T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CHEBISHEV POLİNOMLARININ ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİNDE UYGULAMASI

Erdi AKBULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

KARS-2019

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CHEBISHEV POLİNOMLARININ ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİNDE UYGULAMASI

Erdi AKBULUT
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

TEMMUZ - 2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Erdi AKBULUT'un Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Chebıshev Polinomlarının Analitik Fonksiyonlar Teorisinde Uygulaması" adlı bu çalışma yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile ile kabul edilmiştir.

04/07/2019

Adı ve Soyadı **İmza**

Başkan	:	Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	:	Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	:	Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ....../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Erdi AKBULUT

04.07.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

Chebishev Polinomlarının Analitik Fonksiyonlar Teorisinde Uygulaması
Erdi AKBULUT

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Bu tez çalışmasında ikinci çeşit Chebishev polinomlarını kullanarak analitik ve ünivalent fonksiyonların iki farklı alt sınıf tanımlandı. Tezde bu sınıflar için katsayı ve Fekete-Szegö problemi incelendi. Tanımlanan sınıflara ait olan fonksiyonların katsayıları ve Fekete-Szegö fonksiyoneli için değerlendirmeler verildi.

Anahtar Kelimeler: Chebishev polinomları, katsayı problemi, analitik fonksiyonlar, normalize edilmiş fonksiyon.

2019, 56 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Application of Chebyshev Polynomials in the Theory of Analytic Functions

Erdi AKBULUT

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

In this thesis study, using second kind Chebyshev polynomials, were introduced two new subclasses of analytic and univalent functions on the open unit disk in the complex plane. In the study, the coefficient and Fekete-Szegö problems for these classes are investigated. The coefficient bound estimates and upper bound estimate for the Fekete-Szegö functional for the functions belonging to defined classes are also given.

Key Words: Chebyshev polynomials, coefficient problem, analytic functions, normalization function.

2019, 56 pages

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi, teşvik ve deneyimleri ile yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nizami MUSTAFA'ya ve bu eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri ile göstermiş oldukları sabırdan dolayı aileme şükranlarımı bir borç bilirim.

Erdi AKBULUT

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
U	$U=\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ merkezil açık birim disk
$f(U)$	U kümesinin f fonksiyonu altında görüntüsü
A	Merkezil açık birim diskte analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, a_n\in\mathbb{C}, n=2,3,...$ şekilli fonksiyonların sınıfı
S	A'nın ünivalent fonksiyonlarından oluşan alt sınıfı
C	U açık birim diskte konveks fonksiyonların sınıfı
S^*	U açık birim diskte yıldızıl (Starlike) fonksiyonların sınıfı
$U(z_0,\varepsilon)$	z_0 noktasının ε açık komşuluğu
$\overline{U(z_0,\varepsilon)}$	z_0 noktasının ε kapalı komşuluğu
$\overset{\circ}{K}$	K kümesinin içi
∂K	K kümesinin sınırı

$K'(K')$	K kümesinin tümleyeni
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinesi
$T_n(x)$	$n.$ mertebeden 1. çeşit Chebishev polinomu
$U_n(x)$	$n.$ mertebeden 2. çeşit Chebishev polinomu
$G(t,z)$	$G(t,z)=\dfrac{1}{1-2tz+z^2}$ 2. çeşit Chebishev polinomunun üreteç fonksiyonu
P	U açık birim diskte analitik ve $\operatorname{Re} p(z)>0$ ve $p(0)=1$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+\cdots$ şekilli fonksiyonların ailesi
$\aleph(G;\beta,t)$	$\aleph(G;\beta,t)=\left\{f\in S:(1-\beta)\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\left[1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\prec G(t,z)\right\},\ z\in U$
$S^*(G;t)$	$S^*(G;t)=\left\{f\in S:\ \dfrac{zf'(z)}{f(z)}\prec G(t,z),\ z\in U\right\}$
$C(G;t)$	$C(G;t)=\left\{f\in S:1+\dfrac{zf''(z)}{f(z)}\prec G(t,z),\ z\in U\right\}$
$S^*C(G;\beta,t)$	$S^*C(G;\beta,t)=\left\{f\in S:\ \dfrac{zf'(z)+\beta z^2f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)}\prec G(t,z),\ z\in U\right\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonların alt sınıflarının katsayı problemi, Fekete-Szegö problemi ve Hankel determinantlarının değerlendirilmesi gibi problemler analitik fonksiyonlar teorisinin önemli problemlerindendir. Literatürde, bu konuda birçok çalışma bulunmaktadır [1 -9]. Araştırmacılar bu problemlerin çözümü için çeşitli yöntemler geliştirmişlerdir.

Yakın zamanlarda bu problemlerin çözümüne Faber ve Chebishev polinomlarının uygulaması ilgi çekmiştir.

Bilindiği üzere, analitik fonksiyonlar teorisinde yapılan çalışmalar genelde birim diskte gerçekleşir. Bunun başlıca sebebi Riemann dönüşüm teoremidir. Riemann dönüşüm teoremi bize şu imkânı sağlar: Karmaşık düzlemin basit bağlantılı bir bölgesi birim diske konform inikâs ettiriliyor. Bu bize karmaşık düzlemde bir bölgede çalışmak yerine birim diskte çalışma imkânı sağlar ki bu da çalışmaları kolaylaştırır. Bu sebeple analitik fonksiyonlar teorisinde çalışmalar karmaşık düzlemin $U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ açık birim diskinde ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ *normelleştirme* koşulunu sağlayan f analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfın alt sınıfları üzerinde yoğunlaşmıştır.

Birim diskin analitik fonksiyonlar altında görüntüleri farklı özelliklere sahip kümeler olabilir. Bu farklılıklar sebebiyle analitik fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılıyor. Bu sınıflardan en önemlisi ve çok çalışılmışı ünivalent, yıldızıl, konveks ve konvekse - yakın fonksiyon sınıflarıdır.

Bu çalışmada Chebishev polinomlarını kullanarak analitik fonksiyonların iki yeni sınıfını tanımlanmıştır. Bu sınıfları tanımlamak için katsayıları ikinci çeşit Chebishev polinomlarından oluşan bir (üreteç) fonksiyonu kullanılmıştır. Tanımlanan bu sınıflar analitik fonksiyonların belli bir ifadesinin bu fonksiyona subordinesinden oluşmaktadır.

Bu tez çalışmamızda ele alınan konular aşağıda sıralanmıştır.

1. İkinci çeşit Chebishev polinomlarını kullanarak analitik ve ünivalent fonksiyonların iki yeni alt sınıfını tanımlandı.

2. Tanımlanan sınıflar için katsayı problemini ele alındı ve bu sınıflara ait olan bir fonksiyonun ilk birkaç katsayısı için tahminler verildi.

3. Tezde tanımlanan sınıflar için Fekete-Szegö problemi çözüldü. Her iki sınıf için Fekete-Szegö fonksiyonelinin değerlendirilmesi verildi. Özel durumlar için tartışmalar yapıldı.

Tez çalışmamız birinci bölümü temel bilgiler, ikinci bölümü materyal ve yöntemler, üçüncü bölümü araştırma bulguları ve dördüncü bölümü tartışma ve sonuç olmak üzere dört bölümden ibarettir.

1.2. TEMEL BİLGİLER

1.2.1. Temel Kavram ve Tanımlar

Bu alt bölümde çalışma boyu kullanılacak olan temel bilgilere yer verildi.

Tanım 1.2.1.1 : Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$U(z_0,\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\varepsilon\}$$

kümesine $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının $\varepsilon-$*açık komşuluğu*

$$\overline{U(z_0,\varepsilon)}=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le\varepsilon\}$$

Kümesine de $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının $\varepsilon-$*kapalı komşuluğu* denir. Bundan böyle komşuluk dendiğinde $\varepsilon-$*açık komşuluğu* anlaşılacaktır.

Tanım 1.2.1.2 : Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin bir noktası, belli bir komşuluğu ile birlikte bu kümeye ait ise, bu noktaya kümenin bir *iç nokta*sı denir. Bir kümenin iç noktalarından oluşan kümeye, bu *kümenin içi* denir. Bir $K\subset\mathbb{C}$ kümesinin içi $\overset{\circ}{K}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.3 : Sadece iç noktalardan oluşan; başka bir deyişle iç nokta dışında nokta bulundurmayan kümeye $\mathbb{C}$'de *açık küme* denir. Dolayısıyla, $K=\overset{\circ}{K}$ koşulunu sağlayan bir $K\subset\mathbb{C}$ kümesine $\mathbb{C}$'de *açık küme* denir.

