

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇEMBER VE KÜREDE EVRİTİMİN UYGULAMALARI

Engin BOZAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019
KARS



T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI



ÇEMBER VE KÜREDE EVRİTİMİN UYGULAMALARI

Engin BOZAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

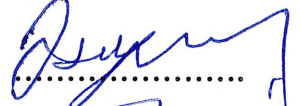
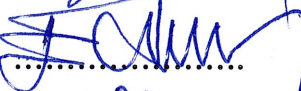

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

AĞUSTOS-2019

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Engin BOZAN' ın Prof. Dr. Erhan DENİZ' in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “Çember ve Kürede Evritimin Uygulamaları” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek ..ay birliği..... ile kabul edilmiştir.

23/08/2019

	Adı ve Soyadı	imza
Başkan	:Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	:Prof. Dr. Erhan DENİZ	
Üye	:Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/..../2019 gün ve/
..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.


Engin BOZAN

23.08.2019

ÖZET
(Yüksek Lisans Tezi)

Çember ve Kürede Evritimin Uygulamaları

Engin BOZAN

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

ÇEMBER VE KÜREDE EVRİTİMİN UYGULAMALARI

Bu tez çalışmasında çemberde ve küre üzerinde evritimin uygulamaları incelenmiştir. Evritim yardımıyla çembere ve küreye göre çemberin doğrunun ve kürenin simetrisi yansımaları incelenmiştir. Düzlem geometride birçok karmaşık çember sorusunun çözümünde nasıl kolaylıklar sağladığını yarıçaplar arasında nasıl bağlantılar elde edildiği uygulamalarla gösterildi. Ayrıca uzayda düzlem küre ilişkileri uzayda kürelere göre yansımalar incelenip bunlarla ilgili sonuçlar ve bu sonuçların bazı uygulamaları verilmiştir.

Engin BOZAN, 2019

Anahtar Kelimeler: Çember, Yarıçap, Küre, Evritim

2019, 32 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

Applications of Inversion on the Circles and Sphere

Engin BOZAN

Kafkas University

Faculty of Science and Letters

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, the applications of inversion on the circle and sphere are examined. By means of inversion, symmetry and reflections of circle, straight line and sphere have been examined with regard to circle and sphere. What convenience it provides in solving many complex circle questions in plane geometry and what links we get between radii have been shown with applications. Besides, as a result of examinations of plane and sphere relations in space and reflections in space regard to spheres, deductions concerning and some applications of these results these have been given.

Key Words: Circle, Radius, Sphere, Inversion

2019, 32 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasında çember ve kürede evritimin uygulamaları ele alınmıştır. Bu çalışmada büyük emeği geçen, bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ'e en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bugüne gelmemde en büyük destekçilerim olan ve her zaman yanımda bulunan sevgili aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.



Engin BOZAN
Kars-2019

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
ÖNSÖZ.....	VI
SİMGELER DİZİNİ.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IIX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Kuramsal Temeller.....	3
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	19
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	30
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	32

SİMGELER DİZİNİ

SİMGE	TANIMI
E	Evritim çemberi
T	Evritim noktası
C'	C çemberinin evritimi
d	Evritim noktası ile çemberin merkezi arasındaki uzaklık
k	Evritim çemberin yarıçapı
V	Evritim noktasından evrik çembere çizilen teğet doğrusu
$[AB]$	AB doğru parçası
$ AB $	$[AB]$ nin uzunluğu
$\triangle ABC$	ABC üçgeni
\hat{ABC}	ABC açısı
$\triangle TAB \square \triangle TA'B'$	$\triangle TAB$ üçgeni ile $\triangle TA'B'$ üçgeni benzer üçgenlerdir
$[AB] \perp [CD]$	$[AB]$ doğru parçası $[CD]$ doğru parçasına diktir

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil 1:</u> AB doğrusu.....	3
<u>Şekil 2:</u> $[AB]$ doğru parçası.....	3
<u>Şekil3:</u> ABC üçgeni	4
<u>Şekil 4:</u> m düzlemi	4
<u>Şekil 5:</u> O merkezli ve r yarıçaplı küre.....	5
<u>Şekil 6:</u> $\triangle ABC$ öklid üçgeni	6
<u>Şekil 7:</u> Çemberde kuvvet teoremi.....	7
<u>Şekil 8:</u> E evritim çemberi.....	7
<u>Şeki 9:</u> Bir C çemberinin E evritim çemberi.....	9
<u>Şekil 10:</u> Bir C çemberinin C' evritim doğrusu	12
<u>Şekil 11:</u> $ABCD$ dörtgeni ve $AB'C'D'$ dörtgeni.	12
<u>Şekil 12:</u> $\triangle ABC$ Erdös-Mordell Eşitsizlik üçgeni	15
<u>Şekil 13:</u> Bir C çemberinin evritimi C' çemberi.....	18
<u>Şekil 14:</u> T noktası ile R' noktaları arasındaki uzaklık V	19
<u>Şekil 15:</u> r_1 yarıçaplı çembere ve l doğrusuna teğet olan n tane çember.	20
<u>Şeki16:</u> Çemberin l doğrusuna teğet noktaları arasındaki uzunluk.....	21
<u>Şekil 17:</u> T noktası ile r_2 yarıçaplı çemberin merkezi arasındaki uzaklık.....	21
<u>Şekil 18:</u> T noktası ile N noktası arasındaki uzaklık V_n	22

Şekil 19: A çemberinin yarıçapı r , P ve G çemberlerinin yarıçapı $r_1 = \frac{r}{2}$ 23

Şekil 20: Dik üçgenin dik kenarlarının uzunluğu $h = r - 2r_2$ ve $r = 2r_1$ 26

Şekil 21: A ve P çemberinin evritimleri sırasıyla A' ve P' doğrusu.....24

Şekil 22: Çemberlerin evritimleri olan iki doğru arasına sıkışan çemberler..... 25

Şekil 23: T noktası ile r' merkezli ilk çember arasındaki uzaklık olan D_n 29



1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Evritim ya da evirtim geometrik şekillerin çemberin veya kürenin merkezine göre yansımalarıdır. İlk olarak klasik dönem Japonyasında Japon tapınaklarının duvarlarında görülen iç içe çoklu çember sorularının çözüm yolları araştırılırken kullanılmıştır. Evritim aslında Öklid teoreminin bir sonucu olup ama daha çok Öklid dışı uygulamalara ışık tutar. Evritim tam olarak Öklid geometrisi içerisinde yer almaz çünkü, Öklid geometrisi dönüşümlerinde doğru doğruya dönüşürken evritimde doğru eğriye çember ise doğruya dönüşmektedir. Bu konuda ilklerden olan J.L. Coolidge “A treatise on the Circle and the Sphere” (Coolidge, 1916) adlı çalışmasında evritim üzerine çalışmıştır. E.J. Dijkstra da “Archimedes” (Dijkstra, 1956) adlı çalışmasında evritim üzerine çalışmalarını yayınlamıştır. Zvezdelina Stankova-Frenkel ise “Inversiyon in plane” (Stankova-Frenkel,1998) adlı çalışmasında evritim uygulamalarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Son yıllarda F.J. Garcia Capitan “Aplicacion De la Inversion A la Resolucion Problema” (Garcia Capitan, 2005) adlı çalışmasında evritimin bazı uygulamalarından söz etmiştir. Ülkemizde ise Cem Tezer, evritim üzerine bazı çalışmalar yapmıştır. Cem Tezer’in 1992-I ve 1992-II Matematik dünyası dergisindeki Evritim I-II yazısında Öklid geometrisinden kaynağını alıp Öklid dışı geometri olarak gelişen Evritim (evirtim, inversiyon) kısaca şekillerin çembere göre yansımaları olarak tanımlamıştır. Daha sonra Mustafa Yağcı 2006 da Matematik Dünyası Dergisinde “Evirtim” adlı yazısında evritimin uygulamalarını göstermiştir. Evritim karmaşık bir çok şekli daha basit hale getirmede oldukça kullanışlıdır. Kullanım alanı oldukça geniş olan evritimin geçmişte uygulanan alanlar dışında geometride bir çok uygulama alanı vardır.

Bu tez çalışmasında evritim yardımıyla doğru-çember ve düzlem-küre arasındaki ilişki gösterilmiştir. Geometrideki çizim sorularına ve uzay geometrisindeki uygulamalarına ait bulgular elde edilip çeşitli uygulamaları gösterilmiştir. Üçgende kenar açı kenar benzerlik teoremini, Öklid bağıntısını, çemberin dışındaki noktanın çembere göre kuvveti özelliğini kullanarak ayrıntılı çizimlerle çemberi çembere göre ve doğruyu çembere göre yansıtıp çember ve doğruya dönüşmeleri durumları incelenmiştir.

Meydana gelen bu durumlar teoremler halinde yazılmış ve daha önce hiç yapılmamış şekilde kolay ve anlaşılır şekilde ispatlanarak sonuca ulaşılmıştır. Model sorular oluşturulup evritim kullanılarak n tane çember için n in her değeri için geçerli olacak genel bir yarıçap formülü bulunmuştur. Son olarak, elde edilen sonuçlardan yola çıkarak uzaya bunları taşıyıp, küreye göre simetri durumları araştırılmış ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir.

