho_0} e^{\frac{b_1(b-a)}{a\rho_0}},\ \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b) \tag{1.56}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Bu eşitsizlikler yardımıyla (1.52) eşitliğinden kolaylıkla

$$\left\| \frac{d\Delta u_k}{dx} \right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{b_0}{\rho_1} \left\| \Delta u_k \right\|^2_{L_2(a,b)} \le \int_a^b \left| \tilde{f}_k(x) \right| \left| \Delta u_k(x) \right| dx, \quad k = 1,2$$

elde ederiz.

Bu eşitsizliğin sağ tarafına $\varepsilon - Cauchy$ eşitsizliğini uygularsak

$$\left\| \frac{d\Delta u_k}{dx} \right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{b_0}{\rho_1} \left\| \Delta u_k \right\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{\varepsilon}{2} \left\| \Delta u_k \right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \tilde{f}_k \right\|^2_{L_2(a,b)}, \quad k = 1,2,\ \varepsilon > 0$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer burada $\varepsilon = \dfrac{b_0}{\rho_1}$ alırsak, bu durumda:

$$\left\| \frac{d\Delta u_k}{dx} \right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{b_0}{2\rho_1} \left\| \Delta u_k \right\|^2_{L_2(a,b)} \leq \frac{\rho_1}{2b_0} \left\| \tilde{f}_k \right\|^2_{L_2(a,b)}, \quad k = 1,2 \tag{1.57}$$

kestirimlerini elde ederiz.

Bu kestirimlerden $c_7 = \min\left\{1, \dfrac{b_0}{2\rho_1}\right\}$ gösterildiği gibi

$$\left\| \Delta u_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \leq c_8 \left\| \tilde{f}_1 \right\|^2_{L_2(a,b)}, \tag{1.58}$$

$$\left\| \Delta u_2 \right\|^2_{W_2^1(a,b)} \leq c_8 \left\| \tilde{f}_2 \right\|^2_{L_2(a,b)} \tag{1.59}$$

kestirimlerini elde ederiz.

Burada, $c_8 = \dfrac{\rho_1}{2b_0 c_7}$ ’dır. Şimdi bu kestirimlerin sağ tarafına bakalım. Bu amaçla $\tilde{f}_k$ için (1.51) formülünden yararlanırsak

$$\left| \tilde{f}_k(x) \right|^2 \leq 3e^{\frac{2b_1(b-a)}{a\rho_0}} \left(\left| \Delta w(x) \right|^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \left| \Delta v_1(x) \right|^2 \left| \frac{du_k(x)}{dx} \right|^2 + \left| \Delta v_0(x) \right|^2 \left| u_k(x) \right|^2 \right)$$

$$\overset{0}{\forall}\, x \in (a,b),\ k = 1,2$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi (1.13)-(1.14) eşitsizliklerini dikkate alarak (1.58)-(1.59) eşitsizliklerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\left\| \Delta u_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \leq c_9 \left\| \Delta v \right\|^2_B \tag{1.60}$$

$$\left\| \Delta u_2 \right\|^2_{W_2^1(a,b)} \leq c_{10} \left\| \Delta v \right\|^2_B \tag{1.61}$$

Burada $c_9 > 0, c_{10} > 0$ – sabitleri Δv ’den bağımsızdır.

Şimdi herhangi $v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyoneline bakalım. (1.45) formülünden yararlanırsak aşağıdaki formülü fonksiyonelin artışı için yazabiliriz:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_0(v) = 2\int_a^b \left(u_1(x) - u_2(x)\right)\left(\Delta u_1(x) - \Delta u_2(x)\right)dx + \\ + \|\Delta u_1\|^2_{L_2(a,b)} + \|\Delta u_2\|^2_{L\ (a,b)} - 2\int_a^b \Delta u_1(x)\Delta u_2(x)\,dx \tag{1.62}$$

Burada $\Delta u_k = \Delta u_k(x),\ k = 1,2$ fonksiyonları (1.46)-(1.47) sınır değer problemlerinin çözümüdür. (1.13)-(1.14) ve (1.60)-(1.61) kestirimlerinden yararlanarak (1.62) formülünden Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinin yardımıyla

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{11}\left(\|\Delta v\|_B + \|\Delta v\|_B^2\right),\ \forall v \in V \tag{1.63}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizlikten $J_0(v)$ fonksiyonelinin herhangi $v \in V$ noktasında, V kümesi üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Bu düşünceye dayanarak $\forall v \in V$ için

$$\|\Delta v\|_B \to 0 \text{ iken } \Delta J_0(v) \to 0 \tag{1.64}$$

bağıntısını yazabiliriz.

Ayrıca $J_0(v) \ge 0 \quad \forall v \in V$ olduğu açıktır. Başka bir ifadeyle $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde alttan sınırlıdır. Böylelikle, V kümesinin H uzayında kapalı küme olduğunu kolay bir şekilde gösterebiliriz. V kümesinin H uzayında sınırlı olması B uzayında sınırlı olmasından dolayıdır. $v \in V \subset B$ için

$$\|v\|_H^2 = \|v_0\|^2_{L_2(a,b)} + \|v_1\|^2_{L_2(a,b)} + \|w\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b |v_0(x)|^2\,dx + \int_a^b |v_1(x)|^2 dx + \|w\|^2_{L_2(a,b)} \le \\ \le \int_a^b \left(\tilde{b}\right)^2 dx + \int_a^b (b_1)^2 dx + b_2^2 = \left(\tilde{b}_0\right)^2 (b-a) + (b_1)^2 (b-a) + b^2$$

bağıntılarını yazabiliriz.

Burada sonuncu eşitsizliğin sağ tarafının kare kökünü $M > 0$ sabiti ile gösterirsek:

$$\|V\|_H \le M, \forall v \in V \tag{1.65}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Bu eşitsizlik ise V kümesinin H uzayında sınırlı küme olduğunu gösterir.
Şimdi V kümesinin H uzayında kapalı olduğunu gösterelim. H uzayının normunda $v \in H$ ‘a yakınsayan herhangi $\{v^m\} \subset V$ dizisini seçelim. Bu durumda $m \to \infty$ için

$$\|v_0^m - v_0\|_{L_2(a,b)} \to 0, \quad \|v_1^m - v_1\|_{L_2(a,b)} \to 0 \tag{1.66}$$

$$\|w^m - w\|_{L_2(a,b)} \to 0 \tag{1.67}$$

limit bağıntılarını yazabiliriz.

(1.66) bağıntısından yararlanarak $\{v_0^m(x)\}$, $\{v_1^m(x)\}$dizilerinden öyle bir $\{v_0^{m_p}(x)\}$, $\{v_1^{m_p}(x)\}$ alt dizilerini seçelim ki bu alt diziler sırasıyla $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ elemanlarına (a,b) aralığında hemen hemen yakınsasın. Başka bir ifadeyle $p \to \infty$ için ve hemen hemen $x \in (a,b)$ için

$$v_0^{m_p}(x) \to v_0(x),\ v_1^{m_p}(x) \to v_1(x) \tag{1.68}$$

limit bağıntılarını yazabiliriz.

$\{v^{m_p}\} \subset V$ şartından yararlanırsak

$$b_0 \le v_0^{m_p}(x) \le \tilde{b}_0,\ 0 \le v_1^{m_p}(x) \le b_1, \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b) \tag{1.69}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

(1.68) limit bağıntılarını dikkate alarak bu eşitsizliklerden $p \to \infty$ için limite geçersek $v_0(x),\ v_1(x)$ limit fonksiyonları için

$$b_0 \le v_0(x) \le \widetilde{b}_0,\ 0 \le v_1(x) \le b_1, \forall\, x \in \overset{0}{(a,b)} \tag{1.70}$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğunu elde ederiz.

$\{w^m(x)\}$ dizisi için de aynı işlemleri yaparsak onun limiti olan $w(x)$ fonksiyonu için kolaylıkla:

$$\|w\|_{L_2(a,b)} \le b_2 \tag{1.71}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Böylelikle (1.69) ve (1.70) eşitsizliklerinden V kümesinin yapısını göz önünde bulundurarak herhangi $\{v^{m_p}\} \subset V$ dizisinin limitinin V kümesinden olduğunu elde ettik. Bu da V kümesinin kapalı olduğu demektir. Buradan V kümesinin H uzayında kapalı ve sınırlı küme olduğunu ispatladık. Diğer taraftan $[19]$ çalışmasındaki tanımdan yararlanarak $H = (L_2(a,b))^3$ uzayının düzgün konveks uzay olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda kuramsal temellerde olan teorem 1.2.13. ‘ün şartlarının sağlandığı açıktır. Bu teoreme dayanarak hemen hemen her yerde yoğun olan bir $G \subset H$ kümesi vardır ki istenen $\omega \in G$ ve $a > 0$ için (1.1),(1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır. Teorem ispatlandı.

3.2. İktisadi-Ekoloji Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinde Gerek Şart

Bu alt bölümde ekoloji süreçlerin öğrenilmesi ve kontrolünde ortaya çıkan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyoneli tipli kriterli optimal kontrol problem için gerek şartı inceleyeceğiz. Bu amaçla önce, Lions fonksiyoneli biçiminde olan amaç fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu inceleyeceğiz ve onun gradiyenti için formül elde etmeye çalışacağız. Bu formülden yararlanarak, varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şartı ispatlamaya çalışacağız.

3.2.1. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği

Bu alt bölümde (1.1)-(1.4) optimal kontrol probleminde yer alan $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Fakat bu problemde V kümesinin yerine farklı bir $\tilde{V}$ kümesi seçeceğiz. Bu nedenle aşağıdaki problemi göz önüne alalım.
Farz edelim ki

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)} + \alpha \|v - \omega\|^2_H \tag{2.1}$$

fonksiyonelinin,

$$\tilde{V} \equiv \Big\{ v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)), v_0 \in L_2(a,b), \tilde{v}_1 \in L_2(a,b), w \in L_2(a,b),$$
$$b_0 \le v_0(x) \le \tilde{b}_0, 0 \le \tilde{v}_1(x) \le b_1, \overset{0}{\forall}\, x \in (a,b), \tilde{v}_1(a) = \tilde{v}_1(b) = 0, \|w\|_{L_2(a,b)} \le b_2 \Big\}$$

kümesi üzerinde,

$$\rho \frac{d^2 u_k}{dx^2} + \frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\frac{du_k}{dx} - v_0(x)u_k = w(x), k = 1,2 \tag{2.2}$$

$$u_1(a) = u_1(b) = 0, \ \frac{du_k(a)}{dx} = \frac{du_2(b)}{dx} = 0 \tag{2.3}$$

Şartları altında minimumunu bulmamız gereksin. Burada

$a > 0, b > 0, a \le x \le b, b_0 > 0, \tilde{b}_0 > 0 \ , b_1 > 0, b_2 > 0, a \ge 0, p > 0$ verilen sayılardır.
$\mathrm{H} \equiv (L_2(a,b))^3, \ \omega \in \mathrm{H}$ - verilen elemandır.

