T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEBESGUE İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLARIN BANACH UZAYININ ANALOGLARINDA SABİT NOKTA TEORİSİ

Ebru TOPCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEBESGUE İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLARIN BANACH UZAYININ ANALOGLARINDA SABİT NOKTA TEORİSİ

Ebru TOPCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

HAZİRAN-2019
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Ebru Topcu'nun Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayının analoglarında sabit nokta teorisi" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği... ile kabul edilmiştir.

20/ 06/ 2019

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye	: Prof. Dr. İsa YILDIRIM	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ../ .. / 20.. gün ve ... .../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ebru TOPCU
20.06.2019

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

LEBESGUE İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLARIN BANACH UZAYININ ANALOGLARINDA SABİT NOKTA TEORİSİ

Ebru TOPCU

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veysel NEZİR

Goebel ve Kuczumow göstermiştir ki mutlak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayı ℓ^1'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıf vardır. Bu gerçekten esinlenerek, Lin ℓ^1'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğini ispatlamıştır. Lin bu çalışması yansımayan Banach uzaylarının bazılarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayacak şekilde yeniden normlanabileceğine dair ilk örneği olmuştur. Araştırmacıların daha fazla örneklerin olup olamayacağı konusunda ilgisi bulunmaktadır. Maria ve Hernandes Lineares ise [0,1] aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisinin sağlanacak şekilde yeniden normlanabileceğini göstermiştir. Fakat Goebel ve Kuczumow analojisinin bu uzay üzerine bir incelemesi yapılmamıştır. Ayrıca, Nezir ve Sivek'in son çalışmalarında $L_1[0,1]$'in bir analoğu olan Lorentz fonksiyon uzayları $L_{w,1}[0,1]$'i incelenmiştir. Çalışmalarında Alspach'ın $L_1[0,1]$'in zayıf sabit nokta teorisini sağlamadığını gösterdiği gibi $L_{w,1}[0,1]$ 'in de zayıf sabit nokta teorisini sağlamadığını gösterilmişdir.

Bu tez çalışmasında öncelikle gösterilmektedir ki $L_1[0,1]$ içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır. Tez çalışmasının sonraki bölümünde ise $L_{w,1}[0,1]$ üzerinde incelemeler yapılmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_{w,1}[0,1]$ içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, yansımayan Banach uzayı, sabit nokta teorisi, kapalı sınırlı konveks küme, yeniden normlama, Lebesgue fonksiyon uzayları, Lorentz fonksiyon uzayları

2019, 24 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

FIXED POINT PROPERTIES FOR BANACH SPACES ANALOGOUS TO BANACH SPACE OF LEBESGUE INTEGRABLE FUNCTIONS

Ebru TOPCU

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof Dr. Veysel NEZİR

Goebel and Kuczumow showed that there exists a very large class of closed, bounded, convex subsets in Banach space of absolutely summable scalar sequences, ℓ^1 with fixed point property for nonexpansive mappings. Inspired by their facts, later, Lin proved that ℓ^1 can be renormed to have the fixed point property for nonexpansive mappings. His example was the first example of a nonreflexive Banach space which can be renormed to have the fixed point property. Researchers wonder whether or not there exist more examples. Maria and Hernandes Lineares showed that Banach space of Lebesgue integrable functions on [0,1], $L_1[0,1]$ can be renormed to have fixed point property for affine nonexpansive mappings. However, there was no investigation for Goebel and Kuczumow's analogy of this space. Furthermore, recently, by Nezir and Sivek, Lorentz function spaces $L_{w,1}[0,1]$ which is an analogue of $L_1[0,1]$ have been investigated. In their study, fixed point theory oriented results have been obtained. It is showed by them that these spaces also fail the weak fixed point property as Alspach proved $L_1[0,1]$ fails the weak fixed point property. In this thesis study, firstly, it is shown that there exists a very large class of closed, bounded, convex subsets in $L_1[0,1]$ with fixed point property for nonexpansive mappings. Next, Lorentz function spaces $L_{w,1}[0,1]$ are studied and it is shown that there exists a large class of closed, bounded and convex subsets of $L_{w,1}[0,1]$ with fixed point property for affine nonexpansive mappings.

Key Words: nonexpansive mapping, non-reflexive Banach space, fixed point property, closed bounded convex subset, renorming, Lebesgue function spaces, Lorentz function spaces

2019, 24 pages

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince her türlü maddi ve manevi destekleri için annem Ayten Topcu, babam Nusret Topcu, kardeşlerime ve değerli hocam Dr. Öğretim Üyesi Veysel Nezir'e teşekkür ederim.