Sunulan bu tez genel olarak dört ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin genel bilgiler kısmının giriş kısmında tez konusu ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar tarihi bir seyir içinde sunulmuştur. Kuramsal temeller başlığında tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Meteryal ve yöntem olarak adlandırılan ikinci bölümde, evritim merkezi olan T noktasından geçen bir doğrunun evritiminden, evritim çemberinin merkezinden geçmeyen bir çemberin evritiminden, evritim çemberi merkezinden geçen bir çemberin doğruya dönüşümünden bahsedilmiş, Ptolemy Teoremi ve evritimle bir üçgenin herhangi iki kenarının toplamının üçüncü kenardan büyük olduğunun ispatı verilmiştir. Erdös-Mordel eşitsizliğini kullanarak evritimle ilgili uygulamalar gösterilmiştir. Düzlemde farklı merkezli kesişmeyen iki çember veya kesişmeyen bir doğru ve bir çember merkezleri aynı olan iki çembere dönüşümleri gösterilmiştir. Evritim merkezinden geçen düzlemin evritiminin kendisi olduğundan bahsedilmiştir. Evritim merkezinden geçen bir kürenin evritimi evritim merkezinden geçmeyen bir düzlem olduğu ve uygulaması gösterilmiştir.

Araştırma bulguları bölümünde, evritim tanım ve özelliklerinden yola çıkılarak bazı sonuçlar ispatlarıyla beraber verilmiş uygulamaları gösterilmiştir.

Tartışma ve sonuç bölümünde tez genel olarak değerlendirilmiş bu konudaki diğer çalışmalarla kıyaslanmıştır ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Kaynakça bölümünde tezde kullanılan kaynaklar verilmiştir.

1.2. Kuramsal Temeller

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1 (Nokta): Nokta, dört farklı rengin kesiştiği yer olarak tanımlanır. Noktanın eni, boyu ve yüksekliği yoktur.

Tanım 1.2.2 (Doğru): İki yönde sonsuza uzanan aynı hizadaki noktalardan oluşur. İki farklı renkteki bölgenin arasındaki sınır olarak da tanımlanabilir. Doğrunun belli olma şartı iki noktadan geçmesidir.

Düzlemde bir AB doğrusu



Şekil 1: AB doğrusu

şekliyle gösterilir. İsimlendirmesi k doğrusu şeklinde de olur. İki yönde sonsuza uzar.

Tanım 1.2.3 (Doğru parçası): Doğrudaş olan herhangi iki nokta arasında kalan doğrunun parçasıdır.

Düzlemde bir AB doğrusunun parçası

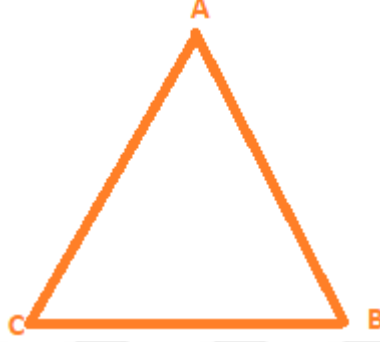


Şekil 2: $[AB]$ doğru parçası

şeklinde olup bu parça $[AB]$ ile gösterilir. $|AB|$ de doğru parçasının uzunluğunu sembolize eder.

Tanım 1.2.4 (Üçgen): A , B , C doğrusal olmayan üç nokta olmak üzere $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ kümesine ABC üçgeni denir. Düzlemde bir ABC üçgeni $\triangle ABC$ ile gösterilir (Yağcı, 2006).

Düzlemde bir $\triangle ABC$ üçgeni

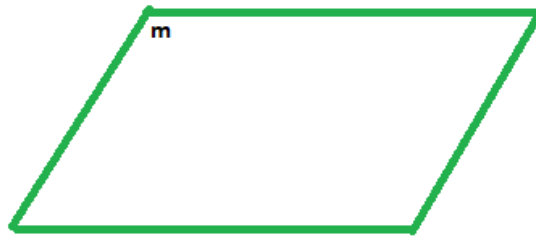


Şekil 3: $\triangle ABC$ üçgeni

şekliyle gösterilir.

Tanım 1.2.5 (Düzlem): İki boyutlu olan, yani eni ve boyu olan derinliği olmayan, sonsuza kadar uzanan paralel kenar ile sembolize edilen bölgeye düzlem denir.

Bir m düzlemi



Şekil 4: m düzlemi

şeklinde gösterilir. Düzlemler m gibi küçük harflerle gösterilir.

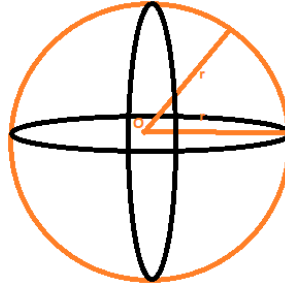
Tanım 1.2.6 (Uzay): Aynı düzlemi paylaşmayan hepsi aynı düzlemde olmayan noktalar kümesine uzay denir (Yağcı, 2006).

Düzlemsel olmayan dört nokta varsa, burada uzaydan bahsedebiliriz. Daha önce bahsettiğimiz doğru ve düzlem uzayın birer alt kümesidir.

Tanım 1.2.7 (Çember): Düzlemde, sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan tüm noktaların kümesine çember denir. Sabit noktaya çemberin merkezi, eşit uzaklığa ise çemberin yarıçapı denir.

Tanım 1.2.8 (Küre): Uzayda yeri belli olan, bir O noktasına belli bir r uzaklığında bulunan noktaların geometrik yeri olan küre yüzeyi tarafından sınırlanan, katı cisim küre denir.

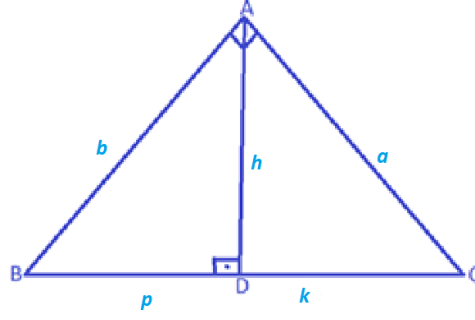
O merkezli ve r yarıçaplı bir küre



Şekil 5: O merkezli ve r yarıçaplı küre

şeklindedir.

Teorem 1.2.1 (Öklid Teoremi): $\triangle ABC$ üçgeni dik üçgen şekil 6 daki gibi verilsin $|AB| = b$, $|AC| = a$, $|BD| = p$, $|DC| = k$ olmak üzere ise bu durumda $[AD] \perp [BC]$ $b^2 = p(p+k)$ ve $a^2 = k(p+k)$ bağıntıları doğrudur.



Şekil 6: $\triangle ABC$ Öklid üçgeni

Ayrıca Şekil 6 da üçgenin yüksekliği ile kenarı arasında $h^2 = pk$ $b^2 = p(p+k)$ ve $a^2 = k(p+k)$ bağıntıları vardır.

İspat: Şekil 6 da üçgende ki Pisagor bağıntılarından

$$\begin{cases} h^2 + k^2 = a^2 \\ h^2 + p^2 = b^2 \end{cases}$$

yazılır. Bu denklem sisteminden eşitlikler taraf tarafa toplanır

$$2h^2 + p^2 + k^2 = a^2 + b^2 \quad (1.2.1)$$

elde edilir.

Diğer taraftan Pisagor teoreminden $a^2 + b^2 = (p+k)^2$ eşitliği elde edilir. Buradan

$$a^2 + b^2 = p^2 + 2pk + k^2 \quad (1.2.2)$$

yazılır. (1.2.2) deki eşitlik (1.2.1) de yerine yazılırsa

$$2h^2 + p^2 + k^2 = p^2 + 2pk + k^2$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$h^2 = pk \quad (1.2.3)$$

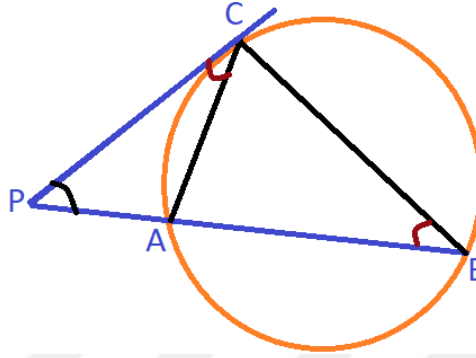
eşitliğine ulaşıldığı görülür. Pisagor teoreminden elde edilen $b^2 = h^2 + p^2$ ve

$a^2 = h^2 + k^2$ eşitliklerinde (1.2.3) denklemini yazılırsa sırasıyla $b^2 = p(p+k)$ ve

$a^2 = k(p+k)$ bağıntıları elde edilir. İspat böylece tamamlanır.

Teorem 1.2.2 (Çemberde Kuvvet Teoremi): Çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen ve çembere değme noktası C olup P noktasından geçen doğru, çemberi A ve B noktalarında kesmek üzere $|PC|^2 = |PA||PB|$ eşitliği doğrudur (bkz Şekil 7).

İspat: Düzlem üzerinde bir çember ve çember üzerinde bir C noktası alındığında

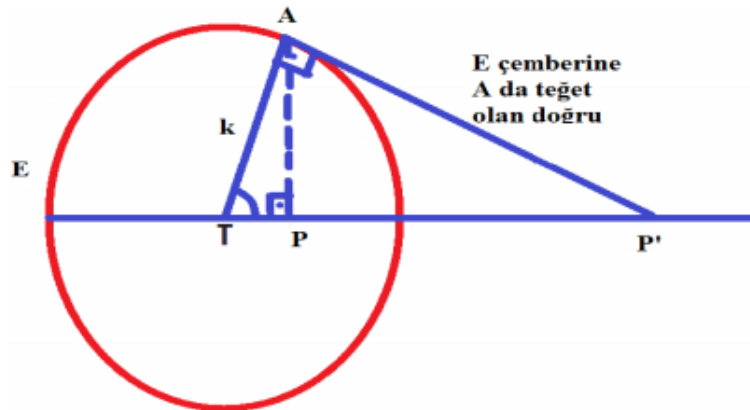


Şekil 7: Çemberde kuvvet teoremi

\hat{ACP} ve \hat{CBP} açıları aynı yayı gördüğü için eşit oldukları görülür. Buradan yola çıkarak $\hat{PAC} = \hat{PBC}$ yazılır. Benzer üçgen özelliklerinden $\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|}$ yazılır.