Her bir $v \in \tilde{V}$ için (2.2)-(2.3) şartlarından $u_k = u_k(x) = u_k(x;v), k = 1,2$ fonksiyonlarının bulunması bir sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü dendiğinde $x \in (a,b)$ için

(2.2) denklemini ve (2.3) şartlarını sağlayan $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b),\ u_2 \in W_2^2(a,b)$ fonksiyonları anlaşılır. Bilindiği üzere (2.2)-(2.3) sınır değer problemi (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özel durumudur. (1.1) denklemlerinde $\rho(x) = \rho = sabit > 0$ alırsak ve $\tilde{v}_1(x)$katsayısını

$$\tilde{v}_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & x \in (a,b) \\ 0, & x = a,b \end{cases} \tag{2.4}$$

Şeklinde seçersek söylediklerimizin doğru olduğunu kanıtlarız. (2.2) denkleminde $\tilde{v}_1(x)$ kontrolünün (2.4) şeklinde seçilmesi (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemi için gerek şartın elde edilmesiyle ilgili teknik zorluklarla ilgilidir. Bunun yanısıra (1.1) denkleminde yer alan $\rho = \rho(x)$ katsayısının sabit seçilmesi de açıklamayı kolaylaştırmak içindir. $\rho(x)$ katsayısını ölçülebilir sınırlı fonksiyon ve ölçülebilir sınırlı türeve sahip fonksiyon olarak seçebiliriz.

Gördüğümüz gibi $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1(x)$ fonksiyonu (2.4) şeklinde seçildiğinde $\tilde{V}$ kümesi V kümesinin alt kümesi olacaktır. Bu küme, $B = (L_\infty(a,b))^2 \times L_2(a,b)$ uzayının sınırlı ve konveks kümesidir. Bu takdirde (2.2),(2.3) sınır değer probleminin her bir $v \in \tilde{V}$ için çözümünün varlığı ve tekliği hakkında teorem 2.1.1.'in hükmünün geçerli olduğunu da söyleyebiliriz. Başka bir ifadeyle her bir $v \in \tilde{V}$ için (2.2),(2.3) sınır değer probleminin $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b), u_2 \in W_2^2(a,b)$ bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(a,b)} \le c_1 \|w\|_{L_2(a,b)} \tag{2.5}$$

$$\|u_2\|_{W_2^2(a,b)} \le c_2 \|w\|_{L_2(a,b)} \tag{2.6}$$

Burada $c_1 > 0,\ c_2 > 0 -$sabitleri w - den bağımsız sabitlerdir.

(2.1)-(2.3) optimal kontrol problemleri, 3.1 alt bölümünde incelenen ve tanımı 2.1 bölümünde verilen (1.1)-(1.4) optimal kontrol problemlerinin özel durumu olduğundan (1.1)-(1.4) problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki hükümler (2.1)-(2.3) optimal kontrol problemlerinin çözümü için de geçerli olacaktır. Bu nedenle bu alt bölümde (2.1)-(2.3) problemlerinin çözümü için gerek şartı elde etmek için ilk önce fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayacağız.

Farzedelim ki, $\psi_k = \psi_k(x),\ k = 1,2$ fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problemin çözümü olsun.

$$\rho \frac{d^2\psi_k}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi_k\right) - v_0(x)\psi_k = 2(-1)^k(u_1 - u_2),\ k = 1,2,\ x \in (a,b) \qquad (2.7)$$

$$\psi_1(a) = \psi_2(b) = 0,\ \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_2(b)}{dx} = 0 \qquad (2.8)$$

burada $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x;v),\ k = 1,2 -$ fonksiyonları istenilen $v \in \tilde{V}$ için (2.2),(2.3) sınır değer problemlerinin çözümüdür.

<u>Tanım 3.2.1.1</u> (2.7)-(2.8) eşlenik problemin çözümü dendiğinde istenilen $\eta_{11} \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b),\quad \eta_{12} \in W_2^1(a,b)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b \left(-\rho \frac{d\psi_k}{dx}\frac{d\eta_{1k}}{dx} + \frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi_k \frac{d\eta_{1k}}{dx} - v_0(x)\psi_k\eta_{1k}\right)dx = 2(-1)^k \int_a^b \left(u_1(x) - u_2(x)\right)\eta_{1k}(x)\,dx,\ k = 1,2 \qquad (2.9)$$

integral özdeşliğini sağlayan sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$, $W_2^1(a,b)$ uzaylarına ait olan $\psi_1 = \psi_1(x), \psi_2 = \psi_2(x)$ fonksiyonlarını anlayacağız.

Eşlenik problem, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için birinci ve ikinci çeşit sınır değer problemlerinden oluşan bir problemdir. Burada $\psi_1 = \psi_1(x)$ fonksiyonu (2.7) denklemi için birinci çeşit sınır değer problemi, $\psi_2 = \psi_2(x)$ fonksiyonu ise bu denklem için ikinci çeşit sınır değer problemidir. Kontroller ölçülebilir ve sınırlı olduğundan (2.7) denkleminin (2.2) biçiminde olan denkleme dönüştürmek mümkün olmadığından dolayı herhangi $v \in \widetilde{V}$ için (2.7)-(2.8) eşlenik problemlerinin çözümü hakkındaki bilgiyi $[21]$ çalışmasından bilinen eliptik denklem için sınır değer problemlerinin çözümü hakkındaki sonuçlardan yararlanmamız mümkün değildir. Bu nedenle de (2.7)-(2.8) eşlenik problemlerinin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlamak için $[21]$ çalışmasından bildiğimiz Galerkin yöntemini kullanacağız.

Bu amaçla önce eşlenik problemin çözümü için $W_2^1(a,b)$ uzayına ait kestirimi elde etmeye çalışalım.

<u>Teorem 3.2.1.1.</u> Farzedelim ki $a > 0, \rho = sabit > 0$ ve

$$b_0 - \frac{b_1^2}{2a^2\rho} > 0 \tag{2.10}$$

şartları sağlansın.

Bu takdirde her bir $v \in \widetilde{V}$ için

$$\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \leq c_3 \|u_1 - u_2\|_{L_2(a,b)} \tag{2.11}$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^1(a,b)} \leq c_4 \|u_1 - u_2\|_{L_2(a,b)} \tag{2.12}$$

kestirimler geçerlidir.

Burada $c_3>0$, $c_4>0$ belirli sabitlerdir.

İspat: Farzedelim ki $\psi_1 \in \overset{0}{w}{}_2^{1}(a,b), \psi_2 \in w_2^1(a,b)$ fonksiyonları eşlenik problemin çözümü olsun ve (2.9) özdeşliği sağlasın. Bu durumda (2.9) integral özdeşliğinde $\eta_{1k} = \eta_{1k}(x), k = 1,2,$ fonksiyonlarının yerine $\psi_k = \psi_k(x), k = 1,2$ fonksiyonlarını alırsak

$$\int_a^b \left(-\rho\left(\frac{d\psi_k}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi_k \frac{d\psi_k}{dx} - v_0(x)\psi_k^2 \right) dx = 2(-1)^k \int_a^b (u_1(x) - u_2(x))\psi_k dx, \; k = 1,2$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Buradan $\rho > 0,\; b_0 \le v_0(x) \le \tilde{b}_0, \quad \forall x \in \overset{0}{(a,b)}$ şartlarından yararlanırsak:

$$\rho\int_a^b \left(\frac{d\psi_k}{dx}\right)^2 dx + b_0\int_a^b (\psi_k)^2 dx \le \int_a^b \frac{1}{x}\left|\tilde{v}_1(x)\right|\left|\psi_k\right|\left|\frac{d\psi_k}{dx}\right| dx + 2\int_a^b \left|u_1(x) - u_2(x)\right|\left|\psi_k(x)\right| dx, \; k = 1,2$$

eşitsizliğini elde edebiliriz.

Bu eşitsizlikten:

$\left|\tilde{v}_1(x)\right| \le b_1,\; \forall x \in \overset{0}{(a,b)},\; \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$ şartlarını ve ε-Cauchy eşitsizliğini kullanarak:

$$\rho\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + b_0\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} \le \left(\frac{b_1}{a}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b (\psi_k)^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} +$$

$$+2\int_a^b \left|u_1(x) - u_2(x)\right|\left|\psi_k\right| dx, \quad k = 1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\varepsilon = \rho$ seçerek sonuncu eşitsizliği aşağıdaki biçime dönüştürebiliriz:

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + b_0\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{b_1^2}{2a^2\rho}\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} + 2\int_a^b \left|u_1 - u_2\right|\left|\psi_k\right| dx, \; k = 1,2$$

bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan ikinci terime ε -Cauchy eşitsizliğini uygulayarak:

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + b_0\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{b_1^2}{2a^2\rho}\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} + \varepsilon\left\|\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|u_1 - u_2\right\|^2_{L_2(a,b)}, \; k = 1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Burada $\varepsilon = \dfrac{b_0}{2}$ seçersek

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{b_0}{2}\|\psi_k\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{b_1^2}{2a^2\rho}\|\psi_k\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{2}{b_0}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)},\ k = 1,2$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Sonuncu eşitsizlikte, teoremde yer alan (2.10) şartını kullanırsak ve $c_5 = \dfrac{b_0}{2} - \dfrac{b_1^2}{2a^2\rho} > 0$ gösterirsek

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + c_5\|\psi_k\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{2}{b_0}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)},\ k = 1,2$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Burada $c_6 = \min\left\{\dfrac{\rho}{2}, c_5\right\}$, ile gösterirsek $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ fonksiyonları için

$$\|\psi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(a,b)} \le \frac{1}{2b_0c_6}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)} \tag{2.13}$$

$$\|\psi_2\|^2_{W_2^1(a,b)} \le \frac{1}{2b_0c_6}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(a,b)} \tag{2.14}$$

fonksiyonlarını elde ederiz.

Bu kestirimlerden $c_3\sqrt{\dfrac{1}{2b_0c_6}}$, $c_4\sqrt{\dfrac{1}{2b_0c_6}}$ ile gösterirsek, (2.11),(2.12) kestirimlerini ispatlamış oluruz. Teorem ispatlandı.

Bu teoremden herhangi $v \in \widetilde{V}$ için (2.7),(2.8) eşlenik problemlerinin çözümünün tekliği çıkar. Bu nedenle her bir $v \in V$ için (2.7),(2.8) eşlenik problemlerinin çözümünün varlığını ispatlamamız yeterlidir.

Varlık teoremlerini birinci ve ikinci sınır değer problemleri için ayrı ayrı ispatlayacağız. Bu amaçla ilk önce

$$\rho \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi\right) - v_0(x)\psi = 2(u_2 - u_1) \qquad (2.15)$$

$$\psi(a) = \psi(b) = 0 \qquad (2.16)$$

şartlarından $\psi = \psi(x)$ fonksiyonunun bulunması için birinci çeşit sınır değer problemini ele alalım.