Tanım 1.2.1.4 : Karmaşık düzlemde bir küme ve bir nokta verilsin. Eğer, bu noktanın her komşuluğunda hem bu kümeden ve hem de bu kümeden olmayan noktalar varsa bu noktaya bu kümenin bir *sınır noktası* ve sınır noktalarının oluşturduğu kümeye de bu *kümenin sınırı* denir. Bir $K\subset\mathbb{C}$ kümesinin sınırı ∂K olarak da belirtilir.

Tanım 1.2.1.5: Karmaşık düzlemde verilen bir kümeye ve bu kümenin sınırına ait olmayan noktaların oluşturduğu kümeye bu kümenin *dışı* veya *tümleyeni* denir. Bir $K \subset \mathbb{C}$ kümesinin dışı (tümleyeni) K' (veya K') olarak da belirtilir.

Tanım 1.2.1.6: Tümleyeni açık olan kümeye *kapalı küme* denir.

Not: Tümleyeni kapalı olan bir küme açık kümedir.

Tanım 1.2.1.7: Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası kümeye ait ise bu kümeye (doğrusal) *bağlantılı küme* denir.

Tanım 1.2.1.8: Karmaşık düzlemin açık ve bağlantılı kümesine bir *bölge* denir.

1.2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Bu alt bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan bilgiler verildi. Bu bilgiler [10 - 12] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 1.2.2.1: $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olan bir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyon z_0 noktasında *türevlenebilir* veya *diferansiyallenebilir fonksiyondur* denir. Bir noktanın belli bir komşuluğunda türevlenebilen fonksiyona bu noktada *analitik fonksiyon* denir.

Tanım 1.2.2.2: Karmaşık düzlemin her noktasında analitik olan fonksiyona *tam fonksiyon* denir.

Ördeğin e^z, $\sin z$, $\cos z$, $az+b,\ a,\ b\in\mathbb{C}$ fonksiyonları birer tam fonksiyon örnekleridirler.

Tanım 1.2.2.3: $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulunu sağlayan $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskteki analitik f fonksiyonuna *normalize edilmiş fonksiyon* denir.

U açık birim diskte analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,\ a_n\in\mathbb{C},\ n=2,3,\dots . \qquad (\ 1.2.2.1\ )$$

Şekilli açılıma sahip olan f fonksiyonların sınıfını A ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.2.4: Karmaşık düzlemin bir D bölgesi üzerinde tanımlanmış f analitik fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine birebir oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir. Bir başka deyişle $z_1,z_2\in D$ olmak üzere $f(z_1)=f(z_2)$ olduğunda $z_1=z_2$ ya da $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir.

U bölgesinde analitik ve ünivalent olan (1.2.2.1) şekilli fonksiyonların sınıfını S ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.2.5: Karmaşık düzlemde verilen bir bölgenin sabit bir noktasını keyfi noktasıyla birleştiren doğru parçası bu bölgeye ait ise bu bölgeye bu sabit *noktaya göre yıldızıl (starlike) bölge* denir. Orijine göre yıldızıl bölgeye de (kısaca) *yıldızıl bölge* denir.

Tanım 1.2.2.6: U birim açık diskin bir $f \in A$ fonksiyonu altında görüntüsü $f(U)$ yıldızıl bölge ise f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. U açık birim diskte normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir.

Yıldızıl fonksiyonların bir analitik karakterizasyonu aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 1.2.2.1:

$$f \in S^* \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 .$$

Tanım 1.2.2.7: $f \in S$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Eğer, U kümesinde

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

oluyorsa f fonksiyonuna α *mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir ve α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2.8: Karmaşık düzlemde verilen bir kümenin keyfi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen bu kümeye ait ise bu kümeye *konveks küme* denir.

Tanım 1.2.2.9: U birim açık diskin bir $f \in A$ fonksiyonu altında görüntüsü $f(U)$ konveks bölge ise f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. U açık birim diskte normalize edilmiş konveks fonksiyonların kümesi C $(\text{ya da } K)$ ile gösterilir.

U açık birim diskte konveks fonksiyonların bir analitik karakterizasyonu aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 1.2.2.2: $f \in S$

$$f \in C \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0 .$$

Tanım 1.2.2.10: $f \in S$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Eğer, U kümesinde

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

Oluyorsa f'e α *mertebeden konveks* fonksiyon denir ve α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağlantı geçerlidir.

Teorem 1.2.2.3 (Alexander teoremi) [10]:

$$f \in C(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in S^*(\alpha) .$$

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Materyaller

Şimdi tez çalışmamızın ana amacı olan ve araştırma bulguları bölümünde kullanacağımız yeni tanımladığımız sınıfları ve buna paralel olarak bilinen bazı kavram ve tanımları verelim.

Bilindiği üzere, (1.2.2.1) şekilli analitik fonksiyonların bazı ilk katsayılarının modüllerinin değerlendirilmesine geometrik fonksiyonlar teorisinde katsayı problemi denir. Ayrıca, analitik fonksiyonlar teorisinde (1.2.2.1) açılımındaki katsayılar yardımıyla tanımlanan ve Fekete-Szegö fonksiyoneli olarak bilinen $E(a_2,a_3)=a_3-a_2^2$ ifadesinin modülünün üstten değerlendirilmesi problemine Fekete-Szegö problemi denmektedir. Genelde μ bir karmaşık ya da reel parametre olmak üzere, araştırmacılar genelleştirilmiş Fekete-Szegö fonksiyoneli olarak adlandırılan $E(a_2,a_3)=a_3-\mu a_2^2$ fonksiyonelinin modülünün değerlendirilmesi üzerinde yoğunlaşmışlar [13 -17].

Biz tez çalışmamızda ilk defa bizim tarafımızdan tanımlanan iki analitik fonksiyon sınıfı için katsayı ve Fekete-Szegö problemlerini ele aldık.

Şimdi tez çalışmamızda kullanacağımız analitik fonksiyonların sınıflarını tanımlayabilmek için bazı temel bilgileri verelim.

Bilindiği üzere, analitik bir f fonksiyonu ve analitik bir g fonksiyonu için $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde U diskinde tanımlı ve $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik bir fonksiyon (Schwartz fonksiyonu) varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum $f \prec g$ ile belirtilir. Özel durumda, $g \in S$ ise bu $f(0)=g(0)$, $f(U)\subset g(U)$ olarak belirtilir.

Yıllar öncesinde, Ma ve Minda [18] çalışmasında, yıldızıl ve konveks fonksiyonların birleşiminin U diskinde analitik pozitif reel kısımlı ve $g(0)=1$, $g'(0)>0$ koşullarını sağlayan U birim diskini $z_0=1$ noktasına göre yıldızıl ve reel eksene göre simetrik bir bölge üzerine inikâl ettiren bir g fonksiyonuna subordinesinden oluşan sınıfı incelemiştir. Bu sınıf Ma-Minda yıldızıl ve a-Minda konveks fonksiyonlar sınıfı olarak bilinir ve $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec g(z)$, $1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec g(z)$ koşullarını sağlayan $f \in A$ fonksiyonlar sınıfından oluşur.

Bilindiği üzere, Chebishev polinomları matematik fizik ve nümerik analizin birçok probleminde geniş uygulamaya sahiptir. Bu sebeptendir ki Chebishev ailesinin ve özellikle de birinci ve ikinci çeşit $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ Chebishev polinomları ve onların çeşitli uygulamaları üzerine çok sayıda çalışmalar bulunmaktadır (bknz örneğin, [19, 20]).