Ebru TOPCU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ℓ^1	:	Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
$co(E)$	:	E ‘nin konveks kabuğu
$\overline{co}(E)$	:	E ‘nin kapalı konveks kabuğu
$L_1[0,1]$	:	$[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilen fonksiyonların Banach uzayı
$L_{w,1}[0,1]$	:	$L_1[0,1]$ analog Lorentz fonksiyon uzayı
$\overline{E}^{w*}$	:	E kümesinin zayıf* kapanışı
e_n	:	n. terimi 1, diğerleri 0 olan ℓ^1 ve c_0’ın kanonik bazı

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Eğer bir Banach uzayının herhangi kapalı, sınırlı, konveks altkümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen fonksiyonun bir sabit noktası oluyor ise o Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar denir. Burada genişlemeyen fonksiyon demek noktalar arası uzaklıklar, görüntüler arası uzaklığı aşamaz demektir. Ayrıca bir Banach uzayının zayıf kompakt ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen fonksiyonunun bir sabit noktası oluyor ise o Banach uzayına genişlemeyen fonksiyonlar için zayıf sabit nokta teorisini sağlar denir.

Çoğu yansımayan klasik Banach uzayının; mesela mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı ℓ^1'in, sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı c_0'ın veya $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayı $L_1[0,1]$'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlamadığı bilinmektedir. Aslına bakılırsa bir uzay genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlıyorsa zayıf sabit nokta teorisini de sağlar fakat bunun tersinin doğru olmadığı ilk olarak Alspach [1] tarafından $L_1[0,1]$'in içinde bir zayıf kompakt konveks küme ve bu küme üzerinde tanımlı bir sabit noktasız genişlemeyen fonksiyonun varlığı gösterilerek ispatlanmıştır.

Yukarıda bahsedildiği gibi zayıf sabit nokta teorisine sahip olmayan Banach uzayları sabit nokta teorisine de sahip olamaz. Dolayısıyla Alspach'ın sonucu gereği $L_1[0,1]$'in genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadığı görülmüştür. Fakat zayıf sabit nokta teorisine sahip olduğu Maurey [15] tarafından gösterilen c_0'ın aynı şekilde ℓ^1'in sabit nokta teorisine sahip olmaması gerçeği Alspach'ın sonucu gereği bu uzayların $L_1[0,1]$ ile sabit nokta teorisi odaklı ortak özellik göstermediği öğrenilmiştir.

Ayrıca Dowling, Lennard ve Turet [5,6] çalışmaları ile sırasıyla c_0'ın sonsuz boyutlu herhangi kapalı alt uzayının veya zayıf kompakt olmayan herhangi alt kümesinin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olmadıkları gösterilmiştir.

Bunun tersine Goebel ve Kuczumow [9] tarafından ℓ^1 içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olan zayıf* kompakt olmayan ve kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Yakın zamanda ise tez yazarının danışmanı Nezir'in doktora danışmanı olan Lennard'ın danışmanlığı altında hazırlanmış olan Everest [7] doktora tezinde Goebel ve Kuczumow [9] çalışması genelleştirilerek genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip ℓ^1 içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olan zayıf* kompakt olmayan ve kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok daha geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir.

Goebel ve Kuczumow [9] çalışmasının önderliği ve verdiği ilham ile Lin [11] tarafından ℓ^1 bir eşdeğer norm ile yeniden normlanarak genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Maria ve Hernandes Lineares [13] tarafından ise $[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0,1]$'in afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisinin sağlanacak şekilde yeniden normlanabileceği gösterilmiştir. Fakat Goebel ve Kuczumow analojisi $L_1[0,1]$ veya $L_1[0,1]$-analog uzaylarda literatürde tez yazarının ortak olduğu yayınlanan [17,18] çalışmaları haricinde görülmemektedir. O halde ℓ^1 uzayı için mevcut olan Goebel ve Kuczumow [9] ile Lin [11] çalışmaları gibi tüm uzay üzerinde sabit nokta teorisinin sorgulanmasından önce kümesel bazda tez çalışmasında yer aldığı gibi bu uzaylarda incelemelerin yapılması araştırma konusudur.

Tez çalışmasının ikinci inceleme konusu olan Lorentz uzaylarının $L_1[0,1]$ analoğu 1950 yılımda Lorentz [14] çalışması ile tanıtılmıştır. $L_1[0,1]$ gerçekten de $L_1[0,1]$ ile birçok ortak özelliği paylaşmaktadır. Hazırlık aşamasında olan Nezir ve Sivek'in son çalışmalarında [NS] bu Banach uzay incelenmiştir. Çalışmalarında Alspach'ın $L_1[0,1]$'in zayıf sabit nokta teorisini sağlamadığını gösterdiği gibi $L_{w,1}[0,1]$'in de zayıf sabit nokta teorisini sağlamadığını gösterilmişdir. Bu uzayların $L_1[0,1]$ ile paylaştığı ortak özellikleri görmenin yanı sıra farklılıklarını görmek araştırmacıların ilgi odağı olacaktır.