Her bir $v \in \tilde{V}$ için (2.15),(2.16) sınır değer probleminin çözümü dendiğinde herhangi $\eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b \left(-\rho \frac{d\psi}{dx}\frac{d\eta_1}{dx} + \frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi \frac{d\eta_1}{dx} - v_0(x)\psi\eta_1\right)dx = 2\int_a^b (u_2(x) - u_1(x))\eta_1(x)dx \qquad (2.17)$$

İntegral özdeşliğini sağlayan $\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ uzayında olan $\psi = \psi(x) \equiv \psi(x;v)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

<u>Teorem 3.2.1.2</u> Farzedelim ki 3.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu takdirde her bir $v \in \tilde{V}$ için (2.15),(2.16) sınır değer problemlerinin $\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ uzayında bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_7 \|u_1 - u_2\|_{L_2(a,b)} \qquad (2.18)$$

kestirimi geçerlidir. Burada c_7>0, bilinen sabittir.

İspat: İspat için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu yönteme göre çözümü:

$$\psi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x) \tag{2.19}$$

biçiminde arayalım.

Burada $\{\varphi_k(x)\}$ fonksiyonları $\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemidir. c_k^N $k = 1, 2...\text{N}$ sabitleri aşağıdaki cebirsel denklemler sisteminin çözümüdür.

$$\sum_{k=1}^{N} a_{kl} C_k^N = f_{e,} \ l = \overline{1, N}$$

Şimdi bu sistemi elde etmeye çalışalım.(2.19) formülü

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(-\rho \frac{d\psi^N}{dx} \frac{d\phi_l}{dx} + \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \psi^N(x) \frac{d\phi_l}{dx} - v_0(x) \psi^N \phi_l \right) dx = \\ &= 2\int_a^b \left(u_2(x) - u_1(x) \right) \phi_l(x) dx, \quad l = 1, 2, ..., N \end{aligned} \tag{2.20}$$

eşitliğinde dikkate alalım. Bu takdirde aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^N \left[-\rho \int_a^b \frac{d\varphi_k(x)}{dx} \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx + \int_a^b \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \varphi_k(x) \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx - \int_a^b v_0(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx \right] =$$

$$= 2\int_a^b (u_2(x) - u_1(x) \varphi_l(x) dx, \ l = \overline{1, N}$$

Burada

$$a_{kl} = -\rho \int_a^b \frac{d\varphi_k(x)}{dx} \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx + \int_a^b \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \varphi_k(x) \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx -$$

$$-\int_a^b v_0(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx, k, l = \overline{1, N}$$

$$f_l = 2\int_a^b \left(u_2(x) - u_1(x) \right) \varphi_l(x) dx$$

şeklinde yazarsak aşağıdaki lineer cebirsel denklemler sistemini elde ederiz:

$$\sum_{k=1}^{N} a_{kl} C_k^N = f_{e,} \ l = \overline{1, N}$$

Teoremin şartları altında $[21]$ çalışmasında olduğu gibi her bir $v \in \tilde{V}$ ve $u_2 - u_1 \in L_2(a,b)$ için bir tek $c_k^N, k = 1,2...N$ bir tek çözümünün olduğunu söyleyebiliriz. Başka deyişle (2.19) formülüyle tanımlanan $\psi^N(x)$ Galerkin yaklaşımları bir tek olarak belirlenebilir. Şimdi (2.19) biçiminde olan Galerkin yaklaşımları için kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla önce (2.20) sisteminin her bir denklemi C_l^N sabitlerine çarpıp l üzerinden $l = 1$ 'den $l = N$ 'e kadar toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(-\rho \left(\frac{d\psi^N}{dx} \right)^2 + \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \psi^N \frac{d\phi^N}{dx} - v_0(x) \left(\psi^N \right)^2 \right) dx = \\ &= 2\int_a^b \left(u_2(x) - u_1(x) \right) \phi^N(x) dx\end{aligned} \tag{2.21}$$

Bu eşitlikten yararlanarak teorem 3.2.1.1.'in ispatında olduğu gibi (2.11) kestiriminin elde edilmesine benzer olarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\| \psi^N \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_7 \left\| u_1 - u_2 \right\|_{L_2(a,b)} \tag{2.22}$$

Bu kestirimden yararlanarak $\{\psi^N\}$dizisinden belirli $\psi \in \overset{0}{W}{}^1_2(a,b)$ zayıf yakınsayan $\{\psi^{N_m}\}$ alt dizisini seçebiliriz. $[21]$ çalışmasındaki teorem 1.1 ispatında olduğu gibi $\psi = \psi(x)$ limit fonksiyonu (2.15),(2.16) sınır değer problemlerinin çözümüdür ve bu çözüm için (2.18) kestiriminin geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

(2.18) kestirimi (2.22) kestiriminde N 'in yerine N_m alıp $m \to \infty$ için limite geçersek kolaylıkla (2.18)'i elde edebiliriz. (2.18) kestiriminden de (2.15),(2.16) probleminin çözümü olan $\psi = \psi(x)$ fonksiyonunun bir tek çözümünün olduğu elde edilir. Teorem ispatlandı.

Bu teoremin ispatına benzer olarak

$$\rho\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi\right)-v_0(x)\psi=2(u_1-u_2), x\in(a,b) \tag{2.23}$$

$$\frac{d\psi(a)}{dx}=\frac{d\psi(b)}{dx} \tag{2.24}$$

ikinci çeşit sınır değer probleminin varlığı ve tekliği teoremini, başka deyişle aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.2.1.3 Farzedelim ki teorem 3.2.1.1.'in şartları sağlansın. Bu takdirde her bir $v\in\tilde{V}$ için (2.23),(2.24) sınır değer probleminin $W_2^1(a,b)$ uzayında bir tek çözümü vardır ve çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^1(a,b)}\leq c_8\|u_1-u_2\|_{L_2(a,b)} \tag{2.25}$$

Burada $c_8>0$ bilinen sabittir.

Teorem 3.2.1.2. ve teorem 3.2.1.3.'ü birleştirerek aşağıdaki hükmü ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.1.4. Farzedelim ki teorem 3.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu takdirde (2.7), (2.8) eşlenik probleminin bir tek $\psi_1\in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$, $\psi_2\in W_2^1(a,b)$ çözümü vardır ve çözüm için

$$\|\psi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)}\leq c_7\|u_1-u_2\|_{L_2(a,b)} \tag{2.26}$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^1(a,b)}\leq c_8\|u_1-u_2\|_{L_2(a,b)} \tag{2.27}$$

kestirimleri geçerlidir.

(2.1)-(2.3) optimal kontrol problemleri için Hamilton-Pontryagin fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$H\left(x,u_1(x),u_2(x),v(x),\psi_1(x),\psi_2(x)\right)=-\left(\frac{1}{x}\frac{du_1(x)}{dx}\psi_1(x)+\frac{1}{x}\frac{du_2(x)}{dx}\psi_2(x)\right)\tilde{v}_1(x)+$$
$$+\left(u_1(x)\psi_1(x)+u_2(x)\psi_2(x)\right)v_0(x)+\left(\psi_1(x)+\psi_2(x)\right)w(x)-\alpha\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right)^2-$$
$$-\alpha\left(\tilde{v}_1(x)-\omega_1(x)\right)^2-\alpha\left(w(x)-\omega_2(x)\right)^2$$
(2.28)

Burada $u_k=u_k(x)\equiv u_k(x;v(x)),\ k=1,2-$fonksiyonları (2.2),(2.3) sınır değer probleminin, $\psi_k=\psi_k(x)\equiv\psi_k(x;v),\ k=1,2-$ fonksiyonları ise eşlenik problemin $v\in\tilde{V}$ uygun karşılık gelen çözümüdür.

Teorem 3.2.1.5. Farzedelim ki teorem 3.2.1.4'ün şartları sağlansın ve $\omega\in H$ verilmiş eleman olsun. Bu takdirde $J_a(v)$ fonksiyoneli $\tilde{V}$ kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir. Ve gradiyenti için

$$J'_\alpha(v)=-\frac{\partial H}{\partial v}=-\left(\frac{\partial H}{\partial v_0},\frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1},\frac{\partial H}{\partial w}\right) \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1}=-\frac{1}{x}\frac{du_1(x)}{dx}\psi_1(x)-\frac{1}{x}\frac{du_2(x)}{dx}\psi_2(x)-2\alpha\left(\tilde{v}_1(x)-\omega_1(x)\right) \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_0}=u_1(x)\psi_1(x)+u_2(x)\psi_2(x)-2\alpha\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w}=\psi_1(x)+\psi_2(x)-2\alpha\left(w(x)-\omega_2(x)\right) \tag{2.32}$$

formülü geçerlidir.

İspat: $\forall v\in\tilde{V}$ alalım ve ona $v+\Delta v\in\tilde{V}$ olacak biçimde $\Delta v\in B$ artışını verelim. Herhangi $v\in\tilde{V}$ kontrolü üzerinde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım. (1.62) ve (2.1) formüllerinden yararlanırsak fonksiyonelin artışı için

$$
\begin{aligned}
&J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_a^b \big(u_1(x)-u_2(x)\big)\big(\Delta u_1(x)-\Delta u_2(x)\big)dx + \\
&+2\alpha\int_a^b \big(v_0(x)-\omega_0(x)\big)\Delta v_0(x)\,dx + 2\alpha\int_a^b \big(\tilde{v}_1(x)-\omega_1(x)\big)\Delta\tilde{v}_1(x)dx + \\
&+2\alpha\int_a^b \big(w(x)-\omega_2(x)\big)\Delta w(x)\,dx + \|\Delta u_1\|^2_{L_2(a,b)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(a,b)} - \\
&-2\int_a^b \Delta u_1(x)\Delta u_2(x)\,dx + \alpha\|\Delta v\|^2_H
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

formüllerini yazabiliriz.

Burada $\Delta u_k = \Delta u_k(x),\ k=1,2$ fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{d^2\Delta u_k}{dx^2} + \frac{1}{x}\big(\tilde{v}_1(x)+\Delta\tilde{v}_1(x)\big)\frac{d\Delta u_k}{dx} - \big(v_0(x)+\Delta v_0(x)\big)\Delta u_k = \\
&= -\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{du_k}{dx} + \Delta v_0(x)u_k + \Delta w(x),\ k=1,2
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

$$
\Delta u_1(a) = \Delta u_1(b) = 0, \qquad \frac{d\Delta u_2(a)}{dx} = \frac{d\Delta u_2(b)}{dx} = 0 \tag{2.35}
$$

yukarıdaki sınır değer problemlerinin çözümüdür.

(1.60),(1.61) kestirimlerine benzer olarak sınır değer problemlerinin çözümü için

$$
\|\Delta u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_9\|\Delta v\|_B \tag{2.36}
$$

$$
\|\Delta u_2\|_{W_2^1(a,b)} \le c_{10}\|\Delta v\|_B \tag{2.37}
$$

kestirimlerini elde ederiz.

Burada $c_9 > 0, c_{10} > 0$ sabitleri Δv ' den bağımsızdır.

Şimdi fonksiyonelin artışının sağ tarafında yer alan birinci terimi dönüştürmeye çalışalım.