Ayrıca, Chebishev polinomlarının dört çeşit olduğu da iyi bilinmektedir. Chebıshev polinomlarının en iyi bilineni birinci ve ikinci çeşitlerdir. Bilindiği üzere, x değişkeninin reel değerlerinde ikinci çeşit Chebishev polinomu $(-1,1)$ aralığı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır [21, 22]:

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Şimdi biz ikinci çeşit Chebıshev polinomları için bir indirgeme bağlantısı bulalım. Her $\theta \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sin((n+2)\theta)+\sin(n\theta)=2\sin((n+1)\theta)\cos\theta$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikte $x=\cos\theta$ alıp eşitliğin her iki tarafını $\sin\theta$ ile bölersek

$$\frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}+\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\frac{2\sin((n+1)\theta)\cos\theta}{\sin\theta};$$

dolayısıyla, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ olduğunu da dikkate alırsak,

$$\frac{\sin((n+2)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x\sin((n+1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir. İkinci çeşit Chebıshev polinomunun tanımını dikkate aldığımızda sonuncu eşitlikten aşağıdaki indirgeme formülü çıkar:

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\ n=1,2,3,\ldots\ . \tag{2.1.1}$$

Ayrıca, tanımdan $U_0(x)=1$ ve $U_1(x)=2x$ olduğundan (2.1.1) indirgeme bağıntısından

$$U_0(x)=1,$$
$$U_1(x)=2x,$$
$$U_2(x)=2xU_1(x)-U_0(x)=4x^2-1,$$
$$U_3(x)=2xU_2(x)-U_1(x)=4x(2x^2-1)=8x^3-4x,$$
$$U_4(x)=2x\cdot4x(2x^2-1)-(4x^2-1)=16x^4-12x^2+1,$$
$$\vdots$$

yazılır.

Görüldüğü üzere, ikinci çeşit Chebishev polinomlarında çift dereceli polinomlar, değişkenin tek dereceden kuvvetlerini ve tek dereceden polinomlar da çift kuvvetlerini bulundurmuyorlar.

Aşağıdaki gibi bir $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$G(t,z)=\frac{1}{1-2tz+z^2},\ t\in(-1,1),\ z\in U.$$

Bu fonksiyonun U diskinde $z\in U$ değişkenine göre analitik olduğu açıktır.
Şimdi bu fonksiyonun z değişkenine göre açılımını bulalım.
$z\in U$ için

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

olduğu bilinmektedir. Bu açılımda $z=re^{i\theta}$, $r=|z|$, $\theta=\arg z$ yazar ve

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

eşitliğini ve De-Moivre formülünü kullanırsak,

$$\frac{1}{1-re^{i\theta}}=\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad (2.1.2)$$

yazarız.

Öte yandan

$$\frac{1}{1-re^{i\theta}}=\frac{1}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}=\frac{(1-r\cos\theta)+i\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}=\frac{(1-r\cos\theta)+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \qquad (2.1.3)$$

eşitliği doğrudur.

(2.1.2) ve (2.1.3) eşitliklerinden aşağıdaki eşitlik kolayca yazılır

$$\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\theta .$$

Sonuncu eşitlikten

$$\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}r^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}r^n ;$$

dolayısıyla, $x=\cos\theta$ aldığımızda

$$\frac{1}{1-2rx+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)r^n \tag{2.1.4}$$

buluruz.

(2.1.4) formülünde $x=t$ ve $r=z$ alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{gathered}G(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(t)z^n=1+U_1(t)z+U_2(t)z^2+U_3(t)z^3+\cdots \\ t\in(-1,1),\ z\in U.\end{gathered} \tag{2.1.5}$$

Böylece, $G(t,z)$ fonksiyonunun seriye açılımında katsayılar ikinci çeşit Chebishev polinomlarıdır.

Tez çalışmamız boyunca biz $G:(0,1)\times z\to\mathbb{C}$ düşüneceğiz. Bu durumda $G(t,0)=1$ ve $G_z^{'}(t,0)=2t>0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, $G(t,z)$ fonksiyonu kayıt edilmiş $t\in(0,1)$ değerleri için

$$G(t,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}B_nz^n ,\ B_1>0$$

şekilli bir fonksiyondur.

İkinci çeşit Chebishev polinomunu kullanarak, biz analitik ve ünivalent fonksiyonların $\beta(\beta \geq 0)$ parametresinin değerlerine göre $(\beta = 0 \text{ için})$ yıdızıl ve $(\beta = 1 \text{ için})$ konveks fonksiyonlar sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

Tanım 2.1.1. Eğer, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonu

$$(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \prec G(t,z),\ z \in U$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Bu tanımdan, özel durumlarda aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.1.2. Eğer, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonu

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec G(t,z),\ z \in U$$

Koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon $S^*(G;t)$, $t \in (0,1)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Tanım 2.1.3. Eğer, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonu

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec G(t,z),\ z \in U$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon $C(G;t)$, $t \in (0,1)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Ayrıca, aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1.4. Eğer, (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f \in S$ fonksiyonu

$$\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)} \prec G(t,z), \quad z \in U$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon $S^*C(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Tanım 2.1.4'ten, $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ özel durumlarında $S^*C(G;0,t) = S^*(G;t)$ ve $S^*C(G;1,t) = C(G;t)$ yazarız.

2.2. Yöntemler

Bu alt bölümde, tezde kullanılacak bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 2.2.1 ([23]) : P, U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan,

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots, \; z \in U. \qquad (2.2.1)$$

şekilli seri açılımlı $p(z)$ foksiyonlarının ailesi olsun. Bu durumda, $p(z)$ fonksiyonunun katsayıları için $|p_n| \leq 2$, $n = 1,2,3,\ldots$ eşitsizlikleri kesindir ve $|z| \leq 1$, $|w| \leq 1$ olmak üzere z ve w karmaşık parametrelerinin bazı değerleri için

$$2p_2 = p_1^2 + (4 - p_1^2)z, \qquad (2.2.2)$$

$$4p_3 = p_1^3 + 2\left(4-p_1^2\right)p_1 z - \left(4-p_1^2\right)p_1 z^2 + 2\left(4-p_1^2\right)\left(1-|z|^2\right)w \qquad (2.2.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 2.2.2 ([3, 4]) : P, U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan ve (2.2.1) şekilli $p(z)$ foksiyonlarının ailesi ise,

$$\left|p_2 - \frac{\mu}{2}p_1^2\right| \leq 2\cdot \max\{1,|\mu-1|\} = 2\begin{cases}1 & \text{eğer } \mu\in[0,2],\\ |\mu-1|, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

eşitsizliği doğrudur.

Lemma 2.2.3 ([3, 4]) : P, U açık birim diskte analitik, $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan, (2.2.1) şekilli $p(z)$ foksiyonlarının ailesi ve $0\leq B\leq 1$, $B(2B-1)\leq D\leq B$ olsun. Bu durumda,

$$\left|p_3 - 2Bp_1p_2 + Dp_1^3\right| \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Katsayı Problemine Chebıshev Polinomunun Uygulaması

3.1.1 $\aleph(G;\beta,t)$ Sınıfı İçin Katsayı Problemi

Tez çalışmamızın bu bölümünde , analitik fonksiyonların $\aleph(G;\beta,t)$ altsınıfına ait olan fonksiyonların bazı ilk katsayıları için tahminler veriyoruz.

Teorem 3.1.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta\in[0,1]$, $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|a_2|\le\frac{2t}{1+\beta},\quad |a_3|\le\frac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}\quad \text{ve}$$

$$|a_4|\le\frac{2}{3(1+3\beta)}\left\{\left|\begin{array}{l}\dfrac{3(1+5\beta)\left[4(1+3\beta)t^2+(1+\beta)^2\left(4t^2-1\right)\right]t}{2(1+\beta)^3(1+2\beta)}+2\left(2t^2-1\right)t\\ -\dfrac{4(1+7\beta)t^3}{(1+\beta)^3}\end{array}\right|\right.$$
$$\left.+\frac{3(1+5\beta)t^2}{(1+\beta)(1+2\beta)}+4t^2+t-1\right\}.$$

İspat: Kabul edelim ki $f\in\aleph(G;\beta,t)$, $\beta\in[0,1]$, $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.1.1 gereğince $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ koşullarını sağlayacak bir $\omega:U\to U$ (Shwartz fonksiyonu) vardır ki her $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için

$$(1-\beta)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\beta\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]=G(t,\omega(z)),\quad z\in U. \tag{3.1.1.1}$$

eşitliği sağlanır.

(3.1.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}&1+(1+\beta)a_2z+\left[2(1+2\beta)a_3-(1+3\beta)a_2^2\right]z^2\\&+\left[3(1+3\beta)a_4-3(1+5\beta)a_2a_3+(1+7\beta)a_2^3\right]z^3+\cdots=G(t,\omega(z)).\end{aligned} \tag{3.1.1.2}$$

elde ederiz.

Şimdi $p\in \mathrm{P}$ fonksiyonu şöyle tanımlansın;

$$p(z):=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}=1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n.$$

Buradan, $\omega(z)$ fonksiyonunu çekersek,

$$\omega(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}=\frac{1}{2}\left[p_1z+\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)z^2+\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)z^3+\cdots\right] \tag{3.1.1.3}$$

buluruz.