Buradan $|PC|^2 = |PA||PB|$ olduğu görülür. Bununla ispat tamamlanır.

Tanım 1.2.9 (Evritim): Bir noktanın, doğrunun veya çemberin bir çembere göre aksına (yansımasına) evritim denir. Oluşan şekle şeklin evritimi, şeklin üzerine yansıtıldığı çembere ise evritim çemberi denir.



Şekil 8: Evritim çemberi

E evritim çemberinin merkezi T ve yarıçapı k dir. P' noktası P noktasının evritimi dir. \hat{TAP} üçgeni ile \hat{TAP}' üçgenin birer açısı aynı ve açıları eşit olduğundan \hat{TAP} ve \hat{TAP}' üçgenleri benzerdir. \hat{TAP} ve \hat{TAP}' üçgenleri benzer olduğundan $\frac{|TP|}{k} = \frac{k}{|TP'}$ eşitliğinden $|TP| \cdot |TP'| = k^2$ evritim bağıntısı olarak bulunur.



2. MATERYAL VE YÖNTEM

Çoklu çember, çember zincirleri sorularına evritim (evritim) yardımıyla daha basit yeni, orijinal, etkili ve işlem kalabalığına gerek kalmadan çözüm bulunabilir. Örneğin n tane çember için n in her değeri için geçerli olacak genel bir yarıçap formülünün bulunması gibi Evritim dönüşümlerindeki teoremleri ispatları daha önce hiç yapılmamış şekilde, kolay ve anlaşılır biçimde yapıp evritim dönüşümlerinin sağlayacağı kolaylığa dikkat çekmek amaçlanmıştır.

Üçgende benzerlik, Öklid bağıntısı ve çemberde dışındaki noktanın çembere göre kuvveti özelliğini kullanarak ayrıntılı çizimlerle çember çembere göre doğru çembere göre yansıtılıp bunların sırasıyla çember ve doğruya dönüşme durumları incelenmiştir. Meydana gelen bu durumları teorem halinde yazıp daha önce hiç yapılmamış bir biçimde kolay ve anlaşılır şekilde ispatlanarak sonuca ulaşılmıştır. Uygulama olarak n tane teğet çember için n ye bağlı genel bir yarıçap formülü elde edilmiştir.

E çemberinin içindeki bir noktanın evritimi dışındaki, E çemberinin üzerindeki bir noktanın evritimi kendisi, dışındaki bir noktanın evritimi de içindeki bir noktadır.

T merkezli, k yarıçaplı ve kuvveti k^2 olan evritim çemberi gösterelim. Düzlemdeki T noktasından farklı bir A noktasının evritimi A' olsun. Düzlemdeki bir A noktası için, evritiminin evritimi kendisidir. Bu durumlara göre T noktasının evritimi nerede olacak? Bir nokta T noktasına yaklaştıkça, evritimi T den o kadar uzaklaşacaktır. Bu durumda T ile ∞ un birbirlerinin evritimleri olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla evritimle yapılan ispatlarda T noktasının evritimini değil, T nin düzlemdeki konumunu kullanacağız.

Geometriden bilinen aşağıdaki teoremler evritim ve basit geometri bilgileri kullanılarak yeniden ispatlanmıştır.

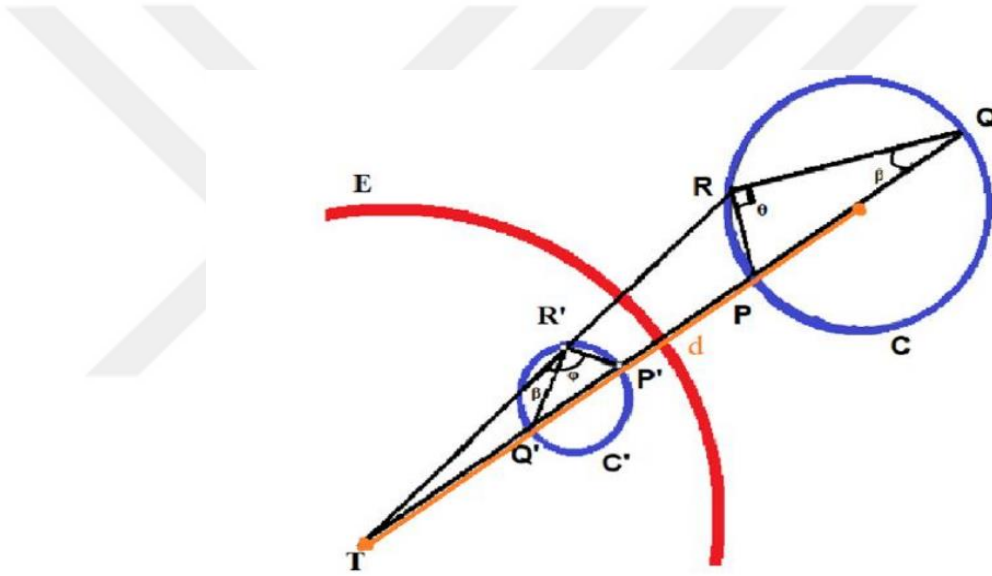
Teorem 2.1: Evritim merkezi T noktasından geçen bir doğrunun evritimi kendisidir.

İspat: Evritimini almak istediğimiz nokta T evritim merkezine ne kadar yaklaşırsa evritimi olan nokta o kadar T den uzakta olur bu durum bir P noktası ile evritimi olan

P' noktası arasındaki $|TP||TP'| = k^2$ bağıntısından görülür. Nokta ile evritimi olan nokta aynı doğru üzerindedir. Doğrular da aynı hizadaki noktalar kümesi olduğundan her noktanın evritimi ayrı ayrı alındığında yine aynı hizada noktalar kümesi yani doğru ortaya çıktığı görülür. İspatımız böylece tamamlanmış olur.

Teorem 2.2: Evritim çemberinin merkezinden geçmeyen bir çemberin evritimi yine bir çemberdir.

İspat:



Şekil 9: Bir C çemberinin E evritim çemberi

E , T merkezli evritim çemberi, Q' noktası Q noktasının evritimi, P' noktası P noktasının evritimi ve R' noktası da R noktasının evritimi olarak verilsin. d uzunluğu evritim merkezinin C çemberinin merkezine uzaklığıdır. P nin evritimi P' noktası TP doğrusu üzerinde ve R nin evritimi R' noktası TR doğrusu üzerindedir. Evritimin tanımından $|TR|.|TR'| = k^2$ ve $|TP||TP'| = k^2$ eşitlikleri elde edilir. Buradan da $\frac{|TR|}{|TP'|} = \frac{|TP|}{|TR'}}$ yazılır. Burada $\triangle TPR$ ve $\triangle TPR'$ üçgenlerinin T köşesindeki açıları ortak

olduğu da Şekil 9 da görülmektedir. Dolayısıyla $\triangle TPR$ ve $\triangle TR'P'$ üçgenlerinin benzer

olduğu bulunur. Benzerlikten dolayı \hat{TPR} açısı ile $\hat{TP'R'}$ açısının eşit olduğu kolayca görülür. Aynı şekilde \hat{TQR} ve $\hat{TQ'R'}$ üçgenleri benzerdir. Bununla birlikte \hat{TPR} açısı \hat{PQR} üçgeninin dış açısıdır. Bu yüzden \hat{TPR} açısı $\theta + \beta$ dır. Dolayısıyla \hat{TRP} açısında $\theta + \beta$ dır. $\hat{TR'P'}$ açısı $\beta + \varphi$ olduğundan $\varphi = \theta$ bulunur. θ çapı gören açı olduğundan 90° açıdır ve φ de 90° açı olur. Böylece R nin E evritim çemberine göre evritimi R' noktasıdır. R değıştikçe R' de farklı noktaları gösterir bu noktalar φ de 90° ve çapı gören açı 90° olduğundan çember oluştururlar. Buradan T den geçmeyen bir çemberin E evritim çemberine göre evritiminin bir çember olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca Teorem 2.2 nin ispatından k ya ait bir çıkarımda da bulunabiliriz. Öyle ki, $|TR| \cdot |TR'| = |TP| \cdot |TP'| = k^2$ olduğundan k bir ters orantı sabitidir ve sıfırdan farklı hangi sayı olduğunun bir önemi yoktur. O halde işleri basitleştirmek için $k = 1$ alınabilir. Bundan sonra evritim yarıçapı 1 olarak alınacaktır.

Teorem 2.3: Evritim çemberi merkezinden geçen bir çemberi çemberin evritim merkezinden geçen çapına dik bir doğruya dönüştürür.

İspat: Evritim çemberinin merkezinden geçen C çemberine evritim çemberinin çapı teğettir. $[TP]$ doğru parçasını evritim çemberinin çapına T noktasında dik olarak verilsin.