$\Delta u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b),\ \Delta u_2 \in W_2^1(a,b)$ fonksiyonlarının herhangi $\eta_k \in L_2(a,b), k = 1,2.$ için aşağıdaki integral özdeşliklerini sağladığı açıktır:

$$\int_a^b \left(\rho \frac{d^2 \Delta u_k}{dx^2} + \frac{1}{x}\left(\tilde{v}_1(x) + \Delta\tilde{v}_1(x)\right)\frac{d\Delta u_k}{dx} - \left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)\Delta u_k \right)\eta_k(x)dx =$$
$$= \int_a^b \left(-\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{du_k}{dx} + \Delta v_0(x)u_k + \Delta w(x) \right)\eta_k(x)dx, k = 1,2 \tag{2.38}$$

Bu integral özdeşliklerinde yer alan $L_2(a,b)$ uzayından olan $\eta_k = \eta_k(x), k = 1,2$ fonksiyonlarının yerine $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b), \psi_2 \in W_2^1(a,b)$ fonksiyonlarını alalım ve elde edilen eşitliklerin sol tarafındaki birinci terime kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. Bu takdirde

$$\int_a^b \left(-\rho \frac{d\Delta u_k}{dx} + \frac{1}{x}\left(\tilde{v}_1(x) + \Delta\tilde{v}_1(x)\right)\frac{d\Delta u_k}{dx} - \left(v_0(x) + \Delta v_0(x)\right)\Delta u_k \psi_k \right)dx =$$
$$= \int_a^b \left(-\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{du_k}{dx} + \Delta v_0(x)u_k + \Delta w(x) \right)\psi_k(x)dx, \quad k = 1,2 \tag{2.39}$$

eşitliğini yazabiliriz.

(2.9) integral özdeşliklerinde $\eta_{11} \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b), \eta_{12} \in W_2^1(a,b)$ fonksiyonlarının yerine $\Delta u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(a,b),\ \Delta u_2 \in W_2^1(a,b)$ fonksiyonlarını yazalım. Böylelikle

$$\int_a^b \left(-\rho \frac{d\psi_k}{dx}\frac{d\Delta u_k}{dx} + \frac{1}{x}\tilde{v}_1(x)\psi_k \frac{d\Delta u_k}{dx} - v_0(x)\psi_k \Delta u_k \right)dx =$$
$$= 2(-1)^k \int_a^b (u_1(x) - u_2(x))\Delta u_k(x)dx, \quad k = 1,2 \tag{2.40}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu elde ederiz.

k=1 olduğunda (2.39)' dan (2.40)'ı çıkaralım. Bu takdirde

$$2\int_a^b (u_1(x)-u_2(x))\Delta u_1(x)dx = \int_a^b (\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{du_1}{dx} - \Delta v_0(x)u_1 - \Delta w(x))\psi_1(x)dx +$$
$$+\int_a^b (\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{d\Delta u_1}{dx} - \Delta v_0\left(x\right)\Delta u_1)\psi_1(x)dx \tag{2.41}$$

eşitliğini elde ederiz.

k=2 olduğunda (2.39) ve (2.40)' dan aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-2\int_a^b (u_1(x)-u_2(x))\Delta u_2(x)dx = \int_a^b (\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{du_2}{dx} - \Delta v_0(x)u_2 - \Delta w(x))\psi_2(x)dx +$$
$$+\int_a^b (\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\frac{d\Delta u_2}{dx} - \Delta v_0\left(x\right)\Delta u_2)\psi_2(x)dx \tag{2.42}$$

Şimdi (2.41) ve (2.42) eşitliklerini taraf tarafa toplayalım

$$2\int_a^b (u_1(x)-u_2(x))(\Delta u_1-\Delta u_2(x))dx = \int_a^b \left[\frac{1}{x}\left(\frac{du_1(x)}{dx}\psi_1(x)+\frac{du_2(x)}{dx}\psi_2(x)\right)\Delta\tilde{v}_1(x)dx -\right.$$
$$\left. -\left(u_1(x)\psi_1(x)+u_2(x)\psi_2(x)\right)\Delta v_0(x) - \left(\psi_1(x)+\psi_2(x)\right)\Delta w(x)\right]dx +$$
$$+\int_a^b \left[\frac{1}{x}(\frac{d\Delta u_1(x)}{dx}\psi_1(x)+\frac{d\Delta u_2(x)}{dx}\psi_2(x))\Delta\tilde{v}_1(x) - (\Delta u_1(x)\psi_1(x)+\Delta u_2(x)\psi_2(x))\Delta v_0(x)\right]dx$$
$$\tag{2.43}$$

Bu eşitliği dikkate alarak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_\alpha\left(v\right) = \int_a^b \left[\frac{1}{x}(\frac{du_1}{dx}\psi_1 + \frac{du_2}{dx}\psi_2)\Delta\tilde{v}_1(x) - (u_1\psi_1+u_2\psi_2)\Delta v_0(x) - (\psi_1-\psi_2)\Delta w(x)\right]dx +$$
$$+2\alpha\int_a^b\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right)\Delta v_0(x)dx + 2\alpha\int_a^b\left(\tilde{v}_1\left(x\right)-\omega_1\left(x\right)\right)\Delta\tilde{v}_1\left(x\right)dx +$$
$$+2\alpha\int_a^b\left(w\left(x\right)-\omega_2\left(x\right)\right)\Delta w\left(x\right)dx + R\left(\Delta v\right) \tag{2.44}$$

Burada $R(\Delta v)$

$$R\left(\Delta v\right)=\alpha\left\|\Delta v\right\|_H^2+\left\|\Delta u_1\right\|_{L_2(a,b)}^2+\left\|\Delta u_2\right\|_{L_2(a,b)}^2-2\int_a^b \Delta u_1\left(x\right)\Delta u_2\left(x\right)dx+$$
$$+\int_a^b\left[\frac{1}{x}\left(\frac{d\Delta u_1}{dx}\psi_1+\frac{d\Delta u_2}{dx}\psi_2\right)\Delta\tilde{v}_1\left(x\right)+\left(\Delta u_1\psi_1+\Delta u_2\psi_2\right)\Delta v_0\left(x\right)\right]dx \tag{2.45}$$

formülüyle tanımlanır.

Şimdi $R(\Delta v)$ kalan terimini değerlendirelim. Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinden yararlanarak kabul edilmiş şartlar altında

$$R(\Delta v)\leq\alpha\left\|\Delta v\right\|_H^2+2\left\|\Delta u_1\right\|_{L_2(a,b)}^2+2\left\|\Delta u_2\right\|_{L_2(a,b)}^2+.\frac{1}{a}\left\|\frac{d\Delta u_1}{dx}\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_1\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\Delta\tilde{v}_1\right\|_{L_\infty(a,b)}+$$
$$+\frac{1}{a}\left\|\frac{d\Delta u_2}{dx}\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_2\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\Delta\tilde{v}_1\right\|_{L_\infty(a,b)}+\left(\left\|\Delta u_1\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_1\right\|_{L_2(a,b)}+\left\|\Delta u_2\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_2\right\|_{L_2(a,b)}\right)\left\|\Delta v_0\right\|_{L_\infty(a,b)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliklerden ve (2.5), (2.6), (2.26), (2.27), (2.36), (2.37) bağıntılarından yararlanarak:

$$\left|R\left(\Delta v\right)\right|\leq c_{11}\left\|\Delta v\right\|_B^2 \tag{2.46}$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde ederiz.

Burada $c_{11}>0-$sabiti Δv’den bağımsız bir sabittir. Bu eşitsizliğe dayanarak

$$R\left(\Delta v\right)=o\left(\left\|\Delta v\right\|_B\right) \tag{2.47}$$

bağıntısını yazabiliriz.

Başka deyişle $R(\Delta v)$ kalan terimi, $\left\|\Delta v\right\|_B$ normuna göre yüksek mertebeden sonsuz küçük miktardır. Sonuncu bağıntıyı dikkate alarak fonksiyonelin artışı için olan formülü

$$
\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(v) &= \int_a^b \left[\frac{1}{x}\left(\frac{du_1}{dx}\psi_1 + \frac{du_2}{dx}\psi_2\right) + 2\alpha\left(\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x)\right)\right]\Delta\tilde{v}_1(x)\,dx + \\
&+ \int_a^b \left[-\left(u_1\psi_1 + u_2\psi_2\right) + 2\alpha\left(v_0(x) - \omega_0(x)\right)\right]\Delta v_0(x)dx + \\
&+ \int_a^b \left[-\left(\psi_1 + \psi_2\right) + 2\alpha\left(w(x) - \omega_2(x)\right)\right]\Delta w(x)\,dx + R(\Delta v) + o\left(\|\Delta v\|_B\right)
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

gibi yazabiliriz.

Buradan da Hamilton-Pontryagin fonksiyonu yardımıyla fonksiyonelin artışı için

$$
\Delta J_\alpha(v) = \int_a^b \left\langle -\frac{\partial H}{\partial v}, \Delta v \right\rangle_{E_3} dx + o\left(\|\Delta v\|_B\right) \tag{2.49}
$$

formülünü elde ederiz.

Fonksiyonel uzaylarda fonksiyonellerin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olmasının tanımından yararlanarak sonuncu formülden $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\tilde{V}$ kümesi üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyantı için teoremin hükmünde yer alan (2.29)- (2.32) formüllerinin geçerli olduğunu hükmedebiliriz. Teorem ispatlandı.

3.2.2 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Varyasyon Eşitsizliği Biçiminde Gerek Şart

Bu alt bölümde, bir önceki alt bölümdeki fonksiyonelin gradiyantı için formülden yararlanarak (2.1)-(2.3) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edeceğiz.

<u>Teorem 3.2.2.1.</u> Farzedelim ki teorem 3.2.1.5.'in şartları sağlansın.
$\tilde{V}_* \equiv \left\{ v^* \in V^* : J_\alpha(v^*) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in\tilde{V}} J_\alpha(v) \right\}$ kümesi (2.1)-(2.3) optimal kontrol probleminin $v^* \in \tilde{V}_*$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\int_a^b \left[\frac{1}{x} \left(\frac{du_1^*(x)}{dx} \psi_1^*(x) + \frac{du_2^*(x)}{dx} \psi_2^*(x) \right) + 2\alpha \left(\tilde{v}_1^*(x) - \omega_1(x) \right) \right] \left(\tilde{v}_1(x) - \tilde{v}_1^*(x) \right) dx +$$
$$+ \int_a^b \left[-\left(u_1^*(x)\psi_1^*(x) + u_2^*(x)\psi_2^*(x) \right) + 2\alpha \left(v_0^*(x) - \omega_0(x) \right) \right] \left(v_0(x) - v_0^*(x) \right) dx + \tag{2.50}$$
$$+ \int_a^b \left[-\left(\psi_1^*(x) + \psi_2^*(x) \right) + 2\alpha \left(w^*(x) - \omega_2(x) \right) \right] \left(w(x) - w^*(x) \right) dx \geq 0, \quad \forall v \in \tilde{V}$$

Burada, $u_k^* = u_k^*(x) \equiv u_k(x;v^*), \psi_k^* = \psi_k^*(x) \equiv \psi_k(x;v^*), k = 1,2$ fonksiyonları sırasıyla (2.2),(2.3) sınır değer probleminin ve (2.7),(2.8) eşlenik problemlerinin $v^* \in \tilde{V}_*$ ’a karşılık gelen çözümleridir.