(2.1.5)'de, z yerine $\omega(z)$ alırsak, $G(t,\omega(z))$ için aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned}G(t,\omega(z))&=1+\frac{U_1(t)}{2}p_1z+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2\right]z^2\\&+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{2}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3\right]z^3+\cdots.\end{aligned} \tag{3.1.1.4}$$

$G(t,\omega(z))$ fonksiyonunun bu ifadesini (3.1.1.2) eşitliğinde yerine yazarsak:

$$
\begin{aligned}
&1+(1+\beta)a_2 z+\left[2(1+2\beta)a_3-(1+3\beta)a_2^2\right]z^2 \\
&+\left[3(1+3\beta)a_4-3(1+5\beta)a_2a_3+(1+7\beta)a_2^3\right]z^3+\cdots \\
=&1+\frac{U_1(t)}{2}p_1 z+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2\right]z^2 \\
&+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{2}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3\right]z^3+\cdots .
\end{aligned}
\tag{3.1.1.5}
$$

elde edilir.

(3.1.1.5) eşitliğinde z değişkeninin sol ve sağ taraftaki aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek aşağıdaki eşitlik yazılır

$$
(1+\beta)a_2=\frac{U_1(t)}{2}p_1, \tag{3.1.1.6}
$$

$$
2(1+2\beta)a_3-(1+3\beta)a_2^2=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2, \tag{3.1.1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&3(1+3\beta)a_4-3(1+5\beta)a_2a_3+(1+7\beta)a_2^3 \\
&=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{2}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3.
\end{aligned}
\tag{3.1.1.8}
$$

Bu eşitliklerden; a_2, a_3, a_4 katsayılarını p_1, p_2 ve p_3 cinsinden ifade edilirse,

$$
a_2=\frac{U_1(t)}{2(1+\beta)}p_1, \tag{3.1.1.9}
$$

$$
a_3=\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{8(1+2\beta)(1+\beta)^2}p_1^2+\frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right), \tag{3.1.1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4=\frac{1}{3(1+3\beta)}&\left\{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3(1+5\beta)\left[(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)\right]U_1(t)}{16(1+\beta)^3(1+2\beta)}+\dfrac{U_3(t)}{8}\\[2ex] -\dfrac{(1+7\beta)U_1^3(t)}{8(1+\beta)^3}\end{array}\right\}p_1^3\right. \\
&\left.+\left[\frac{3(1+5\beta)U_1^2(t)}{8(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{U_2(t)}{2}\right]p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1.1.11}
$$

elde ederiz.

Lemma 2.2.1 gereğince $|p_1| \le 2$ olduğundan (3.1.1.9)'dan $|a_2|$ için istenen eşitsizlik bulunur.

Lemma 2.2.1'den $|x| \le 1$ koşulunu sağlayan bazı x değerleri için aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$p_2 - \frac{p_1^2}{2} = \frac{\left(4 - p_1^2\right)x}{2}. \qquad (3.1.1.12)$$

(3.1.1.12) ifadesini (3.1.1.10)'da yerine koyup üçken eşitsizliğini kullanır ve $|x| = \xi$, $|p_1| = \tau$ alırsak $|a_3|$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılır

$$|a_3| \le c_1(t,\tau)\xi + c_2(t,\tau), \ \xi \in [0,1], \qquad (3.1.1.13)$$

burada,

$$c_1(t,\tau) = \frac{\left(4-\tau^2\right)U_1(t)}{8(1+2\beta)}, \ c_2(t,\tau) = \frac{(1+3\beta)U_1^2(t) + (1+\beta)^2 U_2(t)}{8(1+2\beta)(1+\beta)^2}\tau^2,$$

$$\xi \in [0,1], \ t \in \left(\frac{1}{2},1\right), \ \tau \in [0,2].$$

Her $t \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ ve $\tau \in [0,2]$ için $c_1(t,\tau) \ge 0$ olduğundan (3.1.1.13)'den

$$|a_3| \le c_1(t,\tau) + c_2(t,\tau),$$

dolayısıyla,

$$|a_3| \le A(t,\beta)\tau^2 + B(t,\beta) \qquad (3.1.1.14)$$

yazılır. Burada,

$$A(t,\beta)=\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)}{8(1+2\beta)(1+\beta)^2}+\frac{U_2(t)-U_1(t)}{8(1+2\beta)},\ B(t,\beta)=\frac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}.$$

Şimdi, bazı $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ve $\beta\in[0,1]$ için $\varphi:[0,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\varphi(\tau)=A(t,\beta)\tau^2+B(t,\beta),\ \tau\in[0,2]. \tag{3.1.1.15}$$

Her $\beta\in[0,1]$ için $1+3\beta\geq(1+\beta)^2$ ve her $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için

$$U_1^2(t)+U_2(t)-U_1(t)=8t^2-2t-1>0$$

olduğundan

$$A(t,\beta)=\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)}{8(1+2\beta)(1+\beta)^2}+\frac{U_2(t)-U_1(t)}{8(1+2\beta)}\geq\frac{U_1^2(t)+U_2(t)-U_1(t)}{8(1+2\beta)}$$

eşitliğinden $A(t,\beta)>0$ olduğu açıktır. Ayrıca, her $\beta\in[0,1]$ ve her $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için $B(t,\beta)>0$ olduğu da görülmektedir. Böylece, $\varphi(\tau)$ fonksiyonu $[0,2]$ aralığı üzerinde kesin artandır. Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılır

$$mak\{\varphi(\tau):\tau\in[0,2]\}=\varphi(2)=4A(t,\beta)+B(t,\beta),$$

Dolayısıyla,

$$mak\left\{\varphi(\tau):\tau\in[0,2]\right\}=\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}+\frac{U_2(t)}{2(1+2\beta)}. \qquad (3.1.1.16)$$

Böylece, (3.1.1.13)-(3.1.1.16)'den her $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ kayıt edilmiş değeri için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$|a_3|\le\frac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}.$$

Şimdi $|a_4|$ ile ilgili bir değerlendirmede bulunmak için (3.1.1.11) eşitliğine önce üçgen eşitsizliğini ve sonra Lemma 2.2.2 ve Lemma 2.2.3 'ü uygulanırsa

$$|a_4|\le\frac{2}{3(1+3\beta)}\left\{\left|\frac{3(1+5\beta)\left[4(1+3\beta)t^2+(1+\beta)^2\left(4t^2-1\right)\right]t}{2(1+\beta)^3(1+2\beta)}+2\left(2t^2-1\right)t-\frac{4(1+7\beta)t^3}{(1+\beta)^3}\right|\right.$$
$$\left.+\frac{3(1+5\beta)t^2}{(1+\beta)(1+2\beta)}+4t^2+t-1\right\}$$

her $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ kayıt edilmiş değeri için elde edilir.

Bununla Teorem 3.1.1.1'in ispatı tamamdır.

Not: Belirtelim ki Teorem 3.1.1.1'in sonucu $|a_2|$ ve $|a_3|$ için [8] çalışmasında verilmiştir.

Özel durumda Teorem 3.1.1.1'den aşağıdaki sonuçları kolayca elde edilir.

Sonuç 3.1.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ altsınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \le 2t,\ |a_3| \le \frac{8t^2-1}{2} \quad \text{ve}$$

$$|a_4| \le \frac{1}{3}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left(7t^2+t-1\right)\right].$$

Sonuç 3.1.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$, $t \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ altsınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \le t,\ |a_3| \le \frac{8t^2-1}{6} \quad \text{ve}$$

$$|a_4| \le \frac{1}{12}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left(7t^2+t-1\right)\right].$$

Not: Şunu belirtelim ki Teorem 3.1.1.1'in ispat tekniği kullanılarak $S^*(G;t)$ ve $C(G;t)$ sınıfları için daha kuvvetli sonuçlar olan aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.1.2'nin ispatı 3.1.2. altbölümde verilecektir. Teorem 3.1.1.3 benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.1.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$ altsınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \le 2t,\ t \in (0,1),$$

$$|a_3| \le \frac{1}{2}\begin{cases} 1-8t^2, & \text{eğer } t \in \left(0,\frac{1}{4}\right], \\ 2t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \\ 8t^2-1, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2},1\right) \end{cases}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{1}{3}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left|7t^2-1\right|+2t\right],\ t \in (0,1).$$

Teorem 3.1.1.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$ altsınıfındansa bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$|a_2| \le t,\ t \in (0,1),$$

$$|a_3| \le \frac{1}{3}\begin{cases} \frac{1-8t^2}{2}, & \text{eğer } t \in \left(0,\frac{1}{4}\right], \\ t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \\ \frac{8t^2-1}{2}, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2},1\right) \end{cases}$$

Ve

$$|a_4| \le \frac{1}{12}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left|7t^2-1\right|+2t\right],\ t \in (0,1).$$

3.1.2 $S^*C(G;\beta,t)$ Sınıfı İçin Katsayı Problemi

Tez çalışmamızın bu bölümünde, analitik fonksiyonların $S^*C(G;\beta,t)$ altsınıfına ait olan fonksiyonların bazı ilk katsayıları için tahminler vereceğiz.