Bu tez çalışmasında öncelikle gösterilmektedir ki $L_1[0,1]$ içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır. Tez çalışmasının sonraki bölümünde ise $L_{w,1}[0,1]$ üzerinde incelemeler yapılmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_{w,1}[0,1]$ içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıf vardır.

Takip eden bölümde tez çalışması için gerekli ön bilgiler sunulmaktadır.

1.2 Kuramsal temeller

Az önce belirtildiği gibi öncelikle tez çalışmasında yararlanılan ön bilgiler tanım, teorem ve lemmalar bu bölümde verilecektir.

Tanım 1.1 E kümesi bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. Bir $U: E \to E$ fonksiyonu ele alınsın.

1. Her $x, y \in E$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $U((1-\lambda)\, x + \lambda\, y) = (1-\lambda)\, U(x) + \lambda\, U(y)$ ise U'ya afin fonksiyon denir [8].
2. Her $x, y \in E$ için $\| Ux - Uy \| \leq \| x - y \|$ ise U'ya genişlemeyen fonksiyon denir.

Ayrıca, eğer her $U: E \to E$ genişlemeyen fonksiyonunun bir sabit nokası var ise yani en az bir w ∈ E var öyleki $U(w) = w$ ise bu durumda E'ye genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir denir [8].

Tez çalışması süresince bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının $E \subseteq X$ altkümesi için E 'nin konveks kabuğu $co(E)$ ve E 'nin kapalı konveks kabuğunu $\overline{co}(E)$ ile gösterilecektir.

Giriş bölümünde anlatıldığı gibi 1979'da, Goebel ve Kuczumow tarafından ℓ^1 içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olan zayıf* kompakt olmayan ve kapalı, sınırlı, konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Çalışmalarında ve Goebel ile Kuczumow'un çalışmasının genelleştirilmişi olan Everest [7] doktora tezinde Goebel ve Kuczumow tarafından sunulan anahtar bir lemma kullanılmıştır. Bu lemma aşağıdaki şekildedir.

Lemma 1.2 Eğer $\{x_n\}$ dizisi ℓ^1 uzayında bir x noktasına zayıf topolojide yakınsıyor ise o zaman her $y \in \ell^1$ ve $r(y) = \limsup_{n} \|x_n - y\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $r(y) = r(x) + \|y - x\|_1$ dir [9].

Bu lemmanın $L_1[0,1]$ Banach uzayı için analoğu Maria Japon Pineda'nın danışmanlığı altında tamamlanmış olan Hernández-Linares [12] doktora tezinde not edilmiştir. Hernández-Linares [12] doktora tezinde Goebel ve Kuczumow'un lemmasının Brezis and Lieb [3] çalışması ile elde edilebileceği anlatılmıştır. Tez çalışmasının ilk bölümünde yer alan $L_1[0,1]$'in içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan geniş sınıfın varlığının gösterilmesinde az önce bilgisi verilen anahtar lemma aşağıda yer almaktadır.

<u>Lemma 1.3</u> $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_1[0,1]$'de reel değerli ölçülebilir ve düzgün sınırlı fonksiyon dizisi olsun. Kabul edilsin ki f_n dizisi bir $f \in L_1[0,1]$ noktasına hemen hemen her yerde noktasal olarak yakınsasın. Bu durumda her $g \in L_1[0,1]$ noktasında $S(g) = \underset{n}{limsup}\|f_n - g\|_1$ ile tanımlı fonksiyon için $S(g) = S(f) + \|f - g\|_1$ dir.

Not edilmelidir ki yukarıda belirtilen lemma hazırlık aşamasında olan Nezir ve Sivek [19] çalışmasında yer almaktadır.

Tez çalışmasının bir diğer bölümünde yer alan araştımalar Lorentz uzayları üzerinedir ve bu Banach uzaylarının tanımı şu şekildedir.

$L_1[0,1]$ analog Lorentz uzayı aşağıdaki şekilde Lorentz [14] çalışmasında tanımlanmıştır:

<u>Tanım 1.4</u> $w \in (0,1)$ skaleri verilsin.

$$L_{w,1}[0,1] := \left\{ f:[0,1] \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir } \middle| \, \| x \|_{w,1} := \int_0^1 \frac{w f^*(t)}{t^{1-w}} dt < \infty \right\}$$

öyle ki $f^*(t)$ fonksiyonu $|f(t)|$'nin azalan düzenlemesi olsun; yani, $f^*(t)$ azalan sıralanmış ve $|f(t)|$ ile eş ölçülüdür [14].