<u>İspat:</u> $\tilde{V}$ kümesinin yapısından görüldüğü gibi bu küme B uzayında konveks kümedir. Bunun yanısıra $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli teorem 3.2.1.5’ in şartları altında $\tilde{V}$ kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir. Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\tilde{V}$ kümesi üzerinde sürekli ve sürekli diferansiyellenebilir olduğunu göstermeye çalışalım. Bu amaçla $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin ve onun $J'_\alpha(v)$ gradiyentinin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin sürekliliği $J_o(v)$ fonksiyonelinin ve $\|v-\omega\|_H^2$ fonksiyonelinin sürekli olmasından kaynaklanır.

$J_o(v)$ fonksiyonelinin $\tilde{V}$ kümesi üzerinde sürekliliği teorem 3.1.2.2’ nin ispatında olduğu gibi $J_o(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde ispatına aynı olarak $J_o(v)$ ’nın $\tilde{V}$ üzerinde sürekliliği ispatlanır. İki sürekli fonksiyonelin toplamının sürekli olmasından $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\tilde{V}$ kümesi üzerinde sürekliliği elde edilmiş olur. Bu takdirde $J'_\alpha(v)$’nin gradiyentinin $\tilde{V}$ kümesi üzerinde sürekliliğini ispatlamamız yeterli olacaktır. Bu amaçla $J'_\alpha(v)$ gradiyenti için

$$J'_\alpha(v) = \left(J'_{\alpha 0}(v), J'_{\alpha 1}(v), J'_{\alpha 2}(v) \right) \tag{2.51}$$

formülünü yazalım.

Burada $J'_{\alpha m}(v), m = 0,2$ bileşenleri

$$J'_{\alpha 0}(v) = -u_1\psi_1 - u_2\psi_2 + 2\alpha\left(v_0(x) - \omega_0(x)\right) \tag{2.52}$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = \frac{1}{x}\left(\frac{du_1}{dx}\psi_1 + \frac{du_2}{dx}\psi_2\right) + 2\alpha\left(\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x)\right) \tag{2.53}$$

$$J'_{\alpha 2}(v) = -\psi_1 - \psi_2 + 2\alpha\left(w(x) - \omega_2(x)\right) \tag{2.54}$$

formülleriyle tanımlanır.

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlamaya çalışalım:

$$\left\|J'_{\alpha}(v + \Delta v) - J'_{\alpha}(v)\right\|_{\tilde{B}} \le c_{12}\left\|\Delta v\right\|_{B}, \quad \forall v \in \tilde{V} \tag{2.55}$$

Burada $c_{12} > 0-$sabiti Δv'den bağımsızdır ve $\tilde{B} \equiv \left(L_1(a,b)\right)^2 \times L_2(a,b)$. (2.55) eşitsizliğini elde etmek için $J'_{\alpha}(v)$'nin gradiyentinin her bir bileşeninin artışını değerlendirmeye çalışalım. (2.52) formülünden yararlanırsak $J'_{\alpha 0}(v)$ bileşeninin artışı için

$$\begin{aligned} &J'_{\alpha 0}(v + \Delta v) - J'_{\alpha 0}(v) = -u_{1\Delta}\psi_{1\Delta} - u_{2\Delta}\psi_{2\Delta} + 2\alpha\left(v_0(x) + \Delta v(x) - \omega_0(x)\right) + \\ &+ u_1\psi_1 + u_2\psi_2 - 2\alpha\left(v_0(x) - \omega_0(x)\right) = -u_{1\Delta}\Delta\psi_1 - u_{2\Delta}\Delta\psi_2 - \Delta u_1\psi_1 - \Delta u_2\psi_2 + \\ &+ 2\alpha\Delta v_0(x) \end{aligned} \tag{2.56}$$

formülünü yazabiliriz.

Burada $u_{k\Delta}(x),\ k = 1,2$ fonksiyonları (2.2), (2.3) sınır değer probleminin $v + \Delta v \in \tilde{V}$ 'ya karşılık gelen çözümü $\Delta u_k = \Delta u_k(x), k = 1,2$ (2.34), (2.35) sınır değer probleminin ve $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x) \equiv \psi_k(x; v + \Delta v) - \psi_k(x; v), k = 1,2-$ fonksiyonları ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\rho\frac{d^2\Delta\psi_k}{dx^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\left(\tilde{v}_1(x)+\Delta\tilde{v}_1(x)\right)\Delta\psi_k\left(x\right)\right)-\left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)\Delta\psi_k=$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\psi_k\right)+\Delta v_0(x)\psi_k+2(-1)^k\left(\Delta u_1-\Delta u_2\right),\quad k=1,2,\ x\in(a,b) \tag{2.57}$$

$$\Delta\psi_1(a)=\Delta\psi_1(b)=0,\quad \frac{d\Delta\psi_2(a)}{dx}=\frac{d\Delta\psi_2(b)}{dx}=0\,. \tag{2.58}$$

Burada $\psi_k=\psi_k(x)\equiv\psi_k(x;v),\ k=1,2$ fonksiyonları $v\in\widetilde{V}$ olduğunda (2.7), (2.8) probleminin çözümüdür.

Şimdi (2.57), (2.58) probleminin çözümünü değerlendirmeye çalışalım.

$\Delta\psi_1\in\overset{0}{W}{}_2^1(a,b),\ \Delta\psi_2\in W_2^1(a,b)$ fonksiyonları için aşağıdaki integral özdeşliklerini herhangi $\eta_{11}\in\overset{0}{W}{}_2^1(a,b),\ \eta_{12}\in W_1^2(a,b)$ için yazabiliriz:

$$\int_a^b\left(-\rho\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\frac{d\eta_{1k}}{dx}+\frac{1}{x}\left(\tilde{v}_1(x)+\Delta\tilde{v}_1(x)\right)\Delta\psi_k\frac{d\eta_{1k}}{dx}-\left(v_0(x)-\Delta v_0(x)\right)\Delta\psi_k\eta_{1k}\right)dx=$$
$$=-\int_a^b\left(\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\psi_k\right)\frac{d\eta_{1k}}{dx}dx+\int_a^b\Delta v_0(x)\Delta\psi_k\eta_{1k}dx+2(-1)^k\int_a^b\left(\Delta u_1(x)-\Delta u_2(x)\right)\eta_{1k}dx \tag{2.59}$$
$$k=1,2$$

Bu özdeşliklerden $\eta_{1k}=\eta_{1k},\ k=1,2...$ fonksiyonları yerine sırasıyla $\Delta\psi_1\in\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$, $\Delta\psi_2\in W_2^1(a,b)$ fonksiyonlarını yazalım. Bu takdirde

$$\int_a^b\left(-\rho\left(\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right)^2+\frac{1}{x}\left(\tilde{v}_1(x)+\Delta\tilde{v}_1(x)\right)\Delta\psi_k\frac{d\psi_k}{dx}-\left(v_0(x)+\Delta v_0(x)\right)\left(\Delta\psi_k\right)^2\right)dx=$$
$$=-\int_a^b\left(\frac{1}{x}\Delta\tilde{v}_1(x)\psi_k\right)\frac{d\Delta\psi_k}{dx}dx+\int_a^b\Delta v_0(x)\Delta\psi_k\Delta\psi_k dx+2(-1)^k\int_a^b\left(\Delta u_1-\Delta u_2\right)\Delta\eta_k dx,\quad k=1,2$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bu eşitliklerden $b_0 \le v_0(x)+\Delta v_0(x) \le \tilde{b}_0,\ 0 \le \tilde{v}_1(x)+\Delta\tilde{v}_1(x) \le b_1,\ \overset{0}{\forall} \in (a,b)$ şartlarını dikkate alarak

$$\rho\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + b_0\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(x)} \le \frac{b_1}{a}\int_a^b\left|\Delta\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx + \frac{1}{a}\int_a^b\left|\Delta\tilde{v}_1(x)\right|\left|\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx +$$
$$+\int_a^b\left|\Delta v_0(x)\right|\left|\psi_k\right|\left|\Delta\psi_k\right|dx + 2\int_a^b\left(\left|\Delta u_1\right|+\left|\Delta u_2\right|\right)\left|\Delta\psi_k\right|dx,\ k=1,2$$

eşitsizliklerini kolaylıkla elde ederiz.

Bu eşitsizliklerin sağ tarafındaki sonuncu iki terime ε -Cauchy eşitsizliğini uygularsak

$$\rho\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + b_0\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(x)} \le \frac{\varepsilon}{2}\int_a^b\left|\Delta\psi_k\right|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b\left[2\left(\left|\Delta u_1\right|+\left|\Delta u_2\right|\right)+\left|\Delta v_0(x)\right|\left|\psi_k\right|\right]^2 dx +$$
$$+\frac{b_1}{a}\int_a^b\left|\Delta\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx + \frac{1}{a}\int_a^b\left|\Delta\tilde{v}_1(x)\right|\left|\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx,\ k=1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliklerde $\varepsilon = b_0$ seçersek

$$\rho\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)} + \frac{b_0}{2}\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(a,b)} \le \frac{1}{2b_0}\int_a^b\left[2(\left|\Delta u_1\right|+\left|\Delta u_2\right|)+\left|\Delta v_0\right|\left|\psi_k\right|\right]^2 dx +$$
$$+\frac{b_1}{a}\int_a^b\left|\Delta\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx + \frac{1}{a}\int_a^b\left|\Delta\tilde{v}_1(x)\right|\left|\psi_k\right|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx,\ k=1,2 \qquad (2.60)$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Bu eşitsizliklerin sağ tarafındaki ikinci terime ε -Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu takdirde

$$\rho\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)}+\frac{b_0}{2}\|\Delta\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}\le\frac{1}{2b_0}\int_a^b\left[2(|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)+|\Delta v_0||\psi_k|\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)}+\frac{b_1^2}{2a^2\varepsilon}\int_a^b|\Delta\psi_k|^2dx+\frac{1}{a}\int_a^b|\Delta\tilde{v}_1(x)||\psi_k|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx,\ k=1,2$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikte $\varepsilon=\rho$ seçersek

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)}+\frac{b_0}{2}\|\Delta\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}\le\frac{1}{2b_0}\int_a^b\left[2(|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)+|\Delta v_0||\psi_k|\right]^2dx+$$

$$+\frac{b_1^2}{2a^2\varepsilon}\int_a^b\|\Delta\psi_k\|^2dx+\frac{1}{a}\int_a^b|\Delta\tilde{v}_1(x)||\psi_k|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx,\ k=1,2$$

eşitsizliğini buluruz.

(2.10) şartını dikkate alıp $c_5=\dfrac{b_0}{2}-\dfrac{b_1^2}{2a^2\rho}>0$ ile gösterirsek sonuncu eşitsizlikten

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)}+c_5\|\Delta\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}\le\frac{1}{2b_0}\int_a^b\left[2(|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)+|\Delta v_0||\psi_k|\right]^2dx+$$

$$+\frac{1}{a}\int_a^b|\Delta\tilde{v}_1(x)||\psi_k|\left|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right|dx,\ k=1,2$$

geçerli olduğunu elde ederiz.