Öncelikle analitik fonksiyonların $S^*(G;t)$ sınıfı için katsayı problemini inceleyeceğiz.

Teorem 3.1.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t \in (0,1)$ sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|a_2| \le 2t,\ t \in (0,1),$$

$$|a_3| \le \frac{1}{2}\begin{cases} 1-8t^2, & \text{eğer } t \in \left(0,\frac{1}{4}\right], \\ 2t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \\ 8t^2-1, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2},1\right) \end{cases}$$

Ve

$$|a_4| \le \frac{1}{3}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left|7t^2-1\right|+2t\right],\ t \in (0,1).$$

İspat: Kabul edelim ki $f \in S^*(G;t)$, $t \in (0,1)$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.1.2 gereğince $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ koşullarını sağlayacak bir $\omega: U \to U$ (Shwartz fonksiyonu) vardır ki ter $t \in (0,1)$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = G(t,\omega(z)),\ z \in U \qquad (3.1.2.1)$$

koşulu sağlanacaktır.

Şimdi $p \in \mathrm{P}$ fonksiyonu Bölüm 3.1.1'deki gibi tanımlansın. O halde, $\omega(z)$ fonksiyonu (3.1.1.3)'deki gibi tanımlanır ve $G(t,\omega(z))$ fonksiyonu için de (3.1.1.4) formülü geçerlidir.

Basit hesaplamalar sonucu, (3.1.2.1) eşitliğini aşağıdaki gibi yazarız:

$$
\begin{aligned}
&1+a_2z+\left(2a_3-a_2^2\right)z^2+\left(3a_4-3a_2a_3+a_2^3\right)z^3+\cdots\\
&=1+\frac{U_1(t)}{2}p_1z+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2\right]z^2 \qquad (3.1.2.2)\\
&+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{2}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3\right]z^3+\cdots.
\end{aligned}
$$

(3.1.2.2) eşitliğinde z değişkeninin sol ve sağ taraftaki aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir

$$a_2=\frac{U_1(t)}{2}p_1, \qquad (3.1.2.3)$$

$$2a_3-a_2^2=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2, \qquad (3.1.2.4)$$

$$
\begin{aligned}
&3a_4-3a_2a_3+a_2^3\\
&=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{2}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3. \qquad (3.1.2.5)
\end{aligned}
$$

Bu eşitliklerden a_3, a_4 katsayılarını p_1, p_2 ve p_3 cinsinden ifade edersek

$$a_3=\frac{U_2(t)+U_1^2(t)}{8}p_1^2+\frac{U_1(t)}{4}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right), \qquad (3.1.2.6)$$

$$
\begin{aligned}
a_4&=\left\{\frac{\left[U_2(t)+U_1^2(t)\right]U_1(t)}{16}+\frac{U_3(t)-U_1^3(t)}{24}\right\}p_1^3\\
&+\left[\frac{U_1^2(t)}{8}+\frac{U_2(t)}{6}\right]p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_1(t)}{6}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right). \qquad (3.1.2.7)
\end{aligned}
$$

Lemma 2.2.1 gereğince $|p_1|\le 2$ olduğundan (3.1.2.3)'den $|a_2|$ için istenen eşitsizlik elde edilir.

Bölüm 3.1.1'dekine benzer olarak $|a_3|$ için yazarız

$$|a_3| \le \frac{|U_2(t)+U_1^2(t)|}{8}\tau^2 + \frac{U_1(t)(4-\tau^2)\xi}{8}, \ \tau \in [0,2], \ \xi \in [0,1],$$

burada $\tau = |p_1|$ ve $\xi = |x|$.

Sonuncu eşitsizlikten her $t \in (0,1)$ kayıt edilmiş değeri için aşağıdaki eşitsizliği kolayca yazarız

$$|a_3| \le \frac{|U_2(t)+U_1^2(t)|}{8}\tau^2 + \frac{U_1(t)(4-\tau^2)}{8}, \ \tau \in [0,2],$$

dolayısıyla,

$$|a_3| \le \frac{|U_2(t)+U_1^2(t)| - U_1(t)}{8}\tau^2 + \frac{U_1(t)}{2}, \ \tau \in [0,2].$$

Sonuncu eşitsizlikten $|a_3|$ için yazarız:

$$|a_3| \le \frac{|8t^2-1|-2t}{8}\tau^2 + t, \ \tau \in [0,2]. \qquad (3.1.2.8)$$

(3.1.2.8)'den $|a_3|$ için istenen eşitsizlik elde edilir.

Şimdi, $|a_4|$ için değerlendirme bulalım. (3.1.2.7) eşitliğine önce üçgen eşitsizliğini ve sonra Lemm 2.2.2 ve Lemma 2.2.3 'ü uygulayıp $|p_1| \le 2$ olduğunu da dikkate alırsak

$$|a_4| \le \left| \frac{[U_2(t)+U_1^2(t)]U_1(t)}{2} + \frac{U_3(t)-U_1^3(t)}{3} \right| + \left| \frac{U_1^2(t)}{2} + \frac{2U_2(t)}{3} \right| + \frac{U_1(t)}{3}$$

bulunur.

Buradan $|a_4|$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$|a_4| \le \frac{1}{3}\left[\left|\left(24t^2-7\right)t\right| + 2\left|7t^2-1\right| + 2t\right].$$

Bununla Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamdır.

Şimdi $S^*C(G;\beta,t)$ sınıfı için katsayı problemini inceleyelim.

Teorem 3.1.2.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(G;\beta,t)$, $\beta \ge 0$ sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsayısı için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|a_2| \le \frac{2t}{1+\beta},\ t \in (0,1),$$

$$|a_3| \le \frac{1}{2(1+2\beta)} \begin{cases} 1-8t^2, & \text{eğer } t \in \left(0,\frac{1}{4}\right], \\ 2t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \\ 8t^2-1, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2},1\right) \end{cases}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{1}{3(1+3\beta)}\left[\left|24t^2-7\right|t + 2\left|7t^2-1\right| + 2t\right],\ t \in (0,1).$$

İspat: Kabul edelim ki $f \in S^*C(G;\beta,t)$, $\beta \ge 0$, $t \in (0,1)$ olsun. Yani,

$$\frac{zf'(z)+\beta z^2 f''(z)}{\beta zf'(z)+(1-\beta)f(z)} \prec G(t,z), \quad z \in U. \tag{3.1.2.9}$$

Şimdi, $F: U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F(z) = \beta zf'(z) + (1-\beta)f(z),\ z \in U.$$

Aşağıdaki açılımın doğruluğu kolayca gösterilir

$$F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_n z^n\ ,\ z\in U\ ,$$

burada, $A_n=\left(1+(n-1)\beta\right)a_n$, $n=2,3,4,\ldots$.

Basit hesaplamayla

$$F'(z)=f'(z)+\beta z f''(z)$$

olduğu gösterilebilir.

Buna gore, (3.1.2.9) koşulunu

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec G(t,z)\ ,\ z\in U$$

şeklinde yazarız.

Bu da demek olur ki $F(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t\in(0,1)$ sınıfındandır. O halde, Teorem 3.1.2.1 gereğince aşağıdaki eşitsizlikler yazılır

$$|A_2|\le 2t\ ,\ t\in(0,1)$$

$$|A_3|\le\frac{1}{2}\begin{cases}1-8t^2, & \text{eğer } t\in\left(0,\frac{1}{4}\right],\\ 2t, & \text{eğer } t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\\ 8t^2-1, & \text{eğer } t\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

ve

$$|A_4|\le\frac{1}{3}\left[\left|24t^2-7\right|t+2\left|7t^2-1\right|+2t\right],\ t\in(0,1)\ .$$

Sonuncu eşitsizliklerde $A_n = (1+(n-1)\beta)a_n$, $n = 2,3,4$ bağlantısı dikkate alınırsa teoremde verilen eşitsizlikler elde edilir.