Tez çalışmasının bu Banach uzayı üzerindeki sonuçları için anahtar görevini alacak Goebel ve Kuczumow lemmasından esinlenerek kolayca elde edilebilecek lemma aşağıdaki şekildedir öyle ki bu lemma tez danışmanının danışmanlığı altında hazırlanmış olan Delibaş [4] yüksek lisans tezinde de verilmiştir.

Lemma 1.5 $(X, \|.\|)$ bir Banach uzay olsun.

1. Eğer X'in Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası sınırlı bir dizi $(x_n)_n$'in zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall y \in X$ için $s(y) = limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y \right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall y \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

2. Eğer X'in zayıf Banach-Saks özelliği var ise ve $x \in X$ noktası bir $(x_n)_n$ dizisinin zayıf limiti ise, bu durumda en az bir $(x_{n_k})_k$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizinin Cesaro norm limiti x olup eğer s fonksiyonu bu alt dizi vasıtasıyla şu şekilde tanımlanır ise $\forall y \in X$ için $s(y) = \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{n_k} - y \right\|$, bu durumda $s(x) = 0$ ve $\forall y \in X$ için $s(y) = \|y - x\|$ dir.

Bu sebeple, Lorentz uzaylarının Banach-Saks özellikleri dolayısıyla (bkz [20, 21, 2]), yukarıdaki koşullar geçerlidir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez çalışmasında kullanılan küme sınıfları Lennard ve Nezir [10] çalışmasında yer alan kümelerden yararlanılarak tanımlanmıştır. Lennard ve Nezir [10] çalışmasında gösterilmiştir ki Banach uzaylarında her asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisinin kapalı konvek kabuğu genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz, dolayısıyla eğer bir Banach uzayında bir asimtotik izometrik c_0-toplam baz dizisi bulunabilirse o Banach uzayı genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Lennard ve Nezir [10] çalışmasında yer alan c_0'da bulunan bu dizilerden birisi ve ilgili teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.1 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(0,\infty)$ aralığında sınırlı bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := b_n\, e_n$ ile c_0'da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın ve bu dizi kullanılarak c_0'da $\sum_{k=1}^{n} f_k$ kısmi toplam dizisinin kapalı konveks kabuğu olan aşağıdaki E kümesi tanımlansın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n :\ 1 = t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \cdots \geq t_n \downarrow_n 0 \right\}.$$

Bu durumda bu küme afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Bu kümelerin daha genel halleri ise Lenard danışmanlığında yazılmış olan Nezir [16] doktora tezi çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri $(0,\infty)$ olmak üzere λ skalerine yakınsak bir dizi olsun, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise her $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ için $\Gamma \leq \gamma_{\mathrm{N}}$ ve $\sigma := \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}|$ yakınsak olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n := \gamma_n(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + \dots + b_ne_n)$ şeklinde $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın öyleki bu dizi $\exists K \in (0,\infty)$ ve $\forall \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ için $K \sup_{n\geq 1} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \eta_j \right\|$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\exists L > 0$

vardır öyle ki $\left(\frac{\eta_n}{L}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir ai c_0-toplam baz dizisidir ve dolayısıyla bu dizinin kapalı konveks kabuğu afin $\|\cdot\|_\infty$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip olamaz.

Tez çalışmasına ilham olan Goebel ve Kuczumow [9] çalışmasında yer alan bir teorem ve ispatı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.2 $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. c_0 uzayında bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bu sabit sayı ve kanonik baz yardımı ile şu şekilde kurulsun. $f_1 := b\, e_1$ ve her $n \geq 2$ tam sayısı için $f_n := e_n$ olsun. Daha sonrasında ise bu dizi yardımı ile aşağıdaki şekilde bu b sayısına bağlı olarak ℓ^1'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi $E = E_b$ tanımlansın;

$$E := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n\, f_n:\ \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } t_n \geq 0 \ \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan E kümesi ℓ^1'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

İspat. $T: E \to E$ bir $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \underset{n}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlıdır ve dolayısıyla bir zayıf* limiti vardır.

Genelliği bozmayarak gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki, en az bir $z \in \ell^1$ öyle ki $x^{(n)}$ dizisi z ye zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda Lemma 1.2 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir $s: \ell^1 \to [0,\infty)$ fonksiyonu vardır: $\forall y \in \ell^1$ için

$$s(y) = \limsup_n \left\|x^{(n)} - y\right\|_1$$

ve bu fonksiyon $\forall y \in \ell^1$ için $s(y) = s(z) + \|y - z\|_1$ eşitliğini sağlar.