Bu eşitsizliğin sağ taraftaki ikinci terime ε - Cauchy eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{\rho}{4}\left\|\frac{d\Delta\psi_k}{dx}\right\|^2_{L_2(a,b)}+c_5\|\Delta\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}\le\frac{1}{2b_0}\int_a^b\left[2(|\Delta u_1|+|\Delta u_2|)+|\Delta v_0||\psi_k|\right]^2dx+$$

$$+\frac{1}{a^2\rho}\int_a^b\left(|\Delta\tilde{v}_1(x)||\psi_k|\right)^2dx,\ k=1,2$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada (2.5), (2.6), (2.26), (2.27), (2.36), (2.37) kestirimlerinin yardımıyla kolaylıkla

$$\left\|\Delta \psi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(a,b)} \leq c_{13}\left\|\Delta v\right\|_B \qquad (2.61)$$

$$\left\|\Delta \psi_2\right\|^2_{W_2^1(a,b)} \leq c_{14}\left\|\Delta v\right\|_B \qquad (2.62)$$

kestirimleri elde ederiz.

Burada $c_{13} > 0, c_{14} > 0-$ sabitleri Δv ’den bağımsızdır. (2.56) formülünden yararlanırsak

$$\left|J'_{\alpha 0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 0}(v)\right| \leq \left|u_{1\Delta}\right|\left|\Delta \psi_1\right| + \left|u_{2\Delta}\right|\left|\Delta \psi_2\right| + \left|\Delta u_1\right|\left|\psi_1\right| + \left|\Delta u_2\right|\left|\psi_2\right| + 2\alpha\left|\Delta v_0\right|$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafını (a,b) aralığı üzerinden integrallersek ve elde edilen eşitsizlikte Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}\left\|J'_{\alpha 0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 0}(v)\right\|_{L_2(a,b)} &\leq \left\|u_{1\Delta}\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\Delta \psi_1\right\|_{L_2(a,b)} + \left\|u_{2\Delta}\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\Delta \psi_2\right\|_{L_2(a,b)} + \\ &+\left\|\Delta u_1\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_1\right\|_{L_2(a,b)} + \left\|\Delta u_2\right\|_{L_2(a,b)}\left\|\psi_2\right\|_{L_2(a,b)} + 2\alpha\left\|\Delta v_0\right\|_{L_1(a,b)}\end{aligned} \qquad (2.63)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bildiğimiz gibi (1.13),(1.14) kestirimleri herhangi $v \in \tilde{V}$ için geçerlidir. Bu nedenle bu kestirimlerden $v \in \tilde{V}$ ’nın yerine $v + \Delta v \in \tilde{V}$ alırsak

$$\left\|u_{1\Delta}\right\|_{\overset{0}{W}{}^2_2(a,b)} \leq c_3\left\|w + \Delta w\right\|_{L_2(a,b)} \qquad (2.64)$$

$$\left\|u_{2\Delta}\right\|_{\overset{0}{W}{}^2_2(a,b)} \leq c_4\left\|w + \Delta w\right\|_{L_2(a,b)} \qquad (2.65)$$

kestirimlerini yazabiliriz.

Bu kestirimlerden $v + \Delta v \in \tilde{V}$ olduğunu dikkate alırsak $\tilde{V}$ kümesinin tanımından yararlanarak

$$\|u_{1\Delta}\|_{L_2(a,b)} \le c_3 \cdot b_2, \quad \|u_{2\Delta}\|_{L_2(a,b)} \le c_4 \cdot b_2 \tag{2.66}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Bu eşitsizlikleri ve (1.13), (1.14), (2.26), (2.27) kestirimlerini dikkate alarak

$$\left\|J'_{\alpha 0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 0}(v)\right\|_{L_1(a,b)} \le c_{15}\left(\|\Delta u_1\|_{L_2(a,b)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(a,b)} + \|\Delta\psi_1\|_{L_2(a,b)}\right) +$$
$$+\|\Delta\psi_2\|_{L_2(a,b)} + 2\alpha\|\Delta v_0\|_{L_1(a,b)}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz.

Burada $c_{15} > 0-$ sabiti Δv'den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlikte (1.60)-(1.61),(2.61)-(2.62) kestirimlerini dikkate alarak

$$\left\|J'_{\alpha 0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 0}\right\|_{L_1(a,b)} \le c_{16}\|\Delta v\|_B \tag{2.67}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Burada $c_{16} > 0-$ sabiti Δv'den bağımsız sabittir. (2.67) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak $J'_{\alpha 1}(v), J'_{\alpha 2}(v)$ bileşenleri için

$$\left\|J'_{\alpha 1}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 1}\right\|_{L_1(a,b)} \le c_{17}\|\Delta v\|_B \tag{2.68}$$

$$\left\|J'_{\alpha 2}(v+\Delta v) - J'_{\alpha 2}\right\|_{L_1(a,b)} \le c_{18}\|\Delta v\|_B \tag{2.69}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Burada $c_{17} > 0, c_{18} > 0-$ sabitleri Δv'den bağımsız sabitlerdir. Böylelikle (2.67)-(2.69) eşitsizliklerinden yararlanarak (2.55) eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluruz. (2.55) eşitsizliğinden ise $J_a^1(v)$ gradiyentinin $\widetilde{V}$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu elde ederiz. $J_a(v)$ fonksiyonelinin konveks $\widetilde{V}$ kümesi üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğunu ispatlamış oluruz.

Yani, $J_\alpha(v) \in C^1(\widetilde{V})$ olur. Bu durumda , $[45]$ çalışmasından bilinen teoremin şartlarının $\widetilde{V}$ kümesi ve $J_a(v)$ fonksiyonelinin sağlandığını söyleyebiliriz. Herhangi $v^* \in \widetilde{V}$ için bilinen teoremden yararlanarak

$$\left\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \right\rangle_B \geq 0, \ \forall v \in \widetilde{V}$$

bağıntısını yazabiliriz.

Bu eşitsizlikten (2.51)-(2.54) formüllerinden yararlanırsak ve bu formüllerde $v(x)$ 'in yerine $v^*(x)$ yazarsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu ispatlamış oluruz. Teorem ispatlandı.

3.2.3. Pontryagin'in Maksimum Prensibi Biçiminde Gerek Şart Hakkında

Bu alt bölümde (2.1),(2.3) optimal kontrol probleminde çözüm için Pontryagin'in maksimum prensibi biçiminde gerek şartla ilgili kısa bilgi vereceğiz. Bildiğimiz gibi Pontryagin'in maksimum prensibi gerek toplanmış gerekse de dağılmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemlerinin incelenmesinde çok faydalı bir araç ve yöntemdir $[32-34]$. Şimdi (2.1)-(2.3) optimal kontrol problemleri için maksimum prensibini açıklamaya çalışalım.

<u>Teorem 3.2.3.1.</u> Farzedelim ki teorem 3.2.2.1 'in şartları sağlansın. $\omega \in H$ verilen eleman olsun. $\widetilde{V}$ kümesi aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$\widetilde{V} = \{v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)), v_0 \in L_2(a,b), \tilde{v}_1 \in L_2(a,b), \ w \in L_2(a,b),$$
$$b_0 \leq v_0(x) \leq \widetilde{b}_0, 0 \leq \tilde{v}_1(x) \leq b_1, \ |w(x)| \leq b_2, \forall x \in \overset{0}{(a,b)}, \tilde{v}_1(a) = \tilde{v}_1(b) = 0\} \tag{2.70}$$

Bu takdirde $v^* \in \tilde{V}$ kontrolünün (2.1)-(2.3) optimal kontrol probleminin çözümü olması için hemen hemen $x \in (a,b)$ olduğunda

$$H\left(x,u_1^*(x),u_2^*(x),v^*(x),\psi_1^*(x),\psi_2^*(x)\right)= \\ = \max_{v\in\left[b_0,\tilde{b}_0\right]\times[0,b_1]\times[-b_2,b_2]} H\left(x,u_1^*(x),u_2^*(x),v,\psi_1^*(x),\psi_2^*(x)\right) \tag{2.71}$$

şartının sağlanması gerekir. Burada $u_k^* = u_k^*(x) \equiv u_k^*(x;v^*)$, $\psi_k^* = \psi_k^*(x) \equiv \psi_k^*(x;v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (2.2), (2.3) sınır değer probleminin ve eşlenik problemin $v^* \in \tilde{V}$ 'ya karşılık gelen çözümleridir. $H(x,u_1,u_2,v,\psi_1,\psi_2)-$fonksiyonu ise (2.58) formülünde tanımlanan Hamilton-Pontryagin fonksiyonudur.

Teoremin kısa ispatı için (2.1)- (2.3), (2.7), (2.8) problemlerinde yer alan fonksiyonların Lebesque noktasını σ ile işaretleyelim$[34]$.

Farzedelim ki $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük sayı olsun ve

$$\Pi_\varepsilon \equiv \left\{x : \sigma - \frac{\varepsilon}{2} < x < \sigma + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset (a,b)$$

şartı sağlansın. $v^*(x) \equiv \left(v_0^*(x),\tilde{v}_1^*(x),w^*(x)\right)$ kontrolünün impuls varyasyonlarını aşağıdaki biçimde inşa edelim:

$$v_0^\varepsilon = \begin{cases} \tilde{w}_0, & x \in \Pi_\varepsilon \\ v_0^*(x), & x \notin \Pi_\varepsilon \end{cases}, \tag{2.72}$$

$$\tilde{v}_1^\varepsilon = \begin{cases} \tilde{w}_1, & x \in \Pi_\varepsilon \\ \tilde{v}_1^*(x), & x \notin \Pi_\varepsilon \end{cases}, \tag{2.73}$$

$$w^\varepsilon = \begin{cases} \tilde{w}, & x \in \Pi_\varepsilon \\ w^*(x), & x \notin \Pi_\varepsilon \end{cases} \tag{2.74}$$

$\tilde{w}_m, m=0,1,$ $\tilde{w}-$herhangi verilen sayılardır ve $b_0 \le \tilde{v}_0 \le \tilde{b}_0,$ $0 \le \tilde{v}_1 \le b_1,$ $|\tilde{w}| \le b_2$ şartlarını sağlar. Buradan (2.72)-(2.74) formülleriyle tanımlanan impuls varyasyonları yani; $v^{\varepsilon} \equiv \left(v_0^{\varepsilon}, \tilde{v}_1^{\varepsilon}, w^{\varepsilon}\right)$ vektörü $\tilde{V}$ kümesinin elemanıdır. Bu takdirde Lebesque noktasının tamamına dayanarak impuls varyasyonları için aşağıdaki bağıntıların geçerli olduğunu kolaylıkla ispatlayabiliriz. $\varepsilon \to 0$ için

$$v_0^{\varepsilon} \xrightarrow{kuvvetli} v_0^*, \quad \tilde{v}_1^{\varepsilon} \xrightarrow{kuvvetli} \tilde{v}_1^*, \quad L_p(a,b) \text{ de} \tag{2.75}$$

$$w^{\varepsilon} \xrightarrow{kuvvetli} w^* \;, \; L_q(a,b) \text{ de} \tag{2.76}$$

Burada $1 \le p < +\infty$, $1 \le q \le 2$ 'dır.