Şekil 10: C çemberinin C' evritim doğrusu

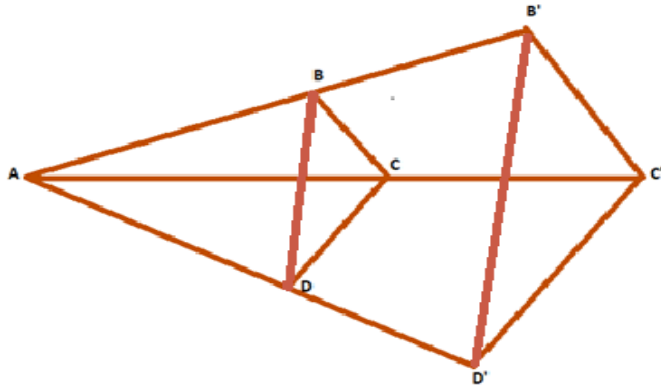
T noktası evritim çemberinin merkezi ve l evritim çemberinin çap doğrusudur. TP doğrusu ile l birbirine diktir. Gösterelim ki P nin evritiği P' noktası TP üzerinde ve Q nun evritimi olan Q' noktası da TQ üzerindedir. C' doğrusu C çemberinin evritimidir. $[TP]$ doğru parçası C çemberinin çapı ve çapı gören çevre açısı 90° olduğundan \hat{TPQ} açısı dik açı olur (bkz. Şekil 10). Bundan dolayı C çemberinin çapı olan $[TP]$ doğru parçası üzerinde P noktasının evritimi olan P' noktası vardır. Bu şekilde $k=1$ alınırsa, evritim tanımından $|TP||TP'|=1$ olur. Çap $2r$ alınırsa $|TP'|=\frac{1}{2r}$ bulunur. Eğer $|TQ|$ uzunluğu q birim ise Q' noktası Q noktasının evritimi olmak üzere TQ' uzunluğu $|TQ||TQ'|=1$ den ($k=1$) $|TQ'|=\frac{1}{q}$ olduğu görülür. Q' noktası T noktasından geçen doğru üzerindedir. Bu nedenle \hat{PTQ} açısı ile $\hat{P'T'Q'}$ açısı eşittir. Dolayısıyla $\frac{|TP'|}{|TQ'|}=\frac{q}{2r}=\frac{|TQ|}{|TP|}$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden \hat{TPQ} üçgeni sağdaki $\hat{TP'Q'}$ üçgeni ile benzerdir. Buradan $\hat{TP'Q'}$ açısı dik açı olduğu görülür. Yani çemberin dönüştüğü C' doğrusu evritim çemberinin çapı olan l doğrusuna paralel olduğu görülür. Böylece C' doğrusu T evritim merkezine $\frac{1}{2r}$ birim uzaklıktan geçen ve $[PT]$ ye dik bir doğrudur. Bununla ispat tamamlanır.

Şimdi de yukarıdaki teoremler ve Ptolemy Teoremi yardımıyla bir üçgende herhangi iki kenarın toplamının üçgenin üçüncü kenarından büyük olduğunu ispatlayalım.

Ptolemy Teoremi: A, B, C ve D düzlemde $ABCD$ dörtgeninin konveks bir dörtgen olmasını sağlayan dört nokta olmak üzere $|AB||CD| + |AD||BC| > |AC||BD|$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.4: Bir $\triangle ABC$ üçgeninde herhangi iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyüktür.

İspat: A merkezli ve k yarıçaplı evirtim alınırsa,



Şekil 11: $ABCD$ dörtgeni ve $AB'C'D'$ dörtgeni.

$B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$ olur. Buradan $|B'C'| = k^2 \frac{|BC|}{|AB||AC|}$ ve $|B'D'| = k^2 \frac{|BD|}{|AB||AD|}$ ve $|C'D'| = k^2 \frac{|CD|}{|AC||AD|}$ ve $|AC'| = \frac{k^2}{|AC|}$ ve $|AB'| = \frac{k^2}{|AB|}$ ve $|AD'| = \frac{k^2}{|AD|}$ eşitlikleri görülür. Bu eşitlikler $|AB||CD| + |AD||BC| > |AC||BD|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left(k^2 \frac{|B'D'|}{|AB||AD|}\right)\left(\frac{k^2}{|AC|}\right) < \left(k^2 \frac{|B'C'|}{|AB||AC|}\right)\left(\frac{k^2}{|AD|}\right) + \left(k^2 \frac{|C'D'|}{|AC||AD|}\right)\left(\frac{k^2}{|AB|}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $|B'D'| < |B'C'| + |C'D'|$ bulunur.

Bununla teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Şimdi de Erdös-Mordell Eşitsizliğini kullanarak evritimle çözeceğimiz iki uygulama verelim.

Erdös-Mordell Eşitsizliği: P , bir $\triangle ABC$ üçgeninin içinde veya sınırlarında yer alan bir nokta olmak üzere; sırasıyla p_a, p_b, p_c ile P noktasından üçgenin $[BC], [AC]$ ve $[AB]$ kenarlarına inen dikme uzunlukları gösterilsin. $|PA| + |PB| + |PC| \geq 2(p_a + p_b + p_c)$ eşitsizliği sağlanır.

Uygulama 2.1:

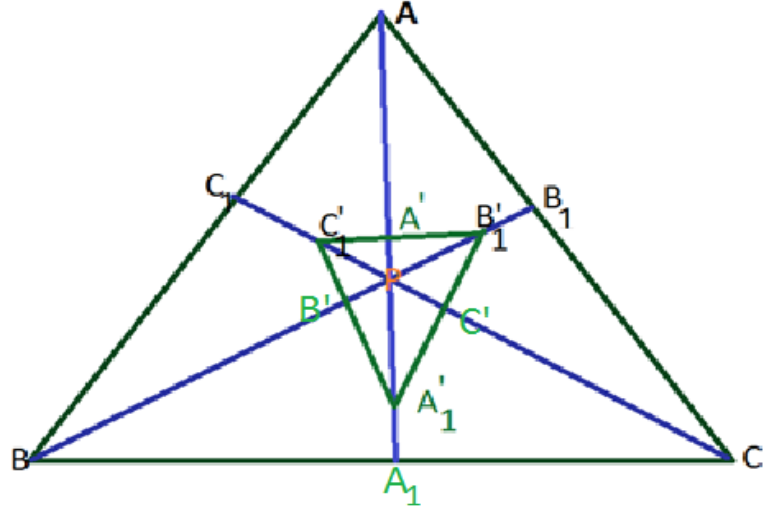
$$i) 2\left(\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|}\right) \leq \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}$$

$$ii) |PA||PB| + |PB||PC| + |PA||PC| \geq 2(p_a|PA| + p_b|PB| + p_c|PC|)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: i) P merkezli ve 1 yarıçaplı evritim yapalım. A_1, B_1, C_1 noktaları P' noktasından üçgenin kenarlarına inilen dikme ayakları olmak üzere, A_1', B_1', C_1' ve A', B', C' noktaları

A_1, B_1, C_1 ve A, B, C noktalarının evritimleri olsun. Dolayısıyla $\triangle A_1'B_1'C_1'$ üçgeninde A', B', C' noktaları P noktasından üçgenin kenarlarına inilen dikme ayakları olur.



Şekil 12: $\triangle ABC$ Erdös-Mordell Eşitsizlik üçgeni

Şimdi, $\triangle A_1B_1C_1$ üçgeni için P noktasına göre Erdös-Mordell Eşitsizliği yazılırsa

$$|PA_1| + |PB_1| + |PC_1| \geq 2(|PA'| + |PB'| + |PC'|) \quad (2.1)$$

eşitsizliği bulunur.

Diğer taraftan evritim yarıçapı 1 olduğundan $|PX| = \frac{1}{|PX'|}$ olduğunu biliyoruz. Bu

eşitliğe göre (2.1) eşitsizliği yeniden yazılırsa $2 \left(\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} \right) \leq \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}$

eşitsizliği elde edilir.

ii) Bir önceki şıktakiyle aynı şekilde bir evritim yapıлып aynı tanımlar kullanılacaktır.

Fakat bu sefer farklı bir üçgende Erdös-Mordell eşitsizliğinden faydalanılacak. $\triangle A'B'C'$

üçgeninde üçgenin kenalarına inen dikme uzunlukları p_a' , p_b' , p_c' olsun. Teorem 2.2

den

$$p_a' = \frac{p_a \cdot 1}{|PB||PC|}, \quad p_b' = \frac{p_b \cdot 1}{|PA||PC|}, \quad p_c' = \frac{p_c \cdot 1}{|PA||PB|} \quad (2.2)$$

eşitlikleri elde edilir. Evritimin tanımından

$$|PA'| = \frac{1}{|PA|}, |PB'| = \frac{1}{|PB|}, |PC'| = \frac{1}{|PC|} \quad (2.3)$$

olduğu kolayca görülür. (2.2) ve (2.3) denklemleri

$$|PA'| + |PB'| + |PC'| \geq 2(p'_a + p'_b + p'_c)$$

Erdös-Mordel eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur. Sonuç olarak $|PA||PB| + |PB||PC| + |PA||PC| \geq 2(p_a|PA| + p_b|PB| + p_c|PC|)$ eşitsizliği yazılır.

Bu zamana kadar evritim r yarıçaplı çemberde tanımlanıp teoremlerle bunların uygulamaları gösterildi. Şimdi de evritim kürede verilecek. Bunun yanı sıra elde edilen sonuçların bazı uygulamaları sunulacaktır.

Uzayda bulunan bir A noktasının T merkezli r yarıçaplı bir e küresine göre evritimi $|TA||TA'| = r^2$ şartını sağlayan A' noktasıdır.

Aşağıda düzlemde verilen teoremlerin (Teorem 2.1 ve 2.2) ve uygulamaların uzaydaki versiyonu verilmiştir.