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n \, : \, t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $z \in E$.

Bu durumda $s(Tz) = s(z) + \|\mathrm{Tz} - \mathrm{z}\|_1$ olup

$$\begin{aligned} s(Tz) &= \limsup_n \left\| Tz - x^{(n)} \right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\| Tz - Tx^{(n)} \right\|_1 + \limsup_n \left\| Tx^{(n)} - x^{(n)} \right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\| z - x^{(n)} \right\|_1 \\ &= s(z) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\|\mathrm{Tz} - \mathrm{z}\|_1 \leq 0$ olup $Tz = \mathrm{z}$ dir ve bu *z* nin *E* kümesinde *T* fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $z \in W \backslash E$.

Bu durumda ise *W*'nun tanımı gereğince z noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\gamma_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$\mathrm{h} := (\gamma_1 + \delta) f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \|\mathrm{h} - z\|_1 &= \|\delta f_1\|_1 \\ &= \|(\delta b, 0,0,0, \cdots)\|_1 \\ &= \mathrm{b}\delta \end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{y}-z\|_1 &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k\right\|_1 \\
&= \|(t_1-\gamma_1)be_1 + (t_2-\gamma_2)e_2 + (t_3-\gamma_3)e_3 + (t_4-\gamma_4)e_4 + \cdots\|_1 \\
&= b|t_1-\gamma_1| + |t_2-\gamma_2| + |t_3-\gamma_3| + |t_4-\gamma_4| + |t_5-\gamma_5| + \cdots \\
&= b\sum_{k=1}^{\infty} |t_k-\gamma_k| + (1-b)\sum_{k=2}^{\infty} |t_k-\gamma_k| \\
&\geq b\left|\sum_{k=1}^{\infty} (t_k-\gamma_k)\right| \\
&= b\delta
\end{aligned}
$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $z \in W\backslash E$ için $\|y-z\|_1 \geq \|\mathrm{h}-z\|_1$ dir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{y\in E} \|\mathrm{y}-z\|_1$ olarak tanımlandığında bu minimum değer $\Gamma = b\delta$ dir.

Ayrıca $h \in E$ için

$$
\begin{aligned}
s(Th) &= \limsup_n \left\|Th - x^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq \limsup_n \left\|Th - Tx^{(n)}\right\|_1 + \limsup_n \left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \\
&\leq \limsup_n \left\|h - x^{(n)}\right\|_1 \\
&= s(h) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

O halde, $\|z-Th\|_1 \leq \|z-h\|_1$ olup ve h noktası $\|y-z\|_1 \;:\; y \in E$ değerlerini minimumlaştıran yegane nokta olması sebebiyle bahsi geçen sabit nokta bu nokta olup $Th = h$ dir.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tez çalışmasının bu bölümü iki başlık altında sunulacaktır. İlk başlıkta $[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilen $L_1[0,1]$ içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş bir sınıfın var olduğu gösterilmektedir. Tez çalışmasının sonraki bölümünde ise $L_1[0,1]$ analog Lorentz uzayı $L_{w,1}[0,1]$ üzerinde incelemeler yapılmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_{w,1}[0,1]$ içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan çok geniş sınıfın var olduğu gösterilmektedir. Not edilmelidir ki araştırma bulguları [17] ve [18] makaleleri ile yayınlanmıştır.

3.1 *$L_1[0,1]$* içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde [17] çalışmasında yer alan $L_1[0,1]$'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır. Bu sonuç için aşağıda yer alan örnek küme sınıfları ele alınmış ve tek bir teorem ile verilen tüm küme sınıflarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağladığı gösterilmiştir.

Örnek 3.1 $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := (n+1)t^n$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.2 $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{e^n - 1}$ tanımı ile verilen $(\mathrm{e_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} t_n f_n :\ \text{her } t_n \geq 0, \qquad t_1 = c \ \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.3 $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{e-1} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(\mathrm{e_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda $L_1[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} t_n f_n :\ \text{her } t_n \geq 0, \qquad t_1 = c \ \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.4 $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{e_n} := \frac{4n}{\pi(1+\mathrm{n}^2\mathrm{t}^2)} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} t_n f_n :\ \text{her } t_n \geq 0, \qquad t_1 = c \ \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.5 $L_1[0,1]$'de normalize edilmiş keyfi bir $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_1[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_1[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E:=\left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n:\ \text{her}\ t_n \geq 0, \qquad t_1 = c\ \text{ ve }\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\right\}.$$