Farzedelim ki $u_{k\varepsilon}(x) \equiv u_k(x; v^{\varepsilon}),\; k=1,2$ fonksiyonları (2.2),(2.3) sınır değer probleminin $v^{\varepsilon} \in \tilde{V}$ 'ya karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde $\Delta u_{k\varepsilon}(x) = u_{k\varepsilon}(x) - u_k^*(x;) \equiv u_k\left(x; v^{\varepsilon}\right) - u_k\left(x, v^*\right),\; k=1,2$ fonksiyonları (2.34),(2.35) sınır değer probleminin çözümü olacaktır. Burada $u_k^*(x) = u_k(x; v^*),\; k=1,2$ fonksiyonları (2.2),(2.3) sınır değer probleminin $v^{\varepsilon} \in \tilde{V}$ 'ye karşılık gelen çözümüdür. Bu takdirde üçüncü bölümdeki kestirimlerden yararlanarak:

$$\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_{19} \left\| \tilde{f}_{1\varepsilon} \right\|^2_{L_2(a,b)} \tag{2.77}$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_{20} \left\| \tilde{f}_{2\varepsilon} \right\|^2_{L_2(a,b)} \tag{2.78}$$

kestirimlerinin geçerli olduğunu elde edebiliriz.

Burada $c_{19} > 0, c_{20} > 0-$sabitleri ε -dan bağımsız sabitlerdir. $H = L_2(a,b)^3$ 'dır. Bu eşitsizliklerden yararlanarak sağ tarafta Lebesque tanımını kullanarak:

$$\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)} \le c_{21}\left(\varepsilon\left|\tilde{w}_0 - \tilde{v}_0^*(\sigma)\right|^2 + \varepsilon\left|\tilde{w}_1 - \tilde{v}_1^*(\sigma)\right|^2 + \varepsilon\left|\tilde{w} - \tilde{w}^*(\sigma)\right|^2 + o(\varepsilon)\right) \tag{2.79}$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^1(a,b)}^2 \le c_{22}(\varepsilon\left|\tilde{w}_0-\tilde{v}_0^*\left(\sigma\right)\right|^2+\varepsilon\left|\tilde{w}_1-\tilde{v}_1^*\left(\sigma\right)\right|^2+\varepsilon\left|\tilde{w}-\tilde{w}^*\left(\sigma\right)\right|^2+o(\varepsilon)) \qquad (2.80)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

burada $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$ 'dır.

Sonuncu eşitsizlerden yararlanırsak

$$\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)}^2 \le O_\sigma\left(\varepsilon\right) \qquad (2.81)$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^1(a,b)}^2 \le O_\sigma\left(\varepsilon\right) \qquad (2.82)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Şimdi aşağıdaki quazieşlenik sisteme bakalım:

$$\rho\frac{d^2\Phi_{k\varepsilon}}{dx^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\tilde{v}_1^\varepsilon(x)\Phi_{k\varepsilon}\right)-v_0^\varepsilon\Phi_{k\varepsilon}=2(-1)^k\left[\left(u_1^*(x)-u_2^*(x)\right)+\frac{1}{2}\left(\Delta u_{1\varepsilon}-\Delta u_{2\varepsilon}\right)\right] \qquad (2.83)$$

$$\Phi_{1\varepsilon}\left(a\right)=\Phi_{1\varepsilon}\left(b\right)=0,\quad \frac{d\Phi_{2\varepsilon}(a)}{dx}=\frac{d\Phi_{2\varepsilon}(b)}{dx}=0 \qquad (2.84)$$

Burada $u_k^*(x)\equiv u_k(x;v^*),\ k=1,2-$ fonksiyonları (2.2),(2.3) sisteminin $v^*\in\tilde{V}$ 'ya karşılık gelen çözümüdür.

$$\Delta u_{k\varepsilon}\left(x\right)=u_{k\varepsilon}\left(x\right)-u_k^*(x)\equiv u_k(x;v^\varepsilon)-u_k(x;v^*),\ k=1,2$$

(2.83), (2.84) quazieşlenik sistemin ve (2.7), (2.8) eşlenik sisteminin çözümlerinden yararlanarak ve Lebesque noktasının tanımını kullanarak aşağıdaki bağıntıları ispatlayabiliriz:

$$\left\|\Phi_{1\varepsilon}-\psi_1^*\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(a,b)}\leq O_\sigma(\varepsilon) \tag{2.85}$$

$$\left\|\Phi_{2\varepsilon}-\psi_2^*\right\|^2_{w_2^1(a,b)}\leq O_\sigma(\varepsilon) \tag{2.86}$$

Şimdi $J_a(v)$ fonksiyonelinin $v^*\in\tilde{V}$ kontrolü üzerinde ımpuls varyasyonlarından yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\Delta J_\alpha\left(v^*,\varepsilon\right)=J_\alpha\left(v^\varepsilon\right)-J_\alpha\left(v^*\right)=2\int_a^b\left[\left(u_1^*(x)-u_2^*(x)\right)+\frac{1}{2}\left(\Delta u_{1\varepsilon}(x)-\Delta u_{2\varepsilon}(x)\right)\right]\times\\
&\times\left(\Delta u_{1\varepsilon}(x)-\Delta u_{2\varepsilon}(x)\right)dx+2\alpha\int_a^b\left(v_0^*(x)-\omega_0(x)\right)\Delta v_{0\varepsilon}(x)dx+\\
&+2\alpha\int_a^b\left(\tilde{v}_1^*(x)-\omega_1(x)\right)\overline{v_{1\varepsilon}}(x)dx+2\alpha\int_a^b\left(w^*(x)-\omega_2(x)\right)\Delta w_\varepsilon(x)dx+\alpha\left\|\Delta v_\varepsilon\right\|_H^2
\end{aligned} \tag{2.87}$$

biçiminde yazalım.

Bu formülün sağ tarafındaki birinci terimi dönüştürerek fonksiyonelin artışını

$$\begin{aligned}
&\Delta J_\alpha\left(v^*,\varepsilon\right)=J_\alpha\left(v^\varepsilon\right)-J_\alpha\left(v^*\right)=\int_a^b\frac{1}{x}\left(\frac{du_1^*(x)}{dx}\Phi_{1\varepsilon}(x)+\frac{du_2^*(x)}{dx}\Phi_{2\varepsilon}(x)\right)\Delta\tilde{v}_{1\varepsilon}(x)dx-\\
&-\int_a^b\left(u_1^*(x)\Phi_{1\varepsilon}(x)+u_2^*(x)\Phi_{2\varepsilon}(x)\right)\Delta v_{0\varepsilon}(x)-\int_a^b\left(\Phi_{1\varepsilon}(x)+\Phi_{2\varepsilon}(x)\right)\Delta w_\varepsilon(x)dx+\\
&+2\alpha\int_a^b\left(v_0^*(x)-\omega_0(x)\right)\Delta v_{0\varepsilon}(x)dx+2\alpha\int_a^b\left(\tilde{v}_1^*(x)-\omega_1(x)\right)\Delta\tilde{v}_{1\varepsilon}(x)dx+\\
&+2\alpha\int_a^b\left(w^*(x)-\omega_2(x)\right)\Delta w_\varepsilon(x)dx+\alpha\left\|\Delta v_\varepsilon\right\|_H^2
\end{aligned} \tag{2.88}$$

biçiminde yazalım.

Şimdi bu formülden yararlanarak ve (2.1)-(2.3) ve (2.7), (2.8) problemlerinde yer alan fonksiyonlar için Lebesque noktasının tanımından ve (2.81), (2.82) ve (2.85), (2.86) bağıntılarından yararlanarak

$$\lim_{\varepsilon_m \to 0} \frac{\Delta J_\alpha\left(v^*, \varepsilon_m\right)}{\varepsilon_m} = \delta J_\alpha\left(v^*\right), \ \overset{0}{\forall} \sigma \in (a,b) \tag{2.89}$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlayabiliriz.

Burada $\varepsilon_m > 0, m = 1,2,\ldots$ dizisi öyle seçilmiş dizi ki $m \to \infty$ için $\varepsilon_m \to 0$ olur. $\delta J_\alpha\left(v^*\right)$ ise aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\delta J_\alpha\left(v^*\right) = {} & \frac{1}{\sigma}\left(\frac{du_1^*(\sigma)}{dx}\psi_1^*(\sigma) + \frac{du_2^*(\sigma)}{dx}\psi_2^*(\sigma)\right)\left(\tilde{w}_1 - \tilde{v}_1^*(\sigma)\right) - \\
& -\left(u_1^*(\sigma)\psi_1^*(\sigma) + u_2^*(\sigma)\psi_2^*(\sigma)\right)\left(\tilde{w}_0 - v_0^*(\sigma)\right) - \left(\psi_1^*(\sigma) + \psi_2^*(\sigma)\right)\left(\tilde{w} - w^*(\sigma)\right) + \\
& +2\alpha\left(\tilde{v}_1^*(\sigma) - \omega_1(\alpha)\right)\left(\tilde{w}_1 - \tilde{v}_1^*(\sigma)\right) + 2\alpha\left(v_0^*(\sigma) - \omega_0(\sigma)\right)\left(\tilde{w}_0 - v_0^*(\sigma)\right) + \\
& +2\alpha\left(w^*(\sigma) - \omega_2(\sigma)\right)\left(\tilde{w} - w^*(\sigma)\right) + \alpha\left(\tilde{w}_1 - \tilde{v}_1^*(\sigma)\right)^2 + \alpha\left(\tilde{w}_0 - v_0^*(\sigma)\right)^2 + \\
& +\left(\tilde{w} - w^*(\sigma)\right)^2
\end{aligned} \tag{2.90}$$

(2.89) limit bağıntısından kolaylıkla:

$$\delta J_\alpha\left(v^*\right) \geq 0 , \ \overset{0}{\forall} \sigma \in (a,b) \tag{2.91}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\delta J_\alpha\left(v^*\right)$, için olan (2.90) formülünü ve (2.28) formülüyle tanımlanan Hamilton-Pontryagin fonksiyonunu kullanarak:

$$\begin{aligned}
0 \leq \delta J_\alpha\left(v^*\right) = {} & H(\sigma, u_1^*(\sigma), u_2^*(\sigma), v^*(\sigma), \psi_1^*(\sigma), \psi_2^*(\sigma)) - \\
& -H(\sigma, u_1^*(\sigma), u_2^*(\sigma), v, \psi_1^*(\sigma), \psi_2^*(\sigma)), \quad \overset{0}{\forall} \sigma \in (a,b)
\end{aligned}$$

bağıntısını elde ederiz.

Buradan da hemen hemen $\sigma \in (a,b)$ ve herhangi $v \in \left[b_0, \tilde{b}_0\right] \times \left[0, b_1\right] \times \left[-b_2, b_2\right]$ elemanı için

$$H(\sigma, u_1^*(\sigma), u_2^*(\sigma), v, \psi_1^*(\sigma), \psi_2^*(\sigma)) \leq$$
$$-H(\sigma, u_1^*(\sigma), u_2^*(\sigma), v^*(\sigma), \psi_1^*(\sigma), \psi_2^*(\sigma))$$

eşitsizliği kullanılır.