Bununla teoremin ispatı tamamdır.

Teorem 3.1.2.2'in direk sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

<u>Teorem 3.1.2.3:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$ sınıfından ise bu fonksiyonun ilk üç katsaysı için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|a_2| \le t,\ t \in (0,1),$$

$$|a_3| \le \frac{1}{6}\begin{cases} 1-8t^2, & \text{eğer } t \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \\ 2t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ 8t^2-1, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

ve

$$|a_4| \le \frac{1}{12}\left[\left|24t^2-7\right|t + 2\left|7t^2-1\right| + 2t\right],\ t \in (0,1).$$

3.2. Fekete-Szegö Problemi

3.2.1 $\aleph(G;\beta,t)$ Sınıfı İçin Fekete-Szegö Problemi

Bu bölümde, analitik fonksiyonların $\aleph(G;\beta,t)$, altsınıfına ait olan fonksiyonların Fekete-Szegö problemini inceleyeceğiz.

Öncelikle, $\mu \in \mathbb{C}$ durumunda $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ Fekete-Szegö fonksiyonelini inceleyelim.

Teorem 3.2.1.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ altsınıfından ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \frac{1}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}$$
$$\times \begin{cases} \left|4\left[\beta^2+5\beta+2-2(1+2\beta)\mu\right]t^2-(1+\beta)^2\right|, \\ \qquad \text{eğer } \left|4\left[\beta^2+5\beta+2-2(1+2\beta)\mu\right]t^2-(1+\beta)^2\right| \geq 2(1+\beta)^2 t, \\ 2(1+\beta)^2 t, \text{ eğer } \left|4\left[\beta^2+5\beta+2-2(1+2\beta)\mu\right]t^2-(1+\beta)^2\right| \leq 2(1+\beta)^2 t. \end{cases}$$

İspat: Farz edelim ki $f \in \aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. O halde, (3.1.1.9) ve (3.1.1.10) eşitliklerinden aşağıdaki eşitlik yazılır

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2 U_2(t)}{8(1+2\beta)(1+\beta)^2} p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right)$$
$$-\frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2} p_1^2 \mu = \frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left[\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2 U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu\right] p_1^2 \qquad (3.2.1.1)$$
$$+\frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right).$$

(3.1.1.12) ifadesini (3.2.1.1)'de yerine koyup üçgen eşitsizliğini kullanır ve $|x| = \xi$, $|p_1| = \tau$ alırsak, $\left|a_3 - \mu a_2^2\right|$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2 U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu\right|\tau^2 + \frac{U_1(t)\left(4-\tau^2\right)}{8(1+2\beta)}\xi$$

$\xi \in [0,1]$.

Sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|\tau^2+\frac{U_1(t)\left(4-\tau^2\right)}{8(1+2\beta)}. \quad (3.2.1.2)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeyi

$$\begin{aligned}
&\frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|\tau^2+\frac{U_1(t)\left(4-\tau^2\right)}{8(1+2\beta)}\\
&=\left\{\frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|-\frac{U_1(t)}{8(1+2\beta)}\right\}\tau^2 \qquad (3.2.1.3)\\
&+\frac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}:=\phi(\tau),\ \ \tau\in[0,2]
\end{aligned}$$

şeklinde yazıp, $\phi(\tau)$ fonksiyonunun $[0,2]$ aralığı üzerinde maksimumunu inceleyelim. Bu fonksiyonun ifadesinden kolayca görüldüğü üzere

$$\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right| \ge \frac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)} \quad (3.2.1.4)$$

iken fonksiyon artan ve

$$\left|\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right| \le \frac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)} \quad (3.2.1.5)$$

iken de azalandır.

Böylece, (3.2.1.2) ve (3.2.1.3)'ten aşağıdaki eşitsizlik yazılır

$$
|a_3-\mu a_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{U_1^2(t)}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|, \\ \qquad \text{eğer } \left|\dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right| \ge \dfrac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)}, \\ \dfrac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}, \text{ eğer } \left|\dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right| \le \dfrac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)}. \end{cases}
$$

Bununla Teorem 3.1.2.1'in ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.1.1'den, sırasıyla, $\beta=0$ ve $\beta=1$ özel durumları için aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

<u>Sonuç 3.2.1.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur

$$
|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{1}{2}\begin{cases} |8(1-\mu)t^2-1|, & \text{eğer } |8(1-\mu)t^2-1| \ge 2t, \\ 2t, & \text{eğer } |8(1-\mu)t^2-1| \le 2t. \end{cases}
$$

<u>Sonuç 3.2.1.2:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$
|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{1}{6}\begin{cases} |2(4-3\mu)t^2-1|, & \text{eğer } |2(4-3\mu)t^2-1| \ge 2t, \\ 2t, & \text{eğer } |2(4-3\mu)t^2-1| \le 2t. \end{cases}
$$

Şimdi de $\mu\in\mathbb{R}$ için $|a_3-\mu a_2^2|$-Fekete-Szegö fonksiyoneli için bir değerlendirme bulalım.

Teorem 3.2.1.2: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ altsınıfından ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \leq \frac{1}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}\begin{cases} \left|4\left[\beta^2+5\beta+2-2(1+2\beta)\mu\right]t^2-(1+\beta)^2\right|, \\ \qquad \text{eğer } \mu \leq \dfrac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-(1+\beta)^2(2t+1)}{8(1+2\beta)t^2} \\ \qquad \text{ya da } \mu \geq \dfrac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2+(1+\beta)^2(2t-1)}{8(1+2\beta)t^2}, \\ 2(1+\beta)^2 t, \text{ eğer } \dfrac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-(1+\beta)^2(2t+1)}{8(1+2\beta)t^2} \leq \mu \\ \qquad \leq \dfrac{4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2+(1+\beta)^2(2t-1)}{8(1+2\beta)t^2}. \end{cases}$$

İspat: Kabul edelim ki $f \in \aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. O halde, Teorem 3.2.1.1'in ispatındakine benzer şekilde yazarız:

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left[\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2 U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu\right]p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right).$$

Reel $\mu \in \mathbb{R}$ için (3.2.1.4) ve (3.2.1.5) koşulları, sırasıyla,

$$\mu \leq \frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}$$

ya da

$$\mu \geq \frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \tag{3.2.1.6}$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \leq \mu \\ &\leq \frac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \end{aligned} \tag{3.2.1.7}$$

koşullarına denk olacaklar.

Buna gore, (3.2.1.3) formülü ile tanımlanan $\phi(\tau)$ fonksiyonu, sırasıyla, (3.2.1.6) koşulunda artan ve (3.2.1.7) koşulunda azalandır.

Böylece, $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ ifadesinin değerlendirmesi için aşağıdaki eşitlik yazılır

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{U_1^2(t)}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2U_2(t)}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|, \\ \qquad \text{eğer } \mu \leq \dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \\ \qquad \text{ya da } \mu \geq \dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}, \\ \dfrac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}, \text{ eğer } \dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \leq \mu \\ \qquad \leq \dfrac{(1+3\beta)U_1^2(t)+(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}. \end{cases}$$

Teorem 3.2.1.2'nin ispatı tamamdır.

Aşağıdaki iki teorem Teorem 3.2.1.2'nin direk sonucudur.

Teorem 3.2.1.3: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f(z)$

fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq\frac{1}{2}\begin{cases}\left|8(1-\mu)t^2-1\right|, & \text{eğer } 8\mu-1\leq-(2t+1)t^{-2} \text{ ya da } 8\mu-1\geq(2t-1)t^{-2},\\ 2t, & \text{eğer } \quad -(2t+1)t^{-2}\leq 8\mu-1\leq(2t-1)t^{-2}.\end{cases}$$

<u>Teorem 3.2.1.4:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq\frac{1}{6}\begin{cases}\left|2(4-3\mu)t^2-1\right|, & \text{eğer } 6\mu-1\leq-(2t+1)t^{-2} \text{ ya da } 6\mu-1\geq(2t-1)t^{-2},\\ 2t, & \text{eğer } \quad -(2t+1)t^{-2}\leq 6\mu-1\leq(2t-1)t^{-2}.\end{cases}$$

Teorem 3.2.1.2'de $\mu=0$ alırsak $|a_3|$'ün değerlendirmesi için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

<u>Sonuç 3.2.1.3:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta\in[0,1]$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun a_3 katsayısının modülü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3|\leq\frac{1}{2(1+2\beta)(1+\beta)^2}\begin{cases}\left|4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-(1+\beta)^2\right|, & \\ \qquad \text{eğer } 0\leq 4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-2(1+\beta)^2t-(1+\beta)^2 & \\ \qquad \text{ya da } 4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2+2(1+\beta)^2t-(1+\beta)^2\leq 0, & \\ 2(1+\beta)^2t, \text{ eğer } 4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2-2(1+\beta)^2t-(1+\beta)^2\leq 0 & \\ \qquad \text{ve } 0\leq 4\left(\beta^2+5\beta+2\right)t^2+2(1+\beta)^2t-(1+\beta)^2. & \end{cases}$$

Sonuç 3.2.1.3'ten Teorem 3.1.1.1'de $|a_3|$'ün değerlendirmesi için elde ettiğimiz eşitsizliği kolayca buluruz.