Teorem 3.6 $b, c \in (0,1)$ keyfi olmak üzere yukarıda verilen örneklerde yer alan E kümeleri $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. $T: E \to E$ bir $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in N} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \underset{n}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki en az bir $x \in L_1[0,1]$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi x'e zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda, Lemma 1.3 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlı bir $s: L_1[0,1] \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir:

$$\forall y \in L_1[0,1] \text{ için } s(y) = \limsup_n \left\|x^{(n)} - y\right\|_1$$

ve bu durumda

$$\forall y \in L_1[0,1] \text{ için } s(y) = s(y) + \|y - x\|_1 \quad \text{dır.}$$

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W:=\overline{E}^{w^*} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n:\ \text{her}\ t_n \geq 0, \qquad t_1 = c\ \text{ ve }\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1\right\}$$

Durum 1: $x \in E$.

Bu durumda $s(Tx) = s(x) + \|Tx - x\|_1$ olup

$$\begin{aligned} s(Tx) &= \limsup_n \left\|Tx - x^{(n)}\right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\|Tx - Tx^{(n)}\right\|_1 + \limsup_n \left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\|x - x^{(n)}\right\|_1 \\ &= s(x) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\|Tx - x\|_1 \leq 0$ olup $Tx = x$ dir ve bu x'in E kümesinde T fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $x \in W \backslash E$.

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\gamma_1 = c$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$\mathrm{h} := (\gamma_1 + \delta) f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\|\mathrm{h} - x\|_1 = \|b\delta e_1\|_1 = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}\ için\ t_n \geq 0$, $t_1 = c$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\| y - x \|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_1 = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| dm$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \int_0^1 f_k dm \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| = \delta$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $x \in W \backslash E$ için $\|y - x\|_1 \geq \|\mathrm{h} - x\|_1$ (1)
dir.

Bu durumda $\Gamma := \min_{y \in E} \|\mathrm{y} - x\|_1$ olarak tanımlandığında bu minimum değer $\Gamma = b\delta$ dir.

Şimdi küme içinde

$$\Lambda := \{y \ : \ \| y - x \|_{,1} \leq \Gamma\}$$

tanınlansın. Gerçekten de not edilebilir ki $\Lambda \subseteq E$ boştan farklı, kompakt ve konveks bir küme olup her $h \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} s(Th) &= \limsup_n \left\| Th - x^{(n)} \right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\| Th - T\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 + \limsup_n \left\| x^{(n)} - T\left(x^{(n)}\right) \right\|_1 \\ &\leq \limsup_n \left\| h - x^{(n)} \right\|_1 \\ &= s(h) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $s(Th) = s(x) + \| x - Th \|_1$ ve $s(h) = s(x) + \| x - h \|_1$ dir.

Dolayısıyla, (1) eşitsizliği kullanılarak,

$$\| x - Th \|_1 \leq \| x - h \|_1 \Rightarrow \| x - Th \|_1 = \| x - h \|_1$$
$$\Rightarrow Th \in \Lambda.$$

Bu sebeple, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ve T sürekli olduğundan, Schauder'in sabit nokta teoremi [22] gereğince T bir sabit noktaya sahiptir ve bu sabit nokta $\|y - z\|_1 \ : \ y \in E$ değerlerini minimumlaştıran $Th = h$ noktasıdır.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

3.2 Lorentz uzayı $L_{w,1}[0,1]$ içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini teorisine sahip çok geniş sınıf

Bu bölümde [18] çalışmasında yer alan $L_1[0,1]$ analog Lorentz uzayı $L_{w,1}[0,1]$'de afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş sınıfların varlığı anlatılmaktadır. Bu sonuç için aşağıda yer alan örnek küme sınıfları ele alınmış ve tek bir teorem ile verilen tüm küme sınıflarının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağladığı gösterilmiştir.

<u>Örnek 3.7</u> $L_{w,1}[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{(n+1)t^{n+1-w}}{w}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_{w,1}[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_{w,1}[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.8</u> $L_{w,1}[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{nt^{1-w}e^{nt}}{w(e^n-1)}$ tanımı ile verilen $(\mathrm{e_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_{w,1}[0,1]$ 'de $f_1 := be_1$ ve $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_{w,1}[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

<u>Örnek 3.9</u> $L_{w,1}[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{nt^{1-w}e^{nt}}{w(e^n-1)} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_{w,1}[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_{w,1}[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.10 $L_{w,1}[0,1]$'de normalize edilmiş $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{4nt^{1-w}}{\pi w(1+n^2t^2)} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ tanımı ile verilen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (öyle ki burada χ karakteristik fonksiyondur) ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_{w,1}[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_{w,1}[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.11 $L_{w,1}[0,1]$'de normalize edilmiş keyfi bir $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve keyfi $b, c \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda, $L_{w,1}[0,1]$'de $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise $L_{w,1}[0,1]$'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi verilebilir.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{ her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.12 $b, c \in (0,1)$ keyfi olmak üzere yukarıda verilen örneklerde yer alan E kümeleri $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlar.