Teorem 2.5: Evritim merkezinden geçen düzlemin evritimi kendisidir.

İspat: Teorem 2.1 de göstermiş olduğumuz gibi düzlem üzerinde evritim merkezinden geçen doğrular çizelim bu doğruların tümü düzlemi kaplar ve buda düzlemin evritiminin kendisi olduğunu gösterir. Evritim bütün doğrularda doğruluğu kanıtlanmış teoremlere sahip olduğundan doğrulardan oluşan düzlemde de aynı teoremler geçerlidir.

Teorem 2.6: Evritim merkezinden farklı A ve B gibi iki noktanın r yarıçaplı kürenin T merkezine göre evritimi A' ve B' olsun. Bu durumda $\triangle TAB \cong \triangle TA'B'$ ve $|A'B'| = \frac{r^2 \cdot |AB|}{|TA| \cdot |TB|}$ bağıntıları sağlanır.

İspat: T , A ve B noktalarını aynı düzlemde alalım. T den geçen herhangi bir düzlemin e küresi ile kesişimi r yarıçaplı çemberdir. Evritimin tanımından yazılan

$|TA'| = \frac{r^2}{|TA|}$ ve $|TB'| = \frac{r^2}{|TB|}$ eşitlikleri kullanarak $\frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|TB'|}{|TA'|}$ bulunur. Buda

$\triangle TAB \cong \triangle TA'B'$ demektir. Bu benzerliği kullanarak $\frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|TB'|}{|TA'|} = \frac{|A'B'|}{r^2}$ yazılır. Buradan

$|A'B'| = \frac{r^2 \cdot |AB|}{|TA| \cdot |TB|}$ elde edilir.

Teorem 2.7: Evritim merkezinden geçen bir kürenin evritimi, evritim merkezinden geçmeyen bir düzlemdir. Evritim merkezinden geçmeyen bir düzlemin evritimi, evritim merkezinden geçen bir küredir.

İspat: T merkezli TT_1 yarıçaplı tüm çemberlerin birleşimi küre belirtir. Çemberlerden birine C ve bu çemberden geçen düzleme m diyelim. C çemberinin T ye göre evritimi l doğrusu olsun. Bu durumda $TR \perp l$ olur (R , T_1 in evritimidir). l doğrusunu ve C çemberini TR etrafında 180° döndürelim. Sonuçta p düzlemine dik bir düzlem oluşur. C çemberi küreye, l doğrusu da m düzlemine dik bir düzleme dönüşür. e küresinin üzerindeki tüm noktaların T noktasına göre evritimi p düzlemine dik bir düzlem üzerindedir. p düzlemine dik bir düzlem üzerinde olan noktaların evritimi e küresinin üzerindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Uygulama 2.2: 3 boyutlu uzayda iki çember göz önüne alalım. Eğer bu çemberlerin ikisi de bir P noktasından geçiyor ve bu çemberlerin P noktasından geçen teğetleri ortaksa, bu çemberlere “ikili” adı verilir. Üçü birden bir düzlemde bulunmayan üç çember, üç farklı noktada ikişerli “ikili” çemberlerdir. Bu çemberlerden geçen bir küre bulunduğunu ispatlayalım.

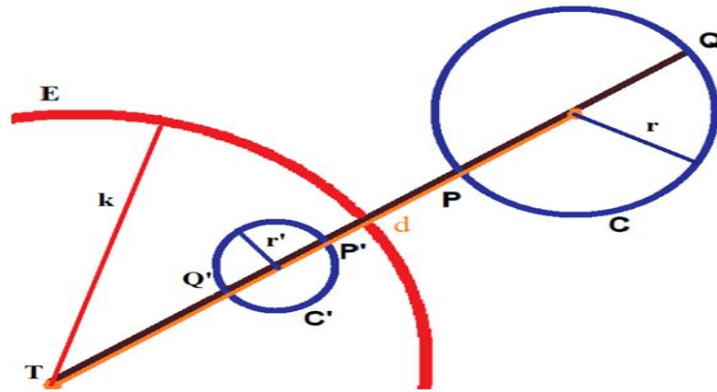
İspat: Çemberlerin kesişim noktalarından olan bir K noktaya göre evirtim alalım. Dolayısıyla iki doğru ve bu doğrulara teğet olan bir çemberin olduğu yeni bir şekil elde edilir. Fakat her çember, o çembere teğet olan doğrular ile düzlemsel olduğundan, K noktası, bu iki doğru ve çember düzlemseldir. Buda Teorem 2.7 den, evirtim alınmamış şekildeki çemberlerin aynı küre üzerinde olması anlamına gelir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Öncelikle evritim merkezinden geçmeyen bir çember evritim çemberine yansıtılıp incelenmiştir. T noktası ile C çemberi arasındaki uzunluk d yi veren $r' = \frac{k^2 \cdot r}{|d^2 - r^2|}$ bağıntısı bulunmuştur. İkinci olarak çemberin içerisinde oluşan çembere evritim merkezinden çizilen teğet doğrusunun uzunluğunu veren bir eşitlik bulunmuştur. Evritimle ilgili elde edilen bu bulguların bazı uygulamalarını gösteren iki soru üretilip çözülmüştür.

Teorem 3.1: Bir C çemberinin yarıçapı r ve C çemberinin evritimi olan C' çemberinin yarıçapı r' ve evritim merkezi olan T noktası ile C çemberi arasındaki uzunluk d olsun. Bu durumda r ile r' arasında $r' = \frac{k^2 r}{|TP||TQ|}$ veya $r' = \frac{k^2 \cdot r}{|d^2 - r^2|}$ bağıntısı vardır (Bozan ve Deniz 2019).

İspat: Düzlemde bir C çemberinin yarıçapı r ve evritimi olan C' çemberinin yarıçapı da r' olsun.



Şekil 13: Bir C çemberinin evritimi C' çemberi

C' çemberinin yarıçapı $r' = \frac{|TP'| - |TQ'|}{2}$ (bkz. Şekil 13) olarak bulunur. Evritim

tanımından $|TQ| \cdot |TQ'| = k^2$ ve $|TP| \cdot |TP'| = k^2$ olduğu görülür. Buradan $|TP'| = \frac{k^2}{|TP|}$ ve

$|TQ| = \frac{k^2}{|TQ'|}$ elde edilir. Bu ifadeler $r' = \frac{|TP'| - |TQ'|}{2}$ eşitliğinde yerine konulursa,

$r' = \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{|TP|} - \frac{1}{|TQ|} \right) = \frac{k^2}{2} \left(\frac{|TQ| - |TP|}{|TP||TQ|} \right)$ ifadesi elde edilir. C çemberinin yarıçapı olan r

nin $r = \frac{|TP| - |TQ|}{2}$ olduğu Şekil 13'den görülür. $r' = \frac{k^2}{2} \left(\frac{|TQ| - |TP|}{|TP||TQ|} \right)$ eşitliğinde

$|TQ| - |TP| = 2r$ yazılırsa $r' = \frac{k^2 \cdot r}{|TP||TQ|}$ elde edildiği görülür. Şekil 13 incelendiğinde

$|TP|$ nin $(d - r)$ ve $|TQ|$ nun ise $(d + r)$ olduğu açıkça görülür. Bu ifadeler

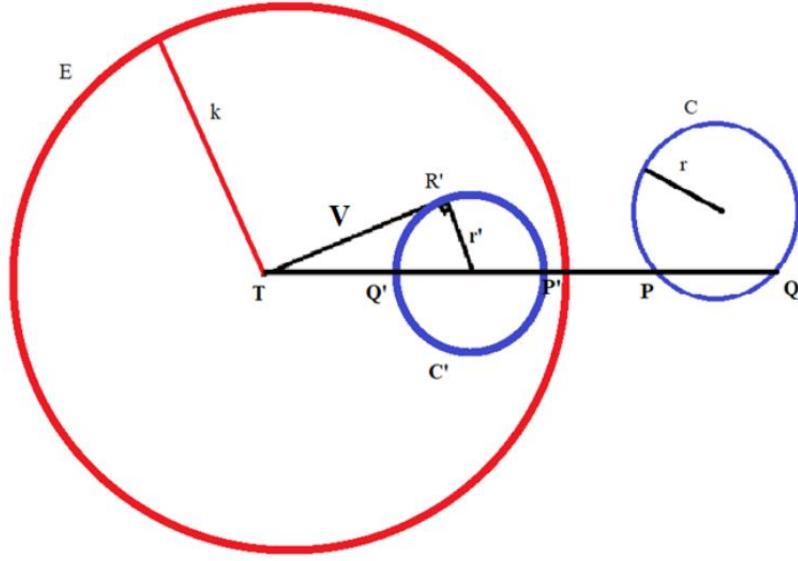
$r' = \frac{k^2 \cdot r}{|TP||TQ|}$ eşitliğinde yerine yazılırsa $r' = \frac{k^2 \cdot r}{(d - r)(d + r)}$ ifadesi elde edilir. Burada

d veya r değerlerinin arasındaki büyüklük durumu değişeceğinden ancak yarıçap r'

negatif olamayacağından payda mutlak değer içinde yazılır. Buradan $r' = \frac{k^2 \cdot r}{|d^2 - r^2|}$

olduğu açıkça görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremden, evritim çemberinin merkezinden geçmeyen bir çemberin evritim çemberine göre yansıtılması durumu incelenmiştir. Sonuç olarak evritim merkezinden geçmeyen bir çember oluştuğu görülür.