Bu eşitsizlikten teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem ispatlandı.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında günümüzün evrensel problemleri içerisinde yer alan, iktisadi-ekoloji problemler ele alınmıştır. Ekolojik problemlerin toplumla doğa arasındaki çelişkilerin artmasıyla doğru orantılı olduğunun da kanaatine varılmıştır. Bu sistemlerin analizi için matematiksel modelleme ve optimal kontrol yöntemlerinin uygulanmasıyla ilgili analizler yapılmıştır. Lineer olmayan iktisadi-ekoloji sistemlerin analizinde optimal kontrolün matematiksel yöntemleri incelenmiş ve özellikle varyasyon eşitsizliği ve Pontryagin'in maksimum prensibin gerek şartlar elde edilmiştir. Ve ayrı olarak sunulan tez çalışmasında Lions fonksiyonelli ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerle gösterilen iktisadi-ekoloji sistemlerin optimal kontrol problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili sorular cevaplandırılmıştır. Bunların yanı sıra söz konusu problemin nümerik çözümünde onemli rol oynayan amaç fonksiyonelinin gradiyenti için formül de elde edilmiştir. Sonuç olarak da bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar bir önceki çalışmalardan farklıdır ve örtüşmemektedir.

5. KAYNAKLAR

[1] Ahmed, N.U., Teo, K.L. (1988). Optimal control of distributed parameter systems. Nort-Holland, New-York.

[2] Aida-Zade, K.R., (2005). On the solution of optimal control problems with intermediate conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 45(6), 995-1005.

[3] Akbaba, G.D., (2011). Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrodinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[4] Ahmedov, K.T., (1972). Akhiev S.S. Optimal kontrol teorisinin bazı problemleri için gerekli optimallik şartları // Dokl. AN Az.SSR , 28(5), 12-16. (Rusça).

[5] Aksoy, N.Y., Yagub, G., Aksoy E., (2016). An identification problem for nonlinear Schrödinger equation, AIP Conferance Procedings 1726,020079; doi:10.1063/1.4945905.

[6] Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M., Fomin, S.V., (1979). Optimal kontrol Teorisi. Nauka, Moskova, 430. (Rusça).

[7] Aydazade, K.R., Ashrafova, E.R., (2008). Dağılmış sistemlerde toplanmış kaynaklarla impulsiv kontrol problemlerinin incelenmesi // Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberler. Fizik-Teknik ve Matematik Bilimler serisi. Enformatik ve Kontrol Problemleri, 28(6), 13-18. (Rusça).

[8] Başaran Eruçan, V., (2018). Kompleks potansiyelli ve gradiyent terimli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[9] Boltyansky, V.G., (1964). Optimal kontrolün matematiksel yöntemleri. Nauka, Moskova,1964 (Rusça).

[10] Butkovsky, A.G., (1965). Dağılmış parametreli optimal kontrol teorisi. Nauka, Moskova,1965 (Rusça).

[11] Casas, E., Meteos, M., Raymond, J.-P., (2001). Pontryagins principle for the control parabolic equations with gradient state constraints // Nonlinear Analysis, 46,933-956.

[12] Fattorini, HO., (2001). The maximum principle for control system described by linear parabolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 259, 630-651.

[13] Gabasov, R., Kirillova, F.M.,(1971). Optimal süreçlerin nitelik teorisi. Nauka, Moskova, 507.(Rusça).

[14] Gamkrelidze, R.V., (1977). Optimal kontrolün temelleri. Tiflis Üniversitesi Yayınevi, (Rusça).

[15] Goebel , M., (1979). On existence of optimal control//Math.Nacr ,53,67- 73 .

[16] İskenderov, A.D., (1984). Matematiksel fiziğin çok boyutlu ters problemlerinin varyasyon tanımları üzerine // DAN SSSR, 274(3), 531-533. (Rusça).

[17] İskenderov, A.D., (1995). Makhmudov N.M. Lions kriterli kuantum-mekanik sistemlerin optimal kontrolü // - İzv. AN Azerb. Fizik-Teknik Matematik Bilimler serisi, XVI(5-6), 30-35. (Rusça).

[18] İskenderov, A.D., Yagub,G., (1988). Kuantum-mekanik potansiyelin belirlenmesinde ters problemin çözümü için varyasyon yöntemi // Dokl. SSCB Bilimler Akademisi, 303(85), 1044-1048. (Rusça).

[19] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., (1989). Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü//Otomatik ve Telemekanik, (12), 27-38 (Rusça).

[20] Iyosida., (1967). Foksiyonel Analiz. Nauka, Moskova, 624. (Rusça).

[21] Kostreva, M., M, A.L., (2000). Optimal control of a system governed by elliptic partial differential equation// Journal of Computational and Applied Mathematics, (114), 173-187.

[22] Ladızenskaya, O.A., (1973). Matematiksel fiziğin sınır değer problemleri. Nauka, Moskova, 1973. (Rusça).

[23] Lions, J.L., (1972). Kısmi türevli denklemlerle ifade edilen sistemlerin optimal kontrolü Nauka, Moskova., 412. (Rusça).

[24] Litvinov, V.G., (1987). Mekanik uygulamalı eliptik sınır değer problemlerinde optimizasyon. Nauka, Moskova, 1987. (Rusça).

[25] Lukyanov, F.T., Serovaysky, S.Ya., (1980). Optimizasyon problemlerinde kuazi eşlenik sistemler // Vestn. Kaz. SSR, (10), 70-72. (Rusça).

[26] Lurye, K.A., (1978). Matematiksel fizik problemlerinde optimal kontrol. Nauka, Moskova, 478. (Rusça).

[27] Mansimov, K.B., Akhmedova, Z.B., (2006). Pontryagin'in maksimum prensibinin bir analoğu, Dağılmış parametreli sistemlerin bir kontrol Pontryagin'in maksimum presibinin analogu. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Ser. Fizik - Teknik. ve Mat. Serisi, 2,42-47. (Rusça).

[28] Mardanov, M. D., (1987). Gecikmeli sistemlerde optimal süreçlerin matematik teorisinin bazı meseleleri. Bakü Azerbaycan Universitesi Yayınevi. 120s. (Rusça).

[29] Marchuk, G.I., (1982). Çevre probleminde matematiksel modelleme. Nauka, Moskova, 320. (Rusça).

[30] Neittaanmaki, P., Tiba, D., (1994). Optimal control of nonlinear parabolic systems. Marcel Dekker, New-York.

[31] Özkurt, T., (2012). İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[32] Plotnikov, V.I., (1976). Optimal kontrol teorisinde birinci varyasyon ve eşlenik problem hakkında // Fonksiyonel analiz ve uygulamaları, 10(4), 95-96. (Rusça).

[33] Plotnikov, V.I., (1972). Sikorskaya E.R. Lineer olmayan hiperbolik denklem sistemleri ile açıklanan objenin optimizasyonu // İzv. Vuzov SSSR, Radyo Fiziği, 15(3), 345-353. (Rusça).

[34] Pontryagin, L.S.,(1969). Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.G., Mishchenko E.F. Optimal süreçlerin matematiksel teorisi., 1969, 384 s. (Rusça).

[35] Raytum, U.E., (1983). Lineer eliptik denklemlerin baş katsayılarla optimal kontrol problemlerinde bir çözümün varlığı meseleleri, 19(6), 1040-1047. (Rusça).

[36] Ryu, S.-U., (2004). Optimal control problems governed by some semi linear parabolic equations // Nonlinear Analysis, (56),241-252.

[37] Salmanov, V.I., (2005). Özel nitelik kriterli toplanmış sistemler için bir optimal kontrol problemi hakkında // Lenkaran Devlet Üniversitesini Haberleri. Doğa ve Ekonomi Bilimleri Serisi, 83-90. (Rusça).

[38] Serovaysky, S.Y., (1982). Parabolik tip denklem için katsayılarla optimal kontrol problemi // İzv. Vuzov, Ser. Mat,12, 44-50. (Rusça).

[39] Sirazetdinov, T.K., (1997). Dağılmış parametreli sistemlerin optimizasyonu. Nauka, Moskova, 479. (Rusça).

[40] Sokolovski, J., (1978). Remarks on existence of solutions for parametric optimization problems for partial differential equations of parabolic type // Control and Cybernetics, 7(2), 47-61.

[41] Tagiyev, R.K., (2009). Kuasiliner parabolik denklemin katsayıları ile optimal kontrol // Automation and Telemechan., 11, 55-69. (Rusça).

[42] Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y., (1979). İyi konulmamış problemlerin çözüm yöntemleri. Nauka, Moskova, 288. (Rusça).

[43] Varga, J., (1977). Diferansiyel ve fonksiyonel denklemlerle optimal kontrol Nauka, Moskova. (Rusça).

[44] Vasiliev, F.P., (1980). Ekstemal problemlerin nümerik çözüm yöntemleri. Nauka, Moskova, 518. (Rusça).

[45] Vasiliev, F.P., (1981). Ekstremal problemlerin çözüm yöntemleri. Nauka, Moskova, 400.(Rusça).

[46] Yagubov, G., Haşimov, S.A., (2008). Lineer olmayan Schrödinger denkleminde zamana bağımlı sınırlı olmayan potansiyelle optimal kontrol problemi hakkında, Azerbaycan MBA nin Haberleri. Fiz. -Tekn.-Matem.-İnformat. serisi, 28(6), 19-24. (Rusça).

[47] Yagubov, G.., (1994). Musayeva M.A. Lineer olmayan, durağan olmayan bir Schrödinger kontrolü için çok boyutlu bir ters problemin çözümü için varyasyon metodu // Izv. Azerb. Ser. Fizik teknolojisi mat. Sciences, XV(5-6), 58-61.(Rusça).

[48] Yagubov, G., Musayeva, M.A.,(1997). Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında, Diferansiyel Denklemler, 33(12),1691-1698. (Rusça).

[49] Yagubov, G., İbrahimov, N., Musayeva, M, Zengin., (2017). M. Lineer olmayan kısmında kompleks katsayı olan lineer ve durgun olmayan Schrödinger denkleminde kuantum potansiyelinin bulunması hakkında ters

problemin çözümünün varyasyon yöntemi // Ankara Devlet Universitesinin Haberleri, Doğa bilimleri,2, 7-30.

[50] Yegorov, A.I., (1978). Isı ve difüzyon süreçlerin optimal kontrolü. Nauka, Moskova, 463. (Rusça).

[51] Yegorov, A.I., (2004). Kontrol teorisinin temelleri. Nauka, Moskova, 504. (Rusça).

[52] Yegorov, Y.V. (1964). Banach uzaylarında optimallik için gerek şartlar // -Matem. Toplu, 64 (106), 71-101. (Rusça).

[53] Wang, G.S., Wang, L.J., (2003). Maximum principle for optimal control non-well-posed elliptic differential equations // Nonlinear Analysis, 52,41-67.

[54] Zengin, M., (2017). Yüklü parçacıkların lineer ve homojen olmayan ortamda hareketinin optimal kontrolü. Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

[55] Zolezzi, T., (1972). Necessary conditions for optimal control of elliptic or parabolic problems // SIAM J. Control, 4, 594-607.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Merve GÜN
Doğum Yeri ve Tarihi :Diyarbakır/25.12.1992
Yabancı Dili :İngilizce
İletişim (e-posta) :mervegun1665@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise :Bursa Orhaneli Lisesi
Lisans :Kafkas Üniversitesi /2016
Yüksek Lisans :Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı/Uygulamalı Matematik