İspat. $T: E \to E$ bir $\|.\|_1$-genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda yaklaşık sabit nokta dizisi adını alan en az bir $\left(x^{(n)}\right)_{n\in N} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\left\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\right\|_{w,1} \underset{n}{\to} 0$ olup $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek denilebilir ki en az bir $x \in L_{w,1}[0,1]$ vardır öyle ki $x^{(n)}$ dizisi x'e zayıf* topolojide yakınsar. Bu durumda, Lemma 1.5 gereğince, aşağıdaki şekilde tanımlı bir $s: L_{w,1}[0,1] \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir:

$$\forall y \in L_{w,1}[0,1] \text{ için } s(y) = s(y) = \limsup_{m} \left\| \tfrac{1}{m} \textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - y \right\|_{w,1}$$

ve bu durumda

$$\forall y \in L_1[0,1] \text{ için } s(y) = s(y) = \| y - x \|_{w,1} \quad \text{dır.}$$

Daha sonra E kümesinin zayıf* kapanışı aşağıdaki şekilde tanımlanır ve iki farklı durum incelenir.

$$W := \overline{E}^{w^*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{her } t_n \geq 0, \quad t_1 = c \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

Durum 1: $x \in E$.

Bu durumda $s(Tx) = \|Tx - x\|_{w,1}$ olup

$$s(Tx) = \limsup_m \left\| Tx - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{w,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| Tx - T\left(\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{w,1} + \limsup_m \left\| \tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{w,1}$$

dir.

Buradan T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$s(Tx) \leq \limsup_m \left\| Tx - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\right) \right\|_{w,1} + \limsup_m \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{w,1}$$

$$\leq \limsup_m \left\| x - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{w,1}$$

$$= s(x)$$

dir.

Dolayısıyla, $\|x - Tx\|_{w,1} \leq 0$ olup $Tx =$ x dir ve bu x'in E kümesinde T fonksiyonun bir sabit noktası olduğunu ifade eder.

Durum 2: $x \in W\backslash E$.

Bu durumda ise W'nun tanımı gereğince x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\gamma_1 = c$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$\mathrm{h} := (\gamma_1 + \delta) f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\|\mathrm{h} - x\|_{\mathrm{w},1} = \|b\delta e_1\|_{\mathrm{w},1} = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılcak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $t_n \geq 0$, $t_1 = c$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\| y - x \|_{\mathrm{w},1} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_{\mathrm{w},1} = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| dm$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \int_0^1 f_k dm \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| = \delta.$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $x \in W\backslash E$ için $\|y - x\|_{\mathrm{w},1} \geq \|\mathrm{h} - x\|_{\mathrm{w},1}$ (1)
dir.

Bu durumda $\Gamma := \min\limits_{y \in E} \|\mathrm{y} - x\|_{\mathrm{w},1}$ olarak tanımlandığında bu minimum değer $\Gamma = b\delta$ dir.

Şimdi küme içinde

$$\Lambda := \{ y \ : \ \| y - x \|_{w,1} \leq \Gamma \}$$

tanınlansın. Gerçekten de not edilebilir ki $\Lambda \subseteq E$ boştan farklı, kompakt ve konveks bir küme olup her $h \in \Lambda$ için

$$s(Th) = \limsup_{m} \left\| Th - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{w,1}$$

$$\leq \limsup_{m} \left\| Th - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{w,1} + \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{w,1}$$

dir.

Buradan T afin ve genişlemeyen olduğundan,

$$\begin{aligned} s(Th) &\leq \limsup_{m} \left\| Th - T\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right) \right\|_{w,1} + \limsup_{m} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Tx^{(k)} \right\|_{w,1} \\ &\leq \limsup_{m} \left\| h - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x^{(k)} \right\|_{w,1} \\ &= s(h) \end{aligned}$$

dir.

Ayrıca, $s(Th) = \| x - Th \|_{w,1}$ ve $s(h) = \| x - h \|_{w,1}$ dir.

Dolayısıyla, (1) eşitsizliği kullanılarak,

$$\| x - Th \|_{w,1} \leq \| x - h \|_{w,1} \Rightarrow \| x - Th \|_{w,1} = \| x - h \|_{w,1}$$

$$\Rightarrow Th \in \Lambda.$$

Bu sebeple, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ve T sürekli olduğundan, Schauder'in sabit nokta teoremi [22] gereğince T bir sabit noktaya sahiptir ve bu sabit nokta $\|y - z\|_1 \ : \ y \in E$ değerlerini minimumlaştıran $Th = h$ noktasıdır.