Ayrıca, Teorem 3.2.1.2'de $\mu = 1$ alırsak $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1.4: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ altsınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{2(1+2\beta)(1+\beta)} \begin{cases} \left|4\beta t^2 - (1+\beta)\right|, & \\ & \text{eğer } 4\beta t^2 - 2(1+\beta)t - (1+\beta) \geq 0 \\ & \text{ya da } 4\beta t^2 + 2(1+\beta)t - (1+\beta) \leq 0, \\ 2(1+\beta)t, & \text{eğer } 4\beta t^2 - 2(1+\beta)t - (1+\beta) \leq 0 \\ & \text{ve } 4\beta t^2 + 2(1+\beta)t - (1+\beta) \geq 0. \end{cases}.$$

Sonuç 3.2.1.4'de, sırasıyla, $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ alırsak aşağıdaki sonuçlara ulaşırız.

Sonuç 3.2.1.5: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*(G;t)$, $t \in (0,1)$ sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun $|a_3 - a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ 2t, & \text{eğer } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}.$$

Sonuç 3.2.1.6: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $C(G;t)$, $t\in(0,1)$ sınıfından olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonun $|a_3-a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3-a_2^2|\le\frac{1}{6}\begin{cases}|2t^2-1|, & \text{eğer } t\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right],\\ 2t, & \text{eğer } t\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},1\right).\end{cases}.$$

3.2.2 $S^*C(G;\beta,t)$ Sınıfı İçin Fekete-Szegö Problemi

Bu bölümde, analitik fonksiyonların $S^*C(G;\beta,t)$ altsınıfına ait olan fonksiyonların Fekete-Szegö prolemi incelenir.

Öncelikle $\mu\in\mathbb{C}$ durumunu ele alalım.

Teorem 3.2.2.1: (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(G;\beta,t)$, $\beta\ge 0$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$|a_3-\mu a_2^2|\le\begin{cases}\dfrac{4t^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-1)}{8(1+2\beta)t^2}-\mu\right|, & \text{eğer } \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)t}\le\left|\dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-1)}{8(1+2\beta)t^2}-\mu\right|,\\ \dfrac{t}{1+2\beta}, & \text{eğer } \dfrac{(1+\beta)^2}{4(1+2\beta)t}\ge\left|\dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-1)}{8(1+2\beta)t^2}-\mu\right|.\end{cases}$$

İspat: Farz edelim ki $f \in S^*C(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda Bölüm 3.1.2'de Teorem 3.1.2.2'de tanımlanan $F(z) = \beta z f'(z) + (1-\beta) f(z)$ fonksiyonu için Teorem 3.1.2.1 gereğince yazılır:

$$A_2 = \frac{U_1(t)}{2} p_1, \tag{3.2.2.1}$$

$$A_3 = \frac{U_2(t) + U_1^2(t)}{8} p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right). \tag{3.2.2.2}$$

Ayrıca, $A_n = \left(1 + (n-1)\beta\right) a_n$, $n = 2,3$ olduğunu dikkate alırsak $f(z)$ fonksiyonunun a_2 ve a_3 katsayıları için bulunur:

$$a_2 = \frac{U_1(t)}{2(1+\beta)} p_1, \tag{3.2.2.3}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+2\beta}\left[\frac{U_2(t) + U_1^2(t)}{8} p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right)\right]. \tag{3.2.2.4}$$

(3.2.2.3) ve (3.2.2.4) eşitliklerinden $a_3 - \mu a_2^2$ için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left\{\frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t) + U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu\right\} p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2 - \frac{p_1^2}{2}\right). \tag{3.2.2.5}$$

(3.1.1.12) ifadesini (3.2.2.5)'de yerine koyup üçken eşitsizliğini kullanır ve $|x| = \xi$, $|p_1| = \tau$ alırsak, $|a_3 - \mu a_2^2|$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edilir

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq c_1(t,\tau)\xi + c_2(t,\tau), \tag{3.2.2.6}$$

burada

$$c_1(t,\tau)=\frac{U_1(t)(4-\tau^2)}{8(1+2\beta)},\ c_2(t,\tau)=\frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|\tau^2,$$

$\xi\in[0,1]$, $\tau\in[0,2]$, $t\in(0,1)$.

Her $\tau\in[0,2]$ ve $t\in(0,1)$ için $c_1(t,\tau)\geq 0$ olduğundan (3.2.2.6)'dan $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ ifadesi için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq c_1(t,\tau)+c_2(t,\tau);$$

yani,

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\leq a(t,\beta)\tau^2+b(t,\beta), \tag{3.2.2.7}$$

burada

$$a(t,\beta)=\frac{U_1(t)}{4}\left\{\frac{U_1(t)}{(1+\beta)^2}\left|\frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|-\frac{1}{2(1+2\beta)}\right\},$$

$$b(t,\beta)=\frac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}.$$

Şimdi, her $\beta\geq 0$ ve kayıt edilmiş her $t\in(0,1)$ değerleri için $\psi:[0,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\psi(\tau)=a(t,\beta)\tau^2+b(t,\beta),\ \tau\in[0,2]. \tag{3.2.2.8}$$

$a(t,\beta)$ ifadesinden görüldüğü üzere, her $\beta\geq 0$ ve kayıt edilmiş her $t\in(0,1)$ değerleri için

$$\frac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)} \le \left| \frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu \right| \tag{3.2.2.9}$$

koşulu sağlanırken $a(t,\beta)\ge 0$, dolayısıyla, $\psi'(\tau)\ge 0$; yani $\psi(\tau)$ fonksiyonu monoton artan ve

$$\left| \frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu \right| \le \frac{(1+\beta)^2}{2(1+2\beta)U_1(t)} \tag{3.2.2.10}$$

koşulu sağlanırken $a(t,\beta)\le 0$, dolayısıyla, $\psi'(\tau)\le 0$; yani $\psi(\tau)$ fonksiyonu monoton azalandır.

Böylece, (3.2.2.7) ve (3.2.2.8)'den $|a_3-\mu a_2^2|$ ifadesi için aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{U_1^2(t)}{(1+\beta)^2}\left| \dfrac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} - \mu \right|, & \text{eğer (3.2.2.9) sağlanırsa,} \\ \dfrac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}, & \text{eğer (3.2.2.10) sağlanırsa.} \end{cases}$$

Bununla Teorem 3.2.2.1'in ispatı tamamdır.

Şimdi de $\mu\in\mathbb{R}$ için $|a_3-\mu a_2^2|$-Fekete-Szegö fonksiyoneli için bir eşitsizlik bulalım.

<u>Teorem 3.2.2.4:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $S^*C(G;\beta,t)$, $\beta\ge 0$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun Fekete-Szegö fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$
\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{4t^2}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-1)}{8(1+2\beta)t^2}-\mu\right|, \\ \text{eğer } \mu \leq \dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-t-1)}{8(1+2\beta)t^2} \text{ ya da } \mu \geq \dfrac{(1+\beta)^2(8t^2+t-1)}{8(1+2\beta)t^2}, \\ \dfrac{t}{1+2\beta}, \text{ eğer} \dfrac{(1+\beta)^2(8t^2-t-1)}{8(1+2\beta)t^2} \leq \mu \leq \dfrac{(1+\beta)^2(8t^2+t-1)}{8(1+2\beta)t^2}. \end{cases}
$$

<u>İspat:</u> Farz edelim ki $f \in S^*C(G;\beta,t)$, $\beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. O halde, Teorem 3.2.2.1'in ispatındakine benzer şekilde yazılır:

$$
a_3-\mu a_2^2=\frac{U_1^2(t)}{4(1+\beta)^2}\left\{\frac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right\}p_1^2+\frac{U_1(t)}{4(1+2\beta)}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right).
$$

Reel $\mu \in \mathbb{R}$ için (3.2.2.9) ve (3.2.2.10) koşulları, sırasıyla,

$$
\mu \leq \frac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}
$$

ya da

$$
\mu \geq \frac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \tag{3.2.2.11}
$$

ve

$$
\frac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \leq \mu \leq \frac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \tag{3.22.12}
$$

koşullarına denk olacaklar.