Şekil 14: T noktası ile R' noktaları arasındaki uzaklık V

Şekil 14 de, E ile evritim çemberinin yarıçapı k merkezi T dir. T noktasından geçip R' noktasında r' yarıçaplı C' çemberine teğet olan teğet doğrusunun uzunluğu V olsun. r yarıçaplı C çemberinin evritimi C' çemberidir. P noktasının evritimi P' ve Q noktasının evritimi Q' noktasıdır. Şimdi Şekil 14 deki bilgileri kullanarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2: Şekil 14 de verilen V , evritim merkezi T den geçip C nin evritimi olan C' çemberine teğet olan doğrunun uzunluğu ise $V^2 = \frac{r'k^2}{r}$ bağıntısı doğrudur (Bozan ve Deniz 2019).

İspat: Şekil 14 ü inceleyip basit bir çemberdeki çemberde kuvvet teoremi kullanılarak ispat yapılır. Buna göre $V^2 = |TP'| |TQ'|$ eşitliği elde edilir. C çemberinin yarıçapı $r = \frac{|TQ| - |TP|}{2}$ bağıntısından bulunur. Evritim tanımından $|TQ| |TQ'| = k^2$ ve $|TP| |TP'| = k^2$ dir. Buradan $|TP| = \frac{k^2}{|TP'|}$ ve $|TQ| = \frac{k^2}{|TQ'|}$ eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu

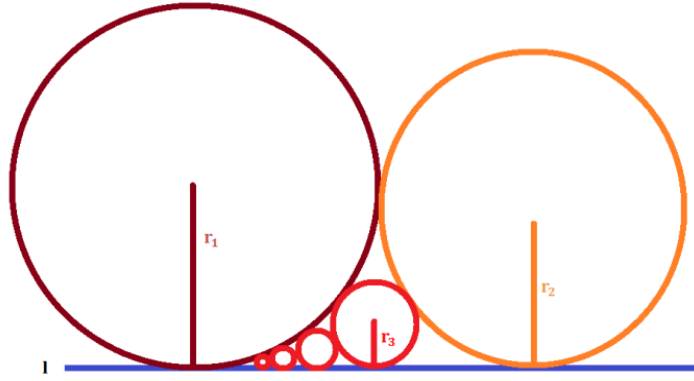
eşitlikler $r = \frac{|TQ| - |TP|}{2}$ ifadesinde yerine yazıldığında $2r = \frac{|TP'| - |TQ'|}{|TP'| |TQ'|} \cdot k^2$ eşitliği

bulunur. Böylece C' çemberinin yarıçapı $r' = \frac{|TP'| - |TQ'|}{2}$ olarak elde edilir.

$|TP'| - |TQ'| = 2r'$ eşitliği ile $|TP'| |TQ'| = V^2$ ifadesi $2r = \frac{|TP'| - |TQ'|}{|TP'| |TQ'|} k^2$ denkleminde

yerine yazıldığında $V^2 = \frac{r' k^2}{r}$ eşitliği bulunur. Bununla ispat tamamdır.

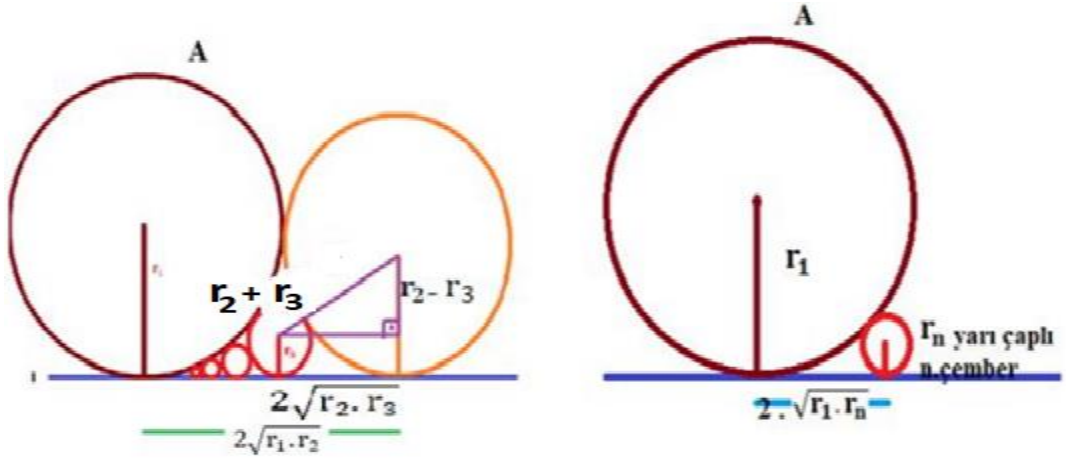
Evritimle ilgili yukarıda elde edilen bulguların bazı uygulamaları aşağıda verilmiştir.



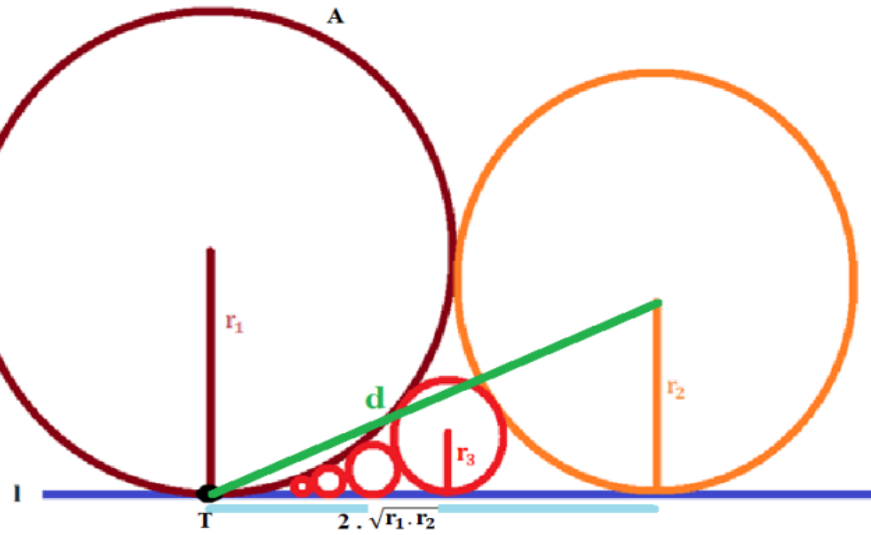
Şekil 15: r_1 yarıçaplı çembere ve l doğrusuna teğet olan n tane çember

Uygulama 3.1: Hem r_1 yarıçaplı çembere hem de l doğrusuna teğet olan n tane çemberden oluşan Şekil 15 deki çemberler için $r_n = \frac{r_1 \cdot r_2}{((n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2}$ dir (Bozan ve Deniz 2019).

İspat:



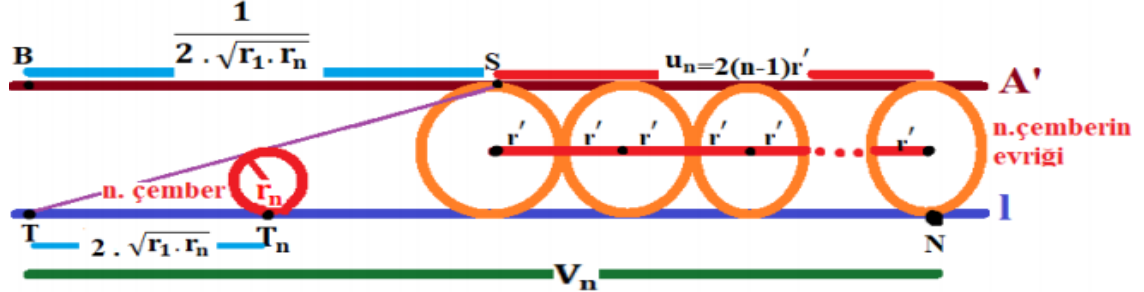
Şekil 16: Çemberin l doğrusuna teğet noktaları arasındaki uzunluk



Şekil 17: T noktası ile r_2 yarıçaplı çemberin merkezi arasındaki uzaklık

T noktası evritim çemberinin merkezidir. l doğrusu evritim merkezinden geçtiği görülmüştür. Pisagor teoreminden $d^2 = r_2^2 + (2\sqrt{r_1 \cdot r_2})^2$ bağıntısı bulunur. A çemberi T noktasından geçtiğinden dolayı A' doğrusuna dönüşür. l doğrusu T den geçtiğinden evritim merkezinden geçen doğrunun evritiminin kendisi olduğu görülmüştür. Hem A çemberine hem de l doğrusuna teğet n tane çemberin evritimi T noktasından geçmediğinden A' ve l doğruları arasında eşit yarıçaplı çemberler olduğu görülmüştür. (Bkz Şekil 17). Teorem 3.1 deki $r'^2(d^2 - r^2)^2 = k^4 r^2$ eşitliğinde $k=1$ alınıp Şekil 17 de

uyguladığında $r_2'^2(d^2 - r_2^2)^2 = r_2^2$ eşitliği bulunur. Bu eşitlikte d^2 yerine $r_2^2 + (2\sqrt{r_1 \cdot r_2})^2$ yazılırsa $r' = r_2' = \frac{1}{4r_1}$ olduğu görülür



Şekil 18: T noktası ile N noktası arası uzaklık V_n

Şekil 18 de evritim tanımı uygulanarak $|BS||TT_n|=1$ den $|BS| = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_n}}$ bulunur. Şekil