Tüm bu sebepler dolayısıyla, arzu edildiği gibi E kümesi afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisine sahiptir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında $L_1[0,1]$ içinde genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın olduğu gösterilmiştir. Tez çalışmasının sonraki bölümünde ise $L_1[0,1]$ analog Lorentz fonksiyon uzayı $L_{w,1}[0,1]$ üzerinde incelemeler yapılmaktadır ve gösterilmektedir ki $L_{w,1}[0,1]$ içinde afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta teorisini sağlayan kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın olduğu gösterilmiştir. Daha geniş sınıfların varlığını sorgulamak ve tez çalışmasında elde edilen sonuçları genelleştirmek araştırma konusudur.

KAYNAKLAR

[1] Alspach, D. E. (1981). A fixed point free nonexpansive map. Proceedings of the American Mathematical Society, 82(3), 423-424.

[2] Astashkin, S. V. and Sukochev, F. A. (2007). Banach–Saks property in Marcinkiewicz spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336(2), 1231-1258.

[3] Brézis, H. and Lieb, E. (1983). A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proceedings of the American Mathematical Society 88(3), 486-490.

[4] Delibaş, M. (2019). Dejenere edilmiş Lorentz-Marcinkiewicz uzaylarında genişlemeyen fonksiyonların sabit nokta teorisi (Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı).

[5] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (1998). Asymptotically isometric copies of c_0 in Banach Spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 219(2), 377-391.

[6] Dowling, P. N., Lennard, C. J. and Turett, B. (2004). Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c_0. Proceedings of the American Mathematical Society, 1659-1666.

[7] Everest, T. (2013). Fixed Points of Nonexpansive Maps on Closed, Bounded, Convex Sets in l^1 (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[8] Goebel, K., and Kirk, W. A. (1990). Topics in metric fixed point theory (Vol. 28). Cambridge University Press.

[9] Goebel, K., and Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In Colloquium Mathematicum (Vol. 2, No. 40, pp. 259-264).

[10] Lennard, C., and Nezir, V. (2011). The closed, convex hull of every ai c_0-summing basic sequence fails the fpp for affine nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 381, 678–688.

[11] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 68(8), 2303-2308.

[12] Hernández-Linares, C. A. (2011). Propiedad de punto fijo, normas equivalentes y espacios de funciones no-conmutativos. Ph.D. thesis, Universidad de Sevilla.

[13] Hernández-Linares, C. A. and Japón, M. A. (2012) . Renormings and fixed point property in non commutative L_1 spaces II: Affine mappings. Nonlinear Analysis 75(13), 5357–5361.

[14] Lorentz, G. G. (1950). Some new functional spaces. Annals of Mathematics, 37-55.

[15] Maurey, B. (1981). Points fixes contractions de certains faiblement compacts de L^1, Seminaire d'Analyse Fonctionelle, 1980-1981, Centre de Mathématiques, École Polytech., Palaiseau, Exp. No. VIII, 19 pp.

[16] Nezir, V. (2012). Fixed Point Properties for c_0-like Spaces (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).

[17] Nezir, V., Mustafa, N. and Topcu, E. (2019). A large class in $L_1[0,1]$ with fixed point property for nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

[18] Nezir, V., Mustafa, N. and Topcu, E. (2019). A large class in $L_{w,1}[0,1]$ with fixed point property for affine nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

.

[19] Nezir, V. and Sivek, J. (2019). Geometry and the presence of contractive fixed point free maps, in preparation.

[20] Rakov, S. A. (1979). Banach-Saks property of a Banach space. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 26(6), 909-916.

[21] Rakov, S. A. (1982). Banach-Saks exponent of certain Banach spaces of sequences. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 32(5), 791-797.

[22] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Studia. Math., 2, 171-180.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ebru TOPCU
Doğum Yeri ve Tarihi : Kars – 10.08.1989
Yabancı Dili : Orta derece İngilizce
İletişim (e-posta) : ebru.topcu.16@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Cumhuriyet Lisesi
Lisans : Dumlupınar Üniversitesi
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2018

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Özel Kars Sınav Özel Öğretim Kursu – 1 Yıl

Yayınları:

Nezir, V., Mustafa, N. and Topcu, E. (2019). A large class in $L_1[0,1]$ with fixed point property for nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.

Nezir, V., Mustafa, N. and Topcu, E. (2019). A large class in $L_{w,1}[0,1]$ with fixed point property for affine nonexpansive mappings. Mas European International Congress May 2-5, 2019 Erzurum, Turkey.