Buna göre, (3.2.2.8) formülü ile tanımlanan $\psi(\tau)$ fonksiyonu, sırasıyla, (3.2.2.11) koşulunda artan ve (3.2.2.12) koşulunda azalandır.

Böylece, $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ ifadesinin değerlendirmesi için yazılır:

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \leq \begin{cases} \dfrac{U_1^2(t)}{(1+\beta)^2}\left|\dfrac{(1+\beta)^2\left[U_1^2(t)+U_2(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}-\mu\right|, \\ \qquad \text{eğer } \mu \leq \dfrac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \\ \qquad \text{ya da } \mu \geq \dfrac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}, \\ \dfrac{U_1(t)}{2(1+2\beta)}, \text{ eğer } \dfrac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)-U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)} \leq \mu \\ \qquad \leq \dfrac{(1+\beta)^2\left[U_2(t)+U_1^2(t)+U_1(t)\right]}{2(1+2\beta)U_1^2(t)}. \end{cases}$$

Teorem 3.2.2.4'ün ispatı tamamdır.

Teorem 3.2.2.4'de $\mu=0$ alınırsa Teorem 3.1.2.2'de $|a_3|$ için bulunan eşitsizliği doğrulayan aşağıdaki sonuç elde edilir.

<u>Sonuç 3.2.2.1:</u> (1.2.2.1) formülü ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\aleph(G;\beta,t)$, $\beta\in[0,1]$, $t\in(0,1)$ altsınıfından ise bu fonksiyonun a_3 katsayısının modülü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur

$$|a_3| \leq \frac{1}{2(1+2\beta)}\begin{cases} 1-8t^2, \text{ eğer } t\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right], \\ 2t, \quad \text{eğer } t\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right], \\ 8t^2-1 \text{ eğer } t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right). \end{cases}$$

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışılmış tezde 2. çeşit Chebishev polinomu kullanılarak analitik ve ünivalent fonksiyonların $\aleph(G;\beta,t)$ ve $S^{*}C(G;\beta,t), \beta \geq 0$, $t \in (0,1)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanıtıldı. Bu sınıflar için katsayı problemi incelendi ve bu sınıflara ait olan fonksiyonların ilk üç katsayısı için bazı değerlendirmeler elde edildi.

Tezde tanımlanan her iki sınıf için de Fekete-Szegö problemi ele alındı ve $|a_3 - \mu a_2^2|$ Fekete-Szegö fonksiyoneli için μ parametresinin hem karmaşık ve hem de reel durumunda üst sınır değerlendirmesi verildi.

Tezde tanımlanan her iki sınıf için ikinci Hankel determinantının üst sınır değerlendirmesi verilebilir.

Tezde tanımlanan sınıflara ait olan fonksiyonun tersinin katsayı problemi ve Fekete-Szegö problemi ileride bir araştırma konusu olabilir.

Tezde tanımlanan sınıflara ait olan fonksiyonun tersinin ikinci Hankel determinantı için üst sınır değerlendirmesi incelenebilir.

Ayrıca, tezde ele alınan sınıflardan olan $f(z)$ fonksiyonu için $\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = g(z)$ fonksiyonunun katsayı ve Fekete-Szegö benzeri problem de incelenebilir.

Dahası, tezde ele alınan sınıfların her ikisi için de $g(z)$ fonksiyonunun ikinci Hankel determinantı için üst sınır değerlendirmesi bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Thomas, D. K. (2018). On the coefficients of gamma-starlike functions. Korean Mat. Soc. 55(1), 175-184.

[2] Frasin, B. A. (2011). New subclasses of bi-univalent functions. Appl. Math. Lett. 24: 1569-573.

[3] Ali, R. M. (2003). Coefficients of the inverse of strongly starlike functions. Bull. Malays. Math. Soc. 26(2), no. 1, 63-71.

[4] Libera, R. J. and Zotkiewicz, E. J. (1982). Early coefficients of the inverse of a regular convex function. Proc. Amer. Math. Soc. 85(2), 225-230.

[5] Mustafa, N., Öztürk, T. (2018). On the coefficient bounds of certain subclasses of analytic functions of complex order. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 133-136.

[6] Mustafa, N., Gündüz, M. C. (2018). Coefficient bound estimates for alpha-convex functions of order beta. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 149-156.

[7] Mustafa, N., Ateş, M. (2018). On the Coefficient Bounds of Gamma and Beta Starlike Functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 333-341.

[8] Mustafa, N., Akbulut, E. (2018). Application of the Chebyshev polynomials to coeffcient estimates of analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research 5(6): 143-148.

[9] Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application of the second kind Chebyshev polinomial to the Fekete-Szegö problem of certain class analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 6(2), ISSN(Online): 2394-2894, 2019, 44-51.

[10] Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

[11] Goodman, A.W. (1983). Univalent Function-1,2. Mariner Publishing Company Tapma, Florida 311 p.

[12] Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). Complex variables with Applications. Birkhâuser. Boston.

[13] Fekete, M., Szegö, G. (1933). Eine Bemerkung uber ungerade schlichte

Funktionen. . London Mat. Soc. 8: 85-89 Almanca).

[14] Keogh, F. R., Merkes, E. P. (1969). A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. Proc. Am. Mat. Soc. 20: 8-12.

[15] Orhan, H., Deniz, E., Raducanu, D. (2010). The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains. Comput. Math. Appl. 59: 283-295.

[16] Zaprawa, P. (2014). On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 21: 169-178.

[17] Zaprawa, P. (2014). Stimates of initial coeffisients for bi-univalent functions. Abstr. Appl. Anal. 2014: 357480.

[18] Ma W. C., Minda, D. (1994). A unified treatment of some special classes of functions. In: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, 1992; 157-169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal 1. Int. Pres, Cambridge, MA.

[19] Doha, E. H. (1994). The first and second kind Chebyshev coefficients of the moments of the general order derivative of an infinitely differentiable function. Intern. . Comput. Math. 51: 21-35.

[20] Lewin, M. (1967). On a coefficient problem for bi-univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc 18: 63-68.

[21] Daugavet, İ. K. (1977). Fonksiyonlara Yaklaşım Teorisine Giriş. Leningrad Üniversitesi Basımevi. (Rusça).

[22] Suetin, P. K. (1979). Klasik Ortogonal Polinomlar. Moskow, "Nauka", Fizik – Matematik Baş Basımevi (Rusça).

[23] Pommerenke, C. H. (1975). Univalent Functions. Vandenhoeck and Ruperch, Gottingen.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erdi AKBULUT

Doğum Yeri ve Tarihi : KARS / 01.03.1992

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (e-posta) : akbulut_erdi@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Alpaslan Lisesi

Lisans : Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi

Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Ana Bilim Dalı/ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Özel Çelik Başarı Koleji (2017-)

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. Mustafa, N., Akbulut, E. (2018). Application of the Chebyshev polinomials to coefficient estimates of analytic function. Journal of Scientific and Engineering Research, 5(6), 143-148.

2. Mustafa, N., Nezir, V., Akbulut, E. (2018). Applications of the Chebyshev polynomials to coefficient estimates of analytic functions, ICRAPAM 2018 Conferance Proceedings, Karadeniz Teknik Üniversitesi, July 23-27, 2018, Trabzon, TURKEY.

3. Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application of the second kind Chebyshev polynomial to the Fekete-Szegö problem of certain class analytic functions. Journal of Scientific and Engineering Research, 6(2), 154-163.

4. Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application of the second kind Chebyshev polynomial to coefficient estimates of

certain class analytic functions. International Journal of Application Sciences and Mathematics, 6(2), ISSN(Online): 2394-2894, 2019, 44-51.

5. Mustafa, N., Akbulut, E. (2019). Application Chebyshev polynomial to the solution of the Fekete – Szegö problem. Tamkang Journal of Mathematics (sunuldu 14.05.2019).

Diğer konular