18 de yarıçapları r' olan evritim çemberlerinin A' doğrusuna teğet olan ilk r' yarıçaplı çemberin A' doğrusu üzerindeki teğet noktası ile son r' yarıçaplı çemberin A' doğrusuna teğet olduğu nokta arasındaki uzaklık $2(n-1)r'$ olarak bulunur. Şekil 18

de evritim V_n gösterimi evritim merkezinden geçip n . çembere teğet olan doğrunun T noktası ile N noktası arasındaki uzunluk olarak verilsin. Daha sonra Teorem 3.2 den

elde edilmiş olan $V^2 = \frac{r'k^2}{r}$ eşitliğinde özel olarak $k=1$ alınır ve $V_n^2 = \frac{r'}{r_n}$ eşitliği

elde edilir. Her iki tarafın kare kökü alınarak $V_n = \frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r_n}}$ eşitliği bulunur. Şekil 18 den de

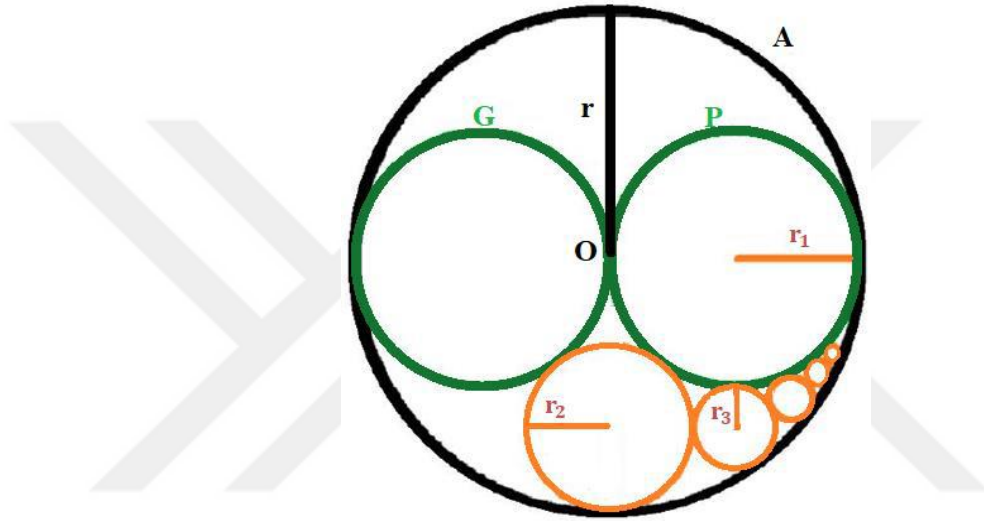
görüldüğü üzere $V_n = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_n}} + 2(n-1)r'$ eşitliği elde edilir. Buradan

$$\frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_n}} + 2(n-1)r' \quad \text{bağıntısı düzenlenerek} \quad r_n = \frac{r_1 r_2}{((n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2} \quad \text{eşitliği}$$

bulunur. Böylece n . çemberin yarıçapı bulunur. Bununla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uygulama 3.2: Yarı çapı r olan bir A çemberi ve içine yarıçapları $r_1 = \frac{r}{2}$ olan P ve G çemberleri alınır, r_2 yarıçaplı çember ile başlayan ve r_n yarıçaplı çembere kadar giden n tane çemberden oluşan bir çember zinciri çizilirse, (Bkz şekil 19) Bu düzende r_n değerini en büyük çemberin yarıçapı olan r ye bağlı olarak bulunur (Bozan ve Deniz 2019).

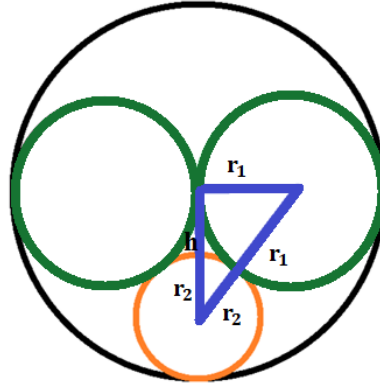
Bu soru ulaşılan bulgular kullanılarak şaşırtıcı derecede kolay bir şekilde çözülmüştür.



Şekil 19: A çemberinin yarıçapı r , P ve G çemberlerinin yarıçapı $r_1 = \frac{r}{2}$

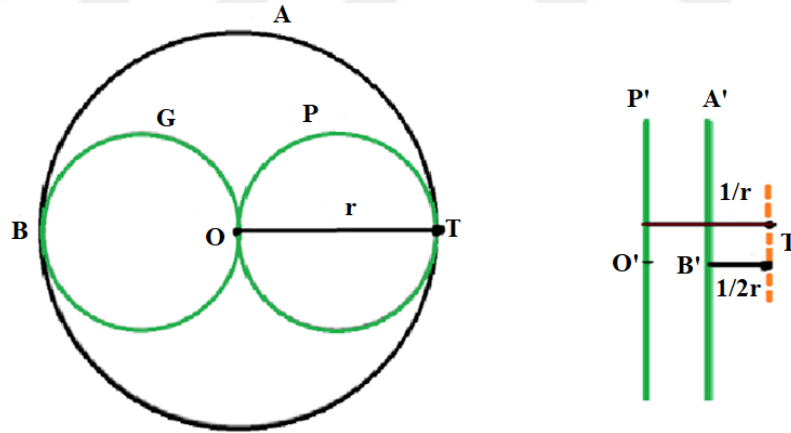
Şekil 19 da A çemberinin içindeki çember zinciri yarıçapı r_2 olan çemberle başlayıp yarıçapı r_n olan çembere kadar giden n tane çemberden oluşur.

İspat: Öncelikle r_2 değerini r değerine bağlı olarak Şekil 20 den yararlanarak elde edilmiştir.



Şekil 20: Dik üçgenin dik kenarlarının uzunluğu $h = r - 2r_2$ ve $r = 2r_1$

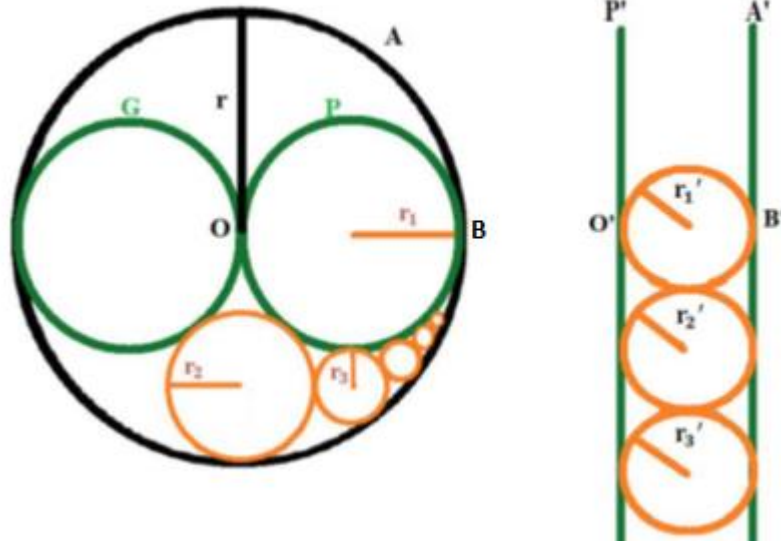
Öncelikle $r - 2r_2 = h$ olduğunu Şekil 20 den görülür. Şekil 20 deki mavi dik üçgende pisagor teoreminden $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + (r_2 + h)^2$ eşitliğini yazılır. $r - 2r_2 = h$ ve $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + (r_2 + h)^2$ eşitliklerinden $r_2 = \frac{r}{3}$ bulunur. $r_2 = \frac{r}{3}$ eşitliğini bulduktan sonra evritimle elde edilen bulguları örnek soruda oluşturulan düzene uygulanmıştır.



Şekil 21: A ve P çemberinin evritimleri sırasıyla A' ve P' doğrusu

T noktası evritim çemberinin merkezi olmak üzere evritim çemberi merkezinden geçen bir çemberi çemberin evritim merkezinden geçen ve çapına dik doğruya dönüştürür. A' doğruyu ve P' doğrularının paralel doğrular olduğu açıktır.

Evritim çemberi merkezinden geçen bir çemberi çemberin evritim merkezinden geçen çapına dik doğruya dönüştürür. Buna göre A çemberi A' doğrusuna ve P çemberi P' doğrusuna dönüşür (Bkz.Şekil 21). Evritim uygulanırken kolaylık için $k=1$ alınmıştır (Bkz. k ya ait çıkarım). Evritim tanımından $|TO||TO'|=1$ dir. $|TO|=r$ olduğundan (Bkz.şekil 21) $|TO'|=\frac{1}{r}$ olarak bulunur. Benzer şekilde yine evritim tanımından $|TB||TB'|=1$ ve $|TB|=2r$ olduğundan $|TB'|=\frac{1}{2r}$ olarak yazılır. Böylece P' doğrusunun T noktasından $\frac{1}{r}$ birim uzaklıkta ve A doğrusunun T noktasından $\frac{1}{2r}$ birim uzaklıktan geçtiği bulunur. Sonra G çemberinin evritimi incelendiğinde, G çemberi T noktasından geçmediğinden evritimi yine bir çemberdir. Dolayısıyla G çemberi O noktasında P çemberine ve B noktasında A çemberine teğet olduğundan r_1 yarıçaplı G çemberinin evritimi olan r_1' yarıçaplı çember, A' doğrusuna ve P' doğrusuna teğet olduğu görülür. Yani G çemberinin evritimi olan r_1' yarıçaplı çember A' doğrusu ve P' doğrusu arasında olduğu görülür (bkz. Şekil 22).



Şekil 22: Çemberlerin evritimleri olan iki doğru arasında sıkışan çemberler

r_1 yarı çaplı G çemberi B noktasında A çemberine ve O noktasında P çemberine teğettir. G çemberinin evritimi olan r_1' yarıçaplı çember A' ve P' doğrusuna teğet ve

bu doğrular arasındadır. Ayrıca r_2 yarıçaplı çemberde r_1 yarıçaplı G , A ve P çemberine teğettir.

Buradan r_1 yarıçaplı çemberin evritimi olan r'_1 yarıçaplı çember r'_2 yarıçaplı çembere ve A' doğrusu ve P' doğrusuna teğet ve A' ve P' doğruları arasındadır. A çemberinin içindeki yarıçapı r_1 olan çemberle başlayıp yarıçapı r_n olan çembere kadar giden n tane çemberden oluşan çember zincirinin her bir çemberi A çemberine ve P çemberine teğettir. O halde zincirdeki her bir çemberin evritimi A' doğrusu ve P' doğrusuna teğet ve A' ve P' doğruları arasındadır. A' doğrusu ve P' doğruları paralel olduğundan aralarındaki tüm çemberlerin yarıçapları eşittir. O halde A çemberinin içindeki yarıçapı r_1 olan çemberle başlayıp yarıçapı r_n olan çembere kadar giden n tane çemberden oluşan çember zincirinin her bir çemberinin evritimi olan çemberlerin yarıçapları aynıdır sonucuna ulaşılır. Yani

$$r'_1 = r'_2 = r'_3 = \dots = r'_n = r'$$

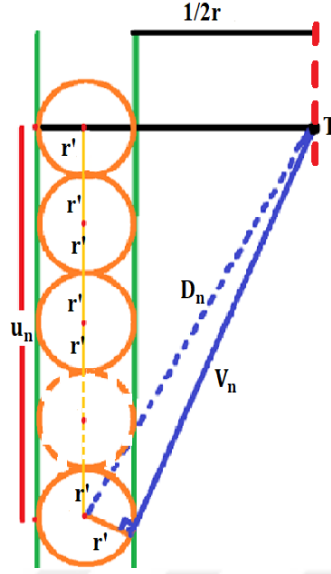
olur.

Sonra r' nü r cinsinden ifade edelim. Bunun için önce T den geçmeyen ve r_1 yarıçaplı G çemberi incelenir. Evritim çemberinin merkezi olan T noktasından r_1 yarıçaplı çemberin merkezine olan uzaklığa Teorem 3.1 e göre d denilirse $d = 3r_1$ elde edilir (Bkz. şekil 22). Teorem 3.1 de $r'^2 \cdot (d^2 - r^2)^2 = k^4 \cdot r^2$ eşitliğinde özel olarak $k = 1$ alınır ve bu formül Şekil 22 de uygulandığında $r'_1 \cdot (d^2 - r_1^2)^2 = r_1^2$ eşitliği bulunur. Bu

son eşitlikte d yerine $3r_1$ yazılırsa $r' = r'_1 = \frac{1}{8r_1}$ elde edilir. Ayrıca $r_1 = \frac{r}{2}$ dir. Buradan

$r' = \frac{1}{4r}$ olarak bulunur. Şekil 23 den görüldüğü üzere yarıçapları r' olan evritim

çemberlerinin A' doğrusuna teğet olan ilk r' yarıçaplı çemberin A' doğrusu üzerindeki teğet noktası ile son r' yarıçaplı çemberin A' doğrusuna teğet olduğu nokta arasındaki uzaklık $2(n-1)r'$ olarak bulunur. $u_n = 2(n-1)r'$ eşitliği yazılır.



Şekil 23: T noktası ile r' merkezli ilk çember arasındaki uzaklık olan D_n

Diğer taraftan Pisagor teoremiyle $V_n^2 + r'^2 = D_n^2$ ve $D_n^2 = \left(r' + \frac{1}{2r}\right)^2 + u_n^2$ eşitliği elde

edilir. Daha sonra Şekil 23 de Teorem 3.2 deki $V^2 = \frac{r' \cdot k^2}{r}$ de $k=1$ alınırsa $V_n^2 = \frac{r'}{r_n}$

eşitliği yazılır. Sonra $r' = \frac{1}{4r}$ ile $u_n = 2(n-1)r'$ ve $V_n^2 = \frac{r'}{r_n}$ eşitlikleri $D_n^2 = V_n^2 + r'^2$

bağintısında yerine yazılırsa, $D_n^2 = \left(\frac{1}{4r}\right)^2 + \left(\frac{1}{4r}\right)^2$ eşitliği bulunur. Bu son eşitlik

$D_n^2 = \left(r' + \frac{1}{2r}\right)^2 + u_n^2$ eşitliğinde yerine yazılırsa $r_n = \frac{r}{2+(n-1)^2}$ formülü elde edilir.

Böylece A çemberinin içindeki yarıçapı r_2 olan çemberle başlayıp yarıçapı r_n olan çembere kadar giden n tane çemberden oluşan çember zincirinin istediğimiz herhangi bir çemberinin yarıçapını kolayca veren bir formül elde edilmiş olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır:

- ✓ C çemberinin yarıçapı r ve C çemberinin evritimi olan C' çemberinin yarıçapı r' , evritim merkezi olan T noktası ile C çemberi arasındaki uzunluk d olmak üzere, r ile r' arasında $r' = \frac{k^2 \cdot r}{|d^2 - r^2|}$ bağıntısı vardır.
- ✓ Evritim merkezinden geçip evrik çembere teğet olan doğru geçtiği evritim merkezinden evrik çembere teğet olma noktasına kadar olan uzunluk V olmak üzere $V^2 = \frac{r'k^2}{r}$ bağıntısı vardır.
- ✓ Şekil 18 de hem r_1 yarıçaplı çembere hem de l doğrusuna teğet olan n tane çemberden oluşan şekilde $r_n = \frac{r_1 r_2}{((n-2)\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1})^2}$ bağıntısı elde edilir.
- ✓ Evritim merkezinden geçen iki çembere teğet olan veya evritim merkezinden geçen bir doğru ve bir çembere teğet olan evritim merkezinden geçmeyen çemberin evritimi evritim merkezinden geçen çember ve doğruların evrikleri olan doğrulara teğet ve bunların arasındadır.

Çalışmamız içinde çok sayıda çember bulunduran problemlerin çözümüne yeni ve kolay bir yol kazandırmıştır. Araştırma konumuzda ele aldığımız teoremlere, taradığımız kaynaklarda bulunmayan ispatlar üretilip sonuçlar bulunmuştur. Çalışmamızda bulunan sonuçlar 2019 yılında Erzurumda yapılan 5. International Conference on Mathematics-Engineering-Natural and Medical Sciences (M.A.S.) isimli sempozyumda sunulmuş ve sempozyum kitabında tam metin olarak basılmıştır. Çalışmamız genişletilmeye derinleştirilmeye açıktır. Evritimle ilgili bulgular kullanılarak üçgenin iç teğet çemberine göre evritimi incelenebilir çeşitli teoremler daha basit kısa yoldan ispatlanılabilmektedir. Bunlar başka çalışmaların konusu olarak önerilebilir. Evritim dönüşümlerinin zor gibi görünen çoklu çember soruları bu bakış açısıyla basitleştirilerek etkili bir yolla çözülebilir geometrik teoremlere farklı bir açıdan bakmayı sağlar.

KAYNAKLAR

- Bozan, E. and Deniz, E. (2019). İçerisinde n Tane Çember Bulunduran Problemlerin Evritimle Basitleştirilmesi. M.A.S. International Conference, Erzurum, 99-109.
- Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. (1967). Geometry Revisited. Matematical Association of America, Washington DC.
- Eves, H. W. A. (1967). Survey of Geometry Revisited. Washinngton. Matematical Association of America, Washington DC.
- Frenkel-S. Z. (1998). Inversion in the Plane - Part 2: Radical Axes. Berkeley Math Circle.
- Kin Y. Li. (2004). Inversion. Mathematical Excalibur, Volume 9, Number 2.
- Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G. and Delgado, R. V. (2009). Inequalities (A Mathemmatical Olympiad Approach). Birkhauser Basel.
- Ogilvy, C. S. (1990). Excursions in Geometry. Dover Publications Inc, Newyork.
- Patterson, Boyd C. (1933). The Origins of the Geometric Principle of Inversiyon. Isis, 19(1), 154-180 .
- Prasolov, V. (2001). Problems in Plane and Solid Geometry (v.1 Plane Geometry), translated and edited by Dimitry Leites.
- Sezgin, N. (2014). Öklidyen Düzlemde ve Taksi Düzlemde Evritim Üzerine (Yüksek lisans tezi), Eskişehir Osmangazi Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Tezer, C. (1992). Evritim I, II. Matematik Dünyası Dergisi, 12-16, 8-12.
- Wilks, R., Mallows, L. and Lagarias, C. (2002). Beyond the Descartes Circle Theorem, The American Mathematical Montly, 109(4), 338-361.
- Yağcı, M. (2006). Evritim. Matematik Dünyası Dergisi, 72-81.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Engin BOZAN
Doğum Yeri ve Tarihi : IĞDIR/Merkez 05/05/1983
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (e-posta) : enginbozan8@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Iğdır Lisesi/Iğdır 1997-2000
Lisans : Yüzüncü Yıl Üniversitesi (2000-2005)
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi (2013-2019)
Çalıştığı Kurumlar : Iğdır 125.Yıl Anadolu Lisesi